

BF-397/1

Schuster hütet hütet hütet
vari hütet hütet hütet
demonstratigat. Polo hütet
rindellbe hütet hütet hütet
Algebra hütet hütet hütet
gen.

Summam duorum Cuborum non esse Cubum;

Demonstratio.

Dr. S. S. S.
hütet hütet hütet
hütet hütet hütet

Theorema.

Summa duorum Cuborum, quorum radices sunt numeri integri po-
sitivi, non est Cubus.

Theorema hoc demonstratum censendum foret, si Theorema se-
quens demonstrari posset:

Differentia duorum Cuborum, quorum radices sunt numeri integri
positivi, Cubus fieri nequit.

Etenim si $x^3 - a^3 \{ \geq \} b^3$, erit $x^3 \{ \geq \} a^3 + b^3$.

It vero haec differentia duorum Cuborum inveniat, prius quaedam
series harum differentiarum, radicibus Cuborum in data quodam pro-
gressione arithmetica crescentibus, sunt construenda.

Obsev. Litteris, quibus in sequentibus denotantes magnitudines ute-
mur, solummodo numeri integri positivi subintelligendi sunt, inclusa
unitate, excepto illo casu, in quo contrarium expressè notabitur.

↑.

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, caput exponens est
 $= 1$, seu in serie numerorum naturalium crescentibus, caput pro gene-
ralis, qua differentia duorum Cuborum hac in serie proxime se sub-
sequentium designatur, est $= 3n(n-1) + 1$, (designante n quin

BF-397/1

Theorematis,

Summam duorum Cuborum non esse Cubum, Algebraica haru

Demonstratio.

Theorema.

Summa duorum Cuborum, quorum radices sunt numeri integri po-
sitivi, non est Cubus.

Theorema hoc demonstratum censendum foret, si Theorema sequens demonstrari possit:

Differentia duorum Cuborum, quorum radices sunt numeri integri
positivi, Cubus fieri requirit.

Et enim si $x^3 - a^3 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} b^3$; crit 8. $x^3 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} a^3 + b^3$.

It vero haec differentia duorum Cuborum inveniatur, prius quaedam series harum differentiarum, radicibus Cuborum in data quadam progressionem arithmetica crescentibus, sunt construenda.

1. Offen. Litteris, quibus in sequentibus denotantes magnitudines utemur, solummodo numeri integri positivi subintelligendi sunt, inclufa unitate, excepto illo casu, in quo contrarium expresse notabitur.

Radicibus Cuborum in progressionē arithmetica, cujus exponents est
 $= 1$, seu in serie numerorum naturalium crescentibus, expressio gene-
 ralis, quā differentia duorum Cuborum hac in serie proxime se sub-
 sequentium designatur, est $= 3n(n-1) + 1$, (designante n quovis

BF-397/1

2^o numerum integrum, majorem progressionis exponente.)

Demonstr. Etenim constructa hac serie differentiarum apparet,

$$\text{epr} \quad 2^3 - 1^3 = 7 = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 19 = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 37 = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 1$$

$$5^3 - 4^3 = 61 = 3 \cdot 5 \cdot 4 + 1$$

$$6^3 - 5^3 = 91 = 3 \cdot 6 \cdot 5 + 1$$

$$\text{Unde} \quad n^3 - (n-1)^3 = 3n(n-1) + 1$$

2.

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est = 2, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum Cuborum hac in serie proxime se subsequendum designans, est = $2 \times (3(n-1)(n-1) + 1)$.

Demonstr. Etenim constructa hac serie differentiarum, radicibus Cuborum inde ab unitate progredientibus, apparet

$$\text{epr} \quad 3^3 - 1^3 = 26 = 2 \times (3 \cdot 2 \cdot 2 + 1)$$

$$5^3 - 3^3 = 98 = 2 \times (3 \cdot 4 \cdot 4 + 1)$$

$$7^3 - 5^3 = 218 = 2 \times (3 \cdot 6 \cdot 6 + 1)$$

$$9^3 - 7^3 = 386 = 2 \times (3 \cdot 8 \cdot 8 + 1)$$

Unde & $n^3 - (n-2)^3 = 2 \times (3(n-1)(n-1) + 1)$, designante n quovis numerum integrum, in formula $2p+1$ contentum, majorem progressionis exponente.

Radicibus Cuborum vero inde a numero 2 progredientibus, con-

BF-397/2

structa hac serie differentiarum, apparet epr

$$4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56 = 2 \times (3 \cdot 3 \cdot 3 + 1)$$

$$6^3 - 4^3 = 216 - 64 = 152 = 2 \times (3 \cdot 5 \cdot 5 + 1)$$

$$8^3 - 6^3 = 512 - 216 = 296 = 2 \times (3 \cdot 7 \cdot 7 + 1)$$

$$10^3 - 8^3 = 1000 - 512 = 488 = 2 \times (3 \cdot 9 \cdot 9 + 1)$$

$$\text{Unde} \quad n^3 - (n-2)^3 = 2 \times (3(n-1)(n-1) + 1),$$

denotante n quovis numerum integrum, in formula $2p$ contentum, majorem progressionis exponente.

Cum itaque litera n cum numeri in formula $2p+1$, tum illi in formula $2p$ contenti, consequenter omnes numeri denotentur, generatim expressio, qua differentia duorum Cuborum designatur, quorum radices numero 2 a se invicem differant, est = $2 \times (3(n-1)(n-1) + 1)$.

3.

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est = 3, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum Cuborum proxime in hac serie se subsequendum designans, est = $3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$, denotante n quovis numerum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus Cuborum ab unitate progredientibus, apparet epr

$$4^3 - 1^3 = 64 - 1 = 63 = 3 \times (3 \cdot 3 \cdot 2 + 1 + 2)$$

$$7^3 - 4^3 = 343 - 64 = 279 = 3 \times (3 \cdot 6 \cdot 5 + 1 + 2)$$

$$10^3 - 7^3 = 1000 - 343 = 657 = 3 \times (3 \cdot 9 \cdot 8 + 1 + 2)$$

$$13^3 - 10^3 = 2197 - 1000 = 1197 = 3 \times (3 \cdot 12 \cdot 11 + 1 + 2)$$

BF-397/2^v

Vide & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$, designante
n quovis numerum integrum, in formula $3p+1$ contentum.

Radicibus vero cuborum inde a numero 2 progredientibus, constructa
hac differentiarum serie, apparet

$$\begin{aligned} \text{ex. } 5^3 - 2^3 &= 125 - 8 = 117 = 3 \times (3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 + 2) \\ 8^3 - 5^3 &= 512 - 125 = 387 = 3 \times (3 \cdot 7 \cdot 6 + 1 + 2) \\ 11^3 - 8^3 &= 1331 - 512 = 819 = 3 \times (3 \cdot 10 \cdot 9 + 1 + 2) \\ 14^3 - 11^3 &= 2744 - 1331 = 1413 = 3 \times (3 \cdot 13 \cdot 12 + 1 + 2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$,
designante n quovis numerum integrum, in formula $3p+2$ contentum.

Radicibus cuborum vero inde a numero 3 progredientibus, constru-
cta hac differentiarum serie, apparet

$$\begin{aligned} \text{ex. } 6^3 - 3^3 &= 216 - 27 = 189 = 3 \times (3 \cdot 5 \cdot 4 + 1 + 2) \\ 9^3 - 6^3 &= 729 - 216 = 513 = 3 \times (3 \cdot 8 \cdot 7 + 1 + 2) \\ 12^3 - 9^3 &= 1728 - 729 = 999 = 3 \times (3 \cdot 11 \cdot 10 + 1 + 2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$, designan-
te n quovis numerum integrum, in formula $3p$ contentum, majorem
progressionis exponente.

Cum itaque littera n tum numeri in formula $3p+1$, tum illi
in formula $3p+2$, tum demum illi in formula $3p$ contenti, consequen-
ter omnes numeri designentur, generatim expressio, differentiam duorum
cuborum designant, quorum radices numero 3 a se invicem differant,
 $\text{est} = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$.

2

BF-397/3

rum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim per demonstrata expressio generalis, differentiam
duorum cuborum proxime se subsequentium exhibens, radicibus in progressi-
one arithmetica crescentibus,

$$\begin{aligned} \text{cujus exponentis est} &= 2, \text{ est} = 2 \times (3(n-1)(n-1) + 1^2) \text{ § 2.} \\ &= 4, \text{ est} = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2) \text{ § 4.} \\ &= 6, \text{ est} = 6 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2) \text{ § 6.} \end{aligned}$$

Ex quibus sequitur, expressionem generalem, differentiam duorum cubo-
rum proxime se subsequentium exhibentem, radicibus in progressionem arith-
metica crescentibus,

cujus exponentis est $= 2m$, est $= 2m \times (3(n-m)(n-m) + m^2)$, denota-
te littera n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.
10.

Radicibus cuborum in progressionem arithmetica
 $=$ numero impari $= 2m+1$, crescentibus, expressio generalis, differentiam duo-
rum cuborum hac in serie proxime se subsequentium, designans est $=$
 $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1)) + 1 + m(m+1))$, denotans n quovis nu-
merum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim per demonstrata expressio generalis, differentiam duo-
rum cuborum proxime se subsequentium exhibentem, radicibus in progressi-
one arithmetica progredientibus,

$$\begin{aligned} \text{cujus exponentis est} &= 1, \text{ est} = 1 \times (3(n-1)(n-1) + 1^2) \text{ § 1.} \\ &= 3, \text{ est} = 3 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2) \text{ § 3.} \\ &= 5, \text{ est} = 5 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2) \text{ § 5.} \\ &= 7, \text{ est} = 7 \times (3(n-4)(n-4) + 4^2) \text{ § 7.} \end{aligned}$$

BF-397/2^v

Inde & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$, designante
n quovis numerum integrum, in formula $3p+1$ contentum.

Radicibus vero cuborum inde a numero 2 progredientibus, constructa
hac differentiarum serie, apparet

$$\begin{aligned} \text{esse } 5^3 - 2^3 &= 125 - 8 = 117 = 3 \times (3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 + 2) \\ 8^3 - 5^3 &= 512 - 125 = 387 = 3 \times (3 \cdot 7 \cdot 6 + 1 + 2) \\ 11^3 - 8^3 &= 1331 - 512 = 819 = 3 \times (3 \cdot 10 \cdot 9 + 1 + 2) \\ 14^3 - 11^3 &= 2744 - 1331 = 1413 = 3 \times (3 \cdot 13 \cdot 12 + 1 + 2) \end{aligned}$$

Inde & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$,
designante n quovis numerum integrum, in formula $3p+2$ contentum.

Radicibus cuborum vero inde a numero 3 progredientibus, constru-
cta hac differentiarum serie, apparet

$$\begin{aligned} \text{esse } 6^3 - 3^3 &= 216 - 27 = 189 = 3 \times (3 \cdot 5 \cdot 4 + 1 + 2) \\ 9^3 - 6^3 &= 729 - 216 = 513 = 3 \times (3 \cdot 8 \cdot 7 + 1 + 2) \\ 12^3 - 9^3 &= 1728 - 729 = 999 = 3 \times (3 \cdot 11 \cdot 10 + 1 + 2) \end{aligned}$$

Inde & $n^3 - (n-3)^3 = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$, designan-
te n quovis numerum integrum, in formula $3p$ contentum, majorem
progressionis exponente.

Cum itaque littera n tam numeri in formula $3p+1$, tum illi
in formula $3p+2$, tum denum illi in formula $3p$ contenti, consequen-
ter omnes numeri designentur, generaliter expressio, differentiam duorum
cuborum designans, quorum radices numero 3 a se invicem differant,
 $\text{est} = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 2)$.

2

BF-397/3

rum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim per demonstrata expressio generalis, differentiam
duorum cuborum proxime se subsequenter exhibens, radicibus in progressi-
one arithmetica crescentibus,

$$\begin{aligned} \text{cujus exponentis est} &= 2, \text{ est} = 2 \times (3(n-1)(n-1) + 1^2) \text{ est } 2. \\ - &= 4, \text{ est} = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2) \text{ est } 4. \\ - &= 6, \text{ est} = 6 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2) \text{ est } 6. \end{aligned}$$

Ex quibus sequitur, expressio generalis, differentiam duorum cubo-
rum proxime se subsequenter exhibentem, radicibus in progressionem arith-
metica crescentibus,

cujus exponentis est $= 2m$, esse $= 2m \times (3(n-m)(n-m) + m^2)$, denotar-
se littera n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.
10.

Radicibus cuborum in progressionem arithmetica
 $=$ numero impari $= 2m+1$, crescentibus, expressio generalis, differentiam duo-
rum cuborum hac in serie proxime se subsequenter, designans, est $=$
 $(2m+1) \times (3(n-m)(n-(m+1)) + 1 + m(m+1))$, denotante littera n, quovis nu-
merum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim per demonstrata expressio generalis, differentiam duo-
rum cuborum proxime se subsequenter exhibentem, radicibus in progressionem a-
rithmetica progredientibus,

$$\begin{aligned} \text{cujus exponentis est} &= 1, \text{ est} = 1 \times (3(n, n+1) + 1 + 0 \cdot 1) \text{ est } 1. \\ - &= 3, \text{ est} = 3 \times (3(n-1)(n-2) + 1 + 1^2) \text{ est } 3. \\ - &= 5, \text{ est} = 5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2^2) \text{ est } 5. \\ - &= 7, \text{ est} = 7 \times (3(n-3)(n-4) + 1 + 3^2) \text{ est } 7. \end{aligned}$$

BF-39713^v

Ex quibus consequitur, expressionem generalem, differentiam duorum cuborum proxime se subsequentium exhibentem, radicibus in progressionem arithmetica crescentibus, cujus exponents est $= 2m+1$, esse $= (2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, denotante n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponents.

11.

Neutram harum expressionum, tum illam, differentiam duorum cuborum exhibentem, quorum radices numero pari a se invicem differant, $= 2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$, tum alteram, differentiam duorum cuborum sistentem, quorum radices numero impari a se invicem differant, $= (2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, cubum fieri posse contradimus.

12.

Etenim si expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$, differentiam duorum cuborum designat, quorum radices numero pari a se invicem differant, cubum fieri posset, in duobus tantummodo casibus id possibile foret, vis nempe, cum $2m$ expressio differentiam radicum exhibens, aut non est cubus, aut vero cubus.

13.

It expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ priore casu, illo scilicet, cum $2m$ non est in numero cuborum, fiat cubus, (si id fieri posset) necessario expressionem $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$ esse oportet.

Etenim si esset $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$, foret etiam $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2) = 8m^3 p^3$ cubo scilicet.

Sit itaque $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$, & cum littera n semper major sit progressionis exponents $2m$, ponamus litteram $n = q+m$, designante q numerum integrum, majorem illo, qui littera m designatur. Tum expressio $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$ transformatur in sequentem

BF-39714

$$3q^2 + m^2 = 4m^2 p^3. \text{ Unde etiam } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} = p^3.$$

$$\text{Posito } q = 2rm, \text{ expressio } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} \text{ fit } = \frac{12r^2 m^2 + m^2}{4m^2} = \frac{(12r^2 + 1)m^2}{4m^2} = \frac{12r^2 + 1}{4} = p^3; \text{ quod fieri nequit.}$$

$$\text{Posito vero } q = (2r+1)m, \text{ expressio } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} \text{ fit } = \frac{3(4r^2 + 4r + 1)m^2 + m^2}{4m^2} = 3r^2 + 3r + 1 = p^3. \text{ Unde etiam } 3r(r+1) = p^3 - 1 \text{ seu}$$

$r+1 = \frac{p^3 - 1}{3r}$, quae aequatio substituendo loco p expressionem $3r+1$ transformatur in sequentem $r+1 = 9t^2 r^2 + 9t^2 r + 3t$, quod, litteris t & r numeros integros designantibus, propter locum habere non potest.

Unde & hypothesis, expressionem $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ in illo casu, cum $2m$ non sit in numero cuborum, cubum fieri posse, falsa necessario esse censenda.

14.

It vero expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ in altero casu, (scilicet) cum $2m$ est in numero cuborum, fiat cubus, et expressio $3(n-m)(n-m)+m^2$ in numero cuborum sit, necesse est.

Cum itaque m sit $= 4f^3$, & n semper $>$ progressionis exponents $2m$, posito $n = 2m+r = 8f^3 + r$, expressio $3(n-m)(n-m)+m^2$ transformatur in sequentem $3(4f^3 + r)(4f^3 + r) + 16f^6 = (\text{posito } 4f^3 + r = A)$ $= 3A^2 + 16f^6$, quae aequalis cubo esse potenda.

$$\text{Sit itaque } 3A^2 + 16f^6 = p^3, \text{ tum erit } A^2 = \frac{p^3 - 16f^6}{3}$$

Cum itaque $p^3 > 16f^6$, id est, $\sqrt[3]{p^3} > 4f^2$, posita $\sqrt[3]{p^3} = 4f^2 + t$, expressio $\frac{p^3 - 16f^6}{3}$ transformatur in sequentem $\frac{8f^3 t + t^3}{3}$. Unde jam & $A^2 = \frac{8f^3 t + t^3}{3}$, consequ. & $3A^2 = 8f^3 t + t^3$, id est, $3tB^2 = 8f^3 t + t^3$.

Qua ex aequatione porro sequitur, esse $3B^2 = 8t^2 q^3 + 1$, (posito $f^3 = t^2 q^3$) seu $3B^2 - 1 = 8t^2 q^3$. Cum vero $8t^2 q^3$ sit = numero pari,

BF-397/3^v

Ex quibus consequitur, expressionem generalem, differentiam duorum cuborum proxime se subsequentium exhibentem, radicibus in progressionem arithmetica crescentibus, cujus exponents est $= 2m+1$, esse
 $= (2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, denotante n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.

11.

Neutram harum expressionum, tum illam, differentiam duorum cuborum exhibentem, quorum radices numero pari a se invicem differant, $= 2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$, tum alteram, differentiam duorum cuborum sistentem, quorum radices numero impari a se invicem differant, $= (2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, cubum fieri posse contendimus.

12.

Etenim si expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$, differentiam duorum cuborum designans, quorum radices numero pari a se invicem differant, cubum fieri possit, in duobus tantummodo casibus id possibile foret, uno nempe, cum $2m$ expressio differentiam radicum exhibens, aut non est cubus, aut vero cubus.

13.

It expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ priore casu, illo scilicet, cum $2m$ non est in numero cuborum, fiat cubus, (si id fieri possit) necessario expressionem $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$ esse oportet.

Etenim si esset $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$, foret etiam
 $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2) = 8m^3 p^3$ cubo scilicet.

Sit itaque $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$, & cum littera n semper major sit progressionis exponente $2m$, ponamus litteram $n = q+m$, designante q numerum integrum, majorem illo, qui littera m designatur. Tum expressio $3(n-m)(n-m)+m^2 = 4m^2 p^3$ transformatur in sequentem

BF-397/4

$$3q^2 + m^2 = 4m^2 p^3. \text{ Unde etiam } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} = p^3.$$

$$\text{Posito } q = 2rm, \text{ expressio } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} \text{ fit } = \frac{12r^2 m^2 + m^2}{4m^2} = \frac{(12r^2 + 1)m^2}{4m^2} = \frac{12r^2 + 1}{4} = p^3; \text{ quod fieri nequit.}$$

$$\text{Posito vero } q = (2r+1)m, \text{ expressio } \frac{3q^2 + m^2}{4m^2} \text{ fit } = \frac{3(4r^2 + 4r + 1)m^2 + m^2}{4m^2} = 3r^2 + 3r + 1 = p^3. \text{ Unde etiam } 3r(r+1) = p^3 - 1 \text{ seu}$$

$$r+1 = \frac{p^3 - 1}{3r}, \text{ quae aequatio substituendo loco } p \text{ expressionem } 3r+1 \text{ transformatur in sequentem } r+1 = 9t^2 r^2 + 9t^2 r + 3t, \text{ quod, litteris } t \text{ & } r \text{ numeros integros designantibus, profus locum habere non potest.}$$

Unde & hypothesis, expressionem $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ in illo casu, cum $2m$ non sit in numero cuborum, cubum fieri posse, falsa necessario est censenda.

14.

It vero expressio $2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$ in altero casu, (scilicet) cum $2m$ est in numero cuborum, fiat cubus, et expressio $3(n-m)(n-m)+m^2$ in numero cuborum sit, necesse est.

Cum itaque m fit $= 4f^3$, & n semper $>$ progressionis exponente $2m$, posito $n = 2m+r = 8f^3 + r$, expressio $3(n-m)(n-m)+m^2$ transformatur in sequentem $3(4f^3 + r)(4f^3 + r) + 16f^6 = (\text{posito } 4f^3 + r = A) = 3A^2 + 16f^6$, quae aequalis cubo est ponenda.

$$\text{Sit itaque } 3A^2 + 16f^6 = p^3, \text{ tum erit } A^2 = \frac{p^3 - 16f^6}{3}$$

Cum itaque $p^3 > 16f^6$, id est, $\sqrt[3]{p^3} > 4f^2$, posita $\sqrt[3]{p^3} = 4f^2 + t$, expressio $\frac{p^3 - 16f^6}{3}$ transformatur in sequentem $\frac{8f^2 t + t^3}{3}$. Unde jam & $A^2 = \frac{8f^2 t + t^3}{3}$, consequ. & $3A^2 = 8f^2 t + t^3$, id est $3tB^2 = 8f^2 + t$.

Quia ex aequatione porro sequitur, esse $3B^2 = 8t^2 q^3 + 1$, (posito $f^2 = t^2 q^3$) seu $3B^2 - 1 = 8t^2 q^3$. Cum vero $8t^2 q^3$ fit = numero pari,

BF-397/h

necessario B est = numero impari; substituendo itaque loco $200B$ expressionem $2D+1$, expressio $3B^2-1$ transformatur in sequentem $3 \times (4D^2 + 4D + 1) - 1 = 8t^2q^3$, id est, $6D(D+1)+1 = 4t^2q^3$, quod impossibile.

Vide & hypothesis, qua stabilienda ad impossibile delapsi sumus, falsa est censenda, five, expressio generalis $2m \times (3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, differentiam duorum cuborum exhibens, quorum radices numero pari a se invicem differunt, nec in altero casu (Sph. 12.) cum nempe $2m$ est in numero cuborum, in numero cuborum esse potest.

Quibus ea demonstratio generaliter inferimus, differentiam duorum cuborum, quorum radices numero pari a se invicem differunt, cubum fieri non posse.

15.

Si vero expressio altera $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, differentiam duorum cuborum designans, quorum radices numero impari a se invicem differunt, cubus fieri posset, hoc quoque duobus tantum casibus esset possibile, is nempe, cum $2m+1$, differentiam radicum fissus, aut non est cubus, aut vero cubus.

16.

Ita expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ priore casu, illo scilicet, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, fiat cubus, (cummodo id foret possibile) necessario & expressionem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$ esse oportet.

Etenim si esset $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$, foret etiam $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)) = (2m+1)^3 p^3$, cubo scilicet.

Sit itaque $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$; & cum n semper magis sit progressionis exponente $2m+1$, ponamus $n = 2m+r$, designante r quovis numerum integrum, exclusa unitate. Tum vero ex-

BF-397/5

pressio $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in

$$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3. \text{ Expressio}$$

$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1)$ itaque per expressionem $(2m+1)^2$ sit divisibilis, quod in illo casu solum fieri potest cum r est $(2m+1)q+1$.

Substituendo itaque loco $200r$ valorem $(2m+1)q+1$, expressio

$$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1) \text{ transformatur in sequentem } 3q^2(2m+1)^2 + 3q(2m+1)^2 + (2m+1)^2 = (3q^2 + 3q + 1)(2m+1)^2 = (2m+1)^2 p^3 \text{ five } 3q^2 + 3q + 1 = p^3;$$

quod per demonstrata (S. 13.) est impossibile.

Vide & hypothesis, expressionem $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in illo casu, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, cubum fieri posse, falsa necessario est censenda.

17.

Ita vero expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in altero casu, (S. 15.) cum scilicet $2m+1$ est in numero cuborum, fiat cubus, expressio autem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ quoque in numero cuborum esse oportet.

Cum itaque $2m+1$ sit $= p^3$, erit $m = \frac{p^3-1}{2}$. Et cum n semper sit > progressionis exponente $2m+1$, ponendo $n = 2m+q$ (designante q quovis numerum integrum, exclusa unitate) $= p^3-1+q$, expressio jam saepius prolata $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in sequentem $4 \times \left(\frac{p^3-1}{2}\right)^2 + 2(3q-1)\frac{p^3-1}{2} + 3q(q-1)+1 = (p^3-1)^2 + (3q-1)(p^3-1) + 3q(q-1)+1 = p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2$, quae cubo aequalis est ponenda.

Sit itaque $p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2 = f^3$, five (substituendo loco $200p^3$ expressionem $r^3 - \frac{3(q-1)}{2}$) $r^6 + 3(q-1)^2 = 4f^3$, seu $4f^3 - r^6 = 3(q-1)^2 = 3A^2$ (si ponatur nempe $q-1 = A$).

BF-397/h⁴

necessario B est $\approx$ numero impari; substituendo itaque loco $200B$ expressionem $2D+1$, expressio $3B^2-1$ transformatur in sequentem $3 \times (4D^2 + 4D + 1) - 1 = 8t^2q^3$, id est, $6D(D+1)+1 = 4t^2q^3$; quod impossibile.

Unde & hypothesis, qua stabilienda ad impossibile delapsi sumus, falsa est censenda, sive, expressio generalis $2m \times (3(n-m)(n-m)+n^2)$, differentiam duorum cuborum exhibens, quorum radices numero pari a se invicem differunt, nec in altero casu (Sph. 12.) cum nempe $2m$ est in numero cuborum, in numero cuborum esse potest.

Quibus ea demonstratio generaliter inferimus, differentiam duorum cuborum, quorum radices numero pari a se invicem differunt, cubum fieri non posse.

15.

Si vero expressio altera $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, differentiam duorum cuborum designans, quorum radices numero impari a se invicem differunt, cubus fieri posset, hoc quoque duobus tantum casibus esset possibile, id nempe, cum $2m+1$, differentiam radicum sistens, aut non esset cubus, aut vero cubus.

16.

Ita expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ priore casu, illo scilicet, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, fiat cubus, (cummodo id posset possibile) necessario & expressionem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$ esse oportet.

Etenim si esset $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$, foret etiam $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)) = (2m+1)^3 p^3$, cubus scilicet.

Sit itaque $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$; & cum n semper magis sit progressionis exponente $2m+1$, ponamus $n = 2m+r$, designante r quovis numerum integrum, exclusa unitate. Tum vero ec-

BF-397/5

pressio $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in

$$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3. \text{ Expressio}$$

$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1)$ itaque per expressionem $(2m+1)^2$ sit divisibilis, quod in illo casu solum fieri potest cum r est $= (2m+1)q+1$.

Substituendo itaque loco $200r$ valorem $(2m+1)q+1$, expressio $3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1)$ transformatur in sequentem $3q^2(2m+1)^2 + 3q(2m+1)^2 + (2m+1)^2 = (3q^2 + 3q + 1)(2m+1)^2 = (2m+1)^2 p^3$ sive $3q^2 + 3q + 1 = p^3$; quod per demonstrata (S. 13.) est impossibile.

Unde & hypothesis, expressionem $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in illo casu, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, cubum fieri posse, falsa necessario est censenda.

17.

Ita vero expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in altero casu, (S. 15.) cum scilicet $2m+1$ est in numero cuborum, fiat cubus, expressionem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ quoque in numero cuborum esse oportet.

Cum itaque $2m+1$ sit $= p^3$, erit $m = \frac{p^3-1}{2}$. Et cum n semper sit $>$ progressionis exponente $2m+1$, ponendo $n = 2m+q$ (designante q quovis numerum integrum, exclusa unitate) $= p^3-1+q$, expressio jam saepius prolata $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in sequentem $4 \times \left(\frac{p^3-1}{2}\right)^2 + 2(3q-1)\frac{p^3-1}{2} + 3q(q-1)+1 = (p^3-1)^2 + (3q-1)(p^3-1) + 3q(q-1)+1 = p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2$, quae cubo aequalis est ponenda.

Sit itaque $p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2 = f^3$, sive (substituendo loco $200p^3$ expressionem $\frac{r^3-3(q-1)}{2}$) $r^6 + 3(q-1)^2 = 4f^3$, seu $4f^3 - r^6 = 3(q-1)^2 = 3A^2$ (si ponatur nempe $q-1 = A$).

BF-397/4

necessario B est $\approx$ numero impari; substituendo itaque loco $200B$ expressionem $2D+1$, expressio $3B^2-1$ transformatur in sequentem $3 \times (4D^2 + 4D + 1) - 1 = 8t^2q^3$, id est, $6D(D+1)+1 = 4t^2q^3$; quod impossibile.

Vide & hypothesis, qua stabilienda ad impossibile delapsi sumus, falsa est censenda, sive, expressio generalis $2m \times (3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, differentiam duorum cuborum exhibens, quorum radices numero pari a se invicem differunt, nec in altero casu (Sph. 12.) cum nempe $2m$ est in numero cuborum, in numero cuborum esse potest.

Quibus ea demonstratio generaliter inferimus, differentiam duorum cuborum, quorum radices numero pari a se invicem differunt, cubum fieri non posse.

15.

Si vero expressio altera $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$, differentiam duorum cuborum designans, quorum radices numero impari a se invicem differunt, cubus fieri posset, hoc quoque duobus tantum casibus esset possibile, vis nempe, cum $2m+1$, differentiam radicum sistens, aut non est cubus, aut vero cubus.

16.

Ita expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ priore casu, illo scilicet, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, fiat cubus, (cummodo id foret possibile) necessario & expressionem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$ esse oportet.

Etenim si esset $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$, foret etiam $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)) = (2m+1)^3 p^3$, cubus scilicet.

Sit itaque $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3$; & cum n semper minus sit progressionis exponente $2m+1$, ponamus $n = 2m+r$, designante r quovis numerum integrum, exclusa unitate. Tum vero ec-

BF-397/5

pressio $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in

$$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1) = (2m+1)^2 p^3. \text{ Expressio}$$

$3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1)$ itaque per expressionem $(2m+1)^2$ sit divisibilis, quod in illo casu solum fieri potest cum r est $(2m+1)q+1$.

Substituendo itaque loco $200r$ valorem $(2m+1)q+1$, expressio $3(m+r)(m+r-1)+1+m(m+1)$ transformatur in sequentem $3q^2(2m+1)^2 + 3q(2m+1)^2 + (2m+1)^2 = (3q^2 + 3q + 1)(2m+1)^2 = (2m+1)^2 p^3$ sive $3q^2 + 3q + 1 = p^3$; quod per demonstrata (S. 13.) est impossibile.

Vide & hypothesis, expressionem $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in illo casu, cum $2m+1$ non est in numero cuborum, cubum fieri posse, falsa necessario est censenda.

17.

Ita vero expressio $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1))$ in altero casu, (S. 15.) cum scilicet $2m+1$ est in numero cuborum, fiat cubus, expressionem $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ quoque in numero cuborum esse oportet.

Cum itaque $2m+1$ sit p^3 , erit $m = \frac{p^3-1}{2}$. Et cum n semper sit $\geq$ progressionis exponente $2m+1$, ponendo $n = 2m+q$ (designante q quovis numerum integrum, exclusa unitate) $= p^3-1+q$, expressio jam superius prolata $3(n-m)(n-(m+1))+1+m(m+1)$ transformatur in sequentem $4 \times \left(\frac{p^3-1}{2}\right)^2 + 2(3q-1)\frac{p^3-1}{2} + 3q(q-1)+1 = (p^3-1)^2 + (3q-1)(p^3-1) + 3q(q-1)+1 = p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2$, quae cubo aequivalens est ponenda.

Sit itaque $p^6 + 3(q-1)p^3 + 3(q-1)^2 = f^3$, sive (substituendo loco $200p^3$ expressionem $\frac{r^3-3(q-1)}{2}$) $r^6 + 3(q-1)^2 = 4f^3$, seu $4f^3 - r^6 = 3(q-1)^2 = 3A^2$ (si ponatur nempe $q-1 = A$).

BF-397/5

Unde etiam $4f^3 - r^6 = 2r^3t + t^2$, (ponendo scilicet $2\sqrt{f^3} = r^3 + t$)
 live $2r^3t + t^2 = 3A^2$, id est $2r^3 + t = 3tB^2$ ex quibus sequitur
 $2t^2\alpha^3 + 1 = 3B^2$.

Cum vero littera B designetur numerus impar, ponamus B esse $= 2C+1$. Ex quibus jam sequitur $t^2\alpha^3 = 6C^2 + 6C + 1$. Unde etiam
 $\alpha^3 = \frac{6C^2 + 6C + 1}{t^2}$, quod vero locum habere requirit, exceptis illis casibus,
 cum $t^2 = 1$, aut $t^2 = 6C^2 + 6C + 1$.

Priore casu fit $\alpha^3 = 6C^2 + 6C + 1$, seu $\frac{\alpha^3 - 1}{6C} = C + 1$. Ut vero
 hoc fit possibile, α in formula $6C + 1$ contineatur, oportet. Hinc vero se-
 quitur, $36C^2 + 18C + 3 = C + 1$, quod est absurdum.

Posteriore vero casu, cum t^2 nempe est $= 6C^2 + 6C + 1$ fit $\alpha^3 = 1$.
 Cum vero fuerit $r^3 = \alpha t^3$, erit $r^3 = t^3$, & expressio $4f^3 - r^6 = 2r^3t + t^2$
 transformatur in $4f^3 - t^6 = 2t^4 + t^2$, seu $4f^3 = t^6 + 2t^4 + t^2 =$
 $(t^2 + 1)(t^2 + 1)t^2$.

Ex quibus, cum t sit numerus impar, sequitur, expressionem f^3
 per t^2 esse divisibilem, consequenter f^3 esse $= t^2p^3$. Unde jam aequatio
 deducitur, $4t^3p^3 = (t^2 + 1)(t^2 + 1) = 4p^2$, (posita nempe expressione $t^2 + 1$
 $= 2p$, quod necessario locum habebit, cum $t^2 + 1$ sit numerus par).

Consequenter jam & erit $t^3p^3 = p^2$, unde p per t est divisibile,
 unde & $2p$ seu $t^2 + 1$ per t est divisibile, quod fieri requirit.

Hinc & hypothesis, expressionem $(2m+1)(2(n-m)(n-(m+1)) + 1 + m(m+1))$
 in altero casu (§ phi. 15.), cum scilicet $2m+1$ est in numero cuborum, cubum
 fieri posse, admitti requirit.

Quibus ex demonstratio generaliter concludimus, differentiam duo-
 rum cuborum, quorum radices numero impari a se invicem differunt,
 cubum fieri non posse.

BF-397/6

18.

Cum itaque cum differentia cuborum, quorum radices numero pari
 a se invicem differant, tum cuborum, quorum radices numero impari a se
 invicem differant, cubus fieri nequeat; (§ 14. 17.) differentiam duorum
 cuborum, quorum radices sunt numeri integri positivi, cubum fieri non
 posse, nobis, ut demonstratum, concedas oportet.

Hinc ex in initio praemissis sequitur, Summam duorum cuborum,
 quorum radices sunt numeri integri positivi, cubum fieri non posse.

19.

Coroll. 1. Nec Summa duorum cuborum, quorum radices sunt numeri
 integri negativi, cubus fieri potest.

Etenim cum (§ 18.) Summa duorum cuborum cubus fieri nequeat, nume-
 rorum vero negativorum Cubi in signo praeposito solum a numerorum positivo-
 rum Cubis differant, & valor numerorum absolutus (dum a signis abstrahimus)
 idem semper maneat, sequitur $-a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3)$ non esse cubum.

20.

Coroll. 2. Pari modo nec Summa duorum cuborum, quorum alter est
 positivus, alter vero negativus, cubus fieri potest.

Etenim cum (§ 18.) differentia duorum cuborum cubus fieri nequeat,
 sequitur & $a^3 - b^3$ non esse cubum.

21.

Coroll. 3. Eadem plane ratione & Summa duorum cuborum, quo-
 rum alter est numerus integer, aut positivus, aut negativus, alter vero
 fractio aut positiva aut negativa, cubus fieri requirit.

BF-397/5^v

Unde etiam $4f^3 - r^6 = 2r^3t + t^2$, (ponendo scilicet $2Vf^3 = r^3 + t$)
 five $2r^3t + t^2 = 3A^2$, id est $2r^3 + t = 3tB^2$ ex quibus sequitur
 $2t^2\alpha^3 + 1 = 3B^2$.

Cum vero littera B designetur numerus impar, ponamus B esse =
 $2C + 1$. Ex quibus jam sequitur $t^2\alpha^3 = 6C^2 + 6C + 1$. Unde etiam
 $\alpha^3 = \frac{6C^2 + 6C + 1}{t^2}$, quod vero locum habere requirit, exceptis illis casibus,
 cum $t^2 = 1$, aut $t^2 = 6C^2 + 6C + 1$.

Priore casu fit $\alpha^3 = 6C^2 + 6C + 1$, seu $\frac{\alpha^3 - 1}{6C} = C + 1$. Ut vero
 hoc sit possibile, α in formula $6C + 1$ contineatur, oportet. Hinc vero se-
 quitur, $36C^2 + 18C + 3 = C + 1$, quod est absurdum.

Posteriore vero casu, cum t^2 semper est $= 6C^2 + 6C + 1$ fit $\alpha^3 = 1$.
 Cum vero fuerat $r^3 = \alpha^3 t^3$, erit $r^3 = t^3$, & expressio $4f^3 - r^6 = 2r^3t + t^2$
 transformatur in $4f^3 - t^6 = 2t^4 + t^2$, seu $4f^3 = t^6 + 2t^4 + t^2 =$
 $(t^2 + 1)(t^2 + 1)t^2$.

Ex quibus, cum t sit numerus impar, sequitur, expressionem f^3
 per t^2 esse divisibilem, consequenter f^3 esse $= t^3\beta^3$. Unde jam aequatio
 deducitur, $4t\beta^3 = (t^2 + 1)(t^2 + 1) = 4\beta^2$, (posita nempe expressione $t^2 + 1$
 $= 2\beta$, quod necessario locum habebit, cum $t^2 + 1$ sit numerus par).

Consequenter jam & erit $t\beta^3 = \beta^2$, unde β per t est divisibile,
 unde & 2β seu $t^2 + 1$ per t est divisibile, quod fieri requirit.

Hinc & hypothesis, expressionem $(2m+1)(3(n-m)(n-(m+1))+1+m(n+1))$
 in altero casu (§ phi 18.), cum scilicet $2m+1$ est in numero cuborum, cubum
 fieri posse, admitti requirit.

Quibus ex demonstratio generaliter concludimus, differentiam duo-
 rum cuborum, quorum radices numero impari a se invicem differunt,
 cubum fieri non posse.

BF-397/6

18.

Cum itaque cum differentia cuborum, quorum radices numero pari
 a se invicem differunt, tum cuborum, quorum radices numero impari a se
 invicem differunt, cubus fieri nequeat, (§ 14. 17.) differentiam duorum
 cuborum, quorum radices sunt numeri integri positivi, cubum fieri non
 posse, nobis, ut demonstratum, concedas oportet.

Hinc ex in initio praemisio sequitur, Summam duorum cuborum,
 quorum radices sunt numeri integri positivi, cubum fieri non posse.

19.

Coroll. 1. Nec Summa duorum cuborum, quorum radices sunt numeri
 integri negativi, cubus fieri potest.

Etenim cum (§ 18.) Summa duorum cuborum cubus fieri nequeat, nume-
 rorum vero negativorum cubi in signo praeposito solum a numerorum positivo-
 rum cubis differant, & valor numerorum absolutus (dum a signis abstrahimus)
 idem semper maneat, sequitur $-a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3)$ non esse cubum.

20.

Coroll. 2. Pari modo nec Summa duorum cuborum, quorum alter est
 positivus, alter vero negativus, cubus fieri potest.

Etenim cum (§ 18.) differentia duorum cuborum cubus fieri nequeat,
 sequitur & $a^3 - b^3$ non esse cubum.

21.

Coroll. 3. Eadem plane ratione & Summa duorum cuborum, quo-
 rum alter est numerus integer, aut positivus, aut negativus, alter vero
 fractio aut positiva aut negativa, cubus fieri requirit.

BF-397/6^v

Etenim cum (§ 18.) nec Summa nec differentia duorum Cuborum in numero Cuborum esse possit, sequitur $\pm a^3 \pm \frac{p^3}{q^3} = \pm \left(\frac{a^3 q^3 \pm p^3}{q^3} \right)$ non esse Cubum.

22.

Coroll. 4. Denique nec Summa duorum Cuborum, quorum radices sunt fractiones, aut positivae aut negativae, aut altera positiva, altera vero negativa, in numero Cuborum esse potest.

Etenim cum sit $\pm \frac{a^3}{p^3} \pm \frac{b^3}{q^3} = \pm \left(\frac{a^3 q^3 \pm b^3 p^3}{p^3 q^3} \right)$, sequitur, in hac expressione numeratorem fractionis, Summam aut differentiam duorum Cuborum significentem, non esse in numero Cuborum.

23.

Ex quibus patet, duorum quorumvis Cuborum Summam Cubum fieri non posse.

BF-397/7

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponents est $= 4$, crescentibus, expressis generalis, differentiam duorum Cuborum hac in serie proximae se subsequenter designans, est $= 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2) = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n numerum integrum quovis, majorem progressionis exponents.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus Cuborum ab unitate progredientibus, apparet

$$\begin{aligned} 5^3 - 1^3 &= 125 - 1 = 124 = 4 \times (3 \cdot 3 \cdot 3 + 2^2) \\ 9^3 - 5^3 &= 729 - 125 = 604 = 4 \times (3 \cdot 7 \cdot 7 + 2^2) \\ 13^3 - 9^3 &= 2197 - 729 = 1468 = 4 \times (3 \cdot 11 \cdot 11 + 2^2) \\ 17^3 - 13^3 &= 4913 - 2197 = 2716 = 4 \times (3 \cdot 15 \cdot 15 + 2^2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-4)^3 = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n quovis numerum integrum, in formula $4p+1$ contentum.

Radicibus Cuborum vero inde a numero 2 progredientibus, constructa hac differentiarum serie, apparet esse

$$\begin{aligned} 6^3 - 2^3 &= 216 - 8 = 208 = 4 \times (3 \cdot 4 \cdot 4 + 2^2) \\ 10^3 - 6^3 &= 1000 - 216 = 784 = 4 \times (3 \cdot 8 \cdot 8 + 2^2) \\ 14^3 - 10^3 &= 2744 - 1000 = 1744 = 4 \times (3 \cdot 12 \cdot 12 + 2^2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-4)^3 = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n quovis numerum integrum, in formula $4p+2$ contentum.

BF-397/6

Etenim cum (§ 18.) nec Summa nec differentia duorum Cuborum in numero Cuborum esse possit, sequitur $\pm a^3 \pm \frac{p^3}{q^3} = \pm \left(\frac{a^3 q^3 \pm p^3}{q^3} \right)$ non esse Cubum.

22.

Coroll. 4. Denique nec Summa duorum Cuborum, quorum radices sunt fractiones, aut positive aut negative, aut altera positiva, altera vero negativa, in numero Cuborum esse potest.

Etenim cum sit $\pm \frac{a^3}{p^3} \pm \frac{b^3}{q^3} = \pm \left(\frac{a^3 q^3 \pm b^3 p^3}{p^3 q^3} \right)$, sequitur, in hac expressione numeratorem fractionis, Summam aut differentiam duorum Cuborum significentem, non esse in numero Cuborum.

23.

Ex quibus patet, duorum quorumvis Cuborum Summam Cubum fieri non posse.

BF-397/7

4.

Radices Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponents est $= 4$, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum Cuborum hac in serie proxime se subsequendum designans, est $= 4 \times (3(n-2)(n-2) + (1+3)) = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n numerum integrum quovis, majorem progressionis exponents.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus Cuborum ab unitate progredientibus, apparet

$$\begin{aligned} \text{esse } 5^3 - 1^3 &= 125 - 1 = 124 = 4 \times (3 \cdot 3 \cdot 3 + 2^2) \\ 9^3 - 5^3 &= 729 - 125 = 604 = 4 \times (3 \cdot 7 \cdot 7 + 2^2) \\ 13^3 - 9^3 &= 2197 - 729 = 1468 = 4 \times (3 \cdot 11 \cdot 11 + 2^2) \\ 17^3 - 13^3 &= 4913 - 2197 = 2716 = 4 \times (3 \cdot 15 \cdot 15 + 2^2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-4)^3 = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n quovis numerum integrum, in formula $4p+1$ contentum.

Radices Cuborum vero inde a numero 2 progredientibus, constructa hac differentiarum serie, apparet esse

$$\begin{aligned} 6^3 - 2^3 &= 216 - 8 = 208 = 4 \times (3 \cdot 4 \cdot 4 + 2^2) \\ 10^3 - 6^3 &= 1000 - 216 = 784 = 4 \times (3 \cdot 8 \cdot 8 + 2^2) \\ 14^3 - 10^3 &= 2744 - 1000 = 1744 = 4 \times (3 \cdot 12 \cdot 12 + 2^2) \end{aligned}$$

Vide & $n^3 - (n-4)^3 = 4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, denotante n quovis numerum integrum, in formula $4p+2$ contentum.

BF-397/7

Hac eadem expressio, differentiam duorum cuborum, quorum radices quatuor unitatibus a se invicem differant, designans, invenietur, si series harum differentiarum, radicibus inde a numero 3 aut 4 incipientibus, construatur, quibus tum in seriebus n omnes numeros in formulis $4p+3$, $4p$ contentos, majores progressionis exponente, denotabit.

Cum itaque littera n omnes numeri in formulis $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$, $4p$ contenti, consequenter omnes numeri integri denotentur, generationem expressioem, differentiam duorum cuborum designantem, quorum radices numero 4 a se invicem differant, esse = $4 \times (3(n-2)(n-2)+2^2)$, concedendum est.

5.

Radicibus cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentes esse = 5, crescentibus, expressio generalis, qua differentia duorum cuborum hac in serie proxime se subsequentium designatur, est = $5 \times (3(n-2)(n-3)+1+(2+4)) = 5 \times (3(n-2)(n-3)+1+2 \times \frac{2+4}{2}) = 5 \times (3(n-2)(n-3)+1+2.3)$, denotante n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus cuborum ab unitate progredientibus, apparet esse

$$6^3 - 1^3 = 216 - 1 = 215 = 5 \times (3.4.3+1+2.3)$$

$$11^3 - 6^3 = 1331 - 216 = 1115 = 5 \times (3.9.8+1+2.3)$$

$$16^3 - 11^3 = 4096 - 1331 = 2765 = 5 \times (3.14.13+1+2.3)$$

$$\text{Unde et } n^3 - (n-5)^3 = 5 \times (3(n-2)(n-3)+1+2.3), \text{ denotante}$$

BF-397/8

littera n quovis numerum integrum, in formula $5p+1$ contentum.

Hac eadem expressio, $5 \times (3(n-2)(n-3)+1+2.3)$ differentiam duorum cuborum exhibens, quorum radices quinque unitatibus a se invicem differant, invenietur, si series harum differentiarum, radicibus inde a numero 2, 3, 4 aut 5 progredientibus, construatur, quibus in seriebus tum littera n in expressione generali, differentiam duorum cuborum his in seriebus proxime se subsequentium, designante, omnes numeros in formulis $5p+2$, $5p+3$, $5p+4$, $5p$ contentos, majores progressionis exponente, denotabit.

Hanc itaque expressionem, $5 \times (3(n-2)(n-3)+1+2.3)$, differentiam duorum cuborum exhibentem, quorum radices quinque unitatibus a se invicem differant, generationem locum habere, quod nempe eadem plane ratione, qua in superioribus expressionibus demonstrandis usi sumus, demonstrari, potest, concedas, oportet.

6.

Radicibus cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentes esse = 6, crescentibus, expressio generalis, qua differentia duorum cuborum hac in serie proxime se subsequentium designatur, est = $6 \times (3(n-3)(n-3)+(1+3+5)) = 6 \times (3(n-3)(n-3)+3^2)$, denotante littera n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus cuborum ab unitate progredientibus, apparet esse

$$7^3 - 1^3 = 343 - 1 = 342 = 6 \times (3.4.4+3^2)$$

$$13^3 - 7^3 = 2197 - 343 = 1854 = 6 \times (3.10.10+3^2)$$

$$19^3 - 13^3 = 6859 - 2197 = 4662 = 6 \times (3.16.16+3^2)$$

$$\text{Unde et } n^3 - (n-6)^3 = 6 \times (3(n-3)(n-3)+3^2), \text{ denotante}$$

BF-397/7

Hac eadem expressio, differentiam duorum Cuborum, quorum radices quatuor unitatibus a se invicem differant, designans, invenietur, si series harum differentiarum, radicibus inde a numero 3 aut 4 incipientibus; constuantur, quibus tum in seriebus n omnes numeros in formulis $4p+3$, $4p$ contentos, majores progressionis exponente, denotabit.

Cum itaque littera n omnes numeri in formulis $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$, $4p$ contenti, consequenter omnes numeri integri denotentur, generationem expressionem, differentiam duorum Cuborum designantem, quorum radices numero 4 a se invicem differunt, esse = $4 \times (3(n-2)(n-2) + 2^2)$, concedendum est.

S.

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentes esse = 5, crescentibus, expressio generalis, qua differentia duorum Cuborum hac in serie proxime se subsequenterum designatur, est = $5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + (2+4)) = 5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2 \times \frac{2+4}{2}) = 5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2.3)$, denotante n quovis numero integro, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus Cuborum ab unitate progredientibus, apparet esse

$$6^3 - 1^3 = 216 - 1 = 215 = 5 \times (3.4.3 + 1 + 2.3)$$

$$11^3 - 6^3 = 1331 - 216 = 1115 = 5 \times (3.9.8 + 1 + 2.3)$$

$$16^3 - 11^3 = 4096 - 1331 = 2765 = 5 \times (3.14.13 + 1 + 2.3)$$

$$\text{Inde et } n^3 - (n-5)^3 = 5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2.3), \text{ denotante}$$

BF-397/8

littera n quovis numero integro, in formula $5p+1$ contentum.

Hac eadem expressio, $5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2.3)$ differentiam duorum Cuborum exhibens, quorum radices quinque unitatibus a se invicem differant, invenietur, si series harum differentiarum, radicibus inde a numero 2, 3, 4 aut 5 progredientibus, constuantur, quibus in seriebus tum littera n in expressione generali, differentiam duorum Cuborum his in seriebus proxime se subsequenterum, designante, omnes numeros in formulis $5p+2$, $5p+3$, $5p+4$, $5p$ contentos, majores progressionis exponente, denotabit.

Hanc itaque expressionem, $5 \times (3(n-2)(n-3) + 1 + 2.3)$, differentiam duorum Cuborum exhibentem, quorum radices quinque unitatibus a se invicem differant, generationem locum habere, quod nempe eadem plane ratione, qua in superioribus expressionibus demonstrandis usi sumus, demonstrari, potest, concedas, oportet.

6.

Radicibus Cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentes esse = 6, crescentibus, expressio generalis, qua differentia duorum Cuborum hac in serie proxime se subsequenterum designatur, est = $6 \times (3(n-3)(n-3) + (1+3+5)) = 6 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2)$, denotante littera n quovis numero integro, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Etenim constructa differentiarum serie, radicibus Cuborum ab unitate progredientibus, apparet esse

$$7^3 - 1^3 = 343 - 1 = 342 = 6 \times (3.4.4 + 3^2)$$

$$13^3 - 7^3 = 2197 - 343 = 1854 = 6 \times (3.10.10 + 3^2)$$

$$19^3 - 13^3 = 6859 - 2197 = 4662 = 6 \times (3.16.16 + 3^2)$$

$$\text{Inde et } n^3 - (n-6)^3 = 6 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2), \text{ denotante}$$

BF-397/2

n quovis numerum in formula $6p + 1$ contentum.

Eandem plane methodum sequentibus expressionibus jam stabilitas demonstrando, secuti sumus, patet, expressionem $6 \times (3(n-3)(n-3) + 3^2)$, differentiam duorum cuborum, quorum radices numero 6 a se invicem differunt, exhibere, si scilicet radicum inde a numeris 2, 3, 4, 5 aut 6 progredientibus habere, consequenter eam esse generationem veram.

7.

Radices cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est 7, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum cuborum hac in serie proxime se subsequentium designans est $= 7 \times (3(n-3)(n-4) + 1 + (2+4+6))$
 $= 7 \times (3(n-3)(n-4) + 1 + 3 \times \frac{2+6}{2}) = 7 \times (3(n-3)(n-4) + 1 + 3 \cdot 4)$, denotante n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Repetendo argumentationes jam saepius adatas apparet, hanc quoque expressionem generationem valere.

8.

Ex praemissis manifestum est, differentias duorum cuborum, radices in progressionem arithmetica, cujus exponentis est equalis numero pari, crescentibus, non eam sequi legem, quam differentia duorum cuborum sequitur, quorum radices in progressionem arithmetica, cujus exponentis est equalis numero impari, progrediuntur.

Das igitur casus distinguendi sunt.

9.

Radices cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est = numero pari = $2m$, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum cuborum hac in serie proxime se subsequentium designans est $= 2m \times (3(n-m)(n-m) + m^2)$, denotante littera n quovis nume-

BF-397/2^v

n quovis numerum in formula $6p+1$ denotatum.

Eandem plane methodum sequentibus, quoniam expressiones jam stabilitas demonstrando, secuti sumus, patet, expressionem $6 \times (3(n-3)(n-3)+3^2)$, differentiam duorum cuborum, quorum radices numero 6 a se invicem differunt, exhibent. In quibus radicum inde a numeris 2, 3, 4, 5 aut 6 progredientibus habere, consequenter eam esse generationem veram.

7.

Radices cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est 7, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum cuborum hac in serie proximè se subsequentium designans est $= 7 \times (3(n-3)(n-4)+1+(2+4+6))$
 $= 7 \times (3(n-3)(n-4)+1+3 \times \frac{2+6}{2}) = 7 \times (3(n-3)(n-4)+1+3 \cdot 4)$, denotante n quovis numerum integrum, majorem progressionis exponente.

Demonstr. Repetendo argumentationes jam saepius adatas apparet, hanc quoque expressionem generationem valere.

8.

Ex praemissis manifestum est, differentias duorum cuborum, radices in progressionem arithmetica, cujus exponentis est aequalis numero pari, crescentibus, non eam sequi legem, quam differentia duorum cuborum sequitur, quorum radices in progressionem arithmetica, cujus exponentis est aequalis numero impari, progrediuntur.

Duo igitur casus distinguendi sunt.

9.

Radices cuborum in progressionem arithmetica, cujus exponentis est = numero pari = $2m$, crescentibus, expressio generalis, differentiam duorum cuborum hac in serie proximè se subsequentium designans, est $= 2m \times (3(n-m)(n-m)+m^2)$, denotante littera n quovis numeri.