

Quaestio

BIBLIOTECA
TELEKI-BOLYAI

quam
Academia Regia Scientiarum
Prussica
Classis Mathematicae

certamini Litterario in A. MDCCCXXXVI

proponit
Promulgata in Coetu solemni Anniver
sario Leibnitii memoriae dicato

D. V. Jul. A. MDCCCXXXVII.

Inter tres Cometas, quorum revolutio circum
Solem repetitis observationibus determinata
est, is praecipue, quem plerique et viro clarissi
mo Biela denominamus, singulari cura per
sequendus est. Qui quum in singulis perio
dis, prae omnibus aliis corporibus caelestibus,
orbitae Iovis et Terrae valde vicinus feratur,
hi planetae, et necesse est ut magnam in ejus
cursum vim exerceant, et fieri potest ut ab
ipso perturbationes patiantur haud negligendae.
Prius annis 1732. 1794. evenisse videtur, cum
magna differentia elementorum orbitae Cometae

ex

Bf 420/1

ei observationibus anni 1742. deductorum, atque eorum, quae anno 1805. reperta sunt, hae rationes sine difficultate explicari possit.

Postquam anno 1826. cometa ad solem reversus observationibus nostris se praebuit, solus Clar. Baro de Damoiseau astronomus Parisiensis, perturbationes Cometae per spatium annorum 1805. usque 1826. calculo subiecit, tanta approximatione, ut inde tempus, quo Cometa rursum terrae conspicuus fieri possit, in mensem Novembrem anni 1802 determinatum sit. Desideratur tamen examen completum omnium quae exstant observationum.

Academia Berolinensis, ut ad disquisitionem hanc inter astronomica gravissimam, perficiendam excitaret.

"Determinacionem orbitae verae cometae huius, et omnibus quae exstant observationibus, ne iis quidem quas hoc anno institutum iri speramus, exclusis, certamini publico proponenda decrevit.

Desiderat Academia primum accuratam disquisitionem de fide et diligentia observationum hucusque institutarum, ita ut inde, quam illae exactae sint, constitui queat, atque errores quantum fieri potest minuantur. Praeterea singula partes calculi perturbationum ita proponenda eruant, ut et analytica evolutio terminorum, quam

BF 420/15

quam auctor secutus sit, et quos terminos calculi numerali persequendos iudicaverit, inde eluceat, simulque quibus auxiliis usus sit ad errores calculi vel evitandos vel aperiendos. Post haec orbita Cometae ita determinanda erit, ut ea omnibus observationibus, perturbationum respectu habito, quam maxime satisfaciat. Quodsi differentia inter theoriam et locos observatos tanta prodierit, ut eius causa erroribus observationum tribuenda esse non videatur, ea hypotheses in subsidium vocentur, quibus in aliis cometis usi sunt Astronomi ad discrepantiam similem tollendam.

Terminus, quo tractatus huius argumenti Secretario Academiae transmittendi sunt, ob magnum, qui requiritur, laborem in diem 1^{am} Mensis Martii anni 1836. dilatus est. Fronti commentationis symbolum inscribendum est, addita schedula obsignata eodem symbolo instructa, quae intus contineat nomen auctoris.

Praemium quingenta ducatorum aureorum adiudicabitur eodem anno in conventu publico Academiae, in memoriam Leibnitzii habendo.

BF 420/2

BF 420/2^v

BF 420/3

Theoria

Sectionum circuli, quas per constructiones geometricas perficere licet.

S. A.

Solutio equationis $x^n - 1 = 0$, supponendo n esse
numerus primum a 2 diversum.

1. Si radix Ω qua unica est realis, omittatur,
prodit aequ. $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$, quae reliquas
 $n-1$ radices complectitur, quarum complexum
per Ω designabimus. Si itaque r sit radix
quaecunque ax Ω , erit $r^n = 1 = r^{en}$ (si e sit inte-
ger quodlibet); adeoque si λ, μ sint in
legri secundum n congrui: erit $r^\lambda = r^\mu$, sin
minus: r^λ et r^μ inaequales erunt; nam sit
 $\lambda - \mu = q + \frac{p}{n}$, seu $\lambda - \mu = nq + p$, tum erit per prop.
 $r^\lambda = r^{\mu + p} = r^\mu r^p$, unde patet r^λ et r^μ aequales esse non
posse. Cum itaque quantitates $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$
omnes sint diversa, aequationeque $x^n - 1 = 0$ omnes sa-
tisfaciant, exhibebunt ea omnes radices aequa-
tionis propositae, eritque $\Omega = 1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$.
2. Si g sit radix primitiva pro modulo n , nu-
meri $1, g, g^2, \dots, g^{n-2}$ omnes incongrui erunt,
adeoque et radices (si brevitatis ergo in po-
sterum pro r^λ scribatur $[\lambda]$): $[1], [g], [g^2], \dots, [g^{n-2}]$
sive $[1], [g], [g^2], \dots, [g^{n-2}]$, dummodo ne sit
 $\lambda \equiv 0 \pmod{n}$; aut $[1], [g], [g^2], \dots, [g^{n-2}]$ cum Ω
coincident.

*denotante g aliam radicem primitivam.

Sit jam $n-1=ef$; $g=h$; $G=H$: tum erunt f numeri $1, h, hh, \dots, h^{f-1}$ his $1, H, H^2, \dots, H^{f-1}$ secundum n congrui, etsi alio ordine. Sit enim $G \equiv g^w \pmod{n}$, et $H^e (= G^e \equiv g^{we} \equiv h^{we})$ terminus quicumque in serie posteriori, residuumque minimum ipsius $h^{we} \pmod{f} = v$; tum $h^{we} \equiv v \pmod{n}$ adeoque $g^{we} \equiv h^v$, et denique $H^e = h^v$ Q. E. D. Hinc patet f radices $[1], [h], [h^2], \dots, [h^{f-1}]$ cum his $[1], [H], [H^2], \dots, [H^{f-1}]$, sive generalius $[A], [Ah], \dots, [Ah^{f-1}]$ cum $[A], [AH], \dots, [AH^{f-1}]$ identicas esse. Aggregatum talium f radicum, quod semper idem prodit, quacumque accipiatur radix primitiva pro g , per (f, A) designabimus, earundemque complexum vocabimus periodum (f, A) . In exhibenda tali periodo pro numeris $A, Ah, \dots, Ah^{f-1}$ residua ipsorum minima $\pmod{n}$ substitui possunt, quod ratione radices ad expressionem simplicissimam reducuntur.

3. Dua periodi (f, A) et (f, Ah^e) ex aequo multis radicibus constantes, sive similes, unam radicem $[Ah^e]$ communem habentes identicae sunt. Est enim

$$(f, A) = [A] + [Ah] + [Ah^2] + \dots + [Ah^{f-1}] \text{ et } (f, Ah^e) = [Ah^e] + [Ah^{e+1}] + [Ah^{e+2}] + \dots + [Ah^{e+f-1}], \text{ ubi in secunda serie terminum } [Ah^{e+f-1}] \text{ excipit } [Ah^e] = [A], \text{ tum } [Ah^{e+f-1}] = [Ah] \text{ etc. et ultimus } [Ah^{e+f-1}]$$

BF420/3v

erit

$= [Ah^{f-1}]$; unde dictum patet.

4. Ω est compositus ex e periodis $(f, 1), (f, g), (f, g^2), \dots, (f, g^{e-1})$. Nam

$$(f, 1) = [1] + [h] + [h^2] + \dots + [h^{f-1}]$$

$$(f, g) = [g] + [gh] + [gh^2] + \dots + [gh^{f-1}]$$

$$(f, g^2) = [g^2] + [g^2h] + [g^2h^2] + \dots + [g^2h^{f-1}]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(f, g^{e-1}) = [g^{e-1}] + [g^{e-1}h] + [g^{e-1}h^2] + \dots + [g^{e-1}h^{f-1}]$$

ubi omnes columnae verticales manifesto complexum Ω efficiunt.

Si A per n non dividitur

Ceterum quavis alia similis periodus (f, A) cum harum aliqua necessario convenit. Denique clarum est, (f, A) sive $(f, Ah^e) = f$ esse.

5. Si $f = ab$, tum quavis periodus f terminorum (f, A) ex a periodis b terminorum $(b, A), (b, Ag^e), (b, Ag^{2e}), \dots, (b, Ag^{(a-1)e})$ composita est, quod ut ante probatur. Nempe

$$(b, A) = [A] + [Ah] + [Ah^2] + \dots + [Ah^{b-1}]$$

$$(b, Ag^e) = [Ag^e] + [Ag^eh] + [Ag^eh^2] + \dots + [Ag^eh^{b-1}] =$$

$$(b, Ag^{(a-1)e}) = [Ag^{(a-1)e}] + [Ag^{(a-1)e}h] + [Ag^{(a-1)e}h^2] + \dots + [Ag^{(a-1)e}h^{b-1}]$$

$$[A] + [Ah] + \dots + [Ah^{a-1}] + [Ah^a] + [Ah^{a+1}] + \dots + [Ah^{2a-1}] +$$

$$[Ah^{2a}] + [Ah^{2a+1}] + \dots + [Ah^{3a-1}] + \dots +$$

$$[Ah^{(b-1)a}] + [Ah^{(b-1)a+1}] + \dots + [Ah^{ba-1}] = [Ah^{f-1}], \text{ cum}$$

sit $h^e = g^{ae} = h^a$.

BF420/4

6. Productum e pluribus periodis similibus
aut diversis $(f, \lambda), (f, \mu), (f, \nu) \dots$ semper ad for-
mam $af + b(f, \lambda) + b'(f, \mu) + b''(f, \nu) + \dots + b^e(f, \eta)$
reduci potest.

Dem. Sint primum duo solum periodi
 (f, λ) et (f, μ) : manifesto erit, propter $(f, \lambda) = (f, \lambda_1) - (f, \lambda_2)$

$$(f, \lambda) \cdot (f, \mu) = [\mu] \cdot (f, \lambda) + [\mu \lambda] \cdot (f, \lambda) + [\mu \lambda^2] \cdot (f, \lambda) + \dots + [\mu \lambda^{k-1}] \cdot (f, \lambda)$$

$$= [\lambda + \mu] + [\lambda^2 + \mu] + [\lambda^3 + \mu] + \dots + [\lambda^k + \mu]$$

$$+ [\lambda^2 + \mu \lambda] + [\lambda^3 + \mu \lambda] + [\lambda^4 + \mu \lambda] + \dots + [\lambda^k + \mu \lambda]$$

$$+ [\lambda^3 + \mu \lambda^2] + [\lambda^4 + \mu \lambda^2] + [\lambda^5 + \mu \lambda^2] + \dots + [\lambda^k + \mu \lambda^2]$$

$$+ \dots + [\lambda^k + \mu \lambda^{k-1}]$$

$$= (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda^2 + \mu) + (f, \lambda^3 + \mu) + \dots + (f, \lambda^k + \mu)$$

secundum quam formulam duo periodi
facile inter se multiplicari possunt.

Si adhuc accedat periodus $3^{da} (f, \nu)$; eodem
modo singula partes producti duarum
priorum cum illa multiplicari possunt,
et sic porro.

Denique cum quavis periodorum, e
quibus productum constat, cum $(f, 0)$
sive cum aliqua harum $(f, 1), (f, \eta), (f, \eta^2)$
 $\dots (f, \eta^{e-1})$ identica sit, manifestum est
productum semper ad formam illam
tam reduci posse.

BF 420/5

BF 420/5

7. Theorema. Quavis periodus (f, μ) , excepta
 $(f, 0)$ per seriem potestatum periodi cuius-
vis alius similis (f, λ) exprimi potest, qua
omnes coefficientes sint quantitates deter-
minatae rationales.

Demonstrationem huius theorematum
ad propositum nostrum non adeo neces-
sarii brevitatis gratia omittimus.

8. Theorema. Si $F = Q(t, u, v \dots)$ sit functio
invariabilis algebraica rationalis integra
indeterminatarum $t, u, v \dots$; atque sub-
stituendo pro his radices $[\lambda], [\lambda'], [\lambda'']$ etc.
in periodo (f, λ) contentar, valor ipsius
 F ad formam $A + A'[\lambda] + A''[\lambda'] + \dots$ reduca-
tur: tum radices in hac expressione, quae
ad eandem periodum quamcunque f
terminorum pertinent, coefficientes a,
quales habebunt.

Dem. Sit $q = pg^{ve} \pmod{n}$, et μ, μ', μ'' etc. residua
minima numerorum $\lambda g^{ve}, \lambda' g^{ve}, \lambda'' g^{ve}$ etc.
quae cum $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. identica erunt, eor-
um ordine transposito. Nam functio $F =$
 $Q([\lambda g^{ve}], [\lambda' g^{ve}], [\lambda'' g^{ve}], \dots)$ ad formam $A + A'[\lambda g^{ve}]$
 $+ A''[\lambda' g^{ve}] + \dots$ reduci potest, unde patet q in
 F eundem coefficientem habere quam in F .
sed cum $F = Q([\mu], [\mu'], [\mu''] \text{ etc.}) = Q([\lambda], [\lambda'], [\lambda''] \text{ etc.})$ quia
 Q denotat functionem invariabilem, F identi-
ca erit cum F ; unde theorema demonstratum est.

Hinc patet F reduci posse ad formam $A + \alpha(f, 1) + \alpha'(f, g) + \alpha''(f, g^2) + \dots$ ubi omnes coefficientes integri erunt, si omnes in F sunt integri.

9. Si assignentur e aequationes, quarum radices sint respective, radices in $(f, 1), (f, g), (f, g^2)$ etc. contenta, patet omnes coefficientes ad formam precedentem reduci posse, omnesque quantitates fore cognitae, simulac omnes periodi f terminorum innotuerint.

10. Similiter, si $f = ab$, et in functione α in determinatarum similiter affecta ut in art. 8 $F = \Phi(t, u, v, \dots)$ pro $t, u, v, \dots$ substituantur α periodi sub quacunque periodo f terminorum contenta; ejusque valor ad formam $A + A'(g, 1) + A''(g, g) + \dots + A^{(n)}(g, g^n)$

BF 420/5

BF 420/6

11. His praemissis ad propositum nostrum descendantur.

Si aequ. $\alpha^{\alpha-1}$ resolvenda est, accipiatnr numerus g , qui sit radix primitiva pro mod. n , residuaque minima potestatum ipsius g usque ad $(n-2)^{\text{tam}}$ eruantur. Resolvatur $(n-1)$ in factores primos $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \zeta$, productumque omnium, rescipio α , sit $= \alpha$; resque α et $\beta, = b$, etc. Distribuantur omnes radices Ω in α periodos a terminorum; ha singulae in β periodos b terminorum; et sic porro.

Quaeratur aequatio α^{ti} gradus, cujus radices sint α periodi α terminorum, qua resoluta radix quaecunque illius $= (\alpha, 1)$ statui potest, cum enim arbitrium sit, quamnam radicem ea Ω per $[1]$ denotetur, manifesto supponere licet, radicem $[1]$ in radice quacunque aequationis praecedente, ea qua autem suppositione omnia reliqua aggregata determinabuntur.

Quaeratur postea aequatio β^{ti} gradus, cujus radices sint β aggregata b terminorum sub $(\alpha, 1)$ contenta, statuaturque radix quaecunque illius $= (b, 1)$.

Investegetur aequatio γ^{ti} gradus etc. dum hoc modo ad aequationem ζ^{ti} gradus deveniatur, cujus radicem quamcumque $= [1]$ statuere licet.

12. Exemplum pro $n=17$. Hic habetur $n-1 =$
 $2.2.2.2$, et pro radice primitiva assumi-
 mus numerum 3, cuius potestates resi-
 dua minima sequentia secundum mo-
 dulum 17 suppeditant:

exp. 0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
 resi. min. 1.3.9.10.13.5.15.11.16.14.8.7.4.12.2.6

BF 420/6^v

