

II/17
Matth. Tanselmány
Latin műve

Sigillum veri simplex
8l 160 250 x 200 mm Látás

Bolyai Farkas dolgrate a komplex
sámok elméletéről, melyet 1837-ben
mint pályázati dolgratát a Fialonowsky-
Társaságnak küldött.

A B. F.
Dissertatioja az
első tanulmány
a mappábo'l

Sigillum veri simplex.

Inter magnificas turres, earum fundamenta respicere haud designatum
tium (quod certe veri nominis Geometra est) altissimo iudicio Summa
cum reverentia, sequentem theoriam Simplem e rei natura ne-
cessario promanantem, substernere fas sit.

At quem ^{proprium} ~~non~~ Septembris quartio ad me pervenit. tempo-
ris brevis succincta solum referte prebet, in quo diu jam, me-
ris imaginibus in Scientia præcisionem evidentiamque præstantem, de
Mathematicis (tam elementaribus quam publicioribus) fundamentis cum rigore
inhibendis meditando, admodum conquiesci. Siquidem tamen
tempus occipitque haud defutura essent: plura quoque Systemata
tis rigorem evidentiamque Spectantia adnectere animus esset.

Utique autem fuerit, pretium laboris mei cortem est:
quem pervalente dissertatione alia, præstantius didicero; dum
modo tanti aestimer, (quod et enixe exoro), ut ea, simulac ty-
pis excusa fuerit, et mecum (apertis literis nomen locumque
tenentibus) communicetur.

§. 1. Prætermittis inter plura alia conceptibus, æqualitatis, que
absoluta et respectiva est, partis cuius certa species præter
propterea, atque ex his oriunda quantitas, que isem absoluta et re-
spectiva est: considerabimur præter quantitas cum quantitate, co-
tum quantitas cum qualitate (nempæ determinatio certa).
æqualitatis respectiva species insignis est, æqualitas quo-
æ partes, que isem terminata vel interminata est: exemplo
quod prius sunt tria angula inter se æqualia, superba
libus æqualibus; quodam quodvis e partibus alterius æquæ
potest extendi; area circuli autem rectilinea sensu præponi
ori = dici potest. Respective quantitas præter egr. angulus
celeritas, densitas &c.; mo dum peripheriæ diversorum rationum
inier de, aut curva cum recta comparatur; nempæ tum per
vam lineæ polygonalis inscripta intelligitur.

§. 2. Quantitas que quantitate parit conceptus majoritatis
minoritatis que que homogeneitatis, et deinde quantitas
quodam objecta, Arithmeticæ sunt finitæ; eademque homogeneitatis
veritas que præter præterque præterque præterque præterque
portioni eius absolute æqualis: dicuntur A et B homogenea; at
que in eam respectiva dicitur B > A potius
Quantitas præter præter præter præter præter præter præter
simplicitate præter præter præter præter præter præter præter
æqualis est; omnes quantitates ad hanc formam reducere præter
do

BT 51/1

do; quantitates ad firmam quasi temporis recte reducte
fient. Arithmetica objectum; quae dicitur pura, si pro ob-
iecto praeter o. non nisi tempora aut non nisi rectas tractat,
et quidem ita ut nulla determinatione alia affecta sit,
nisi quibus ea conceptus construendi iure sufficere libuerit.

§. 3. Quantitas cum qualitate (nempe certa determinatione
illi tributa) pariter conceptum oppositorum, et deinde magis
rationem. Nempe si $A =$ vel $> B$, atque ex A ipsi B aequale dele-
atur; dicitur B ex A demere, atque A demens, quantumcumque
amur; dicitur B ex A superfit: ac demitionis conceptum extendere
demus B ex A superfit: ac demitionis conceptum extendere
plures casus obvi. monent; quum sapius majus sit, quod
demum oportet, si fieri posset, atque si dematur pars
maxima quae demum potest, remanere adhuc, quod pro-
modum demendum sit, si quid ponatur e quo fieri queat,
eque si quis debeat 3 thaleros, duos possidens, debet 1 saltem
faciens, cum uno thalero manebit demendo, si quid ei
acceperit.

Hinc quodvis objectionum Arithmetica pura determinatione
Sciamaficere licebit, ut si index demitionis aut breviter de-
mendum sit; atque tam ejusdem quam diversa determine-
tionis quantitates componere: per id, quod B demendum
sit, intelligendo; quod si A ex B addi praecipiamur, satis
mistrinatur operatio, cuius resultat (si neutrum ipso-
rum A, B sit 0), in capite A aut B aut determinatione
careant, aut determinatione A affecta sit, id accipiat
tur, a quo tam A quam B (ita uti est cum vel fine A)
praeterea necquidquam continetur; in capite vero
si A et B diversa determinationis fuerint, id ac-
cipiatur, quod remanet, si ex alterutro alteri
aequale deleatur; notando, id quod remanet, si
e determinatione A affecto remanserit, determina-
tione B rescindi; in capite vero, si alterutrum 0
fuerit, in utroque primum caput alterum acci-
piatur.

Resultatum istud Summa semper generaliore, sed
non tamen generalissima dicitur: atque si S summa
ipsorum $A, B, \dots$ sit, Summa ipsorum S et K dicitur summa
ipsorum $A, B, \dots, K$. et ceterae quantitates determinatio-
ne

ne A affecta, negativa, et quodvis determinatione hac non af-
fecta dicatur positiva. Positivum et negativum autem dican-
tur opposita, atque quantitarum aequalium, praeterquam quod
alterutra (et non utriusque) determinatione A affecta sit, quodvis al-
terius oppositum audit. Qualem vis autem quantitarum deno-
tet $+$ sitve positivum sitve negativum, $-$ vero negati-
vum: sed $+$ quantitas signo praepositum, ipsam hanc mutat
quod $+$ denotet. Porro si denotet positivum, ipsam hanc mutat
vum: sed $+$ quantitas signo praepositum, ipsam hanc mutat
tur: egr. $A+B-C$; intelligatur Summa ipsorum A, B et
oppositum ipsius C &c.

Determinatio quoad positivum vel negativum, dican-
brevis determinatio quoad $+$; altera determinatio, quae im-
genaria pariter, inferius sequetur.

Scholion. Potest oppositum conceptus alteri quoque
constitui: sed simplex ista ex Arithmetica pura in applica-
tam facile transformatur. Egr.

1. Si quis debeat 5 thaleros, possideatque 3; et quae-
ratur: quantumcumque possideat, debeat? manifestum si
5 thalero demendi representetur, et 3 thalero addatur; pro-
dibit summa = 2 thaleris demendis; quibus si acciperent
9 thalero, summa fiet = 7 thaleris positivis.

2. Ita si quis e certo loco progrediatur ad dextram
7 miliaria, et inde ad laevam 8 miliaria recurrat, quae-
terque, quantumcumque et num. ad laevam dextramve de-
vra ad dextram positiva, et via ad laevam negativa
et demenda positiva, summa utriusque respondet. Ita
plurium viarum ad laevam factarum summa negativa, sum-
ma plurium viarum ad dextram factarum positiva addi-
ta quaestioni satisfaciet.

3. In Geometria pariter licet valores ipsius x negati-
vos abscipi a capite earum ad laevam exprimere, sit
has determinatione ea afficere, ut demenda sit; et ab-
scipias ad dextram ea determinatione hanc affectas, positi-
vas accipere. Ita valores functionis lineam exprimantis
positi

Page 4.

propositos ordinatis superioribus, negativis inferioribus repraesentare; atque has demandas ponere fas est.

§. 4. Si $\alpha + \beta = S$; prouti ex α et β queritur S ; proutum est ex S et
alterorum ipsorum α, β querere socium ejus, cum quo summa
 S pvideat. Vocatur operatio hac subtractio: facileque pa-
ter, ut socius ipsius α pvideat, ~~ipso~~ addendum $-\alpha$ esse;
fieri enim $\alpha + S - \alpha = S$.

§. 5. Ex additione comprehensa oritur conceptus sequens.
Si a 0 incipiendo semper aequale addamus, in serie Super
iore semper u, et semper v in inferiore; oritur series
seguens simultanea?

$0 \quad \underline{u} \quad \underline{u+u} \quad \underline{u+u+u} \dots$
 $0 \quad v \quad v+v \quad v+v+v \dots$
 (maximale, c

namque $\circ$ in serie superiore, cum $\circ$ in inferiore simul pro-
natur, et terminat quovis simultaneos Superius inferiusque
simul ~~possunt~~ propin excipiant (Superius inferiusque).
in serie utriusque dicitur memores in serie
quoad v . Diciturque

1. Terminus seriei cuiusque dicitur numerus in serie
superiore quoad α , in inferiore quoad ν . Diciturque
 α unum seriei superioris, terminique in ea cuiusvis, quoad
 ν unum seriei inferioris, terminique in ea cuiusvis, quoad
cum Unitate inferioris omnia confundi non debet.

2. Insignitur autem quivis terminus certo nomine
numerico, eo quidem termini simultanei nomine nu-
merico eodem insigniuntur, Superius quoad α , inferi-
us quoad ν ; atque si egr. n nomen numericum de-
notet, numerus nominis n quoad α , breviter per $n\alpha$,
et numerus nominis n quoad ν per $n\nu$ denotatur.

notes, numeros
et numeros nominis u quoad v
§. Cuiusmodi quaestiones alias praecipue omnes sequuntur (primaria
comprehensum Arithmetica mater): nempe num (tam A quam B
ponit sine determinatione consideratis) B numeros quoad
A fit? et si numerus fit, cuiusnam nominis sit? Si non
num detur tale u, ut quoad idem u tam A quam B nu-
meri sint? et si deus, cuiusnam nominis fit (egr. n) fit B,
et cuiusnam nominis (egr. m) fit A? (quoad idem u). Si

BF 51/20

BF 51/2^u

24/10/19

Page 5.

vero non deter, sique in serie $u, u', u'', u''' \dots$ quibus
 terminus dimidium procedens, $u, u', u'', u''' \dots$
 $m, m', m'', m''' \dots$ nomina numerica sint, et $w < u, w' < u',$
 $w'' < u'', w''' < u''' \dots$ sit; atque sit
 $A = nu = n'u' = n''u'' = n'''u''' \dots$ et
 $B = mu + w = m'u' + w' = m''u'' + w'' = m'''u''' + w''' \dots$

$B = m + u = m' + u' = m'' + u'' = m''' + u''' \dots$
 Operatio nominis numerica, n , m in casu priore,
 et n , n' , $n'' \dots$ atque his respondentia m , m' , $m'' \dots$ in po-
 steriore, quærens vocatur mensuratus; atque A , quod
 quod questio prima fuit, numerus, ~~et~~ numerus, ~~et~~ numerus
 nominis sit, et quod semper ^{ut} numerus quoad u , u' , $u'' \dots$
^{augmetur} et al, dicitur mensura, B vero mensum quoad A
 dicitur. Relationem autem, qualemam mensum sit

Ad questionem autem, quatenam mousem sit
B quoad A? responderet quasi determinativum, si qua
grediantur in casu priore, m(n)um, in posteriore vero
responderet m(n)um $< B < (m+1)(n)$

$$m(n)_{\text{turn}} < 13 < (m+1)(n)_{\text{to}}$$

$$m'(n')_{\text{turn}} \leq 13 \leq (m+1)(n)_{\text{to}}$$

$$m''(n'')_{\text{tum}} \leq \sqrt{3} \leq (m''+1)(n'')^{\frac{1}{2}}$$

Prætereaque id quoque in casum venit: nam A et B
determinationis quoad $\pm$ ejusdem vel diversa fuerint,
idemque quoad determinationem paulo inferius orien-
dam notandum.

§. 7. Mensurando et Cimo et D... quoad A; prome
omnia adhibilia quoad eandem (saltem si a deserv
tione abstrahatur) mensuram communem men
re; ne semper memorare oporteat, quoad quam men
suram operatio facta sit; ut dum inde $n(m)$ cum
dicatur, quoad mensuram communem intelligatur, perin
terque nomen numericum nudum, numerum nomi
nis n quoad eam denotet. Vocatur mensura ista Uni
tas, quam pro quibusvis adhibilibus eandem, quamlibet

BF521

Tex.

gavium densare posse repraesent; iō capibus singulis
constructis facile passim.

Linea sequens pariter ostendit, quod si unius mul-
tiplicationis negativâ fuerit, diversâ determinatio-
nes dunt propinqua, et eadem negativum. Quod item
ad + et - pariter applicatur.

ad + co - pariter applicamus.
 Linea infima, si unitas multiplicatori data,
 ut dictum est, propria unitate gaudeat, open-
 dit, quod si factores eadem quoque ± 1 determi-
 natione gaudeant, factorum reale fit, si diversa,
 imaginarium.

imaginarium.
Notandum autem: quod si ex unisari negati-
vum unisarem tribuere luberes: adhuc sequens
lineam oriri

lineami otto

Ubi inverte, determinationes eadem deus ma-
ginarium, et diversa reale. innes, Sche,

ginarum, et diverse reat.

I. Abstrahendo a determinatione: multiplicator
aut numerus integer est, aut non; si integer,
is aut $= 0$, aut $= 1$, aut > 1 est. Si non; aut
 > 1 aut < 1 est. Atque in quovis casu mul-
tiplicandus aut 0 est, aut non..

Quos solum casus afferre libet

$1=3u, \beta=2u, a=\frac{v \cdot v \cdot v}{1}=3v, b=\frac{v+v}{1}=2v$

$1=3u, 13=2u, a=\sqrt[3]{3}=3v, 0=\sqrt[3]{2}$
ubi multiplicator $13 < 1$, et 6 quoad A acquiescendum cum
 13 adeoque factum et A multiplicato per 13 multipli-
cando minus, offendit, multiplicationis nomen ineptum
esse. Pariter, si $26=27=0$, nempe 0 quoad 0

$1 = iu, \beta = 3u; \alpha = 0 = 1(v=0), \delta = 3(v=0) = 0$; nempse 0 quoad 0 numerus

numeros nominis capitis est, et quod non 0, non si numeros no-
minis 0 est.

II. Quod determinationes quoad $\pm$ et quoad $\pm i$ compositas, casus
Sequentes notantur.

$$-i, +*i, +*i, -i, -i, -*i, -*i, -i$$
$$-i, +*i, -*i, +i; \quad -i, -*i, +*i, +i$$
$$-1, +*3, +*2, -6$$

$-1, +*3, +*2, -6; -1, -*3, -*2, -6$ &c.
 Ubi in quavis linea duo multiplicationis terminus effe-
 patet: in quorum terminus 2 duo multiplicatos, primus
 unitas ipsa, 3^{tes} terminus multiplicandus, ex 1^{to} factum est
 patetque e linea suprema $+*1$ et $-*1$ duo valores in
 primis $V-i$ effe; e 2^{da} vero patet, $V-i. (-V-i) \text{ effe} = 1 =$
 $-V-i. V-i$. Itaque pro $+*1$ scribi $\pm V-i$ poterit
 eorum reale -6 , ex imaginariis $\pm*$

Linea 3^{ra} ostendit faciem reale - 6. ex m^o et +*2; casusque reliqui etiam facile construuntur.

III. Radique in omnibus partibus; quod si factum idem ma
 sibilis fuerint; ut si permixtorum sequentium caput. Nunc

addibiles fuerint; est perm.
nere, prater unum ~~casum~~ sequentibus
linea sequens prius exhibeat deo multiplicatis, in
mana pro reali per imaginariam multiplicato, in
vris vero ostendat schemata pro factoribus permu-

$$-i, \pm 2, \pm 3, -*6; -i, \mp 2, \pm 3, +*6$$

$+1, \pm 3, \pm 2, \pm 6; +1, \pm 3, \mp 2, -0$
Ubi in linea problema oppositum procedentis prioris, n
schemate quoad unicam illi t

Ubi in linea proportionum // ^{Linea ap. D.} quoad unitatem in
triplicatore in quovis Schemate quoad unitatem in
Suis mensurato. ^{part. 1.} patet constructis schematibus.

Quamobrem cum facile pateat constructis schematibus, pro hoc casu quoque, si multiplicator quoad + in futurum, factum ex factoribus permixtis idem maneat; ut (x^2) , quod (x^2) factorum non minus factum, pro casibus quatuordecim adhibere solemus; statim lex ex casibus quoad unitatem quantitati datur, sequens, ut dicitur, multiplicandus reale est, multiplicator quoad + multiplicandus, negativa unitate praedita est, utroque utrobique deorminatione relictum.

relinens. Patetque hinc (per lineam loquentem), si α reale sit, $+* \alpha$ esse factum ex α et $+V-1$ (aut α et $-V-1$). Nempe si $+*1$ fuerit multiplicator (ad $+V-1$ (aut α et $-V-1$)). Unius per Regulam plane dictam propria accipienda $+V-1$, unius per Regulam plane dictam propria accipienda $+V-1$, quom multiplicandus realis α sit; si vero realis sit multiplicator, manet propria eius unius.

$+1, +\alpha, +*1, +*\alpha; +1, +*1, +\alpha, +*\alpha$

§. 12. Hucusque non nisi quantitates pura sunt confiderata: at prouti quantitates determinativae quoad $+d$, versas (§. combinatae, et determinatione quoad i diversa praedictas (alioquin adhibiles), commutere libet, tam in additione, quam reliquis operationibus; ita tamen ut realia seorsim, et pure imaginaria item seorsim summa, solummodo connexa, nunquam confundantur.

Egr. $2-*3+*5-7=-5+*2$, quod terminorum ad laevam, summa dicuntur; eoque summa sensu generali exemplum (§. 1) Reale cum imaginario connexum, mixtum dicere licet.

Atque iam multiplicatio purorum ad mixta quoque extenditur: nempe factum per multiplicatorem purum p , et multiplicando reali A et imaginario $*B$ summa, dicitur factum e mixto $A+*B$ multiplicato per p . Imo factum, et multiplicando mixto M , per reale α , et imaginarium $*\beta$ multiplicato, summa quoque dicitur factum e mixto M per $\alpha+*\beta$ multiplicato.

Quum vero expressiones plerumque valorum dentur, si x, y, z tales expressiones dentur, ut valor quilibet ipsius x sit factum ex aliquo valore ipsius y per aliquem valorem ipsius z multiplicato; atque quilibet valor ipsius y per quemlibet valorem ipsius z multiplicatus, aliquis valor ipsius x sit: dicitur x factum ex y multiplicato per z .

Imo et prout extenditur sensus multiplicationis (quod deinde et divisionis. Subsequenda conceptum generalem parit): nempe si k multiplicatum per c sit k ; atque

argue k sit aut $=k$ aut sit limitis ejus, et k' aut $=k$ aut limitis ejus sit, atque C' aut $=C$ aut limitis ejus sit: tum quoque dicuntur k factum ex k' multiplicato per C' .

Scholion. De limitis conceptu, fundamentoque deperere brevis negantia hanc permutatam solam message sufficit, et hinc re compreso etiam ∞ pro limite quantitatibus, quod dabile majus crescentis accipi, nempe hoc per ∞ , quod ∞ sit limitis, intelligi.

§. 13. Facile autem patet, factum e mixto per purum, esse mixtum, se purum per purum esse purum, at e mixto per mixtum in certo casu esse mixtum, purum in alio: adeoque et hic (casu praeter excepto) analogo legi determinationis dicitur in multiplicatione legi valere.

Sit exemplo mixtum $-1+*\alpha$ per se multiplicandum, et factum item per $-1+*\alpha$ multiplicetur; denotante α radicem propriam ex 3; quo pacto $*\alpha \cdot *\alpha = -3$, et $*\alpha = V-3$. Hic operatio, per jam stabilita sequens.

$$\begin{array}{r} -1+*\alpha \\ -1+*\alpha \\ \hline 1-*\alpha-*\alpha-\alpha\alpha = 1-*2\alpha-\alpha\alpha \\ \hline -1+*\alpha \\ -1+*2\alpha+\alpha\alpha \\ \hline * \alpha + *2\alpha\alpha - * \alpha\alpha\alpha \\ \hline -1+*3\alpha+3\alpha\alpha - * \alpha\alpha\alpha; \text{ quod subsp.} \\ -1+*3\alpha+9-3\alpha = 8, \text{ cujus} \end{array}$$

novo valore ipsius α sit $-1+*3\alpha+9-3\alpha=8$, cujus itaque $-1+V-3$ radix cubica est.

§. 14. E multiplicatione nova operatio oritur: nempe prout (§. 11) ex α, β quarebatur $S = \alpha + \beta$, ex S et alutro ipso rum α, β questio de huius socio quarendo extra est: in si prius e multiplicando A et multiplicatore B factum cum B quarebatur; proutem est, e facto B supposito et multiplicando A multiplicatorem B , aut item e B et multiplicatore B multiplicandum, quoque e facto et alterutro factore, huius socium quarende. Operatio

Page 12.

