Sammlung

verschiedener Gegenstände

aus dem Gebiethe

der

Mathematik & Astronomie

angefangen den

30ten Jänner 1824.

Schwierigkeit Seite 264. 20te Aufgabe. Auflösung.

1. 1) Das ursprüngliche Verhältniß ist $= \left[mx + n(a-x)\right] : (b+c-a) = mx : b-x$

Auflösung der Gleichung.

1) $(b-x)\{mx+n(a-x)\} = mx(b+c-a)$. Verrichtet man die angezeigte Multiplikation so ist (2) $bmx + abn - bnx - mx^2 - anx - nx^2 = bmx + cmx - amx$; oder weil bmx weg bleibt (3) $abn - bnx - mx^2 - anx + nx^2 = cmx - amx$. Nun, wenn alle Glieder mit x nach der rechten Seite geschrieben werden

4) $abn = bnx + mx^2 + anx - nx^2 + cmx - amx$; oder, wenn man die Gleichung ordnet: 5) $\frac{abn}{m-n} = x^2 + x\left(\frac{bn+an+cm-am}{m-n}\right)$. Oder, wenn man das Quadrat ergänzt 6) $\frac{abn}{m-n} + \left\{\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}\right\}^2 = x^2 + x\left(\frac{bn+an+cm-am}{m-n}\right) + \left\{\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}\right\}^2$; oder wenn man aus beyden Theilen die Quadratwurzel zieht: 7) $\sqrt{\frac{abn}{m-n} + \left\{\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}\right\}^2} = x + \frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}$

und endlich: 8) $x = -\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)} \pm \sqrt{\frac{abn}{(m-n)} + \left\{\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}\right\}^2}$.

Nun ist;	folglich ist
$m = 17$	$m(a-c) = 17 \cdot 960 = 16320$
$a = 2000$	$n(a+b) = 12 \cdot 3710 = 44520$
$b = 1710$	$m(a-c) - n(a+b) = -28200$
$c = 1040$	$\frac{m(a-c) - n(a+b)}{m-n} = -2820$
$n = 12$	$\frac{abn}{m-n} \ldots\ldots = 8208000$
	$\left\{\frac{bn+an+cm-am}{2(m-n)}\right\}^2 = 7902400$

$\sqrt{16160400} = 4020$

Also

$x = -2820 \pm 4020$; das obere Zeichen genommen gibt

$x = 4020 - 2820 = 1200$ *

Schwierigkeit. Seite 265 Aufgabe № 22. Auflösung

2. $x + \frac{12x}{100} = 1000$; $100x + 12x = 100000$; $112x = 100000$; folglich ist $x = \frac{100000}{112} = 892\frac{7}{8}$ fl.

Schwierigkeit. Seite 284. Aufgabe № VI. Auflösung.

3. x; das Vermögen zu Anfange des ersten Jahres; $x + \frac{1}{3}x - 1000 = \frac{4x-3000}{3}$ das Vermögen, zu Ende des ersten Jahres: $\frac{4x-3000}{3} + \frac{4x-3000}{9} - 1000$, das Vermögen zu Ende des zweyten Jahres, welches auch so geschrieben werden kann, $\frac{12x-9000+4x-3000-9000}{9}$ das ist das Vermögen zu Ende des 2ten Jahres war $\frac{16x-21000}{9}$; folglich das Vermögen zu Ende des 3ten Jahres $\frac{16x-21000}{9} + \frac{16x-21000}{27}$ — welches auch so geschrieben werden kann $\frac{48x-63000+16x-21000-27000}{27}$

oder.

oder $\frac{64x - 111000}{27}$. Nun muß dieß gleich seyn dem doppelten Vermögen zu Anfange des ersten Jahres das heißt $\frac{64x - 111000}{27} = 2x$.

$64x - 111000 = 54x$; $10x = 111000$; $x = 11100$ ✱

---

4. Schwierigkeit. Seite 285. Aufgabe No VII. Auflösung.

Es sey x die Anzahl der Lothe des ersten, und y die Anzahl der Lth: des 2ten Stücks. Nach der ersten Bedingung der Aufgabe hat man $x + y = \frac{1}{2}xy$ und nach der zweiten $x^2 + y^2 = 45$; das ist, man hat x und y zu bestimmen, aus den Gleichungen 1) $x + y = \frac{1}{2}xy$ und,

2) $x^2 + y^2 = 45$.

Löst man diese Gleichung auf gewöhnliche Art z. B. durch Substitution auf, so geräth man auf eine höhere Gleichung vom 4ten Grade, welche zugleich verwickelt seyn würde, so nach bisherigen nicht könnte aufgelößt werden, dieße Verwicklung kann aber durch folgendes Verfahren leicht vermieden werden: Multipliziert man die erste Gleichung mit 4, und addiert sowohl, als subtrahiert sie von der 2ten so hat man:

3) $x^2 + y^2 + 2xy = 45 + 4(x + y)$ 4tens $x^2 + y^2 - 2xy = 45 - 4(x + y)$. Aus der dritten Gleichung hat man, weil sie auch so geschrieben werden kann: $(x + y)^2 = 45 + 4(x + y)$ } nach §215.

$x + y = 2 \pm \sqrt{45 + 4} = 9$. Substituirt man nun diesen Werth der Summe $x + y$ statt derselben in der Gleichung 4) so übergeht diese in folgende:

$x^2 + y^2 - 2xy = 9$ oder $(x - y)^2 = 9$ oder $x - y = 3$ aber war $x + y = 9$ folglich hat man durch die Addition $2x = 12$, und durch die Subtraction $2y = 6$; das heißt $x = 6$ und $y = 3$. ✱✱

---

5. Schwierigkeit. Seite 285 No 9. Auflösung.

$x + y = xy = x^2 - y^2$; 1tens $x + y = xy$, 2tens $x + y = (x^2 - y^2)$. Die Gleichung 2) kann auch so geschrieben werden: 3tens $x + y = (x + y)(x - y)$; woraus folgt: 4tens $1 = x - y$; substituiert man den Werth von x aus dieser Gleichung in die erste; so geht diese in folgende

aber 5ter $(1+y)+y = y(1+y)$; das ist 6ter $1+2y = y+y^2$; oder 7ter $y^2-y=1$;
woraus folgt nach §215. 8ter $y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ *. Wird nun dieser Werth von y in die Gleichung No 4 gesetzt; so hat man:

$$x = 1+y = 1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \;*.$$

6.

Scheinigkeit. Seite 285. No 8. Auflösung.

Es sey y der Zuwachs des Grases in Klaftern von einer Wiese zu 100 Klft: in einer Woche; so ist der Zuwachs einer Wiese von 400 Klft: in 7 Wochen $= 28y$; folglich verzehren 8 Pferde in 7 Wochen $= 400+28y$ Klft: Wiese, folglich ein Pferd in einer Woche verzehrt $\frac{400+28y}{7\cdot 8} = \frac{400+28y}{56}$ Klft: Wiese.
Eben so erhält man den Zuwachs einer Wiese von 500 Klft. in 8 Wochen $= 500+40y$ Klft.; und, weil diese Wiese von 9 Pferden in 8 Wochen völlig aufgezehrt wird, so zehrt 1 Pferd in einer Woche in diesem Falle $= \frac{500+40y}{8\cdot 9} = \frac{500+40y}{72}$ Klft:. Es wird aber vorausgesetzt, daß jedes Pferd auf gleiche Weise zehrt; so hat man um y zu bestimmen diese Gleichung:

$$\frac{400+28y}{56} = \frac{500+40y}{72} \text{ woraus folgt } y = 3\tfrac{4}{7} = \frac{25}{7}.$$

Es sey nun x die gesuchte Anzahl Pferde, welche 600 Klft Wiese in 12 Wochen auf gleiche Weise aufzehren sollen; so suche man erst den Zuwachs dieser Wiese von 600 Klft: in 12 Wochen; er ist nach dem vorhergehenden [illegible] und den 600° $= 600 + 72 \times \frac{25}{7} = \frac{6000}{7}$ Klft: also verzehrt ein Pferd in einer Woche $\frac{6000}{7\cdot 12x}$.
Man hat also, um den Werth von x zu bestimmen zwey verschiedene Gleichungen; nämlich: $\frac{6000}{7\cdot 12x} = \frac{400+28y}{56}, \frac{500}{56}$

$\frac{6000}{7\cdot 12x} = \frac{500+40y}{72} = \frac{500+\frac{1000}{7}}{72}$; denn beide denselben Werth für x geben müssen; wodurch die Auflösung der Aufgabe zugleich geprüft wird. Hebt man die Brüche bey der 1ten Gleichung auf, so hat man: $336000 = 42000x$ woraus folgt $x = 8$ *. Behandelt man die zweyte Gleichung eben so, so hat man $432000 = 54000x$, woraus wieder folgt $x = 8$ *.

Scheinigkeit.

7. Schwierigkeit. Seite 283. No 1. Auflösung.

$$x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}x + 3 = \tfrac{1}{4}x$$
$$12x - 6x - 4x + 36 = 3x$$
$$2x + 36 = 3x$$
$$x = 36$$

x die Anzahl der Schüler, vor der Aufnahme der 3en.

8. Schwierigkeit. Seite No 283. No 2. Auflösung.

$$2(2x - 2) - 2 = 1$$
$$4x - 4 - 2 = 1$$
$$4x - 6 = 1$$
$$4x = 7$$
$$x = \tfrac{7}{4} = 1\tfrac{3}{4} = 1 \text{ fl } 45 \text{ kr.}$$

x die Anzahl der Gulden, die sie von dem Kirchengang zu Hause gehabt hatte.

9. Aufgabe. (: die Anwendung dieser Regel zeigt sich bey Aufgaben mit 2 unbekannten Größen.)

Es seye aus Gleichung $ax + by = c$; x und y in ganzen Zahlenfällen unbestimmt zu suchen, wenn a, b, c, in solchen Zahlen gegeben sind.

Auflösung.

Verwandle man den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen zusammenhängenden Bruch, und bilde hieraus partielle Brüche.
Es sey nun N der Zähler und D der Nenner des ~~vorletzten~~ partiellen Bruches und t was immer für eine positive oder negative ganze Zahl: so hat man allgemein $x = \mp Dc - bt$ und

$$y = \pm Nc + at$$

wo die obern Zeichen genommen werden müssen wenn $Nb > Da$ ausfällt; sonst die untern. *

(9) Aus Meyer Hirschs Beyspielen über die Algebra.
Seite 162. 3te Aufgabe.

Jemand

Jemand hat 2640 Thaler, und darunter $4\frac{1}{2}$ Mahl so viel Münze als Courant. Wie viel hat er von jeder Münzsorte?

Auflösung.

Er habe z. B. x Münze so ist die Anzahl des Courants $= 2640 - x$ und da er aber $4\frac{1}{2}$ Mahl so viel Münze als Courant hat, so ist die Gleichung:

$x = (2640 - x) \cdot 4\frac{1}{2}$. Und diese aufgelöset gibt $x = 480$ Thaler Courant und 2160 Thlr: Münze. ×

Ebenfalls aus schon benannten Buche. Seite 163. Aufgabe N 6. Auflösung.

Eine Summe von 1200 Thalern soll unter 2 Personen A und B so getheilt werden, daß sich der Antheil des A zum Antheile des B verhalte, wie 2 zu 7. Wie viel erhält jeder.

Es sey x die Anzahl der Thaler so A erhält, so erhält B $= 1200 - x$, folglich findet folgendes ~~Gleichung~~ Verhältniß statt: $x : 1200 - x = 2 : 7$; und da bey jedem Verhältniße die Summe der äußern, der Summe der mittlern Glieder gleich ist; so kann dieses Verhältniß in folgende Gleichung umgeschaffet werden, nämlich: $7x = 2400 - 2x$. Lößt man nun diese Gleichung auf, so erhält man $x = 266\frac{2}{3}$ nämlich dieß ist der Antheil des A und der Antheil des B ist $= 933\frac{1}{3}$ Th. ×

---

10. Beweis des obigen Satzes N° 9, daß in einer Gleichung von der Gestalt: $ax + by = c$, worinn a, b, und c ganze, und a, b, auch zugleich Primzahlen unter sich sind, alle möglichen Werthe von x und y in ganzen Zahlen gefunden werden können.

Der Beweis hat zwey Theile. 1) daß, wenn man nur für einen Fall die zusammengehörigen Werthe von x und y kennt, man auch alle möglichen anderen Werthe, derselben Größe finden könne. 2) daß ein Werth für x und

zusammengehörigen

zusammengehörigen für y in ganzen Zahlen immer directe gefunden werden können.

Erster Theil des Beweises.

Es sey durch irgend einen Versuch bekannt, daß $x = \alpha$, und $y = \beta$ ist, wo nothwendig sowohl α als auch β ganze Zahlen seyn müssen; so geht die gegebene Gleichung: in $ax + by = c$ in folgende über $a\alpha + b\beta = c$. Hieraus folgt, durch bloße Subtrakzion der zweiten Gleichung von der ersten $a(x-\alpha) = -b(y-\beta)$ und hieraus wieder unmittelbar:

$$x - \alpha = \frac{-b(y-\beta)}{a}$$

Nun weil nach der Hypothese der Aufgabe, b und a unter sich Primzahlen sind, so muß $y - \beta$ durch a theilbar seyn, damit der Quotient $= x - \alpha$ eine ganze Zahl werde; folglich ist, wenn t was immer bedeutet: $y - \beta = at$ und weil oben $a(x-\alpha) = -b(y-\beta)$ war, so ist auch wenn man hierin statt $y - \beta$ seinen Werth at substituirt: $x - \alpha = -bt$. Und aus den Gleichungen:

$y - \beta = at$ und

$x - \alpha = -bt$ folgt

$y = \beta + at$

$x = \alpha - bt$

wodurch der erste Theil des Beweises geendiget wird.

Zweyter Theil des Beweises.

Hat man den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt, und hieraus die partiellen Brüche herausgebracht, so ist aus der Lehre über die zusammenhängenden Brüche, wenn der vorletzte partielle $\frac{N}{D}$ seyn sollte, $Nb - Da = \pm 1$ je nachdem $Nb > Da$ oder $Nb < Da$ gefunden wird, oder, was einerley ist, je nachdem die Anzahl aller partiellen Brüche gerade oder ungerade ist.

Erster Fall

Es sey $Nb > Da$ so hat man

$Nb - Da = 1$, folglich

$Nbc - Dac = c$, die Gleichung mit der

$by + ax = c$ Gleichung verglichen gibt:

$x = -Dc = \alpha$ und $y = Nc = \beta$; folglich

wegen

wegen $x = \alpha - bt$ und $y = \beta + at$

$x = -Dc - bt$

$y = +Nc + at$

Zweiter Fall.

Es sey $Nb < Da$; so hat man:

$Nb - Da = -1$, daß ist

$-Nb + Da = 1$, oder

$Dac - Nbc = c$, dieses verglichen mit der gegebenen Gleichung

$ax + by = c$ giebt

$x = +Dc = \alpha$ und

$y = -Nc = \beta$ folglich wegen: $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$

$x = +Dc - bt$

$y = -Nc + at$; folglich hat man, wenn die Resultate beyder Fälle zusammen gezogen werden:

$x = \mp Dc - bt$ (die obern Zeichen muß man dann genommen werden, wenn

$y = \pm Nc + at$) $Nb > Da$, oder, wenn die Anzahl aller partiellen Brüche gerade ist, die untern, im entgegengesetzten Falle.

10) Aus Meyers Hirsch Rechenbuch. Von den Permutationen.

1tens Die Anzahl der Versetzungen von N verschiedenen Elementen ist $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots$ bis $N(N-1)$.

2tens Befinden sich unter den gegebenen Elementen mehrere gleiche, die Summe $l+m+n+p+q$ etc $= N$ ist, die Zahl der Versetzungen der Complexionen $a^l b^m c^n d^p e^q \ldots\ldots$

$$= \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (N-1)N}{1.2.3 \ldots l \times 1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

$$= \frac{(l+1)(l+2)(l+3) \ldots\ldots (N-1)N}{1.2.3 \ldots m \times 1.2.3.4 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3) \ldots\ldots (N-1)N}{1.2.3 \ldots l \times 1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \ldots\ldots (N-1)N}{1.2.3 \ldots l \times 1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3) \ldots\ldots (N-1)N}{1.2.3 \ldots l \times 1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

$$= \frac{(q+1)(q+2)(q+3) \ldots\ldots}{1.2.3 \ldots l \times 1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q}$$

u. s. w.

wo der Producte $1.2.3 \ldots l$ u. s. w. so viele sind als Buchstaben in der Complexion sind

Aufgabe

11 Aufgabe, Seite 247 Schwierigkeit.

Aufgabe.

Wie groß ist die Einlage, wenn, für ein Zettel von 10 Zahlen, das Ambo zu 10 und der Terno zu 100 Dukaten :/: den Dukaten zu 4 fl gerechnet :/: hinaus bezahlt wird.

Auflösung

Es sey die Einlage für die Amben = y und für die Ternen = z und endlich x die gesammte Einlage, also $x = y + z$; so wird in einem solchen Falle die Einlage für jedes Ambo $\frac{480}{n(n-1)}$ fach zurückbezahlt, folglich ist laut Bedingung der Aufgabe $\frac{480y}{n(n-1)} = 40$ für $n = 10$; Nun löset man diese Gleichung auf, so folgt daraus unmittelbar $y = \frac{40 \times 90}{480}$ $= \frac{3600}{480}$ Nur die Division verrichtet gibt $y = 7\frac{1}{2}$ fl. Man muß also sieben und einen halben Gulden setzen, um für ein Ambo 10 Duk: zu erhalten. Und aus eben diesen Gründen, weil die einzelne Einlage für jeden Terno $\frac{28800}{n(n-1)(n-2)}$ fach zurückbezahlt wird, so hat man laut Bedingung der Aufgabe die Gleichung $\frac{28800z}{n(n-1)(n-2)} = 400$. Dieses aufgelöset gibt unmittelbar $z = \frac{400 \times 720}{28800} = \frac{720}{72} = 10$ fl.

Folglich muß man $y + z = 10 + 7\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$ fl setzen, um für ein Ambo 10 und für einen Terno 100 Dukaten zu erhalten.

12 Schwierigkeit Seite 353 Formel № 4.

Auflösung.

Hauptformeln I. $t = aq^{n-1}$; II $s = \frac{tq-a}{q-1}$.

Aus der ersten Formel folgt $q^{n-1} = \frac{t}{a}$; oder $q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$. Substituirt man den Werth von q in II welche auch so geschrieben werden kann: $sq - s = tq - a$; oder $(s-t)q = s - a$, so erhält man $(s-t)\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$; und wenn man beyderseits die $(n-1)$te Potenz nimmt; $(s-t)^{n-1} \cdot \frac{t}{a} = (s-a)^{n-1}$. Multiplizirt man endlich beyderseits mit a und überträgt den rechten Theil der Gleichung in die linke Seite; so folgt:

$t(s-t)^{n-1} \ldots$

$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$ *.

Anders.

Aus I. folgt $q^{n-1} = \frac{t}{a}$, oder $aq^{n-1} = t$.

Aus II. . . . $sq - s = tq - a$, das ist

$q(s-t) = s-a$ oder wenn man

beyde Theile auf die $(n-1)$ Potenz erhebt: $q^{n-1}(s-t)^{n-1} = (s-a)^{n-1}$, oder

$aq^{n-1}(s-t)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$ oder, wenn man statt aq^{n-1} seinen Werth t substituirt:

$t(s-t)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$ das ist $t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$ *

13. Schwierigkeit. Seite 353 Formel 8.

Auflösung.

$$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

Denn wenn man den Werth $q = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ aus I in II substituirt so hat man:

$$s = \frac{tq-a}{q-1} = \frac{t\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit $a^{\frac{1}{n-1}}$, so ist weiter

$$s = \frac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{t^{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} - a^{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

14. Schwierigkeit. Seite 354. Formel Nr 12.

Diese Gleichung ist identisch mit No 4, nur die Zeichen sind verändert, welche aber ohne weiters hergestellt werden kann.

15. Schwierigkeit. Seite 354. Formel 15.

$$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s-a}{a} = 0.$$

Denn substituirt man $t = aq^{n-1}$ in II so erhält man:

$s = \frac{aq \cdot q^{n-1} - a}{q-1}$; oder $sq - s - aqq^{n-1} + a = 0$, oder was dasselbe ist,

$-sq + s + aqq^{n-1} - a = 0$ oder $aq^n - sq + s - a = 0$, oder mit a dividirt:

$q^n - \frac{s}{a}q$

$$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s-a}{a} = 0 \ *.$$

16 Schwierigkeit. ~~Schwierigkeit~~ Seite 354 Formel №16.

Auflösung.

$q^n - \frac{s}{s-t} \cdot q^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0.$

Denn substituirt man den Werth $a = \frac{t}{q^{n-1}}$ aus I in II. so hat man

$s = \frac{tq - \frac{t}{q^{n-1}}}{q-1}$, oder $sq - s - tq + \frac{t}{q^{n-1}} = 0$, oder wenn man alles mit q^{n-1} multiplizirt,

$sqq^{n-1} - sq^{n-1} - tqq^{n-1} + t = 0$ das ist $sq^n - sq^{n-1} - tq^n + t = 0$, oder

$(s-t)q^n - sq^{n-1} + t = 0$, und endlich wenn man alles durch $s-t$ dividirt:

$\frac{s}{(s-t)} q^{n-1} + \frac{t}{(s-t)} = 0$ *.

17. Schwierigkeit Seite 354. Formel № 18.

Diese Formel ist sowohl nach der Anweisung des Verfassers, als aus der Formel № 4 leicht zu bilden.

18 Schwierigkeit. Seite 372 § 270.

Auflösung.

Es ist diese ~~[illegible]~~ Gleichung $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ gegeben, man soll den unbekannten Exponenten x daraus suchen, so folgt hieraus: $(\log. a^x c^{qx} = \log b^{mx-n})$ nämlich $(x \log. a + qx \log c = mx \log. b - n. \log. b)$ und wenn man $mx \log. b$ auf die andern Seite bringt, so erhält man: $-mx \log b + x \log a + xq \log. c = -n \log.$ Nun verändert man die Zeichen so hat man $(mx \log b - x \log a - xq \log c - n \log. b)$ folglich ist $x = \frac{n. \log. b}{(mx \log. b - x \log a - xq \log. c)} = x = \frac{n. \log. b}{(m \log b - \log a - q \log. c)}$ *

19 Schwierigkeit. Seite 373. §. 270.

Auflösung.

Es

Es ist die Gleichung: $ac^{mx} - bc^{\frac{mx}{2}} = d$ gegeben, man soll durch Hülfe der Logarithmen x gefunden werden, so ist $c^{mx} - \frac{b}{a} \cdot c^{\frac{mx}{2}} = \frac{d}{a}$ wenn man alles alles mit a dividirt; und nach (§ 215.) $c^{mx} - \frac{b}{a} \cdot c^{\frac{mx}{2}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{d}{a}$ woraus $c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}$ folgt. Ferner $\log. c^{\frac{mx}{2}} = \log. \left\{\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}\right\}$; nämlich ~~endlich~~ $\frac{mx}{2} \times \log c = \log \left\{\frac{b \pm \sqrt{(b^2+4ad)}}{2a}\right\}$ und endlich $x = \frac{2}{m \cdot \log c} \times \log. \left\{\frac{b \pm \sqrt{(b^2+4ad)}}{2a}\right\}$. *

20

Schwierigkeit, Seite 382.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl $= x$ die mittlere $= y$ und die letzte rechts $= z$ so ist laut Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2 = 104 \quad . \quad . \quad . \quad A$$

$$y^2 = 2xz + 4 \quad - \; - \; - \quad B$$

$$100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x \quad - \; - \; - \quad C$$

Aus C findet man $x = \frac{99z+594}{99} = z+6$

diesen Werth in A und B substituirt, giebt:

$$z^2 + 12z + 36 + y^2 + z^2 = 104 \quad - \; - \; - \quad D$$

$$y^2 = 2z^2 + 12z + 4 \quad - \; - \; - \quad E$$

diese Gleichung E von D abgezogen, gibt: $2z^2 + 12z + 36 = 104 - 2z^2 - 12z - 4$ woraus: $z = -3 + \sqrt{25} = 2$ folgt. diesen Werth in den Gleichung E und C substituirt giebt: $y = 6$ und $x = 8$. Es ist demnach die gesuchte Zahl $= 862$. *

21. Schwierigkeit Seite 448.

Es ist die Aufgabe gegeben: von folgender Reihe: $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, - - a+(n-1)d$ multiplizirt mit der geometrischen Reihe: $b, bq, bq^2, bq^3, bq^4 - - - bq^{n-1}$ sowohl das allgemeine Glied n als auch die Summenformel zu bestimmen.

Auflösung

Verrichtet man statt die befohlene Multiplikation nämlich

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d. .. \times b, bq, bq^2, bq^3, bq^4 - - -$ so erhält man folgende zusammenges-

zusammengesetzten Reihe: ~~bq~~ $ab, (a+d)bq, (a+2d)bq^2, (a+3d)bq^3$ — — —

Hiervon ist das n^{te} Glied $t = \{a+(n-1)d\}bq^{n-1}$ und das summatorische Glied s erhält man; wenn man jedes Glied in so viele Theile zertheilet, als der Koeffizient von d + Einheiten enthält, nämlich zertheilet man z. B. $(a+3d)bq^3$ so erhält man:

$abq^3 + bdq^3 + bdq^3 + bdq^3$ so ist $s = ab + abq + bdq + abq^2 + bdq^2 + bdq^2 + abq^3 + dbq^3 + dbq^3 + dbq^3 + abq^4 - - - - abq^{n-1} + bdq^{n-1} + bdq^{n-1} + bdq^{n-1} + bdq^{n-1} - - - - bdq^{n-1}$

oder

$$\begin{array}{l} s = ab \\ + \; abq + bdq \\ + \; abq^2 + bdq^2 + bdq^2 \\ + \; abq^3 + bdq^3 + bdq^3 + bdq^3 \\ + \; abq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4 \\ + \; abq^{n-1} + abq^{n-1} + abq^{n-1} + abq^{n-1} + abq^{n-1} - - - - abq^{n-1} \end{array}$$

Nun ist die Summe der ersten Kolonne von unten nach oben gezählt $= \frac{abq^n - ab}{q-1}$ vermög der Formel $s = \frac{tq-a}{q-1}$ die Summe der zweyten Kolonne, welche um ein Glied weniger enthält, ist vermög eben derselben Formel $= \frac{bdq^n - bdq}{q-1}$, die Summe der dritten $= \frac{bdq^n - bdq^2}{q-1}$ die Summe der 4^{ten} $= \frac{bdq^n - bdq^3}{q-1}$ die Summe der 5^{ten} $= \frac{bdq^n - bdq^4}{q-1}$ u. s. w. Folglich ist $s = \frac{abq^n - ab}{q-1} + (n-1) \times \frac{bdq^n}{q-1} - \frac{bdq}{q-1} \times (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + - - - + q^{n-2})$ und endlich, wenn man anstatt der hier in Klammern eingeschlossenen Reihe den gleichen Ausdruck $\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ setzet, und alles gehörig reduziret $s = \frac{ab(q^n-1) + nbdq^n}{q-1} - \frac{bdq(q^n-1)}{(q-1)^2}$.

22 Wahrscheinlichkeit. Seite 351. § 253. Formel No 1.

~~Auflösung~~. Bedingung.

Zu suchen daß $t.(s-t)^{n-1} - a.(s-a)^{n-1} = 0$ ist.

Auflösung.

Dieses wird durch das substituiren des Werthes von q aus der ersten in die zweyte Formel aufgelöset, nun ist die erste Formel: $t = aq^{n-1}$ und die zweyte $= s = \frac{tq-a}{q-1}$. Aus 1 folget $q^{n-1} = \frac{t}{a}$, $q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$. Substituirt man dieser Werth von q in 2 welche auch so geschrieben werden kann:

$sq - s = tq - a$ oder $(s-t)\,q = s - a$, also erhält man $(s-t)\sqrt[n]{\frac{t}{a}} = s - a$, und wenn man beyderseits die $(n-1)$te Potenz nimmt: $(s-t)^{n-1}\cdot\frac{t}{a} = (s-a)^{n-1}$: Multiplizirt man endlich beyderseits mit a, und überträgt den ersten Theil der Gleichung in die linke Seite; so folgt: $t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$ ×

23. Schwierigkeit. Seite 317. § 253.

Auflösung.

Da er das erstemal 1, das zweyte Mal 2, und das dritte Mal 3 Groschen setzt u. s. w. so setzt er das $n$te Mahl n Groschen, und wenn er da trifft, so bekommt er $14n$ Groschen zurück, er hat aber in allem gesetzt: $\frac{1}{2}n(1+n)$ folglich ist $\frac{1}{2}n(1+n) = 14n$ wenn er nichts gewinnen noch verspielen soll. Hieraus ist $n = 27$ Mal.

24. Schwierigkeit Seite 419 § 293.

Wenn man zu jeden beliebig angenommenen Werth für d. $A = m$ die zu diesem Systeme gehörige Grundzahl finden will, so verfahre man also:

Man setze die Grundzahl $= y + 1$ weil sie grösser seyn muß, als 1, weil 1 für sich was immer für eine Potenz erhoben immer 1 verbleibt, und es ist jeder Logarithmus $(1+y) = 1$, weil in jedem Systeme der Logarithmus der Grundzahl $= 1$ ist. Es ist aber auch $\log.(1+y) = m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + - - -\right)$ vermöge § 289. also auch $1 = m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \pm \frac{y^4}{4} + - - -\right)$ weil $l(1+y) = 1$ ist, und auch $m^{-1} = \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + -\right)$ — A. Nun setze man nach § (288) $y = \left(Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + - - -\right)$ — B so ist $y^2 = \left(A^2m^{-2} + B^2m^{-3} + C^2m^{-4} + D^2m^{-5} + - - -\right)$; $y^3 = \left(A^3m^{-3} + B^3m^{-4} + C^3m^{-5} + D^3m^{-6} + - -\right)$ und $y^4 = \left(A^4m^{-4} + B^4m^{-5}\right)$ u. s. w. Nun wenn man diese Werthe für y, y^2, y^3, y^4, in der Gleichung A so ist

$$\begin{array}{l} 0 = Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + - - - - - \\ \quad - m^{-1} - \frac{1}{2}A^2m^{-2} - \frac{1}{2}B^2m^{-3} + C^2m^{-4} - - - - \\ \qquad\qquad + \frac{1}{3}A^3m^{-3} - B^3m^{-4} \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}A^4m^{-4} \end{array}$$

oder nochmahls $0 = Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + - - -$

$$- m^{-1} + \tfrac{1}{2}A^2 m^{-2} - ABm^{-3} - \tfrac{1}{2}B^2 m^{-4} - - - -$$
$$+ \tfrac{1}{3}A^3 m^{-3} - AC m^{-4}$$
$$+ A^2 B m^{-4}$$
$$- \tfrac{1}{4}A^4 m^{-4}$$

woraus nach § (383) folgt $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{1.2.3.4}$, $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, u.s.w.

Substituirt man diese Werthe nun in der Gleichung L, so hat man:

$y = m^{-1} + \frac{m^{-2}}{1.2} + \frac{m^{-3}}{1.2.3} + \frac{m^{-4}}{1.2.3.4} + - - - -$ und

$1+y = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1.2.m^2} + \frac{1}{1.2.3.m^3} + \frac{1}{1.2.3.4.m^4} + - - - -$

Will man nun z. B. die Grundzahl des Systemes der natürlichen Logarithmen finden, so setze man $m = 1$ so ist wenn man diesen Werth substituirt: $1+1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + -$ $= 2,7182818$ wenn man diese unendliche Reihe summirt.

---

25 Schwierigkeit. Seite 461.

Auflösung

Das summatorische Glied für die natürlichen Quadratzahlen findet man indem in der allgemeinen Formel $= s =$ etc $m = 2$ für die natürlichen Kubikzahlen hingegen wenn ebendaselbst $m = 3$ gesetzt wird

---

26 Schwierigkeit. Seite 478.

Auflösung.

für $x = -3$, ist:

$$\left.\begin{aligned} +x^5 &= -243 \\ +3x^4 &= +243 \\ -7x^3 &= +189 \\ -25x^2 &= -225 \\ +8x &= -24 \end{aligned}\right\}$$

1/26 Schwierigkeit. Seite 54.

Auflösung.

Es ist aus der Gleichung $c^2 = \frac{1}{2}a^2(5-\sqrt{5})$, a zu suchen. Erstens findet man $a^2 = \frac{2c^2}{5-\sqrt{5}}$, ferner wenn ich beydes, Zähler und Nenner mit ebenderselben Zahl multiplizirt: $a^2 = \frac{2c^2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = a^2 = \frac{10c^2+2c^2\sqrt{5}}{20}$ und wenn man dieses mit 2 dividirt, um es abzukürzen: $a^2 = \frac{5c^2+c^2\sqrt{5}}{10}$. Und nun kann a gefunden werden nämlich $a = \sqrt{\frac{5c^2+c^2\sqrt{5}}{10}} = a = c\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Nun kann man jeden beliebigen Werth für c annehmen.

2./27 Schwierigkeit. Seite 55.

Auflösung.

Es soll aus der Gleichung $a\sqrt{2-\sqrt{2}} = f$, a gesucht werden.

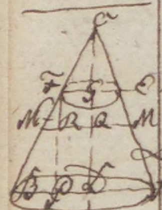
$a\sqrt{2-\sqrt{2}} = f$ daraus findet man erstens $a = \frac{f}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ und wenn alles zum Quadrat erhoben wird, um das Wurzelzeichen hinwegzubringen: $a^2 = \frac{f^2}{2-\sqrt{2}} = a^2 = f^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und folglich $a = f\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}$. *

3./28 Schwierigkeit. Seite 124 Aus diesen 2 Gleichungen $x + \frac{2a}{x} + z = b$ und $z^2 = x^2 + \frac{4a^2}{x^2}$ ist z, y, und, x, zu suchen:

Auflösung.

Aus der ersten Gleichung findet man $z = b - x - \frac{2a}{x}$ oder, wenn man beyde Theile mit dem Nenner x multiplizirt: $xz = bx - x^2 - 2a$, und $z = \frac{bx - x^2 - 2a}{x}$. Ferner findet man aus der zweyten Gleichung $z = \sqrt{x^2 + \frac{4a^2}{x^2}}$ $= z = \sqrt{\frac{x^4+4a^2}{x^2}}$. Nun wenn 2 Größen einer Größe wechselweise gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; folglich ist auch $\frac{bx - x^2 - 2a}{x} = \sqrt{\frac{x^4+4a^2}{x^2}}$ oder wenn man beyde Theile zum Quadrat erhebt, um das Wurzelzeichen des 2ten Theils weg zu schaffen, $= \dfrac{b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 - 4abx + 4ax^2 + 4a^2}{x^2} = \dfrac{x^4 + 4a^2}{x^2}$ und hieraus $b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 - 4abx + 4ax^2 + 4a^2 = x^4 + 4a^2$. Nun wenn man diese Gleichung auflöset, so erhält man $x = \dfrac{4a + b^2 + \sqrt{16a^2 - 24ab^2 + b^4}}{4b}$. Substituiren wir diesen Werth für x in der Gleichung $y = \dfrac{aa}{x}$ so erhält man $\dfrac{8ab}{4a + b^2 + \sqrt{16a^2 - 24ab^2 + b^4}}$.

$\dfrac{29}{4}$



Schwierigkeit. Seite 147. Zu beweisen, daß die Oberfläche eines abgestutzten senkrechten Kegels ist gleich dem Produkte, aus der halben Summe der Umkreise beyder Grundflächen, multiplizirt mit der ~~Höhe~~ Seite des abgestutzten Kegels. $= (a+b)c\pi$ wenn man den Halbmesser der einen Grundfläche $= a$ der andern $= b$, und die ~~[illegible]~~ Seite $= c$ setzet. Wir werden auch a mit BD, b mit GF und c mit BF benennen.

Auflösung.

Denn die Oberfläche $ABFE$ ist gleich der Oberfläche ABC — der Oberfläche EFC; nun aber ist die Oberfläche $ABC = a\pi$ als dem halben Umkreis der Grundfläche, multiplizirt mit BC als der Seite des Kegels (§ 493) $= a\pi(BF + FC) = a\pi(c + FC) = a\pi\left(c + \dfrac{bc}{a-b}\right)$ weil $BP : BF = FG : FC$ statt findet. Hieraus findet man: $FC = \dfrac{FG \times BF}{BP}$ und weil $FG = b$, $BF = c$, und $BP = a - b$ ist, so kann man auch $FC = \dfrac{bc}{a-b}$ setzen. Ferner ist die Oberfläche: $EFC = b\pi \times FC = b\pi \times \dfrac{bc}{a-b}$; nach (§ 493). Nun ist die Oberfläche $ABFE$ = der Oberfläche $ABC - EFC = a\pi\left(c + \dfrac{bc}{a-b}\right) - b\pi\left(\dfrac{bc}{a-b}\right)$. Folglich ist sie $= (a+b)c\pi = BF(BD + GF)\pi = \tfrac{1}{2}(2BD.\pi + 2GF.\pi).BF$.

5 / 30 Schwierigkeit Seite 151. Zu beweisen, daß die Kugelfläche ~~der~~ die ganze Oberfläche des herumbeschriebenen Cylinders, und die ganze Oberfläche des herumbeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegen einander verhalten, wie 4:6:9.

Auflösung.

Denn es sey der Halbmesser der Kugel $CK = a$, so ist die Kugelfläche $= 4a^2\pi$ die ganze Oberfläche des Cylinder $= 4a^2\pi + a^2\pi + a^2\pi = 6a^2\pi$ (§ 490) und die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels $= \frac{1}{2} IL.\pi \times ID + IL.\pi \times \frac{1}{4} IL = \frac{1}{2} ID.\pi \times ID + ID.\pi \times \frac{1}{4} ID = \frac{3}{4} ID^2.\pi = 9a^2\pi$ weil $DK = DE + EC + CK = a + a + a$ weil DE die Seite eines regelmäßigen Sechseckes, und folglich dem Halbmesser gleich ist, folglich $DK = a + a + a = 3a$ und $ID^2 = DK^2 + IK^2 = DK^2 + \frac{1}{4} IL^2 = DK^2 + \frac{1}{4} ID^2$ nämlich $ID^2 = \frac{4}{3} DK^2 = \frac{4}{3} . 9a^2 = 12a^2$ ist und endlich ist $\frac{3}{4} ID.\pi = \frac{3}{4} . 12a^2\pi = 9a^2\pi$ folglich verhält sich: $4a^2 : 6a^2 : 9a^2$ oder $4:6:9$. *

6. / 31 Schwierigkeit. Seite 151. Zu beweisen daß die Oberfläche der Kugel die ganze Oberfläche des ~~Cylinders~~ eingeschriebenen gleichseitigen Cylinders, und die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels, sich gegen einander verhalten, wie 16:12:9.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser der Kugel $= a$, so ist die Kugelfläche $= 2a\pi . 2a = 4a^2\pi$, die Oberfläche des Cylinders $= 3a^2\pi$, die des Kegels $= \frac{9}{4} a^2\pi$.

Denn die Kugelfläche ist, wie schon im (§ 497 I) bewiesen ist, viermahl größer, als der

Flächeninhalt eines dazugehörigen größten Kreises, nun aber ist der Flächeninhalt eines größten Kreises, ~~x~~ wenn der Halbmesser $= a$ gesetzt wird, $= 2a\pi \times \frac{1}{2}a = a^2\pi$ vermöge (§ 448) und folglich $a^2\pi$ viermahl genommen $= 4a^2\pi =$ der Kugelfläche. Ferner ist, ~~der Flächeninhalt einer~~, wenn man den Durchmesser der Grundfläche $= b$ und die Höhe $= a$ setzet, ~~seine~~ die krumme Oberfläche des eingeschriebenen Zylinders $= ab\pi$. Setzet man nun ~~den Durchmesser der Grundfläche~~ die Höhe $a = b =$ dem Durchmesser der Grundfläche des Zylinders, so ist sodann seine krumme Oberfläche $= b^2\pi$ und folglich 4 mahl so groß, als seine Grundfläche, weil diese nur $\frac{1}{4}b^2$ ist. Und endlich ist die ganze Oberfläche des Zylinders $= b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi = \frac{3}{2}b\pi$ vermöge (490). Substituirt man nun für b die Seite eines Quadrats $= a\sqrt{2}$ vermöge (§ 408.V.) weil der Zylinder sobald er gleichseitig ist, ein Quadrat formirt, und b eine von diesen gleichen Seiten ist, so erhält man: $\frac{3}{2} \times a^2.2.\pi = 3 \times a^2\pi$, weil 2 und 2 ausbleiben, $= 3a^2\pi$, gleich der Oberfläche des Zylinders.

Daß Endlich ~~ist~~ die Oberfläche eines eingeschriebenen senkrechten Kegels $= \frac{9}{4}a^2\pi$ ist, kann man (§ 493 und § 408 N° IV) sehr leicht einsehen*. Folglich verhält sich die Kugelfläche, die ganze Oberfläche eines eingeschriebenen senkrechten Zylinders, und die Oberfläche ~~einer~~ eines eingeschriebenen gleichseitigen Kegels wie $4a^2\pi : 3a^2\pi : \frac{9}{4}a^2\pi$ oder wenn man um den Nenner wegzuschaffen, alle Theile mit 4 multiplizirt, wie $16a^2\pi : 12a^2\pi : 9a^2\pi$, und endlich kann man $a^2\pi$ weil es in jedem Gliede befindlich ist, ganz hinweg lassen, und dann erhält man $16:12:9$, welches zu beweisen war ✶.

* Denn da der Kegel nach der Voraussetzung gleichseitig ist, so ist sein Durchmesser = der Seite eines gleichseitigen Dreyeckes, $= a\sqrt{3}$ weil dieses die Seite × des genannten Dreyeckes ist (408 IV): /: und folglich ist sein Kubikinhalt gleich der krummen Oberfläche desselben. + der Grundfläche; aber dieses ist vom Kegel zu verstehen :/. Nun aber ist die krumme Oberfläche = dem halben Producte aus dem Durchmesser der Grundfläche in der Seite des Kegels, $= \frac{\pi a\sqrt{3} \times a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\pi}{2}$; und die Grundfläche = dem Kreise derselben, multiplizirt mit dem halben Halbmesser; folglich $= \frac{\pi a\sqrt{3} \times a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\pi}{4}$ und folglich $\frac{3a^2\pi}{2} + \frac{3a^2\pi}{4}$, wenn man sie auf gleiche Benennung bringt, $= \frac{6}{4}a^2\pi + \frac{3}{4}a^2\pi = \frac{9}{4}a^2\pi$. ✶.

7/32 Schwierigkeit. Seite. 146. § 490.

Auflösung.

Der erste Satz in der Bemerkung wird einleuchtend, wenn man den schief abgeschnittenen Cylinder ergänzt; denn auf diese Weise erhält man ganze Cylinders deren halbe Summe, dem gegebenen gleich ist, eben so wird verfahren, um den Grund des 2ten Satzes einzusehen.

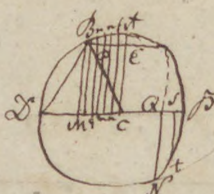
8/33 Aufgabe zur Übung.

Zu berechnen, wie viel der Kubikinhalt eines Cylinders beträgt, in welchem ein rundes Loch, von beliebigem Durchmesser, und der Höhe des Cylinders, gebohrt wird.

Auflösung

Es sey der Durchmesser der Grundfläche des größern Cylinders, $= 2a$, und des kleinern, $= 2b$, (weil wenn man auf die obengezeigte Weise verfährt das ausgebohrte Loch ebenfalls ein Cylinder ist; dessen Höhe, der Höhe des größern Cylinders gleich ist:) und endlich die Höhe beyder Cylinder $= c$, so ist der Kubikinhalt des größern Cylinders $= 2a\pi \times \frac{1}{2}a = a^2\pi . c = a^2\pi c$ und des kleinern: $= 2b\pi \times \frac{1}{2}b = b^2\pi$ $= b^2\pi . c = b^2c\pi$, wenn sie mit Masse ausgefüllt wären, da aber die Masse bey der Ausbohrung verschwindet, und folglich der kleinere Cylinder ganz leer, der größere aber um so viel Masse weniger enthält, als der Kubikinhalt, des kleineren Cylinders beträgt, so muß der Kubikinhalt des ~~größern~~ kleineren von dem Kubikinhalt des größeren Cylinders abgezogen werden. Also ist:

$a^2\pi c - b^2\pi c = (a^2 - b^2)\pi c = \pi c(a+b)(a-b)$ = dem Kubikinhalt des größern Cylinders.



9te Schwierigkeit. Seite 174.
34

Auflösung

Um einzusehen, daß wenn ein Stück MC des Halbmessers CD, in eine unendliche Anzahl gleicher Theile ~~eingetheilet~~ getheilt ist, ~~dann~~ das erste Element $= (cd)^2\pi \cdot Cc$, das 2te $= (ef)^2\pi \cdot ce$ u. s. w. ist, darf man nur in Erwägung bringen, daß nicht die Höhe Cc sondern die Ordinate cd der Halbmesser ~~der Halbachse~~ der Zone ist, welche bey der Umdrehung um den Halbmesser CD, von dem Rechtecke Cd beschrieben wird, und sodann den Kubikinhalt der Zone nach (§ 513) berechnen, um für den Kubikinhalt der ersten $(cd)^2\pi \times Cc$ für den Kubikinhalt der 2ten $(ef)^2\pi \times ce$ u. s. w. zu erhalten.

10te Schwierigkeit. Seite. 185.
35

Auflösung

Es sey bey der gleichseitigen viereckigen Pyramide ABCDE eine Seite $= a$, so ist die Grundfläche $= a^2$, weil sie ein Quadrat ist, und die Höhe $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$, weil diese Höhe eine Cathete des rechtwinklichten Dreyecks ausmacht, wovon die Hypothenuse $= a$ und die andere Kathete der halben Diagonale der Grundfläche gleich ist; nämlich die 2te Cathete ist $= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, weil die Diagonale eines Quadrats immer $= a\sqrt{2}$ ist. Nun ist der Kubikinhalt einer Pyramide nach (§ 518) gleich dem 3ten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe, nämlich hier $= \frac{1}{3} \times a \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ $= \frac{1}{3} a^2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a^2\right)} = \frac{1}{3} a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}}$, und endlich, wenn ich Zähler und Nenner mit $\sqrt{2}$ multipliziere, um die irrationale Wurzel aus dem Nenner wegzuschaffen: so erhalte ich $\frac{1}{3} \frac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ $= \frac{1}{6} a^3\sqrt{2}$. Endlich muß nach der Bedingung der Aufgabe $x^3 = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$ seyn, aus diesem ist $x = \sqrt[3]{\frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt[6]{18}}$. denn es ist $\sqrt[3]{\frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}} = a \sqrt[3]{\frac{1}{6}\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{6}\sqrt{2}}}} = \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{6}{\sqrt{2}}}} = \frac{a}{\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{6}}}$ $= \frac{a}{\sqrt[6]{\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt[6]{\frac{36}{2}}} = \frac{a}{\sqrt[6]{18}}$ ✗.

11ten Schwierigkeit. Seite 200. Man soll beweisen, daß $\sin. 18^\circ = \frac{1}{4}.(1+\sqrt{5})$, und daß $\cos. 18^\circ = \frac{1}{4} r. \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ist

36

Auflösung

Denn es ist $\sin. 18^\circ = \frac{1}{2}$ chor. 36°, nämlich der halben Seite eines regelmäßigen Zehneckes, weil die Seite eines Zehneckes einen Bogen von 36° abschneidet. Nun aber ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= \frac{1}{2} r \left(-1+\sqrt{5}\right)$ vermöge (§408) wenn man den Halbmesser $= r$ setzet. Nun ist $\sin 18^\circ =$ der halben Seite eines Zehneckes und folglich $\sin. 18^\circ = \frac{\frac{1}{2} r \left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} = \frac{1}{4} r \left(-1+\sqrt{5}\right)$, weil die ganze Seite $= \frac{1}{2} r \left(-1+\sqrt{5}\right)$ ist.

Ferner ist $\cos. 18^\circ = \sqrt{r^2 - \sin^2 18^\circ}$ vermöge (§541 I), $\sin^2 18^\circ$ aber ist $= \cancel{\frac{1}{16} r^2 (1+5)}$

$= \frac{1}{16} r^2 \left(1+5-2\sqrt{5}\right)$ und folglich $\cos. 18^\circ = \sqrt{r^2 - \frac{1}{16} r^2 \left(1+5-2\sqrt{5}\right)}$

$= \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{6}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\frac{16}{16} - \left(\frac{1}{16} + \frac{5}{16} - \frac{2}{16}\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{10}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

12 ~~Schwierigkeit. Seite 200. Zu beweisen, daß $\cos. 15^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{6+\sqrt{2}}$ ist.~~

~~Auflösung.~~

~~Es ist $\cos. 15^\circ = \sqrt{r^2 - \sin^2 15^\circ} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{16} r^2 \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}$~~

~~Schwierigkeit §694.~~

~~Denn es ist in dem Dreiecke (vermöge §555):~~

~~PM : PP' = sin MP'P : sin P'MP. Es ist aber PM = y, sin MP'P = sin 90° = 1 und sin P'MP = sin PCM = cos m, folglich ist, diese Werthe in der Proportion substituiert, y : PP' = 1 : cos. m.~~

13.

36 Wenn man in einem sphärischen Dreiecke ABC die Winkel mit den an ihren Spitzen befindlichen großen Buchstaben A, B, C, und die ihnen gegenüber liegenden Seiten mit den ähnlichen kleinen a, b, c, z. B. den Winkel bey A mit A und die gegenüber liegende Seite BC mit a bezeichnet, so hat man (§ 714)

I/ $\sin. a \sin. B = \sin b \sin. A$

II $\sin. a \sin. C = \sin A \sin. c$

III $\sin b \sin C = \sin c \sin B$

IV $\cos. a = \cos b \cos c + \cos. A \sin b \sin c$

V $\cos b = \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c$

VI $\cos c = \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b$

VII $\cos A = -\cos B \cos C + \cos a \sin B \sin C$

VIII $\cos B = -\cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C$

IX $\cos C = -\cos A \cos B + \cos c \sin A \sin B$

X $\sin a \sin B \cot A = \cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c$

XI $\sin a \sin C \cot A = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b$

XII $\sin b \sin A \cot B = \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos b$

XIII $\sin b \sin C \cot B = \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a$

XIV $\sin c \sin A \cot C = \cos c \sin b - \cos A \sin c \cos b$

XV $\sin c \sin B \cot C = \cos c \sin a - \cos B \sin c \cos a$

XVI $\sin A \sin b \cot a = \cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C$

XVII $\sin A \sin c \cot a = \cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B$

XVIII $\sin B \sin a \cot b = \cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C$

XIX $\sin B \sin c \cot b = \sin A \cos B + \cos c \sin B \cos A$

XX $\sin C \sin a \cot c = \cos C \sin B + \cos c \sin C \cos B$

XXI $\sin C \sin b \cot c = \cos C \sin A + \cos b \sin C \cos A$

XXII $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}}$

XXIII $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$

XXIV $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}$

XXV $\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c+a) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin c}}$

XXVI $\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin c}}$

XXVII $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}}$

XXVIII $\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}}$

XXIX $\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}}$

XXX $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}}}$

XXXI $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}}$

XXXII $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C}}$

XXXIII. $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}}$

XXXIV. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{cos}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,C}}$

XXXV. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin}\,A\,\text{sin}\,C}}$

XXXVI. $\text{Tang}\,\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}}$

XXXVII. $\text{Sin}\,\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}}$

XXXVIII. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin}\,A\,\text{sin}\,B}}$

XXXIX. $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}}$

XL. $\text{Tang}\,\frac{b-a}{2} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}c\,\frac{\text{sin}\,\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(B+A)}$

XLI. $\text{Tang}\,\frac{b+a}{2} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}c\,\frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(B+A)}$

XLII. $\text{Tang.}\,\frac{c-b}{2} = \text{Tang.}\,\frac{1}{2}a\,\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(C+B)}$

XLIII. $\text{Tang.}\,\frac{c+b}{2} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}a\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(C-B) : \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(C+B)$

XLIV. $\text{Tang.}\,\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\,\frac{1}{2}b\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A-C) : \text{Sin}\,\frac{1}{2}(A+C)$

XLV. $\text{Tang.}\,\frac{a+c}{2} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}b\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A-C) : \text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+C)$

XLVI. $\text{Tang.}\,\frac{B-A}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}C\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(b-a) : \text{Sin}\,\frac{1}{2}(b+a)$

XLVII. $\text{Tang.}\,\frac{B+A}{2} = \text{Cot}\,\frac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(b-a) : \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b+a)$

XLVIII. $\text{Tang.}\,\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}A\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c-b) : \text{Sin}\,\frac{1}{2}(c+b)$

XLIX. $\text{Tang.}\,\frac{C+B}{2} = \text{Cot}\,\frac{1}{2}A\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b) : \text{Cos}\,\frac{1}{2}(c+b)$

L. $\text{Tang.}\,\frac{A-C}{2} = \text{Cot}\,\frac{1}{2}B\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(a-c) : \text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c)$

LI. $\text{Tang.}\,\frac{A+C}{2} = \text{Cot}\,\frac{1}{2}B\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(a-c) : \text{Cos}\,\frac{1}{2}(a+c)$

14
37 Wenn man in den Gleichungen des vorigen §s einen der Winkel etwa C = 90° setzet, so erhält man eben so viele Gleichungen für das rechtwinkelige sphärische Dreyeck ~~e~~ wovon ich nur folgende hersetzen will.

1. $\text{Sin}\,a = \text{Sin}\,c\,\text{sin}\,A$ (aus 2)
2. $\text{Sin}\,b = \text{Sin}\,c\,\text{sin}\,B$ (aus c)
3. $\text{Cos}\,c = \text{Cos}\,a\,\text{cos}\,b$ (aus 6)
4. $\text{Cos}\,A = \text{cos}\,a\,\text{sin}\,B$ (aus 7)
5. $\text{Cos}\,B = \text{cos}\,b\,\text{sin}\,A$ (aus 8)
6. $\text{Cos}\,c = \text{Cotg}\,A\,\text{cot}\,B$ (aus 9)

7^{te} $\sin b = \mathrm{Tang.}\, a\ \mathrm{Ctg.}\, A$ (Lehrs. 17)

8^{te} $\sin a = \mathrm{Tang.}\, b\ \cot. A$ (Lehrs. 13)

9^{te} $\cos A = \mathrm{Tang.}\, b\ \cot. c$ (Lehrs. 14)

10^{te} $\cos B = \mathrm{Tang.}\, a\ \cot. c$ (Lehrs. 15)

11^{te} $\cot. A = \sin b\ \cot. a$ (Lehrs. 16)

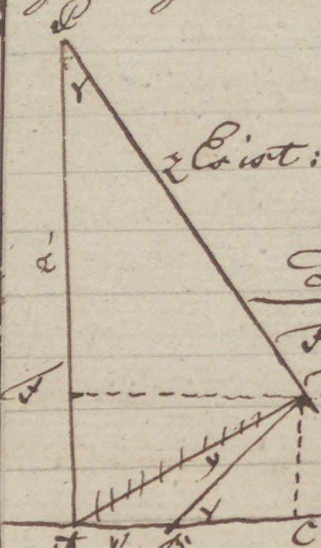
12^{te} $\cot B = \sin a\ \cot b$ (Lehrs. 18)

13^{te} $\sin. a = \sin c\ \cos. B$ (Lehrs. 20)

Alles folgende ist aus Littrow's Astronomie.

A 5^{te} (1) 38 Schwierigkeit S. 6 §2.

Auflösung



Es ist: $AB = y'$

$BD = y$

$DP = z$

Ferner sind die Winkel:

a) $DBC = \gamma$

$BDC = 90^\circ - \gamma$

$BDF = \gamma$

$PDF = 90^\circ - \gamma$

$FPD = \gamma$

Ferner ist: $y' = AC - BC$

Es ist aber:

$AC = z \sin.\gamma$ und $BC = y \cos\gamma$

also:

$y' = z \sin\gamma - y \cos\gamma$

Es ist weiters

$AB = PF + FA$ es ist aber:

$AP = z'$, $PF \cos\gamma$ für den Halbmesser $= z$ nämlich $= z \cos\gamma$; und $FA = \sin\gamma$ für den Halbmesser $= y$ folglich diese Werthe substituirt $= z' = z \cos.\gamma + y \sin\gamma$.

A 6 (2) 39 Seite 7 §2.

Statt dem was in Seite 7 §2 gesagt wird kommt folgendes zu setzen:

Setze man in der Gleichung (c) statt $\sin\gamma$ die Größe $\frac{\sin\alpha \sin C}{\sin A}$ so hat man $\cos A \sin. B = \cos.\alpha \sin\beta - \cos\gamma \cos. B \sin. A$ und wenn man die Buchstaben bloss analog verwandelt, so erhält man:

$\cos B \sin C = \cos.\beta \sin A - \cos.\alpha\ \cancel{\cos}\ \gamma \sin. B$: und wieder

$\cos C \sin A = \cos\gamma \sin B - \cos B \cos A \sin C$.

Nun multiplizire man die erste dieser Gleichungen mit $\sin B$, die 2^{te} mit $\cos A \cos B \sin C$, und die 3^{te} mit $\sin A \cos B$, so erhält man folgende Gleichungen:

$\operatorname{Cos} A \sin^2 B = \cos\alpha \sin C \sin B - \cos\gamma \sin B \cos B \sin A$ (1 x sin B)

$\operatorname{Cos}^2 B \sin^2 C \cos A = \cos\beta \sin A \cos A \cos B \sin C - \cos\alpha \cos C \sin C \cos A \cos B \sin B$ (2 x cos A cos B)

$\operatorname{Cos} C \sin^2 A \operatorname{Cos} B = \cos\gamma \sin B \cos B \sin A - \cos\beta \cos A \sin A \cos B \sin C$ (3 x sin A cos B)

Addiret man diese drey Gleichungen: so hat man:

$\operatorname{Cos} A \sin^2 B + \cos A \cos^2 B \sin^2 C + \operatorname{Cos} C \sin A \cos B = \cos\alpha \sin C \sin B - \cos\alpha \cos C \sin C \cos A \cos B \sin B$

$= \operatorname{Cos} A \cancel{(1 - \cos B)} \cos B \cos C (1 - \cos A \cos B \cos C) = \cos\alpha \sin C \sin B - \cos\alpha \sin C \cos C \cos A \cos B \sin B$

$= \operatorname{Cos} A \cos B \cos C (1 - \cos A \cos B \cos C) = \cos\alpha \sin C \sin B (1 - \cos A \cos B \cos C)$ Nun kann der gemeinschaftliche Factor $(1 - \cos A \cos B \cos C)$ aufgehoben werden, und dann ist:

$$\operatorname{Cos} A = \sin B \sin C \cos\alpha - \cos B \cos C \text{ -- (d)}$$

Seite 6 §2.

17 (3) 40 Die erste Formel erhält man aus der bekannten Gleichung:

$\sin (A + B) = \sin A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \sin B$;

indem man statt $\sin A$, $\operatorname{Cos} A$, $\sin B$, $\cos B$ ihre Werthe:

$\sin A = \sin\alpha \sin C : \sin\gamma$

$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos}\alpha - \cos\beta \cos\gamma : \sin\gamma \sin\beta$

$\sin B = \sin\beta \sin C : \sin\gamma$

$\operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma : \sin\alpha \sin\gamma$ substituirt, folglich kann man sodann auch die andern Formeln auf dieselbe Art erhalten.

---

18 (4) 41 Seite 10 §2. Die Gaussischen Gleichungen abzuleiten.

1stens Die erste.

$\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A + B) = \operatorname{Cos} \frac{1}{2} A \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B - \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B$. Es ist aber:

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta) : \sin\beta : \sin\gamma}$

$\operatorname{Cos} \frac{1}{2} A = \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) : \sin\beta \sin\gamma}$

$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)\} : \sin\alpha \sin\gamma}$

$\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B = \sqrt{\{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)\} : \sin\alpha \sin\gamma}$ folglich:

$\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A + B) = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta) : \sin\alpha \sin\gamma \sin^2\gamma}$

$$-\sqrt{\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\,\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin^2\gamma}}$$

$$=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}$$

$$-\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\alpha\,\sin\beta}}$$

$$=\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\gamma}\right\}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}\times$$

$$=\frac{2\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin.\tfrac{1}{2}\gamma}{\sin.\gamma}\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}$$

$$=\frac{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\gamma}\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin.\alpha\,\sin\beta}}$$

Es ist ferner:

$$\sin.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}$$

also:

$\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\gamma}\,\sin\tfrac{1}{2}C\times$ und so werden auch die übrigen Gleichungen abgeleitet.

---

19 / 4(5) / 42 Seite 1012. — Zu beweisen: $\sin.x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ und: $\text{Cos}.x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

Nach Vegas 1$^{\text{ten}}$ Theil Seite 422; wenn man nähmlich $h=e$ setzet, ist:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ \text{etc.}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ \text{etc.}$$

Subtrahirt und addirt man diese ~~Gleichungen~~ Reihen so hat man:

$$e^{x}-e^{-x}=2x+\frac{2x^3}{2.3}+\frac{2x^5}{2.3.4.5}+\text{etc.}$$

$e^{x} + e^{-x} = 2 + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^4}{2.3.4} + \frac{2x^6}{2.3.4.5.6} + etc$ das heißt:

10) $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + ---$

11) $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + -------$

Es ist aber nach der trigonometrischen Formel 82.

12) $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - + --$

13) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - + ---$

Vergleicht man diese zwey unendlichen Reihen, mit den nächst vorhergehenden, so findet man, daß die Reihen 10) 11) in 12) 13) übergehen, wenn in 10) 11) $x\sqrt{-1}$ statt x setzet, man wird nähmlich haben:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = x\sqrt{-1} + \frac{x^3(\sqrt{-1})^3}{2.3} + \frac{x^5(\sqrt{-1})^5}{2.3.4.5} + ---$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 + \frac{x^2(\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{x^4(\sqrt{-1})^4}{2.3.4} + -----$$

das heißt weil: $\left.\begin{array}{l} (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^4 = 1 \\ (\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1} \end{array}\right\}$ ist

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = x\sqrt{-1} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - + etc:$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + etc$$

oder wenn man die erste Reihe mit $\sqrt{-1}$ dividirt: ist

$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x$ und $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x$ *

---

20 Da wir nun Seite 41 §2. bewiesen haben, daß: $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ und $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$

(6) ist, so können wir es bey gegenwärtiger Aufgabe schon voraussetzen, nähmlich

13 1) $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, 2) $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ | und 3) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}$

Aus der ersten Gleichung folgt:

3) $e^{x\sqrt{-1}} = e^{-x\sqrt{-1}} + 2\sin x\sqrt{-1}$, eben so aus der zweiten:

4) $e^{x\sqrt{-1}} = -e^{-x\sqrt{-1}} + 2\cos x$; deren halbe Summe gibt:

5) $e^{x\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}\,x + \sin x\sqrt{-1}$; eben so ist für jeden andern Bogen:

6) $e^{y\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\,y + \sin y\sqrt{-1}$; dividirt man die 5te durch die 6te, so ist:

7) $\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}} = \dfrac{\cos. x + \sin. x\sqrt{-1}}{\mathrm{Cos.}\,y + \sin y\sqrt{-1}}$ es ist ferner nach den Formeln 9. 10 bey Vega:

$\mathrm{Cos.}\,x = \dfrac{1 - \mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}x}$ und $\mathrm{Cos}\,y = \dfrac{1 - \mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}y}{1 + \mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}y}$ und

$\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tang.}\frac{1}{2}x}{1 + \mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}x}$ und $\sin y = \dfrac{2\,\mathrm{tang.}\frac{1}{2}y}{1 + \mathrm{tang.}\frac{1}{2}y}$

setzt man diese Werthe von sin. x und Cos. in Gleichung 7 so ist:

8) $\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}} = \left(\dfrac{1 - \mathrm{tang.}^2 \frac{1}{2}x + 2\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}x\sqrt{-1}}{1 + \mathrm{tg.}^2 \frac{1}{2}x}\right) : \left(\dfrac{1 - \mathrm{tg.}^2 \frac{1}{2}y + 2\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}{1 + \mathrm{tg.}^2 \frac{1}{2}y}\right)$

setzt man ferner $\mathrm{tang.}\frac{1}{2}x = a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y$; so geht diese Gleichung in folgende über

9) $\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}} = \left(\dfrac{1 - a^2\mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y + 2a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}{1 + a^2\mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y}\right) : \left(\dfrac{1 - \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}y + 2\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}{1 + \mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y}\right)$

$= \dfrac{\left(1 - a^2\mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y + 2a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}y\right)}{\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}y + 2\,\mathrm{tang.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 + a^2\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}y\right)}$

$= \dfrac{\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)^2\left(1 + \mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y\right)}{\left(1 + \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)^2\left(1 + a^2\mathrm{tg.}^2\frac{1}{2}y\right)}$

$= \dfrac{\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)^2\left(1 + \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 - \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)}{\left(1 + \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)^2\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 - a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)}$

$= \dfrac{\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)^2\left(1 - \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)}{\left(1 + \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 - a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)} = \dfrac{\left(1 + a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 - \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)}{\left(1 + \mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)\left(1 - a\,\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y\sqrt{-1}\right)}$

Es ist ferner nach dem Vorhergehenden:

$\mathrm{tg.}\frac{1}{2}y = \dfrac{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}}$

führt man diesen Ausdruck in den Vorhergehenden ein, so hat man:

$\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}} = \dfrac{\left\{1 + a\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}\right)\right\}\left\{1 - \left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}\right)\right\}}{\left\{1 + \dfrac{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}\right\}\left\{1 - a\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}\right)\right\}}$

$= \dfrac{\left(e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + ae^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - ae^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\right)\left(e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}\right)\left(e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - ae^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} + ae^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\right)}$

$= \dfrac{\left\{(a+1)e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}(a-1)\right\}2e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}}{2e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\left\{(a+1)e^{-\frac{1}{2}y\sqrt{-1}} - (a-1)e^{\frac{1}{2}y\sqrt{-1}}\right\}}$

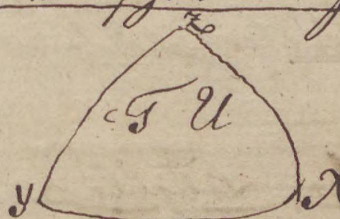
$$= \frac{2(a+1)e^0 - 2e^{-y\sqrt{-1}}(a-1)}{2(a+1)e^0 - 2(a-1)e^{y\sqrt{-1}}} = \frac{(a+1) - e^{-y\sqrt{-1}}(a-1)}{(a+1) - (a-1)e^{y\sqrt{-1}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{a-1}{a+1}e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{a-1}{a+1}.e^{y\sqrt{-1}}} = \frac{1 - be^{-y\sqrt{-1}}}{1 - be^{y\sqrt{-1}}}$$ für $b = \frac{a-1}{a+1}$; das heißt:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}} = \frac{1 - be^{-y\sqrt{-1}}}{1 - be^{y\sqrt{-1}}}$$; oder, wenn beyde Theile durch $e^{y\sqrt{-1}}$ multiplizirt werden:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} . \frac{1 - be^{-y\sqrt{-1}}}{1 - be^{y\sqrt{-1}}}$$

21 (9) 44 Eigener trigonometrischer Satz von J. J. Tittel.



Es sey ZYX ein Octant der Oberfläche irgend einer Kugel; T, U, was immer für zwey Punkte auf derselben: so ist, für den Halbmesser = 1.:

1° $\text{Cos. } TU = \text{Cos. } TZ \text{ cos. } UZ + \text{Cos. } TY \text{ cos. } UY + \text{Cos. } TX. \text{ cos. } UX$

2° $\text{Cos.}^2 TZ + \text{cos.}^2 TY + \text{cos.}^2 TX = \text{cos.}^2 UZ + \text{cos.}^2 UY + \text{cos.}^2 UX = 1$

Beweis des ersten Theils. Aus dem Dreyecke TZU hat man:

$\text{Cos. } TU = \text{Cos. } TZ \text{ cos. } UZ + \text{sin. } TZ \text{ sin. } UZ \text{ cos. } TZU,$

Es bleibt also nunmehro noch zu beweisen, daß:

$\text{Cos. } TY \text{ cos. } UY + \text{Cos. } TX \text{ cos. } UX = \text{sin. } TZ \text{ sin. } UZ \text{ cos. } TZU$ sey.

Nun ist [illegible] $TZU = 90° - (TZY + UZX)$, und

$TZY = 90° - TZX$

$UZX = 90° - UZY$

$\text{Cos. } TZU = \text{Sin. } (TZY + UZX) = \text{sin. } TZY \text{ Cos. } UZX + \text{Cos. } TZY \text{ sin. } UZX$

$= \text{cos. } TZX \text{ Cos. } UZX + \text{cos. } TZY \text{ cos. } UZY \text{ . . . . } (*)$

Es ist ferner: im Dreyecke TZX | $\text{Cos. } TX = \text{cos. } TZ \text{ Cos. } ZX + \text{Sin. } TZ \text{ sin. } ZX \text{ cos. } TZX$
$= \text{Sin } TZ \text{ Cos. } TZX$

im Dreyecke UZX | $\text{Cos. } UX = \cos. UZ \cos. ZX + \sin. UZ \sin. ZX \cos. UZX = \sin UZ \cos. UZX$

- - - - - - - - TZY

- - - - - - - - TZY: $\text{Cos. } TY = \text{Cos. } TZ \cos. ZY + \sin. TZ \sin. ZY \cos. TZY = \sin. TZ \cos. TZY$

- - - - - - - - UZY | $\text{Cos. } UY = \cos. UZ \cos ZY + \sin. UZ \sin. UY \cos. UZY = \sin. UZ \text{ Cos. } UZY$

das heißt: $\text{Cos. } TZX = \dfrac{\text{Cos. } TX}{\sin TZ}$; $\text{Cos. } UZX = \dfrac{\text{Cos. } UX}{\sin UZ}$; $\text{Cos. } TZY = \dfrac{\text{Cos. } TY}{\sin. TZ}$; $\text{Cos. } UZY = \dfrac{\text{Cos. } UY}{\sin. UZ}$

Substituirt man die Werthe aus den letzten Gleichungen in (*); so hat man
$\text{Cos. } TZU = \dfrac{\text{Cos. } TX}{\sin. TZ} \cdot \dfrac{\text{Cos. } UX}{\sin UZ} + \dfrac{\text{Cos. } TY}{\sin. TZ} \cdot \dfrac{\text{Cos. } UY}{\sin UZ}$ hieraus folgt unmittelbar:

$\text{Cos. } TX \text{ Cos. } UX + \text{Cos. } TY \text{ Cos. } UY = \sin. TZ \sin. UZ \text{ Cos. } TZU$ und mittelbar der Satz selbst No 1°

Beweis des 2ten Theils folgt unmittelbar aus dem Beweise des ersten Theils.

Theorie der Libelle

22 (10) 45 D, soll die Zahl der Theile der Libelle heißen welche das Ende der Blase rechts und links entspricht, wofern die zu nivellirende Axe horizontal und beyde Haken der Libelle gleich sind.

x, soll den Ausschlag der Libelle bedeuten, wenn die Achse geneigt ist; positiv genommen, wenn der östliche Theil der Achse erhoben ist: das heißt x soll die Anzahl der Theile der Libelle bezeichnen, um welche das östliche Ende der Blase über D hinaus östlich steht.

y soll den Ausschlag der Libelle bedeuten, wenn der östliche Haken der Libelle kürzer ist, folglich östlich positiv.

O, W, mögen endlich die Zahlen der östlichen und westlichen Abtheilung der Libelle bedeuten, die wirklich beobachtet werden.

O', W' hingegen jene Zahlen, (östlich und westlich, wie vorher) welche in umgehängter Libelle beobachtet werden.

Man hat sofort:

1) $O = D + x + y$, 2) $W = D - x - y$, 3) $O' = D + x - y$, 4) $W' = D - x + y$

5) … $O + W = 2D = (1) + (2)$, 6) … $O' + W' = 2D = (3) + (4)$ 7) … $O - W = 2x + 2y = (1) - (2)$

8) … $O' - W' = 2x - 2y = (3) - (4)$, 9) … $O + O' = 2D + 2x = (1) + (3)$, 10) $W + W' = 2D - 2x = (2) + (4)$

11) … $O - O' = 2y = (1) - (3)$, 12) $W - W' = -2y = (2) - (4)$.

Nun folgt

aus 5.6) $D = \dfrac{O + W}{2} = \dfrac{O' + W'}{2}$ | aus 7.8) $x = \dfrac{(O - W) + (O' - W')}{4} = \dfrac{(O + O') - (W + W')}{4}$

Schwierigkeit aus Littrows populärer Astronomie, Erster Theil 1tes Buch 1tes Kapitel. Seite 68.

Aufgabe

Hat man die grosse und kleine Axe der elliptischen Erde gegeben, so ist zugleich jede Dimension der Erdoberfläche ~~gegeb~~ bekannt; man findet sie auf folgende Art:

$+\varphi$ die Polhöhe,
Sey $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ die Excentricität; $\alpha = \frac{a-b}{b}$ die Abplattung der Erde; so ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{(a+b)}{a}\frac{(a-b)}{a}\ ;\ \alpha = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 \text{ also:}$$

$$\frac{a}{b} = 1+\alpha \text{ und } \frac{b}{a} = \frac{1}{1+\alpha} \text{ es ist aber:}$$

$$\varepsilon^2 = \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)$$ oder wenn man für $\frac{b}{a}$ seinen Werth substituirt:

$$\varepsilon^2 = \left(1+\frac{1}{1+\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right) = \left(\frac{1+\alpha+1}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1+\alpha-1}{1+\alpha}\right) = \frac{(2+\alpha)\alpha}{(1+\alpha)^2} = (2\alpha+\alpha^2)(1+\alpha)^{-2}$$

und dieses endlich; ~~wenn man die Mult~~

$$\varepsilon^2 = (2\alpha+\alpha^2)(1-2\alpha+3\alpha^2-4\alpha^3 \pm \ldots\ldots)$$ und wenn man die angezeigte Multiplication verrichtet:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 = {} & 2\alpha + \alpha^2 \\ & -4\alpha^2 - 2\alpha^3 \\ & \qquad + 6\alpha^3 + 3\alpha^4 \\ & \qquad\quad - 8\alpha^4 - 4\alpha^5 \\ & \qquad\qquad + + \ldots\ldots\end{aligned}$$ aus deren Summirung endlich folgt:

$$\varepsilon^2 = 2\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3 - 5\alpha^4 + 6\alpha^5 - + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ferner sey $CP = x$, $PM = y$ und $CM =$ der zu suchenden Entfernung vom Mittelpuncte $= r$ und $MEB = \varphi$ die beobachtete; $MCB = \varphi'$ die geocentrische Polhöhe des Ortes M so ist in der bekannten Gleichung der Ellipse:

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, durch deren Auflösung man r findet:

$x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi'$, $y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi'$ | Dieses in obiger Gleichung substituirt, gibt

$$a^2r^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi' + b^2r^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi' = a^2b^2$$ oder r^2 abgesondert:

$$r^2(a^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi' + b^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi') = a^2b^2$$ oder:

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi' + b^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi'}$$ oder wenn man Zähler und Nenner mit a^2 dividirt:

$$r^2 = \frac{b^2}{\mathrm{Sin}^2\varphi' + \frac{b^2}{a^2}\mathrm{Cos}^2\varphi'}$$, es ist $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$ also: $r^2 = \frac{b^2}{\mathrm{Sin}^2\varphi' + (1-\varepsilon^2)\,\mathrm{Cos}^2\varphi'}$ oder:

$$r^2 = \frac{b^2}{\mathrm{Sin}^2\varphi' + \mathrm{Cos}^2\varphi' - \varepsilon^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi'}$$ folglich weil $\mathrm{Sin}^2\varphi' + \mathrm{Cos}^2\varphi' = 1$ ist:

$$r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi'} \text{ oder } r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi'}} = \sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon^2)^2\,\mathrm{Tg}^2\varphi}{1+(1-\varepsilon^2)\,\mathrm{Tg}^2\varphi}}$$ welches man auf folgende Weise findet:

Beschreibe man in obiger Figur aus dem Puncte M, mit dem Halbmesser MP einen Bogen, so ist offenbar: $EP = MP\,\mathrm{Cotg}\,\varphi$ und $PC = MP\,\mathrm{Cotg}'\,\varphi'$ seyn, also verhält sich:

$$EP : PC = \mathrm{Cotg}\,\varphi : \mathrm{Cotg}\,\varphi' = \mathrm{Tg}\,\varphi' : \mathrm{Tg}\,\varphi$$ oder weil EP der Subnormale $= \frac{b^2x}{a^2}$ (Vega §646) und $PC = x$ ist:

$$\frac{b^2x}{a^2} : x = \mathrm{Tang}\,\varphi' : \mathrm{tg.}\,\varphi$$ oder beyderseits mit x dividirt:

% $\frac{b^2}{a^2} : 1 = tg\varphi' : tg\varphi$; und $tg\varphi' = \frac{b^2}{a^2} tg\varphi = (1-\varepsilon\varepsilon)\, tg\varphi$ weil $\frac{b^2}{a^2} = (1-\varepsilon^2)$ ist; ferners $b = a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$ welches aus der ersten die Excentricität ausdrückenden Formel $\varepsilon\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ hergeleitet ist. —

Nun ist: $r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Cos^2\varphi}}$ oder den Ausdruck von $Cos^2\varphi$ substituirt: $= \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\left(\frac{1}{1+tg^2\varphi'}\right)}}$

$$= \frac{b}{\sqrt{\frac{1+tg^2\varphi'-\varepsilon^2}{1+tg^2\varphi'}}} = \frac{b\sqrt{1+tg^2\varphi'}}{\sqrt{1+tg^2\varphi'-\varepsilon^2}}$$ oder den Werth von b für b substituirt:

$$r = \frac{a\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\,\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}{\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi-\varepsilon^2}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\,\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}$$

welches $= \frac{a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\,\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)\{1+(1-\varepsilon\varepsilon)tg^2\varphi\}}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\,\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\,\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)tg^2\varphi}}$

$= \frac{a\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}}{\sqrt{1+(1-\varepsilon\varepsilon)tg^2\varphi}} = a\sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon\varepsilon)^2 tg^2\varphi}{1+(1-\varepsilon\varepsilon)tg^2\varphi}}$ * ~~ist~~ = der gesuchten Entfernung des Punctes M vom Mittelpuncte der Erde ist. —

---

49) Schwierigkeit in Littrow's popul. Astronomie 1 Theil 1 Buch 4ter Kap. S. 68.

Die Entfernung eines Punctes r vom Mittelpuncte, welcher nach N :

$$r = a\sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon^2)^2 tg^2\varphi}{1+(1-\varepsilon^2)tg^2\varphi}} = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Cos^2\varphi}}$$ gefunden wurde auch:

$r = a\sqrt{\frac{Cos\varphi}{Cos\varphi'\,Cos(\varphi-\varphi')}}$ welches man auf folgende Weise findet: Es ist vermöge des obigen Nummer $tg.\varphi' = (1-\varepsilon^2)tg\varphi$ wo φ' die geocentrische Pol höhe ist; substituirt man nun it in der Formel:

$r = a\sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon^2)^2 tg^2\varphi}{1+(1-\varepsilon^2)tg^2\varphi}}$ für $(1-\varepsilon^2)tg\varphi$ seinen Werth $tg\varphi'$, so ist:

1) $$r = a\sqrt{\frac{1+tg^2\varphi'}{1+tg\varphi' tg\varphi}} = a\sqrt{\frac{1+\frac{Sin^2\varphi'}{Cos^2\varphi'}}{1+\frac{Sin\varphi'}{Cos\varphi'}\cdot\frac{Sin\varphi}{Cos\varphi}}} = a\sqrt{\frac{\frac{Cos^2\varphi'+Sin^2\varphi'}{Cos^2\varphi'}}{1+\frac{Sin\varphi' Sin\varphi}{Cos\varphi' Cos\varphi}}}$$

oder weil $Sin^2\varphi + Cos^2\varphi = 1$ ist, und wenn man den Nenner auf gleiche Benennung bringt $r = a\sqrt{\frac{\frac{1}{Cos^2\varphi'}}{\frac{Cos\varphi' Cos\varphi + Sin\varphi' Sin\varphi}{Cos\varphi' Cos\varphi}}}$ multiplicieret man nun ~~die Gleichung~~ Zähler und Nenner mit $Cos\varphi' Cos\varphi$ so kommt:

$$r = a\sqrt{\frac{\frac{Cos\varphi\, Cos\varphi'}{Cos^2\varphi'}}{Cos\varphi' Cos\varphi + Sin\varphi' Sin\varphi}} = a\sqrt{\frac{\frac{Cos\varphi}{Cos\varphi'}}{Cos(\varphi-\varphi')}}$$ woraus endlich:

$$r = a\sqrt{\frac{Cos\varphi}{Cos\varphi'\,Cos(\varphi-\varphi')}}$$ * folgt.

50 Littrow's pop. Astronomie Erst. Th. 1 Buch. 4 Kap. Seite 68.

Zu beweisen, daß der Werth eines Meridian oder Breitengrades:

$$g = \frac{a\pi(1-\varepsilon^2)}{180^\circ(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$ und der eines Längengrades:

$$\gamma = \frac{a\pi\cos\varphi}{180^\circ\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$ ist.

Denn es ist ein Grad eines größten Kreises offenbar = dem ganzen Umfang, dividirt durch 360°; nun ist die Peripherie immer gleich 2 Halbmesser multiplicieret mit π: und da im ersten Falle der Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser = ρ, im zweyten aber die Abscisse = x ist, so ist:

$$g = \frac{2\rho\pi}{360} = \frac{\rho\pi}{180} \text{ und } \gamma = \frac{2x\pi}{360} = \frac{x\pi}{180}$$ oder für ρ und x ihre Werthe:

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$ substituirt: gibt:

$$g = \frac{a\pi(1-\varepsilon^2)}{180(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \gamma = \frac{a\pi\cos\varphi}{180\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$ die gesuchten Werthe.

---

51 ~~Zu bew~~ Die ~~Werth~~ Oberfläche einer Zone zwischen dem Aequator, und dem Parallelkreise der Breite φ:

$$Z = 2b^2\pi\left(\sin\varphi + \frac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}\varepsilon^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}\varepsilon^6\sin^7\varphi + \cdots\right)$$ zu finden:

Denn es ist nach den Gründen der Stereometrie, die Oberfläche einer Zone gleich der Grundfläche multiplicieret mit der Höhe derselben, nähmlich:

$Z = 2\pi x$ Höhe oder $dZ = 2\pi x\, d(\text{Höhe})$, nun ist aber (vermöge Vegas 2B Seite 624 § 760) Differenzial von der Länge eines Bogens = ds

$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, und da die Höhe der Zone ebenfalls ein Bogen seyn wird, so ist auch:

$d(\text{Höhe}) = ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ also:

$$dZ = 2\pi x(dx^2+dy^2) = \frac{2\pi . a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} \cdot \frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$ wenn man für x und (dx^2+dy^2) ihre Werthe setzt

$$= \frac{2a^2\pi(1-\varepsilon^2)\cos\varphi d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}$$ oder wenn man im Zähler für $(1-\varepsilon^2)$ seinen Werth $\frac{b^2}{a^2}$ setzt $= \frac{2b^2\pi\cos\varphi d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}$

$= 2b^2\pi\cos\varphi d\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-2}$, welches sich wenn man $(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-2}$ nach dem Newtonischen Theorem entwickelt in folgendes verwandelt:

$$dZ = 2\pi b^2 d\sin\varphi(1 + 2\varepsilon^2\sin^2\varphi + 3\varepsilon^4\sin^4\varphi + 4\varepsilon^6\sin^6\varphi + \cdots)$$ oder wenn man die Multip. verrichtet

$$dZ = 2\pi b^2(d\sin\varphi + 2\varepsilon^2\sin^2\varphi\, d\sin\varphi + 3\varepsilon^4\sin^4\varphi\, d\sin\varphi + 4\varepsilon^6\sin^6\varphi\, d\sin\varphi + \cdots)$$ und endlich wenn man integrirt, so ist:

$$\int dZ = 2\pi b^2\left(\sin\varphi + 2\varepsilon^2\int\sin^2\varphi\, d\sin\varphi + 3\varepsilon^4\int\sin^4\varphi\, d\sin\varphi + 4\varepsilon^6\int\sin^6\varphi\, d\sin\varphi + \cdots\right)$$

$$= Z = 2\pi b^2\left(\sin\varphi + \frac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}\varepsilon^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}\varepsilon^6\sin^7\varphi + \cdots\right)$$ = der gesuchten Oberfl. der Zone

Auflösung der Schwierigkeit in Litt. pop. Astr. S. 68 N. 4

52 Es ist zu finden, dass der Bogen des Meridians vom Aequator bis zur Breite φ

$$s=\left\{1+3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\frac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5.\varepsilon^2}{2.4.6}\right)^2\right\}\frac{b^2}{a}\cdot\frac{\pi\varphi}{180}-\left\{3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\frac{3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2\right\}\frac{b^2}{a}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-\frac{2}{3}\left\{5\left(\frac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2\right\}\frac{b^2}{a}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{2.4}{3.5}.7\left\{\frac{3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right\}^2\frac{b^2}{a}\sin^5\varphi\cos\varphi$$ ist

Denn es ist; (vermöge Vega II B. S. 624 §760) wenn s die Länge des Bogens, x die Abscisse y die Ordinate bezeichnet:

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$ welches nach (Litt. gr. Astr. I B. S. 276) für die Ellipse

$$ds=\frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=a(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi$$; oder:

$$\frac{ds}{a(1-\varepsilon^2)}=d\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4\sin^4\varphi+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6\sin^6\varphi+---\right)d\varphi$$ (vermöge Veg. I B. S. 431. §299) oder integrirt:

$$\frac{s}{a(1-\varepsilon^2)}=\varphi+\frac{3}{2}\varepsilon^2\int\sin^2\varphi d\varphi+\frac{3}{2}\frac{5}{4}\varepsilon^4\int\sin^4\varphi d\varphi+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6\int\sin^6\varphi d\varphi+----)$$

Es ist aber nach Meyer Hirsch's Integraltafeln:

$$\int\sin^2\varphi d\varphi=-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\varphi$$

$$\int\sin^4\varphi d\varphi=-\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{3}{8}\varphi$$

$$\int\sin^6\varphi d\varphi=-\frac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi-\frac{5}{24}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{5}{16}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{5}{16}\varphi$$

$$\int\sin^8\varphi d\varphi=-\frac{1}{8}\sin^7\varphi\cos\varphi-\frac{7}{48}\sin^5\varphi\cos\varphi-\frac{36}{192}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{35}{128}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{35}{128}\varphi$$

Also, wenn man diese Werthe für $\int\sin\varphi d\varphi$ ~~etc~~ in der obigen Reihe substituirt, und die Glieder mit gleichen Factoren zusammen bringt, so erhält man:

$$\frac{s}{a(1-\varepsilon^2)}=\varphi\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon^2+\frac{3}{8}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{16}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+etc\right)\frac{\pi\varphi}{180}$$
$$-\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\varepsilon^2+\frac{3}{8}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{16}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+----\right)$$
$$-\sin^3\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{24}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+------\right)$$
$$-\sin^5\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{6}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+---------\right)$$ etc

daher

$$s=\varphi\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon^2+\frac{3}{8}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{16}+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+---\right)\frac{b^2}{a}.\frac{\pi\varphi}{180}$$
$$-\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\varepsilon^2+\frac{3}{8}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{16}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+---\right)\frac{b^2}{a}$$
$$-\sin^3\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}\varepsilon^4+\frac{5}{24}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+----\right)\frac{b^2}{a}$$
$$-\sin^5\cos\varphi\left(\frac{1}{6}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\varepsilon^6+---------\right)\frac{b^2}{a}$$ oder um den Ausdruck kürzer

und dem im Littrow gegebenen gleich zu machen:

$$S = \left\{1+3\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\tfrac{3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7.\left(\tfrac{3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2\right\}\frac{b^2}{a}.\frac{\pi\varphi}{180}$$
$$-\left\{3\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\tfrac{3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\tfrac{3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2\right\}\frac{b^2}{a}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$-\frac{2}{3}\left\{5\left(\tfrac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\tfrac{3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2\right\}.\frac{b^2}{a}\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$-\frac{2.4}{3.5}.7\left\{\tfrac{3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2\frac{b^2}{a}\sin^5\varphi\cos\varphi. *$$

---

53 Es soll die geographische Lage der verschiedenen Signalpuncte des Dreyecksnetzes bey terrestrischen Messungen, in der Voraussetzung bestimmt werden, dass die Erde, durch die Umdrehung einer Elipse um ihre kleine Achse entstanden ist.

Diese Aufgabe findet man in Littrows theor. und pract. Astronomie I Band S. 304 vollkommen aufgelöset; jedoch bedarf sie folgender Erläuterungen:

Erstens. Der Verfasser versteht dort unter Normale die eigentliche Normale, bis an die kleine Axe verlängert, oder fortgesetzt.

Zweytens sagt der Verfasser im Verfolge seiner Auflösung folgendes: „Weiter ist:

$$Tg\,OB'M = \frac{\frac{OM}{OB}\sin\psi'}{1+\frac{OM}{OB}\cos\psi'}$$ oder weil $\cos\psi' = \cos(\psi+\delta\cos z)$ und $\sin\psi' = \sin\psi+\delta\cos\psi\cos\psi\cos z$ ist

$Tg\,OB'M = \varepsilon^2\delta(\sin\psi\cos z+\frac{1}{2}\delta\cos\psi)(\sin\psi+\delta\cos\psi\cos z)$ und daher $OB'M = \varepsilon^2\delta\sin^2\psi\cos z+\frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\sin\psi\cos\psi(1+2\cos^2 z)$ -- I" allein er vergisst dabey zu sagen, nahe, und was er sich erlaubte, um die Werthe von $\sin\psi'\cos\psi'$ und $OB'M$ zu erhalten, $\cos\psi' = \cos(\psi+\delta\cos z)$ oder welches einerley ist $\psi' = \psi+\delta\cos.z$ folgt nähmlich unter der Voraussetzung, dass der Verfasser δ als sehr klein betrachtet, und die höhern Potenzen hievon als die erste vernachlässiget, unmittelbar aus der Gleichung:

$$\cos\psi' = \cos\psi\cos\delta-\sin\psi\sin\delta\cos.z;$$

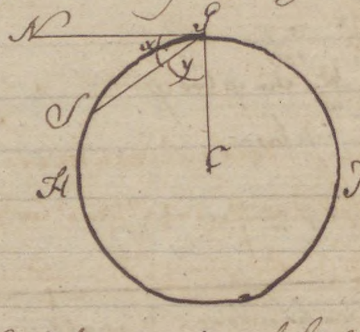
denn in seiner Voraussetzung ist $\cos\delta = 1$ und $\sin\delta = \delta$. Hat man aber einmahl $\psi' = \psi+\delta\cos z$ gesetzt, so folgt hieraus unmittelbar: $\sin\psi' = \sin\psi\cos(\delta\cos z)+\cos\psi\sin(\delta\cos z)$ oder weil aus demselben Grunde $\cos\delta\cos z = 1$ und $\sin\delta\cos z = \delta\cos.z$ ist: $\sin\psi' = \sin\psi+\delta\cos z\cos\psi$ *

3te $Tg\,OB'M$ aber $= \varepsilon^2\delta(\sin\psi\cos z+\frac{1}{2}\delta\cos\psi)(\sin\psi+\delta\cos\psi\cos z)$; erhält man sogleich, sobald man bey der Entwickelung darauf Acht hat; dass der Nenner unter gegenwärtiger Voraussetzung $= 1$ wird; und daher verschwindet. $OB'M$ aber erhält man folgender Massen;:

Es ist $tg\,OB'M = \varepsilon^2\delta(\sin\psi\cos z+\frac{1}{2}\delta\cos\psi)(\sin\psi+\delta\cos\psi\cos z) = (\varepsilon^2\delta\sin\psi\cos z+\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\cos\psi)\times(\sin\psi+\delta\cos\psi\cos z)$ oder nahe $= \varepsilon^2\delta\sin^2\psi\cos z+\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\cos\psi\sin\psi+\varepsilon^2\delta^2\sin\psi\cos\psi\cos^2 z = \varepsilon^2\delta\sin^2\psi\cos z+\varepsilon^2\delta^2\cos\psi\sin\psi\times(\frac{1}{2}+\cos^2 z) = \varepsilon^2\delta\sin^2\psi\cos z+\frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\cos\psi\sin\psi(1+2\cos^2 z)$; allein hier fehlte der Verfasser abermahls, da er seiner Voraussetzung (nach welcher das 2te Glied in der eben gefundenen Gleichung wegbleiben sollte, weil es mit einer höhern Potenz von δ multiplicieret, und folglich sehr klein ist:) nicht treu bleibt, welchen Fehler er aber, in seiner populären Astronomie vermied, indem er das dort zweyte Glied der obigen Reihe wirklich weg liess.

Viertens. Sagt der Verfasser; „und $A\alpha = A\beta$ ist der Winkel der Normale LO, mit der geradlinigen Chorde LA

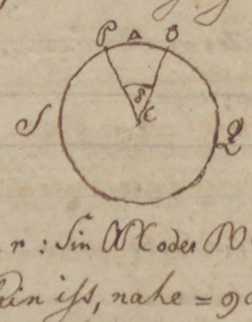
$= \delta$ also: $A\alpha = A\beta = 90° - \frac{1}{2}\delta$. Um dieses zu verstehen, betrachte man einen beliebigen Kreis z. B.



GHI, aus dem Puncte G ziehe man eine beliebige Sehne GS, und ebenfalls in dem Puncte G
$\S$ 95 eine Tangente auf den Bogen GH, sey nun der Winkel NGS = x, und CGS = y, und suche man
y, so ist $y + x = 90°$ also $y = 90° - x$, es hat aber y zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens GS
(nach Vega II B. S. 23 § 371) also $y = 90° - \frac{1}{2}$ GS; vergleicht man nun diese Betrachtung mit des Ver-
fassers Figur, dass dort $y = A\alpha$, $= A\beta$, und $\frac{1}{2}$ GS $= \frac{1}{2}\delta$ also:

$$A\alpha = A\beta = 90° - \tfrac{1}{2}\delta \text{ ist.}*$$

<u>Fünftens</u>: Fehlt der Verfasser in seiner mit (ΣI) bezeichneten $= z'' - z' = \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi \sin z \cos z$, wel-
che er aus der Gleichung: $\mathrm{Tg}\, z'' = \frac{\mathrm{Tg}\, z'}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2 \sin^2\psi}$ herleitet, dadurch, dass er darinn ganz willkühr-
lich, und ohne es zu bemerken, $\sin z \cos z$, statt dem eigentlich seyn sollenden $\sin z'' \cos z'$
setzt. Denn lösen wir obige Gleichung auf, so ist:
$\mathrm{Tg}\, z'' - \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi\, \mathrm{Tg}\, z'' = \mathrm{Tg}\, z'$ oder $\mathrm{Tg}\, z'' - \mathrm{Tg}\, z' = \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi\, \mathrm{Tg}\, z'' = \frac{\sin z'' - \sin z'}{\cos z'' - \cos z'} = \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi\, \mathrm{Tg}\, z''$ oder
$\sin z'' - \sin z' = \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi \sin z'' \cos z'$ also $z'' - z' = \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} \sin^2\psi \sin z''$, wenn man annimmt, dass z'' und z' sehr
klein, und folglich ihre Sinus den Bogen gleich sind.
<u>Sechstens</u>. Sagt der Verfasser, dass die Grösse δ, aus der gegebenen Entfernung $AB = \Delta$, wie der
Winkel eines gegebenen Kreisbogens, durch die Division dieses Bogens durch seinen Halb-
messer abgeleitet; allerdings ist dieses sehr nahe wahr, wenn er δ sehr klein annimmt, was er
unstreitig auch gethan, es zu sagen aber vergessen hat. Denn betrachten wir abermahls einen Kreis
SOPQ, dessen Halbmesser $= r$, halber Umfang $= \pi$ der Winkel OCP $= \delta$ und OP $= \Delta$ ist:



So verhält sich: $\Delta : \sin\delta = r : \sin$ OPC oder POC; welch letzter oder vorletzter Winkel in besagter
Voraussetzung dass δ sehr klein ist, nahe $= 90°$ also dessen Sinus $=$ sin. tot. $= 1$, und folglich:

$$\Delta : \sin\delta = r : 1 \text{ also } \sin\delta = \frac{\Delta}{r} \text{ oder welches einerley } \delta = \frac{\Delta}{r} \text{ ist.}$$

<u>Siebentens</u>: Sagt der Verfasser „da nun hier dieser Halbmesser die Normale AM $= \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi}}$ ist, so ist
$\delta = \frac{\Delta}{a}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\psi\right)$; $\delta = \frac{\Delta}{b}\left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\psi\right)$; $\delta = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\psi\right)$", welches er auf folgende Weise er-
hält: Es ist δ wie gesagt $= \frac{\Delta}{AM} = \frac{\Delta\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi}}{a} = \frac{\Delta}{a}(1 - \varepsilon^2\cos^2\psi)^{\frac{1}{2}}$ und dieses nach der bekannten Reihe:

$(1-m)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{m}{2} + \ldots$ entwickelt, gibt; wenn man die übrigen Glieder der Reihe als ~~sehr kl~~ Potenzen von der sehr kleinen Größe ε vernachläßiget:

$$\mathrm{I}\ \delta = \frac{\Delta}{a}\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2\psi\right)$$

Substituirt man nun in dieser Gleichung statt a seinen Werth aus der Gleichung $\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$

$a = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ so ist: $\delta = \frac{\Delta\sqrt{1-\varepsilon^2}}{b}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi\right) = \frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi\right)$ wenn man $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ nach obiges Reihe entwickelt

$= \frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Cos}^2\psi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) = \frac{\Delta}{b}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\operatorname{Sin}^2\psi\right)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right\} = \frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Sin}^2\psi-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$ welcher gleich ist:

/: wenn man addirt :/:

$$\mathrm{II}\ \delta = \frac{\Delta}{b}\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Sin}^2\psi\right) *$$

Bringt man nun $(1-\varepsilon^2)$ als Factor ausser die Klammern, das heisst multiplicirt und dividirt man das zweyte Glied mit $(1-\varepsilon^2)$, so ist:

$$\delta = \frac{\Delta}{b}(1-\varepsilon^2)\left(1+\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\operatorname{Sin}^2\psi}{1-\varepsilon^2}\right) = \frac{\Delta}{b}(1-\varepsilon^2)\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Sin}^2\psi\right);$$ Es ist aber: $1-\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$ folglich:

$$\delta = \frac{\Delta}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Sin}^2\psi\right) \text{ oder}$$

$$\mathrm{III}\ \delta = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1+\frac{\varepsilon^2\operatorname{Sin}^2\psi}{2}\right) *$$

Achtens, Beging der Verfasser, bey der Uebertragung dieser Aufgabe in seiner populäre Astronomie dort wo er sagt „und zu dem oben gefundenen Werthe von z' noch die Größe: $\varepsilon^2\delta^2\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Sin}2z$" da hier $\frac{\varepsilon^2}{4}\delta^2\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Sin}2z$ ~~daher~~ seyn muss:

Denn lösen wir seine in seiner (theor. und pract. Astr. I B. S. 307) befindliche Gleichung:

Eliptisches $z'' = z' + \frac{\varepsilon^2\delta^2\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Cos}z\operatorname{Sin}z}{2R''}$ auf, so ist weil $2\operatorname{Sin}z\operatorname{Cos}z = \operatorname{Sin}2z$ ~~ist~~ also $\operatorname{Sin}z\operatorname{Cos}z = \frac{\operatorname{Sin}2z}{2}$ ist,

$z'' = z' + \frac{\varepsilon^2\delta^2\operatorname{Sin}^2\psi}{2R''}\times\operatorname{Sin}\frac{2z}{2} = z'' = z' + \frac{\varepsilon^2\delta^2}{4R''}\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Sin}2z$ oder weil $R'' = \frac{1}{\operatorname{Sin}1''} = 1$ ist:

$$\text{Eliptisches } z'' = z' + \frac{\varepsilon^2\delta^2}{4}\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Sin}2z$$

und somit ist dieser verhängnißvolle δ in Littrows (theor. und pract. Astronomie) erleuchtet, und erklärt; die Figur worauf sich die Benennungen $\alpha\beta$, $A\alpha$, $A\beta$, δ, AM, OBM etz. beziehen, befindet sich ebenfalls bey mehr erwähntem Buche. —

---

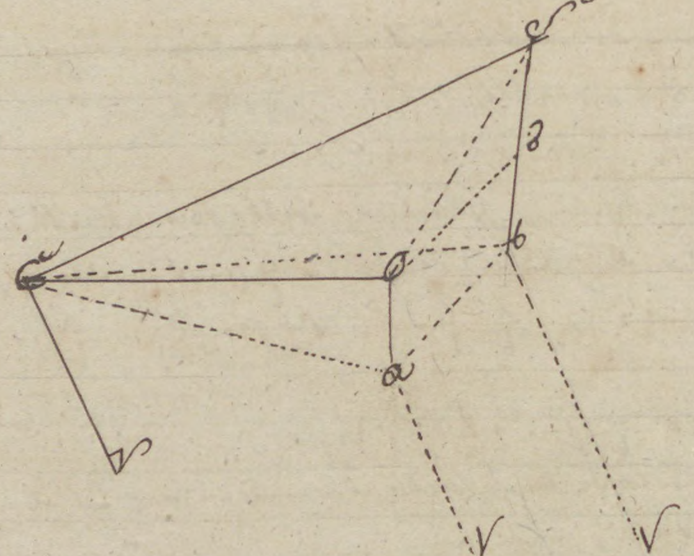
54 Littrows populäre Astronomie I Band 4tes Kapitel Seite 72.

Um die dort gegebenen zwey Ausdrücke, für die Parallaxe der Länge und Breite:

$\lambda' - \lambda = P\operatorname{Sin}(\lambda - L) + \frac{1}{2}P^2\operatorname{Sin}.2(\lambda - L) + \frac{1}{3}P^3\operatorname{Sin}3(\lambda - L) + \ldots$ und

$\beta' - \beta = Q\operatorname{Sin}(\beta - \varepsilon) + \frac{1}{2}Q^2\operatorname{Sin}2(\beta-\varepsilon) + \frac{1}{3}Q^3\operatorname{Sin}3(\lambda - L) + \ldots$ wo $P = \frac{\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Cos}B}{\operatorname{Cos}\beta}$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{Cos}\frac{(\lambda'-\lambda)}{2}}{\operatorname{Cos}(L - \frac{1}{2}(\lambda'+\lambda))}\operatorname{tg}B$ und $Q = \frac{\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}\varepsilon}$, B, L, die Länge und Breite des Zeniths, λ, β gleich der geocentrischen /: aus dem Mittelpunct der Erde gesehenen :/ Länge und Breite, λ', β' aber gleich der scheinbaren oder vom Beobachtungsorte aus gesehenen Länge und Breite eines Gestirns, ist, abzuleiten, sey in folgender Figur, bey welcher die Ebene des Papiers, die Ebene der Ecliptik bezeichnet:



C der Mittelpunct der Erde, S irgend ein Stern, O ein Beobachter auf der Oberfläche der Erde, V der Frühlingspunct; aus O und S denke man sich die lothgerechten Linien $O\omega$ und Sb aus dem Beobachtungsorte und dem Sterne; und die der Richtung des Frühlingspunctes, parallelen Linien OV und $V\omega$, so ist hier:

$L = VC\omega$; $B = OC\omega$, $\lambda = VCb$; $\beta = SCb$; $\lambda' = V\omega b$, $\beta' = SOb$ und $SO = \varrho$.

I Betrachtet man nun das in der Ecliptik liegende Dreyek $bC\omega$, so findet man in demselben die Winkel: $bC\omega = VCb - VC\omega = \lambda - L$; $Cb\omega = V\omega b - VCb = \lambda' - \lambda$; $C\omega b = 180° - (\lambda' - \lambda) + (\lambda - L)$ $= 180° - (\lambda' - L)$ und die Seiten $b\omega = O\beta = \varrho \operatorname{Cos.} \beta'$; $C\omega = CO \operatorname{Cos} OC\omega = r \operatorname{Cos} B$ und $Cb = SC \operatorname{Cos} SCb$ $= R \operatorname{Cos} \beta$ (der Verfasser setzt die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkte $= r$; und die des Sterns vom Mittelpuncte $= R$)

Nun verhält sich nach Vega II Band 4tes Hauptst. §555 S. 220:

$C\omega : \operatorname{Sin.} Cb\omega = Cb : \operatorname{Sin} C\omega b$ oder $C\omega : \operatorname{Sin} Cb\omega = Cb : \operatorname{Sin}(180° - Cb\omega - bC\omega)$ also auch:

$C\omega : \operatorname{Sin} Cb\omega = Cb : \operatorname{Sin}(Cb\omega + bC\omega)$ oder dies letzte Glied entwickelt: $C\omega : \operatorname{Sin} Cb\omega = Cb : \operatorname{Sin} Cb\omega \operatorname{Cos} bC\omega$ $+ \operatorname{Cos.} Cb\omega \operatorname{Sin.} bC\omega$; dividdirt man nun jedes Verhältniß der ~~die zwey äußern Glieder der~~ Proportion mit $\operatorname{Cos.} Cb\omega$ so ist:

$C\omega : \operatorname{tg.} Cb\omega = Cb : \operatorname{tg.} Cb\omega \operatorname{Cos.} bC\omega + \operatorname{Sin} bC\omega$ nähmlich $Cb \operatorname{tg} Cb\omega = C\omega \operatorname{tg} Cb\omega \operatorname{Cos} bC\omega + C\omega \operatorname{Sin} bC\omega$ $= Cb \operatorname{tg.} Cb\omega = C\omega(\operatorname{tg.} Cb\omega \operatorname{Cos} bC\omega + \operatorname{Sin} bC\omega) = \operatorname{tg} Cb\omega(Cb - C\omega \operatorname{Cos} bC\omega) = C\omega \operatorname{Sin} bC\omega$, daß heißt weil wir $Cb\omega$ suchen:

$$\operatorname{tg.} Cb\omega = \frac{C\omega \operatorname{Sin} bC\omega}{Cb - C\omega \operatorname{Cos} bC\omega}$$ oder wenn man Zähler und Nenner mit Cb dividdirt:

$$\operatorname{tg} Cb\omega = \frac{\frac{C\omega}{Cb} \operatorname{Sin} bC\omega}{1 - \frac{C\omega}{Cb} \operatorname{Cos.} bC\omega}$$ oder wenn man ihre obigen Bedeutungen herstellt, =

$$= \operatorname{tg}(\lambda' - \lambda) = \frac{\frac{r}{R} \cdot \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Sin}(\lambda - L)}{1 - \frac{r \operatorname{Cos} B}{R \operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Cos}(\lambda - L)} = \frac{\frac{\operatorname{Sin} \pi}{\operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(\lambda - L)}{1 - \frac{\operatorname{Sin} \pi}{\operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(\lambda - L)} = \frac{P \operatorname{Sin}(\lambda - L)}{1 - P \operatorname{Cos}(\lambda - L)}$$ (weil Littrow $\frac{r}{R} = \operatorname{Sin} \pi$ und $\frac{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos} \beta} = P$ setzet)

Setzt man nun in des Verfassers theor. und pract. Astron. Seite 12 in seinem $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{b \operatorname{Sin} y}{1 - b \operatorname{Cos} y}$

$\mathfrak{b} = b$, und $y = (\lambda - \mathfrak{L})$ und $\frac{1}{2}(x-y) = (\lambda' - \lambda)$, so hat man nach der Seite 11 für obigen Ausdruck entwickelten Reihe: $\frac{1}{2}(x-y) = b\,\mathrm{Sin}.\,y + \frac{1}{2}b^2\,\mathrm{Sin}\,2y + \frac{1}{3}b^3\,\mathrm{Sin}\,3y + \dots$ wenn man die eben gleichgesetzten Werthe substituirt:

$$(\lambda' - \lambda) = \rho\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) + \tfrac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{Sin}\,2(\lambda - \mathfrak{L}) + \tfrac{1}{3}\rho^3\,\mathrm{Sin}\,3(\lambda - \mathfrak{L}) + \dots$$ gleich der Parallaxe der Länge

II Betrachten wir nun das Dreyeck SOB, so finden wir darinn:

$$Sb : \mathrm{Sin}\,SOB = Ob : \mathrm{Cos}\,SOB \text{ oder } Sb : tg\,Ab = Ob : 1 \text{ woraus folgt: } tg\,Ab = \frac{Sb}{Ob}$$

Es ist aber $SOb = \beta'$; $Ob = \omega b = \frac{Cb\,\mathrm{Sin}\,bC\omega}{\mathrm{Sin}\,C\omega b}$ weil $\omega b : \mathrm{Sin}\,bC\omega = Cb : \mathrm{Sin}\,C\omega b$ und $Sb = Sb - ob = Sb - O\omega$

folglich wegen: $Cb = R\,\mathrm{Cos}\,\beta$

$\mathrm{Sin}\,bC\omega = \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})$

$\mathrm{Sin}\,C\omega b = \mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})$

$Sb = R\,\mathrm{Sin}\,\beta$

$O\omega = r\,\mathrm{Sin}\,B$

$$tg\,\beta' = \frac{(R\,\mathrm{Sin}\,\beta - r\,\mathrm{Sin}\,B)\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})} = \frac{(\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B)\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})}$$ wenn man nähmlich Zähler und Nenner durch R dividirt, und sodann nach dem Vorhergehenden statt $\frac{r}{R}$ seinen Werth π setzt. Nun ist nach den allgemeinen trigonometrischen Formel:

$$tg(\beta' - \beta) = \frac{tg\,\beta' - tg\,\beta}{1 + tg\,\beta'\,tg\,\beta}$$ Substituirt man hier für $tg\,\beta'$ seinen Werth, so ist der Zähler:

$$tg\,\beta' - tg\,\beta = \frac{(\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B)\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})}{\cancel{\mathrm{Cos}\,\beta}\ \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})}$$ und der Nenner

$$1 + tg\,\beta' \times tg\,\beta = \frac{\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) + tg\,\beta(\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B)\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})} =$$

$$tg(\beta' - \beta) = \frac{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\cancel{\mathrm{Sin}}\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})}{\mathrm{Cos}^2\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) + \mathrm{Sin}^2\beta\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}$$

$$tg(\beta' - \beta) = \frac{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\{\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})\} - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Cos}^2\beta\,(\mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L})) - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}$$

Da aber nach den ersten trigonometrischen Grundformeln:

$$\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) = 2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - \mathfrak{L}\right)\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$$ es ist aber

$$\mathrm{Sin}(\lambda' - \lambda) = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$$ folglich

$$\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - \mathfrak{L}\right)\frac{\mathrm{Sin}(\lambda' - \lambda)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}$$ nähmlich wenn man statt $(\lambda' - \lambda)$ etz die Werthe setzt:

$$\mathrm{Sin}(\lambda' - \lambda) = \frac{r\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{R\,\mathrm{Cos}\,\beta} = \frac{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{\mathrm{Cos}\,\beta}$$ also:

$$\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L}) - \mathrm{Sin}(\lambda - \mathfrak{L}) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - \mathfrak{L}\right)\frac{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}(\lambda' - \mathfrak{L})}{\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}$$ also

$$tg.(\beta'-\beta) = \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}-L\right)\frac{\operatorname{Sin}(\lambda'-L)\operatorname{Cos}B}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\lambda'-L)}{\operatorname{Sin}(\lambda'-L) - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}B \operatorname{Cos}\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}-L\right)\frac{\operatorname{Sin}(\lambda'-L)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}(\lambda'-L)}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}B \frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}-L\right)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{1 - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}B \frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}-L\right)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}B}$$

Setzt man nun:

$$tg.\,\varepsilon = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\operatorname{Cos}\left(L-\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)}\,tg\,B;$$ dass heisst: setzt man: $$\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2}\lambda'-\lambda-L\right)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)} = \frac{tg\,B}{tg\,\varepsilon};$$ so ist:

$$tg(\beta'-\beta) = \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}B \frac{tg\,B}{tg\,\varepsilon} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{1 - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}B \frac{tg\,B}{tg\,\varepsilon} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}B}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \frac{\operatorname{Sin}B}{tg\,\varepsilon} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{1 - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \frac{\operatorname{Sin}B}{tg\,\varepsilon} - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}B}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\pi \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}\varepsilon}\operatorname{Cos}\varepsilon - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{1 - \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}\varepsilon}\operatorname{Cos}\varepsilon - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}$$

oder, weil der Verfasser, $\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}B = Q \operatorname{Sin}\varepsilon$ setzt:

$$= \frac{Q \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\varepsilon - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}{1 - Q \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\varepsilon - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}B}$$

$$= \frac{Q \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\varepsilon - Q \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Cos}\beta}{1 - Q \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\varepsilon - Q \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Cos}\beta}$$ welcher endlich $= \frac{Q \operatorname{Sin}(\beta-\varepsilon)}{1 - Q \operatorname{Cos}(\beta-\varepsilon)}$ ist; entwickelt man diesen Bruch nach der bekannten Formel $tg\,\frac{1}{2}(x-y) = 6 \operatorname{Sin} y$ etz in eine unendliche Reihe so bekommt man:

$$\beta'-\beta = Q \operatorname{Sin}(\beta-\varepsilon) + \tfrac{1}{2}Q^2 \operatorname{Sin} 2(\beta-\varepsilon) + \tfrac{1}{3}Q^3 \operatorname{Sin} 3(\beta-\varepsilon) + \ldots$$ die gesuchte Formel.

Auch die jährliche Parallaxe der Fixsterne erhält man aus obiger Figur, wenn man die Höhe des Beobachtungsortes über dem Mittelpuncte der Erde = 0 setzt.

Die Formeln für die durch die Aberration geänderte Länge und Breite eines Gestirns, die er (der Verf.) in seiner populären Astronomie bloss ansetzt, findet man in seiner theoretischen und practischen Astronomie I B. S. 54 vollständig entwickelt.

Lehre von den Coordinaten.

55 Wenn man die Lage irgend eines Punctes zu bestimmen hat; so geschieht es auf folgende Art: Man bildet sich drey Ebenen, welche auf einander senkrecht sind, und läßt von dem zu bestimmenden Puncte, auf jede dieser Ebenen einen Perpendikel fallen, um dann den Punct zu finden, braucht man nur die Distanz dieses Punctes, von jeder Ebene, auf den entsprechenden Perpendikel aufzutragen. Die drey obigen Ebenen heisst man die <u>Coordinaten Ebenen</u> die drey Perpendikel <u>die Cordinaten</u>, und die Durchschnittslinien der obigen Ebenen die <u>Axen der Coordinaten</u>, und zwar heißt jede dieser Durchschnittslinien, die Axe jener Coordinate, die ihr <u>parallel</u> ist.

56 Die jährliche Parallaxe der Fixsterne, kann auch aus den Elementen der obigen Figur aufgelöset werden und zwar auf folgende Art: Es sey in nachstehender Figur die Sonne in $\odot$, die Erde, in T, und irgend ein Stern in $*$, so ist, wenn $\lambda\beta$, und Breite, $\odot$ die Länge der Sonn ~~bezeichnet~~ r aber die $S* = r$, $*SM = \beta$,

T q*SM das Dreyeck

($\odot = 180° +$ Länge d. $\oplus$ und

Die heliocentrische λ', β', aber die geocentrische Länge, und $S♈$; $T♈$, die Linie der Frühlingsnachtgleichen Entfernung des Stern von der Sonne bezeichnet: $MS♈ = \lambda$, ~~$*MT$~~ $= \beta'$ und $MT♈ = \lambda'$. Nehmen wir nun MST, so sind indemselben die Winkel: $\underline{MST} = \lambda - 180° \odot$ ♈ Länge der $\oplus$ = $TS♈$); $\underline{SMT} = \lambda' - \lambda$; $\underline{STM} = \odot - \lambda'$; und die Seiten: $\underline{ST} = 1$. Nun ist indemselben:

$\sin(\lambda' - \lambda) : \sin(\odot - \lambda') = 1 : SM$ oder wie $1 : r\cos\beta$ woraus man findet: $\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{1}{r}\frac{\sin(\odot - \lambda')}{\cos\beta}$ oder

$$\lambda' = \lambda + \frac{1}{r}\cdot\frac{\sin(\odot - \lambda)}{\cos\beta}*$$

Der Verfasser hat zwar $(\odot - \lambda')$ diess hat er aber in der Voraussetzung dass λ und λ' sehr wenig von einander verschieden sind, so, dass man ohne merklichen Fehler eines für dass andere setzen könne.

II Ferner ist $M*$ sowohl $= MT\,tg.\,\beta'$ als auch $= SM\,tg.\,\beta$ folglich ist auch: $SM\,tg\,\beta = TM\,tg\,\beta'$ oder

$tg\beta' = tg\beta\cdot\frac{SM}{MT} = tg\beta\frac{\sin(\odot - \lambda')}{\sin(\odot - \lambda)}$ weil $\frac{SM}{MT} = \frac{\sin(\odot - \lambda')}{\sin(\odot - \lambda)}$ ist. Man kann aber statt diesen auch setzen

$$tg\beta' = tg\beta\,\frac{\sin\{(\odot - \lambda) - (\lambda' - \lambda)\}}{\sin(\odot - \lambda)} = tg\beta\left\{\frac{\sin(\odot - \lambda)\cos(\lambda' - \lambda) - \cos(\odot - \lambda)\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin\odot - \lambda}\right\},$$

oder dividirt

$$tg\beta' = tg\beta\left(\cos.(\lambda' - \lambda) - \cotg(\odot - \lambda)\sin(\lambda' - \lambda)\right) = tg\beta\,(1 - (\lambda' - \lambda)\,Ctg.(\odot - \lambda)$$

oder die Multiplication verrichtet: $tg\beta' = tg\beta - tg\beta(\lambda' - \lambda)\cotg(\odot - \lambda)$ also $tg\beta' - tg\beta = -tg\beta(\lambda' - \lambda)\cotg(\odot - \lambda)$ oder

$\frac{\sin(\beta' - \beta)}{\cos\beta\cos\beta'} = -tg.\beta(\lambda' - \lambda)\cotg(\odot - \lambda)$, dass heisst: $\sin(\beta' - \beta) = -\sin\beta\cos\beta'(\lambda' - \lambda)\cotg.(\odot - \lambda)$ oder für ~~$\lambda'\lambda$~~ $(\lambda' - \lambda)$ seinen Werth gesetzt: $\sin(\beta' - \beta) = -\frac{\sin\beta\cos\beta'}{r\cos\beta'}\sin(\odot - \lambda)\cotg(\odot - \lambda)$

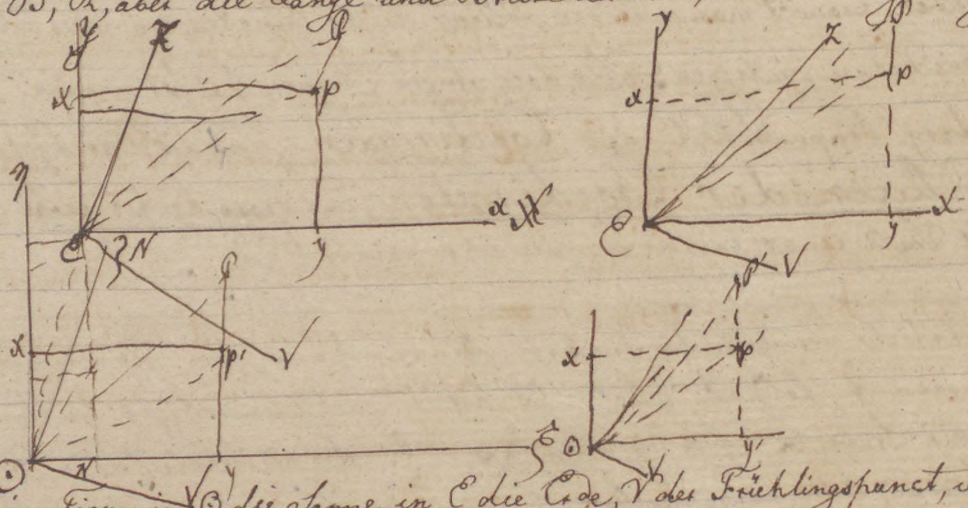
also:

$$\cancel{(\beta' - \beta)}\ \beta' - \beta = -\frac{\sin\beta}{r}\cos(\odot - \lambda) \text{ oder } \beta' = \beta - \frac{1}{r}\sin\beta\cos(\odot - \lambda)*$$

Littrows populäre Astronomie Seite 164

Es ist aus dem heliocentrischen Ort des Planeten und der Erde, der geocentrische des Planeten zu finden

Es sollen l, b, r, die heliocentrische Breite des Planeten, wie auch seine Länge und Entfernung von der Sonne; λ, β, ρ die geocentrische Länge und Breite des Planeten, und seine Entfernung von der Erde; L, B, R, aber die Länge und Breite der Erde, und ihre Entfernung von der Sonne bezeichnen



Ferner sey in obiger Figur in ☉ die Sonne, in E die Erde, ♈ der Frühlingspunct, und der Planet irgendwo in P; bestimmt man seine Lage gegen die Erde, durch die drey rechtwinkeligen Coordinaten X, Y, Z, von den X, Y, in der Ebene der Ecliptik liegen, und gegen die Sonne, durch durch die drey, den ersten parallelen Coordinaten ξ, η, ζ, und nenne man den Winkel den die Linie der Nachtgleichen, mit der Axe der X macht, N; sind ferner p und p' die, auf die Ebenen XY; $\eta\xi$, projicirten Orte des Planeten, so hat man, wenn man noch die Lage der ~~Sonne~~ Erde gegen die Sonne, durch die Coordinaten X, Y, Z, bestimmt, und von dem Planeten Perpendikel auf die Coordinaten Ebenen zieht:

			☉ ist aber auch was man leicht sieht
$\xi = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos}(l - N)$	$X = R \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(L - N)$	$x = \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(\lambda - N)$	$x = \xi - X$
$\eta = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin}(l - N)$	$Y = R \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L - N)$	$y = \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}(\lambda - N)$	$y = \eta - Y$
$\zeta = r . \operatorname{Sin} b$	$Z = R \operatorname{Sin} B$	$z = \rho \operatorname{Sin}\beta$	$z = \zeta - Z$

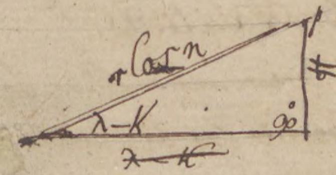
oder, ihre Werthe substituirt:

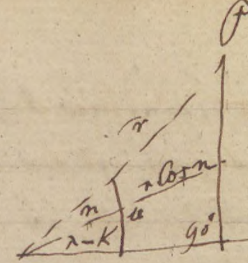
$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(\lambda - N) = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos}(l - N) - R \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(L - N) \\ y &= \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}(\lambda - N) = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin}(l - N) - R \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L - N) \\ z &= \rho \operatorname{Sin}\beta = r \operatorname{Sin} b - R \operatorname{Sin} B = r \operatorname{Sin} b \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

weil die Erde keine Breite hat,

welches die gesuchten Formeln, und zwar in einer grössern Allgemeinheit sind, als beym Verfasser, da hier auch auf die Breite der Erde Rücksicht genommen werde.

1tens Setzt man nun in diesen Formeln, N gleich der Länge des aufsteigenden Knotens, und nennt man u das Argument der Breite, und n die Neigung der Bahn; so hat man statt dem vorigen Dreyecke folgendes:





und daraus:

$$(1)\ \varrho \cos\beta \cos(\lambda - K) = r \cos u - R \cos(L - K)$$
$$(2)\ \varrho \cos\beta \sin(\lambda - K) = r \cos n \sin u - R \sin(L - K)$$
$$(3)\ \varrho \sin\beta = r \sin n \sin u$$

Multipliciert man nun (1) mit $\sin(L-K)\sin\beta$, die zweyte mit $\cos(L-K)\sin\beta$, die dritte mit $\sin(L-\lambda)\cos\beta$; und macht man dann (1) − (2) + (3) so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho\cos\beta\cos(\lambda-K)\sin(L-K)\sin\beta \\ -\varrho\cos\beta\sin(\lambda-K)\cos(L-K)\sin\beta \\ -\varrho\sin\beta\sin(L-\lambda)\cos\beta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} r\cos u\sin(L-K)\sin\beta - R\cos(L-K)\sin(L-K)\sin\beta \\ -r\sin u\cos n\cos(L-K)\sin\beta + R\sin(L-K)\cos(L-K)\cos\beta \\ +r\sin u\sin n\sin(L-\lambda)\cos\beta \end{array}\right.$$

und wenn man die Glieder des ersten Theiles reduziert:

$$0 = r\cos u\sin(L-K)\sin\beta - r\sin u\cos n\cos(L-K)\sin\beta - r\sin u\sin n\sin(L-\lambda)\cos\beta$$

Dividirt man diese Gleichung mit: $r\cos u\cos\beta$ und reduziert die letzten Glieder, so erhält man:

$$0 = \sin(L-K)\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}u\left(\cos n\cos(L-K)\operatorname{tg}\beta + \sin n\sin(L-\lambda)\right) \ldots\ldots (*)$$

2tens Dividirt man oben (2) durch (3) /jedoch mit Auslassung der Multiplication, die bey der vorigen Formel nöthig war:/ so hat man:

$$\operatorname{Ctg} n = \operatorname{Cotg}\beta\sin(\lambda-K) + \frac{R\sin(L-K)}{\varrho\sin\beta} \text{ oder } \varrho\sin\beta\operatorname{Cotg} n = \varrho\cos\beta\sin(\lambda-K) + R\sin(L-K) \text{ oder}$$

$$\varrho\left(\sin\beta\operatorname{Cotg} n - \cos\beta\sin(\lambda-K)\right) = R\sin(L-K) \ldots\ldots (**)$$

Ferner hat man

$$r\sin n\sin u = \varrho\sin\beta \ldots\ldots\ldots\ldots (***)$$

Um nun die Werthe von $\operatorname{tg} u$, ϱ, und r, die Littrow angibt, zu erhalten, entwickle man die erste aus (*) die zweyte aus (**) und die dritte aus (***) und man wird haben:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} u = \dfrac{\sin(L-K)\operatorname{tg}\beta}{\cos n\cos(L-K)\operatorname{tg}\beta + \sin n\sin(L-\lambda)} \\[2ex] \varrho = \dfrac{R\sin(L-K)}{\sin\beta\operatorname{Ctg} n - \cos\beta\sin(\lambda-K)} \\[2ex] r = \dfrac{\varrho\sin\beta}{\sin n\sin u} \end{array}\right\} \text{II}$$

welches dieselben Ausdrücke sind, die der Verfasser, so wie es hier geschieht, mit II bezeichnet.

Most azt kérem fel, hogy a sík, melybe a csillag vetült (projiciált) helye m és a földfölületeni létező észleleti helynek vetülete esik, a napútleggyen, lesszen az $\vartheta p m$ egyenletben:

$m\vartheta p = \Upsilon\vartheta m - \Upsilon\vartheta p = \lambda - N$ (a $\Upsilon\vartheta p$ szögöt N-nek nevezzük);

$\vartheta m p = 180° - (\lambda - N)$; és az oldalok: $mp = \vartheta' n = \Delta \cos\beta$, $\vartheta p' = R \cos B$,

$m\vartheta =$

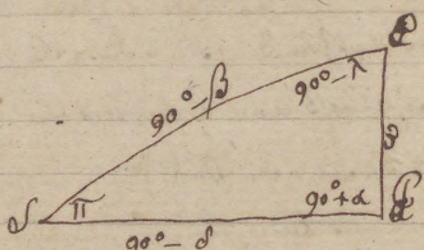
Littrow populäre Astronomie I Band Seite. 21.

Einen allgemeinen Ausdruck für die synodische Revolution eines Planeten zu finden, wenn die tropische gegeben ist. Es ~~bewege~~ sei die tropische Revolution eines Körpers $= t$ die des Andern $= T$ Tagen; so legt in einem Tage der Eine $\frac{360}{t}$ und der Andere $\frac{360}{T}$ Grade zurück. Es ist aber $\left(\frac{360}{t} - \frac{360}{T}\right)x$ /: x bezeichnet die Zeit, während welcher der Körper: ~~[illegible]~~ mit der Geschwindigkeit der Differenz beyder Bewegungen :/ $= 360^\circ$

oder: $360^\circ\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{T}\right)x = 360^\circ$ oder $\frac{(T-t)\,x}{tT} = 1$ wenn man mit 360 dividirt, und dann auf gleiche Benennung bringt; also:

$$x = \frac{tT}{T-t} = \frac{t}{1-\frac{t}{T}}$$ /: wenn man mit T Zähler und Nenner theilt :/

$$= \frac{360\,t}{360^\circ - \frac{t}{T}\,360} = \frac{360\,t}{360^\circ - mT}$$

59) 

I (1) $tg\,\lambda\,Cos\,\alpha - tg\,\delta\,Sin\,\omega = Sin\,\alpha\,Cos\,\omega$ (2) $\frac{tg\,\lambda\,Cos\,\alpha - tg\,\delta\,Sin\,\omega}{Sin\,\alpha} = Cos\,\omega$ (3) ~~Cotg~~ $tg\,\lambda - \frac{Sin\,\omega}{Sin\,\alpha\,Ctg\,\delta} = Cos\,\omega$

$tg\,m = Sin\,\alpha\,Ctg\,\delta$ (4) $Ctg\,\alpha\,tg\,\delta\,Sin\,m - Sin\,\omega\,\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,m} = Cos\,\omega\,Sin\,m$ also

$$\text{I)}\ tg\,\lambda = tg\,\alpha\,\frac{Sin\,(m+\omega)}{Sin\,m} \quad * * *$$

1) $Sin\,\beta = Cos\,\omega\,Sin\,\delta - Sin\,\omega\,Cos\,\delta\,Sin\,\alpha$ (divisum per $Sin.\,\delta$) (2) $Sin\,\beta = Cos\,\omega - Sin\,\omega\,Cotg\,\delta\,Sin\,\alpha$ $\quad tg\,m = Ctg\,\delta\,Sin\,\alpha$

$$\text{II)}\ Sin\,\beta = \frac{Cos\,(m+\alpha)}{Cos.\,m} \quad * * *$$

1) $tg.\,\alpha\,Cos\,\lambda - tg.\,\beta\,Sin\,\omega = \pm\,Sin\,\lambda\,Cos\,\omega$ (2) $tg.\,\alpha\,Ctg.\,\lambda - \frac{tg\,\beta\,Sin\,\omega}{Sin\,\lambda} = \pm\,Cos\,\omega$

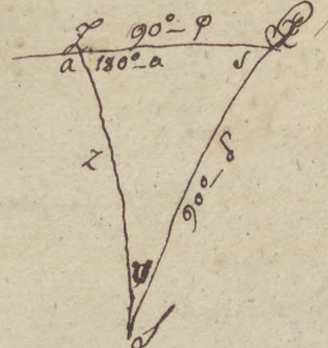
$$\text{III)}\ tg.\,\alpha = tg.\,\lambda.\,\frac{Sin\,(n-\omega)}{Sin.\,n} \quad tg\,n = Ctg.\,\beta\,Sin\,\lambda \;=\; \text{(~~Longit. Zenith~~)}$$

1) $Sin\,\delta = Cos\,\omega\,Sin\,\beta + Sin\,\omega\,Cos\,\beta\,Sin\,\lambda$ (2) $\frac{Sin\,\delta}{Sin\,\beta} = \mp\,Cos\,\omega + \frac{Sin\,\omega\,Sin\,n}{Cos\,n}$ (3) $\frac{Sin\,\delta\,Cos\,n}{Sin\,\beta} = \mp\,Cos\,\omega\,Cos\,n + Sin\,\omega\,Sin.\,n$

$$\text{IV)}\ Sin\,\delta = \frac{Sin\,\beta\,Cos\,(n-\omega)}{Cos.\,n} \quad (NB)\ n = Ctg\,\beta\,Sin\,\lambda$$

I gibt die Länge und II) die Breite eines Gestirns, wenn dessen Rectascension und Declination, ~~und~~ ferner III) die Rectascension und IV die Declination, wenn dessen Länge und Breite bekannt ist.

60 Littrows pop. Astron. S. 42. B. I



I $\text{Cos}\, z = \text{Cos}\, \varphi\, \text{Cos}\, \delta\, \text{Cos}\, s + \text{Sin}\, \varphi\, \text{Sin}\, \delta$ gibt die Zenithdistanz.

Im Augenblike der Culmination eines Sterns ist die gröste und kleinste Zenith-distanz:

II $$z = \varphi - \delta$$

Um sie (die obige Gleichung) auch zur Berechnung der Polhöhe geschikt zu machen, werden wir ihr eine andere Gestalt geben müssen. Zu diesem Ende sey:

$$\text{tg}\, x = \text{Cos}\, s\, \text{Ctg.}\, \delta \quad (1)$$

Die Gleichung I gibt:

$$\frac{\text{Cos}\, z}{\text{Sin}\, \delta} = \text{Sin}\, \varphi + \text{Cos}\, \varphi\, \text{Cotg}\, \delta\, \text{Cos}\, s \text{ oder (1) } \frac{\text{Cos}\, z}{\text{Sin}\, \delta} = \text{Sin}\, \varphi + \text{Cos}\, \varphi\, \text{tg}\, x \text{ oder}$$

$$\frac{\text{Cos}\, z\, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, \delta} = \text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, x + \text{Cos}\, \varphi\, \text{Sin}\, x \text{ oder endlich:}$$

III $$\text{Sin}\, (\varphi + x) = \frac{\text{Cos}\, z\, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, \delta}$$

Setzt man in I $z = 90°$, so erhält man für den Augenblik, in dem der Stern auf oder untergehet:

IV $0 = \text{Sin}\, \varphi\, \text{Sin}\, \delta + \text{Cos}\, \varphi\, \text{Cos}\, \delta\, \text{Cos}\, s = \text{Cos}\, s = -\text{tg}\, \varphi\, \text{tg.}\, \delta$ oder wenn man $s = (90° + t)$ setzt

bequemer V $\text{Sin}\, t = \text{tg}\, \varphi\, \text{tg}\, \delta$ (NB) ($s = 90° + t$) d. h. = dem ½ Tagebogen)

Aus obigem Dreyeke, kann man auch das Azimuth auf folgende Art finden:

Es ist: $\text{Tg}\, \delta\, \text{Cos}\, \varphi + \text{Ctg}\, a\, \text{Sin}\, s = \text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, s$ also

V) $$\text{Ctg}\, a = \frac{\text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, s - \text{Cos}\, \varphi\, \text{Tg.}\, \delta}{\text{Sin}\, s}$$

Um den Ort des Auf oder Untergangs eines Sterns im Horizont zu finden, wird man nur $z = 90°$ setzen, wodurch man erhält:

$\text{Sin}\, \delta =$

61 Littrow theoretische und practische Astronomie I Band Seite 276

Der Verfasser sagt: die Normale $MN = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$; es ist aber MN nicht die Normale, sondern ME, und MN eigentlich:

$MN = ME + EN$; wir wollen also die zwey Grössen aus denen MN besteht, jede insbesondere suchen: Es ist

ME = der Normale, und für die Normale hat man den allgemeinen Ausdruck Normale $= b\sqrt{\left(1-\frac{c^2x^2}{a^4}\right)}$ in unserem Falle aber ist $b = a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$; $c = a\varepsilon$, und $x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$ nach dem Texte des Verfassers) also ist nach obiger Formel:

$$ME = a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\sqrt{1-\frac{a^2\varepsilon^2x^2}{a^4}} \left(= \sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} = \sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\sqrt{a^2-\frac{a^2\varepsilon^2\cos^2\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$= \frac{a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi-\varepsilon\varepsilon\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} \text{ oder}$$

$$ME = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} * \text{ - - - I}$$

Um NE zu finden haben wir im Dreyecke NCE (siehe seine Figur:) :

$$NE : CE = 1 : \cos\varphi$$

Hieraus hat man $NE = \frac{CE}{\cos\varphi} = \frac{CP - EP}{\cos\varphi}$ Was ist aber EP? EP ist die Subnormale für die (nach Vega §434) folgender Ausdruck gilt $\frac{b^2x}{a^2}$ daher:

$$NE = \frac{CP - \text{Subnormale}}{\cos\varphi} = \frac{x-\frac{b^2x}{a^2}}{\cos\varphi} = \frac{x-(1-\varepsilon\varepsilon)x}{\cos\varphi} = \frac{\varepsilon\varepsilon x}{\cos\varphi}$$

$$NE = \frac{a\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} *$$

Da nun $NM = ME + NE$ ist, so ist auch:

$$NM = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} + \frac{a\varepsilon\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} \text{ daß heißt:}$$

$$NM = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\varphi}} ***$$

Man sieht also daraus, daß der Verfasser sehr uneigentlich NM ~~der~~ ~~No~~ für die Normale der Elipse angenommen hat.

62 Littrowi Astronomia theoret. & practic. Tomus I. pag. 276.

$$dA = \cancel{\sqrt{dx^2+dy^2}} = a(1-\varepsilon^2)\left(d\varphi + \frac{3\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{3.5.\varepsilon^4}{2.4}\sin^4\varphi . d\varphi + \cdots\right)$$

1) $dA = \sqrt{dx^2+dy^2}$ (ex principiis Geometriae sublimioris)

~~2)~~ Ex Texto Auctoris habemus:

2 $$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

3 $$y = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

4 $$dy = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} . d.a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi - a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi . d\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} - \dfrac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi.(-2\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi)}{2\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \dfrac{a^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi) + a^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

5 $$dy^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^3}$$ (4.n.) Eadem operatione eruitur

6 $$dx = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} . d.a\cos\varphi - a\cos\varphi . d\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}$$ Nimis per reductiones competentes similes illis in (4.n) erit.

7) $$dx = \frac{-a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

8) $$dx^2 = \frac{\pm a^2(1-\varepsilon^2)^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^3}$$ (n.7.) fiat itaque

9) $$dy^2+dx^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2 d\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^3}\left\{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right\}$$ (5.8.n.); hinc ob $(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1$

10) $$dy^2+dx^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2 d\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^3}$$; et hinc ob (1.n)

11) $$dA = \frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \cancel{\frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi}} = \cancel{\frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\cos\varphi}} = \cancel{\frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}}$$ $\cancel{(1.n)}$ $= \cancel{a(1-\varepsilon^2)d\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}$

12) $$dA = \cancel{a(1-\varepsilon^2)d\varphi\sin\varphi\cos\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}} = \cancel{a(1-\varepsilon^2)d\varphi.(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= a(1-\varepsilon^2)d\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

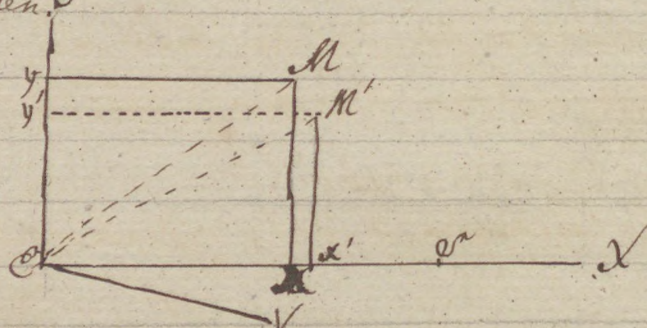
Ex qua aequatione per formulam Newtonianam series apposita facile evolvitur.

Eign

63 Littrow populäre Astronomie I Band, Seite 147.

Die Ableitung der dortigen zwey Ausdrüke für die durch die Aberration geänderten Längen & Breiten eines Gestirns findet man in des Verfass. theor. und pract. Astronomie I B. S. 54, ~~auf~~ da aber dort manches etwas undeutlich seyn könnte, möge sie hier statt finden.

Bezeichnen wir mit dem Verfasser durch L die Länge der Sonne, durch λ, β, r die wahre Länge, Breite, und Entfernung des Gestirns von der Erde — bestimmen wir ferner die Lage des ~~der~~ Gestirns vom Mittelpuncte der Erde, durch die drey rechtwinkligen Coordinaten, x, y, z, mit der Bedingung, dass x in der Linie, die den Mittelpunct der Sonne und der Erde verbindet, beyde x, y aber in der Ebene der Ekliptik liegen sollen.



In obiger Figur sind X, Y, die Coordinatenebenen, die Linien EX, EY aber die Axen der Coordinaten, x, y. E ist der Ort der Erde, S der der Sonne, M der auf die Eklipstik projicirte Ort des Gestirns, ~~EM~~ r die Entfernung desselben von der Erde, und endlich $My = Ex = x$, $Mx = Ey = y$ und dritte senkrechte Coordinate $= z$

Nach diesen Bestimmungen hat man, um die Werthe der Coordinaten zu finden, folgende Ausdrüke:

$x = EM . \text{Cos}\, MEx$

$y = EM . \text{Sin}\, MEx$

$z = r\ \text{Sin}\, \beta$

Oder nach obigem, da $EM = r\ \text{Cos}\,\beta$, und $MEx = \lambda - L$ ist:

$x = r\ \text{Cos}\,\beta . \text{Cos}\,(\lambda - L)$

$y = r\ \text{Cos}\,\beta . \text{Sin}\,(\lambda - L)$

$z = r\ \text{Sin}\,\beta$

Sey eben so M' der auf die Ecliptik projicirte scheinbare Ort des Gestirns r' die Entfernung, und Cx' = x', Cy' = y' und die dritte Coordinate = z' die Coordinaten dieses scheinbaren Ortes, so ist wie vorher; wenn noch β' die Breite und λ' die Länge dieses scheinbaren Ortes bezeichnet:

$$x' = r' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} (\lambda' - \mathcal{L})$$
$$y' = r' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Sin.} (\lambda' - \mathcal{L})$$
$$z' = r' \operatorname{Sin.} \beta'$$

Die Linie $b = \frac{t}{T} . x$ welche, aus dem wahren Orte des Gestirnes in der Ebene durch den wahren Ort und durch die Tangente der Erdbahn, parallel mit letzterer gezogen, den scheinbaren Ort des Sternes bezeichnet, ist parallel mit der Axe der y, weil die Tangente ihr ebenfalls parallel ist, indem die Tangente auf dem Halbmesser des Kreises – welcher hier die Axe der x ist, senkrecht steht, und folglich, mit der Axe der y und der Linie b parallel läuft, so läuft auch y mit b parallel.

Man hat also; da die Coordinaten x' und z' offenbar dieselben mit x u. z sind:

$x' = x$
$y' = y - b$
$z' = z$

Sucht man aus den obigen Coordinatenwerthen, die Ausdrücke für $\operatorname{Tg.} (\lambda - \mathcal{L})$ und $\operatorname{Tg} \beta$ so ist $\frac{t}{T} = a$

$\operatorname{Tg} (\lambda - \mathcal{L}) = \frac{y}{x}$ oder $y = y' + b$ und $x = x'$; $\operatorname{Tg} (\lambda - \mathcal{L}) = \frac{y' + b}{x'}$ und zwar

$\operatorname{Tg.} \beta = \frac{z}{x} \operatorname{Cos} (\lambda - \mathcal{L})$ oder $z = z'$; $x = x'$; $\operatorname{Tg} \beta = \frac{z'}{x'} \operatorname{Cos} (\lambda - \mathcal{L})$

Statt x', y', z' ihre obigen Werthe gesetzt gibt:

$\operatorname{Tg.} (\lambda - \mathcal{L}) = \operatorname{tg.} (\lambda' - \mathcal{L}) + \frac{b}{x'}$ und
$\operatorname{Tg.} \beta = \operatorname{tg.} \beta' \frac{\operatorname{Cos} (\lambda - \mathcal{L})}{\operatorname{Cos} (\lambda' - \mathcal{L})}$
oder $\frac{t}{T} = a$ $\operatorname{tg} (\lambda - \mathcal{L}) = \operatorname{tg} (\lambda' - \mathcal{L}) + \frac{a}{\operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} (\lambda' - \mathcal{L})}$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tg} (\lambda - \mathcal{L}) &= \operatorname{tg} (\lambda' - \mathcal{L}) + \frac{a}{\operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} (\lambda' - \mathcal{L})} \\ \operatorname{Tg.} \beta &= \operatorname{tg} \beta' \frac{\operatorname{Cos} (\lambda - \mathcal{L})}{\operatorname{Cos} (\lambda' - \mathcal{L})} \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Der senkrecht stehende Durchschnitt der Coordinatenebenen, so wie die Coordinaten z und z' wurden in der Figur deswegen nicht verzeichnet, weil sie da doch nur ihre Endpuncte

(Eigen)

in der Ekliptik gebraucht werden, und sie nur die Zeichnung zusammen gesetzt machen.

Um aus den in ~~II~~ gegebenen Ausdrüken $\lambda'-\lambda$, und $\beta'-\beta$ zu erhalten, hat man:

1. $Tg(\lambda-\mathcal{L}) = Tg.(\lambda'-\mathcal{L}) + \frac{a}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})}$

hieraus ~~$Tg(\lambda'-\mathcal{L}) - Tg(\lambda-\mathcal{L}) =$~~ –

$$Tg(\lambda'-\mathcal{L}) - Tg(\lambda-\mathcal{L}) = -\frac{a}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})}$$

dass heisst:

$$\frac{Sin\{\lambda'-\mathcal{L}-\lambda+\mathcal{L}\}}{Cos(\lambda-\mathcal{L})\,Cos(\lambda'-\mathcal{L})} = -\frac{a}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})}$$

$Sin(\lambda'-\lambda) = -\frac{a\,Cos(\lambda-\mathcal{L})}{Cos\beta'}$ weil aber $\lambda'-\lambda$ äusserst geringe ist, so kann statt dem Sinus der Bogen gesetzt werden, und es ist also:

$$\lambda'-\lambda = -\frac{a\,Cos(\lambda-\mathcal{L})}{Cos\beta'} = -\frac{a\,Cos(\mathcal{L}-\lambda)}{Cos\beta'} \; *$$

weil λ' von λ nur sehr wenig verschieden ist, und daher ohne merklichen Fehler eines für das andere gesetzt werden kann.

2tens $tg\beta = Tg.\beta' \frac{Cos(\lambda-\mathcal{L})}{Cos(\lambda'-\mathcal{L})}$ setzt man hierin $Cos(\lambda-\mathcal{L}) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\lambda-\mathcal{L})}}$ und bemerkt, dass nach der ersten der Gleichungen I:

$$tg(\lambda-\mathcal{L}) = Tg.(\lambda'-\mathcal{L}) + \frac{a}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})}$$ so hat man

$$Cos(\lambda-\mathcal{L}) = \frac{1}{\sqrt{1+\left\{Tg(\lambda'-\mathcal{L}) + \frac{a}{cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})}\right\}^2}}$$ verichtet man die angezeigte Potenzirung, und vernachlässigt das Quadrat des 2ten Gliedes als sehr klein, so ist:

$$Cos(\lambda-\mathcal{L}) = \frac{1}{\sqrt{1+Tg^2(\lambda'-\mathcal{L}) + \frac{2a\,Tg.(\lambda'-\mathcal{L})}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})\,\cancel{Cos\beta'}}}}$$ also

$$tg\beta = \frac{tg.\beta'}{Cos(\lambda'-\mathcal{L})\sqrt{1+Tg^2(\lambda'-\mathcal{L}) + \frac{2a\,Tg.(\lambda'-\mathcal{L})}{Cos\beta' Cos(\lambda'-\mathcal{L})\,\cancel{Cos\beta'}}}}$$

= gleich:

$$tg\beta = \frac{tg\beta'}{\sqrt{Cos^2(\lambda'-L)+Sin^2(\lambda'-L)+\frac{2a\,Sin(\lambda'-L)}{Cos\beta'}}}$$

$= tg\beta'\left(1+\frac{2a\,Sin(\lambda'-L)}{Cos\beta'}\right)^{-\frac{1}{2}}$ diese Potenz nach dem binomischen Lehrsatz entwikelt, und die höhern Potenzen des 2ten Gliedes als unbeträchtlich versäumt, gibt:

$$tg\beta = tg\beta'\left(1-\frac{a\,Sin(\lambda'-L)}{Cos\beta'}\right) = tg\beta' - \frac{a\,Sin\beta'\,Sin(\lambda'-L)}{Cos\beta\,Cos\beta'}$$ dass heisst:

$$tg\beta - tg\beta' = -\frac{a\,Sin\beta'\,Sin(\lambda'-L)}{Cos^2\beta'} \quad \text{oder} \quad tg\beta - tg\beta' = \frac{Sin(\beta-\beta')}{Cos\beta\,Cos\beta'}$$

$$\frac{Sin(\beta-\beta')}{Cos\beta\,Cos\beta'} = -\frac{a\,Sin\beta'\,Sin(\lambda'-L)}{Cos\beta'\,Cos\beta'}$$ dass heisst: $Sin(\beta-\beta') = -a\,Sin\beta'\,Sin(\lambda'-L)$

oder statt $Sin(\beta-\beta')$ den Bogen gesetzt, da $\beta-\beta'$ sehr klein ist:

$$\beta-\beta' = a\,Sin\beta'\,Sin(\lambda'-L)$$

Der sehr kleine zwischen β und β' stattfindende Unterschied, berechtigt uns eines für das Andere zu setzen, und so finden wir endlich:

$$\beta'-\beta = -a\,Sin\beta'\,Sin(L-\lambda')$$

Wir haben also für die Aberration der Länge und Breite:

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= \lambda'-\lambda = -\frac{a\,Cos(L-\lambda')}{Cos\beta'} \\ d\beta &= \beta'-\beta = -a\,Sin\beta'\,Sin(L-\lambda') \end{aligned}\right\} \text{II}$$

welche ganz dieselben ~~sind~~ welche Littrow in seiner theor. & pract. Astronomie I B. S. 55. ansetzt. Um sie den in seiner populären Astronomie gegebenen gleich zu machen, wird man bloss $a = b$ ~~und~~ $\lambda' = \lambda$ $\beta' = \beta$ und $L = \odot$ setzen, wodurch man erhält:

$$\lambda'-\lambda = -\frac{b\,Cos(\odot-\lambda)}{Cos\beta}$$

$$\beta'-\beta = -b\,Sin(\odot-\lambda)\,Sin\beta$$

Dass heisst die Länge des Sternes ändert sich in der Ecliptik um die Grösse:

$y = b\,Cos(\odot-\lambda)$ parallel mit der Ekliptik, und um die Grösse:

$x = b\,Sin(\odot-\lambda)\,Sin\beta$ senkrecht auf die Ecliptik geändert.

Um nun die Gleichung jener krummen Linie zu finden, ~~werden wir~~ in welcher alle scheinbaren Orte des Sternes liegen, werden wir obige zwey Änderungen x und y für die senkrechten Coordinaten nehmen, welche den scheinbaren Ort, des Sternes gegen den wahren bestimmen, (oder wir werden sie mit andern Worten:) y für die Abscisse und x für die Ordinate (sie ausgedrückt werden muss:) annehmen. Um x zu finden hat man

$$x = b\,\mathrm{Sin}(\odot-\lambda)\,\mathrm{Sin}\,\beta \text{ und } x^2 = b^2\,\mathrm{Sin}^2(\odot-\lambda)\,\mathrm{Sin}^2\beta$$

$$y = b\,\mathrm{Cos}(\odot-\lambda) \text{ oder } y^2 = b^2\,\mathrm{Cos}^2(\odot-\lambda)$$ dass heisst:

$$\frac{x^2}{\mathrm{Sin}^2\beta} + y^2 = b^2\{\mathrm{Sin}^2(\odot-\lambda)+\mathrm{Cos}^2(\odot-\lambda)\} = b^2$$ oder:

$$x^2 + y^2\,\mathrm{Sin}^2\beta = b^2\,\mathrm{Sin}^2\beta$$ aus welchem endlich folgt:

$$x^2 = (b^2 - y^2)\,\mathrm{Sin}^2\beta$$

Und darinn, wird jeder mit den Kegelschnitten bekannte Leser, die Gleichung für ~~die~~ eine Elipse erkennen, deren grosse Axe = b und deren kleine Axe = $b\,\mathrm{Sin}\,\beta$ ist.

64 Littrows populäre Astronomie Seite 165.

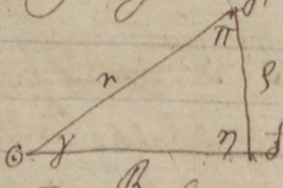
Die Auflösung dieser Aufgabe findet man in Littrows theor. & pract. Astr. S. 103, nur glaubt ~~ich~~ man folgende Erläuterungen für nöthig halten zu dürfen.

Man findet dort die Gleichungen: $\frac{dl}{dL} = \frac{R\cos\pi}{r\cos\pi}$, $\frac{R}{r} = \frac{\sin\pi}{\sin\eta}$, $\frac{dl}{dL} = \frac{\vartheta}{t}$, $\vartheta a^2{}^3 = t^2$ und endlich für den Stillstand des Planeten selbst; überhaupt:

$$\mathrm{tg}\,\eta = a^{\frac{3}{2}}\cdot\mathrm{tg}\,\pi$$

Um diese Gleichungen zu erhalten, verzeichne man sich ein Dreyeck zwischen Erde Sonne, und dem Planeten, der bey dieser Aufgabe, um sie einfacher zu machen in der Ebene der Ekliptik liegen soll, und nenne die Winkel nach dort eingeführten Benennungen, so wird ~~sie~~ das Dreyeck so ~~benennet~~ ~~seyn~~ seyn:

oder, nach einer andern dort ein geführten Benennung:



In diesem Dreyeke hat man $r : \sin\eta = R : \sin\pi$ oder $r\sin\pi = R\sin\eta$ diese Gleichung differenziret gibt:

$r\cos\pi\, d\pi = R\cos\eta\, d\eta$ mit $r\cos\pi\, d\eta$ dividirt ist:

$\frac{r\cos\pi\, d\pi}{r\cos\pi\, d\eta} = \frac{R\cos\eta\, d\eta}{R\cos\pi\, d\eta}$ daß heißt: $\frac{d\pi}{d\eta} = \frac{R\cos\eta}{R\cos\pi}$ Es ist aber nach

der in obigem Buche eingeführten Bezeichnung: $\pi = \lambda - l$ und $\eta = 180 - L - \lambda$ also:

$\frac{d\pi}{d\eta} = \frac{d(\lambda - l)}{d(180 - L - \lambda)} = \frac{d\lambda - dl}{-dL + d\lambda} = \frac{-dl}{-dL} = \frac{dl}{dL}$, es ist also auch $\frac{dl}{dL} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\cos\eta}{\cos\pi}$

aus der ersten Grundgleichung aber folgt: $\frac{R}{r} = \frac{\sin\pi}{\sin\eta}$ also ist:

$\frac{dl}{dL} = \frac{\cos\eta}{\cos\pi} \cdot \frac{\sin\pi}{\sin\eta} = tg.\pi\, Ctg.\eta$ Nach Keplers drittem Gesetze aber hat man wenn man mit ϑ und t die Umlaufszeiten und mit 1 und a die Halbmesser der Bahnen der Erde und des Planeten bezeichnet folgende Proportion:

$t^2 : \vartheta^2 = a^3 : 1$ oder $t^2 = a^3 \vartheta^2$ daß heißt: $t = \vartheta a^{\frac{3}{2}}$ und der

kleine Unterschied $\frac{\vartheta}{t} = \frac{dl}{dL} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = tg\pi\, Ctg.\eta$ woraus folgt:

$$tg\,\eta = a^{\frac{3}{2}}\, tg\,\pi \quad (***)$$

***

In der 2ten Auflösungsmethode dieser Aufgabe, trifft man auf eine Stelle wo der Verfasser sagt:

Setzt man in der Gleichung:

$$tg(\lambda - N) = \frac{a\sin(l-N) - \sin(L-N)}{a\cos(l-N) - \cos(L-N)}$$ das Differenzial von $tg(\lambda - N) = 0$ so hat man:

$$\frac{a\,d(l-N)}{d(L-N)} = \frac{1 - a\cos(l-L)}{a - \cos(l-L)}$$

Differenziren wir obige Gleichung so ist:

$$\frac{d(\lambda-N)}{\cos^2(\lambda-N)} = \frac{\{a\cos(l-N) - \cos(L-N)\}\{a\,d(l-N)\cos(l-N) - d(L-N)\cos(L-N)\}}{Nenner^2} - \frac{\{a\sin(l-N) - \sin(L-N)\}\{-a\sin(l-N)\,d(l-N) + \sin(L-N)\,d(L-N)\}}{Nenner^2}$$

oder

$0 = \{a\cos(l-N) - \cos(L-N)\}\{a\cos(l-N)\,d(l-N) - \cos(L-N)\,d(L-N)\}$ daß heißt:

$0 = \{a\sin(l-N) - \sin(L-N)\}\{\sin(L-N)\,d(L-N) - a\sin(l-N)\,d(l-N)\}$

$$a^2 \operatorname{Cos}^2(L-N)\, d(l-N) - a \operatorname{Cos}(L-N) \operatorname{Cos}(l-N)\, d(l-N) \Big\}$$
$$+ \operatorname{Cos}^2(L-N)\, d(L-N) - a \operatorname{Cos}(L-N) \operatorname{Cos}(l-N)\, d(L-N) \Big\}$$
$$= a \operatorname{Sin}(l-N) \operatorname{Sin}(L-N)\, d(L-N) - \operatorname{Sin}^2(L-N)\, d(L-N)$$
$$- a^2 \operatorname{Sin}^2(l-N)\, d(l-N) \quad \operatorname{Sin}(L-N) \operatorname{Sin}(l-N)\, d(l-N)$$
$$a^2 d(l-N) + d(L-N) = a\, d(l-N) \left\{ \operatorname{Cos}(L-N) \operatorname{Cos}(l-N) + \operatorname{Sin}(L-N) \operatorname{Sin}(l-N) \right\}$$
$$+ a\, d(L-N) \left\{ \operatorname{Cos}(L-N) \operatorname{Cos}(l-N) + \operatorname{Sin}(L-N) \operatorname{Sin}(l-N) \right\}$$
$$= a\, d(l-N) \operatorname{Cos}(L-l) + a\, d(L-N) \operatorname{Cos}(L-l)$$

Es ist aber auch:

$\operatorname{Cos}\left\{(L-N)-(l-N)\right\} = L-l$ was man leicht einsieht (~~Kunstgriff~~) also auch:

$$a^2 d(l-N) + d(L-N) = a \operatorname{Cos}(L-l) \left\{ d(l-N) + d(L-N) \right\}$$
$$a^2 d(l-N) + d(L-N) = a \operatorname{Cos}(L-l)\, d(l-N) + a \operatorname{Cos}(L-l)\, d(L-N)$$
$$a\, d(l-N)\left\{a - \operatorname{Cos}(L-l)\right\} = \left(a \operatorname{Cos}(L-l) - 1\right) d(L-N) \text{ oder}$$
$$\frac{a\, d(l-N)\left\{a - \operatorname{Cos}(L-l)\right\}}{(a - \operatorname{Cos}(L-l))\, d(L-N)} = -\frac{(1 - a \operatorname{Cos}(L-l))\, d(L-N)}{(a - \operatorname{Cos}(L-l))\, d(L-N)} \; * \text{ dass heisst}$$

$$\frac{a\, d(l-N)}{d(L-N)} = -\frac{(1 - a \operatorname{Cos}(L-l))}{a - \operatorname{Cos}(L-l)} \; ***$$

Das übrige wird jedem Anfänger klar seyn bis auf die Stelle wo der Verfasser aus der Gleichung:

$$tg\,\eta = \frac{a \operatorname{Sin} \gamma}{1 - a \operatorname{Cos} \gamma} \quad tg\,\eta = \frac{a}{\sqrt{1+a}} \text{ herleitet.}$$

Diess geschieht auf folgende Art:

Es ist:

$tg\,\eta = \dfrac{a\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2\gamma}}{1 - a \operatorname{Cos}\gamma}$ ‖ Entwickeln wir nun erst den Nenner so haben wir:

$$a\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2\gamma} = \frac{a\sqrt{(1+a^{\frac{3}{2}})^2 - a\,(1+a^{\frac{1}{2}})^2}}{1+a^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sqrt{1+a^3+2a^{\frac{3}{2}} - a\,(1+a-2a^2)}}{1+a^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sqrt{1+a^3-a+a^2}}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$

und für den Zähler

$$1 - a\operatorname{Cos}\gamma = 1 - \frac{a.a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} - a^2}{1+a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-a^2}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$

Also:

$$tg.\,\eta = \frac{a\sqrt{1-a-a^2+a^3}}{1-a^2} = \frac{\sqrt{1-a-a^2(1-a)}}{1-a^2} = \frac{a\sqrt{(1-a)(1-a^2)}}{1-a^2} = \frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1-a^2}}{(1+a)(1-a}$$

$$= \frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}\ (1+a)} = \frac{a\sqrt{1+a}}{1+a} = \frac{a\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}\sqrt{1+a}} = \frac{a}{\sqrt{1+a}} \ ***$$

63. Zusatz zu No. 53.

Linea CD vel CM fig. 26 eandem habet significationem, quam CN fig. 23 angulusque PMt vel PDB fig. 26 idem est cum angulo CNE ibidem, complemento scilicet anguli CEN = MEP $= \varphi$, ut scilicet ψ et ψ' sint complementa anguli φ: Est vero in triangulo CNE ad C recto angulo

$$CN = NE \operatorname{Cos} CNE = CE\,tg\,CEN$$

Aequatio $CN = CE\,tg.\,CEN$ identica est cum hac $NE = CE\,ctg.\,\psi'$; est vero:

$$CE = CP - EP = x - \text{Subnormali} = x - \frac{b^2x}{a^2} = x\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \varepsilon^2 x = \frac{\varepsilon^2 a \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}}$$

$$= \frac{\varepsilon^2 a \operatorname{Sin}\psi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\psi'}}, \text{ adeoque } CN = \frac{\varepsilon^2 a \operatorname{Cos}\psi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi'}}; \text{ idest pro } CN = CD$$

$$\text{et } a = 1;\quad CD = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos}\psi'}{\sqrt{1+\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi'}} \ *$$

Ex Aequatione vero $CN = NE \operatorname{Cos} CNE = NE \operatorname{Cos}\psi'$ sequitur:

$$NE = \frac{CN}{\operatorname{Cos}\psi'} = \frac{a\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\operatorname{Cos}^2\psi'}} \ *$$

Sequitur quoque ex Aequatione

$$CN = NE \operatorname{Cos} CNE = (NM - NE)\operatorname{Cos}\psi'$$

valor ipsius CN: est quippe

$$MN = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi'}} \qquad \text{et } ME = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi'}}$$

adeoque

$$MN - ME = \frac{a\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2\psi'}}$$

Höhenmessung
durch das Barometer.

66

Pascal fand, daß in höhern Gegenden, wo die Luft schärfer, nähmlich weniger dicht ist, als ~~da~~ näher an der Meeresfläche, das Barometer viel tiefer stand, als in tiefern Gegenden. Durch mehrere Versuche ward er überzeugt, daß zwischen der Dichte der Luft, und ihrem Druke (dem Barometerstande) ein gewisses Verhältniß statt finden, und man eben aus diesem Verhältnisse auf die Erhöhung des Orter der Beobachtung über die Meeresfläche schliessen ~~kan~~ kann.

Um aber mit dem Barometer Höhen messen zu können, müssen wir vorerst die Gesetze nach welchen die Dichtigkeit und der Druk der Luft voneinander abhängen, kennen.

Nehmen wir daher an, es verdichte sich in der Atmosphäre ein Theil der Luft, und bilde eine vertikale cylindrische, hohle Schale, die natürlich mit einer ebenfalls vertikalen cylindrischen Luftsäule ausgefüllt seyn wird. Betrachten wir nun diese Luftsäule, und denken wir uns die Atmosphäre in sehr viele der Erde concentrische Schichten getheilt, bezeichnen ferner durch z, Δ, x, g' die ~~Höhe~~ Entfernung, Dichte, Temperatur und Schwere dieser Schichte, so wird diese Schichte von jener Luftsäule einen Theil abschneiden, der, der Dike der Schichte oder dz gleich ist. ~~Dieses~~ Das abgeschnittene Stük der Luftsäule wird ferner gegen den übrigen Theil der Säule einen Druk ausüben, der an seiner untern Fläche $= p$ an seiner obern aber $= p + dp$ seyn soll. Dadurch erhält man die Schwere jenes abgeschnittenen Theiles oder:

$dp = \Delta . g' . dz$ oder vielmehr $-dp = \Delta . g' . dz$ weil das Gewicht dp desto geringer wird, um je mehr die Höhe zunimmt, daß heißt, um je größer dz wird.

Da ferner der Luftdruk auch der Dichtigkeit und Temperatur proportional ist, so ist eigentlich: Luftdr. $= p =$ Verh. d. Dr. z. Dichte. $\times$ Luftvolume für die Temp. $x \times \Delta$

Setzen wir aber den ersten Factor $= a$, und erwägen, dass, da nach der Erfahrung jedes Volume Luft, für einen Centigrad um seinen 0.004^{ten} Theil sich ausdehnt (das Zustand des Volumes für 0^o Temp $= 1$ gesetzt), unser Volume für x^o Temperatur oder unser zweyter Factor $= 1 + (0.004)x$ wird, so ist die obige Gleichung: $p = a(1 + (0.004)x) . \Delta$ woraus

$$\Delta = \frac{p}{a(1 + (0.004)x)}$$ folgt, eine Gleichung welche das Gesetz ent;

hält, nach welchem die Dichtigkeit von der Temperatur und dem Luftdruke abhängt.
Den Ausdruk für den Luftdruk fanden wir oben:

$-dp = \Delta . g' . dz$ substituiren wir daher den Werth von Δ, in diese Gleichung, und setzen $0.004 = \alpha$ so ist

$$-dp = \frac{g'p\,dz}{a(1+\alpha x)} \text{ oder } \frac{dp}{p} = \frac{-g'dz}{a(1+\alpha x)}$$

es ist aber nach dem bekannten mechanischen Gesetze, : Die Schwere verhält sich, wie verkehrt das Quadrat der Entfernung, — wenn g die Schwere an der Erdoberfläche, und r der Erdhalbmesser heisst:

$$g' : g = r^2 : (r+z)^2 \text{ oder } g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2} \text{ also}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{-gr^2dz}{a(1+\alpha x)(r+z)^2}$$; und das Integrale dieses Ausdruks, wird das Gesetz enthalten, nach welchem der Luftdruk von der Schwere, Temperatur und Höhe der Schichte abhängt.

Allein, die Gleichung lässt sich nur in dem Falle integriren, (vollständig) wenn man weiss, wie die Wärme abnimmt, wenn die Höhe um einen gewisse Grösse vermehrt wird. Leider ist uns dieses Gesetz unbekannt, und wir können nicht anders zur Kenntniss des Gesetzes des Luftdrukes kommen, als dass wir bey jeder Schichte, das Mittel der Temperatur an ihrer obern und untern Grundfläche, als die constante Temperatur der ganzen Schichte betrachtete, was zum Glüke da α sehr klein ist, ohne merklich grossen Fehler geschehen kann.

Setzen wir also x constant, so ist:

$$\int\frac{dp}{p} = \frac{gr^2}{a(1+\alpha x)} \cdot \int\frac{-dz}{(r+z)^2} = \log p = \frac{gr^2}{a(1+\alpha x)} \cdot \frac{1}{r+z} + C$$

Der zweyte Theil der Gleichung muss noch mit dem Modul der natürlichen Logarithmen den μ setze, multiplicirt werden, um gemeine Logarithmen zu bekommen.

Um die Constante C zu bestimmen, setzen wir mit Littrow es sey P der Werth von p für $z=0$ so ist: $\log P = \frac{gr\mu}{a(1+\alpha x)} + C$ also $C = \log P - \frac{gr\mu}{a(1+\alpha x)}$ und daher:

$$\log. p = \frac{g r^2 \mu}{a(1+\alpha x)} \cdot \frac{1}{r+z} + \log P - \frac{g r \mu}{a(1+\alpha x)}$$

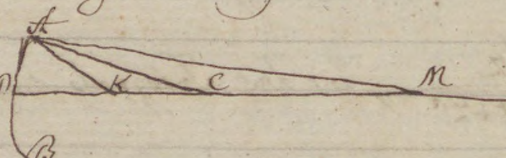
$$\log P - \log p = \frac{g r \mu}{a(1+\alpha x)} \left(1 - \frac{r}{r+z}\right) \text{ oder :}$$

$$\log. \frac{P}{p} = \frac{g r \mu}{a(1+\alpha x)} \cdot \frac{z}{r+z}$$

eine Gleichung welche das Gesetz für den Luftdruk – ~~zu~~ zwar unter obiger Beschränkung aber dennoch hinlänglich genau enthält.

Gehört unter No. 68 zu setzen.

Gleichungen, welche die Entfernungen des Bildes und seine Grösse sowohl bey concaven als convexen Spiegeln bestimmen



Es sey APB ein concaver Spiegel, (: der um deutlich zu sehen entweder sehr klein seyn oder zu einer sehr grossen Kugel gehören, also immer sehr wenig hohl seyn muss :) C der Mittelpunct, jener Kugel von deren Oberfläche unser Spiegel ein Stük ist, und M irgend ein Punct vor dem Spiegel in der Axe PM desselben.
Bezeichnen wir noch die Entfernung des Gegenstandes von der Mitte P des Spiegels durch a, und die seines Bildes von demselben Puncte P durch b, und nehmen nun an, irgend ein Strahl von M falle auf irgend einen Punct A des Spiegels, welchen wir durch das Loth AC mit dem Centrum der Kugel verbinden, so wird er nach dem bekannten durch viele Experimente bestättigten Gesetze, vom Spiegel so zurükgeworfen werden, dass der Winkel welchen der Strahl AM bey seinem Einfallen mit dem Lothe AC bildet, demjenigen Winkel vollkommen gleich sein wird, welchen der zurükgeworfene Strahl mit demselben Lothe bildet; dass heisst der Einfallswinkel MAC muss dem Reflectionswinkel CAK vollkommen gleich seyn.
Um nun die Entfernung des Bildes von dem Spiegel zu finden hat man:

AKP = ACP + KAC
ACP = AMP + CAM daraus folgt
KAC = AKP − ACP
CAM = ACP − AMP da nun KAC immer gleich CAM seyn muss, so ist auch

$AKP - ACP = ACP - AMP$ oder $2ACP = AKP + AMP$

Nun haben alle drey Winkel ACP, AKP, AMP, zu ihrem Masse den sehr wenig gekrümmten Bogen AP, ich werde also, ohne merklich zu fehlen setzen können:

$tg\,ACP = \frac{PA}{PC}$ oder da AP sehr wenig gekrümmt ist $ACP = \frac{PA}{PC}$

$tg\,AKP = \frac{PA}{PK}$ oder $AKP = \frac{PA}{PK}$

$tg\,AMP = \frac{PA}{PM}$ oder $AMP = \frac{PA}{PM}$ diese Werthe in obiger Gleichung für ACP, AKP, AMP substituirt, gibt:

$\frac{2PA}{PC} = \frac{PA}{PK} + \frac{PA}{PM}$ oder $\frac{2}{PC} = \frac{1}{PK} + \frac{1}{PM}$ nun ist nach obigen Bennenungen: $PC = 2f$, $PK = b$, und $PM = a$ also:

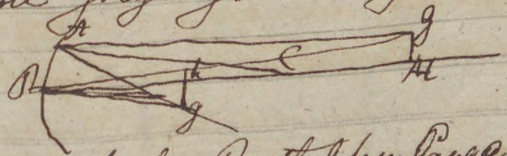
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad **$$ und diess ist die Hauptgleichung.

Und daraus hat man die Entfernung b des Bildes von des Spiegels Mitte durch folgendes elementarische Verfahren:

$$\frac{1}{f} = \frac{a+b}{ab}, \quad \frac{ab}{f} = a+b, \quad ab = af + bf, \quad b(a-f) = af$$

$$\text{also } b = \frac{af}{a-f} \quad **$$

Um die Grösse des Bildes zu finden wird man ganz obige Figur beybehalten können, mit dem Unterschiede dass man dem Gegenstande, wie in der folgenden Figur eine Grösse geben muss.



Es falle von dem obersten Puncte G der Stange GH ein Strahl in dem Puncte A auf den Spiegel, ein anderer Strahl desselben Punctes falle gerade in die Mitte des Spiegels nach P so werden beyde so reflectirt werden, dass sie in einem Puncte g zusammen kommen, der in der Axe liegen Strahl PH des untersten Punctes, wird wieder in derselben Linie zurückgeworfen werden, in welcher er einfällt und der Ort des Bildes wird also gh seyn. Nun sieht man gleich dass die rechtwinkligen Dreyecke Pgh und PGH einander ähnlich sind, und dass man also hat:

$GH : gh = PH : Ph$ oder $A : B = a : b$ also Grösse des Bildes:

$$B = \frac{Ab}{a} \text{ oder da } b = \frac{af}{a-f} \text{ ist}$$

$$B = \frac{Af}{a-f} \quad ***$$

I Im I Bande des Werkes

Seite 7 (1) Die Erklärung die der Verfasser von Zenith und Nadir gibt, ist unbestimmt, und ihre Deffinition nach streng mathematischen Regeln, ist folgende: Jener der zwey Puncte, in welchen die Richtung der Schwere in jedem Orte den Himmel trifft, zwischen welchem und dem Mittelpunct der Erde der Beobachter steht, ist dessen Zenith; hingegen der Punct zwischen welchem, und dem ~~Mittelp.~~ Beobachter, der Mittelpunct der Erde sich befindet heisst ~~das~~ Nadir des Beobachters, diejenige Halbkugel nun, in welcher sich das Zenith befindet, heisst die obere, und wo das Nadir ist die untere Hemisphäre.

(2.) Seite 17 Dass die Pohlhöhe ~~der~~ und geographischen Breite eines Ortes gleich seyen, erhellt aus folgendem:

Es sey in Z das Zenith, in P der Pol, und ist O irgend ein Ort, ferner sey AQ der Aequator, HR der Horizont und HAZPRE der Meridian, so ist: POR die Pohlhöhe und ZOA die geographische Breite dieses Ortes: Es ist aber: $ZOA + AOH = 90°$ und auch: $POR + ROE = 90°$; also auch: $ZOA + AOH = POR + ROE$; AOH und ROE sind aber als Scheitelwinkel einander gleich, also bleibt $ZOA = POR$ dass heisst:

Geographische Breite = Pohlhöhe.

(3) Seite 21 Um allgemein einen Ausdruk ~~für die T~~ zu finden der für alle Fälle gilt ~~zu erhalten~~ wo zwey verschiedenartige Revolutionen mit einander zu vergleichen sind, sey T die Revolutionszeit eines und S die eines andern Körpers, so ist die tägliche Bewegung des einen $= \frac{360°}{T}$ des andern $\frac{360°}{S}$.

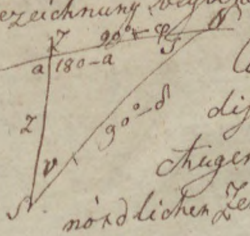
Bezeichne nun m die Zeit, in welcher ein Körper, dessen Geschwindigkeit in einem Tage, der Differenz der beyden Bewegungen (die des 2ten Körpers als grösser vorausgesetzt) irgend einen Bogen z.B. ~~einen ganzen Umlauf~~ 9 Grade beschreibt ~~macht~~, so ist:

$\left(\frac{360°}{S} - \frac{360°}{T}\right)m = 9°$ oder $\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right)360\,m = 9°$ oder $\left(\frac{T-S}{ST}\right)360\,m = 9°$ d.h. $\frac{9\,ST}{360(T-S)} = m$

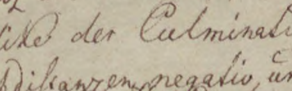
oder $360\,Sm - 360\,Tm = ST\,9°$ d.h. $S(360\,m - 9T) = 360\,Tm$ also $S = \frac{360\,mT}{360\,m - 9T} = \frac{360\,T}{360° - \frac{9}{m}T}$.

Setzt man nun $m = 1$ so ist: $S = \frac{360\,T}{360° - 9T}$.

(4) Seite (42) Wenn man seine Bezeichnung beybehält, so ist in dem Dreyecke zwischen Zenith, Pol des Aequators und dem Sterne:



$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$. Ist nun $s = 0$ so ist die Zenithdistanz am kleinsten, und ist $s = 180°$ am grössten, so dass in dem Augenblike der Culmination selbst: $z = \varphi - \delta$ ist, wo man die nördlichen Zenithdistanzen negativ, und in unteren Culminationen statt δ sein Complement zu 180° nehmen muss.



Ist nämlich HR der Horizont, HZPR der Meridian, und S ein Stern zur ~~auf~~ der Südseite des Zeniths so ist: $z = \varphi - \delta$; ist aber der Stern in S', so ist $z = \delta - \varphi$, und ist ein Stern in S'' unterm Pole so ist: $z = 180° - \varphi - \delta$ daher ganz allgemein unter obiger Bedingung $z = \varphi - \delta$.

Um die Pohlhöhe zu finden, ist in der Gleichung:
$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\delta \cos s$ setzt:
$\frac{\cos z \cos\alpha}{\sin\delta} = \sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha$ d.h. $\sin(\varphi+\alpha) = \frac{\cos z\cos\alpha}{\sin\delta}$ *

Um den halben Tagebogen oder den Werth von s für den Augenblick zu finden, wann der Stern den Horizont passirt, so ist damahls $z = 90°$ also gibt jene Gleichung
$0 = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$ oder $\cos s = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ oder wenn man, um den Ausdruck bequemer zu machen $s = 90°+t$ setzt:

$$\sin t = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta.$$

Die Zeit T aber die der Stern braucht, um diesen halben Tagebogen zurükzulegen, erhält man so:
360° : s = Umlaufszeit des Sterns : T also ist:

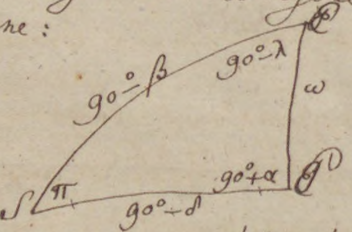
$$T = s \cdot \frac{\text{Umlaufszeit des Sterns}}{360°}\ *$$

Die Gleichung für das Azimuth folgt aus demselben ~~Ausdrucke~~ Dreyeke, denn es ist dort zwischen den vier Stüken folgende Gleichung möglich (die vier aufeinander Stüke sind $(180°-a;\ 90°-\varphi;\ s;\ 90°-\delta)$)

$\operatorname{ctg}(180°-a)\sin s - \operatorname{tg}\delta\cos\varphi = \cos s\sin\varphi$ oder $-\operatorname{ctg} a = \frac{-\cos s\sin\varphi + \operatorname{tg}\delta\cos\varphi}{\sin s}$ *
oder auch: $\cancel{\operatorname{tg}\delta\cos\varphi + \operatorname{ctg} a \sin s} = \operatorname{ctg} a = \frac{\cos s \sin\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos\varphi}{\sin s}$ *

Will man aber den Ort des Aufgangs oder Untergangs des Sterns wissen, so ist; ~~zwischen der vier Stüken z, 180°−a, 90°−φ, δ, wo z = 90° ist, folgende Gleichung möglich: ctg z sin a − tg z cos φ = cos(180°−a) sin φ~~ im Dreyeke welches wir oben aufstellten:
$\sin\delta = \cos z\sin\varphi + \sin z\cos\varphi\cos(180°-a) = -\cos\varphi\cos a = \sin\delta$ oder $\cos a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$ *.

Um Länge und Breite aus der Rectascension und Declination oder umgekehrt zu finden, ist in dem Dreyeke zwischen Pol des Aequators, Pol der Ekliptik und dem Sterne:



$\operatorname{tg}\delta\sin\omega - \operatorname{tg}\lambda\cos\alpha = -\sin\alpha\cos\omega$

$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin\alpha\cos\omega + \operatorname{tg}\delta\sin\omega}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cos\omega + \frac{\sin\omega}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\delta}$

$= \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}\delta\cos\omega + \sin\omega}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\delta}$ Setzt man nun $\sin\alpha\operatorname{ctg}\delta = \operatorname{tg} m$ so ist

$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}m\cos\omega+\sin\omega}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\delta} = \frac{\sin m\cos\omega + \sin\omega\cos m}{\cos\alpha\cos m\operatorname{ctg}\delta} = \frac{\sin(m+\omega)}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\delta\cos m}$, es ist
aber $\cos m = \frac{\sin m}{\operatorname{ctg}\delta\sin\alpha}$ also auch $\operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin(m+\omega)}{\frac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\delta\sin m}{\operatorname{ctg}\delta\sin\alpha}} = \frac{\sin(m+\omega)}{\operatorname{ctg}\alpha\sin m}$ dass heisst:

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\sin(m+\omega)}{\sin m}\ .\ *$$

Um nun auch die Breite β zu bestimmen, ist in demselben Dreyeke:

$\sin\beta = \sin\delta\cos\omega + \cos\delta\sin\omega\cos(90^\circ+\alpha) = \sin\delta\cos\omega - \cos\delta\sin\omega\sin\alpha$ oder mit $\sin\delta$ dividirt

und wieder m hinein gebracht: $\frac{\sin\beta}{\sin\delta} = \cos\omega - \cot\delta\sin\alpha\sin\omega = \cos\omega - \operatorname{tg} m\sin\omega$

$= \frac{\cos\omega\cos m - \sin\omega\sin m}{\cos m} = \frac{\cos(m+\omega)}{\cos m}$, also $\sin\beta = \sin\delta \cdot \frac{\cos(m+\omega)}{\cos m}$ *

Um aber die Rectascension und Declination aus der gegebenen Länge und Breite zu bestimmen, hat man in demselben Dreyeke:

$\operatorname{tg}\beta\sin\omega - \cos\lambda\cot(90^\circ+\alpha) = \cos\omega\sin\lambda = \operatorname{tg}\beta\sin\omega + \cos\lambda\operatorname{tg}\alpha = \cos\omega\sin\lambda$ also

$\operatorname{tg}\alpha = \cos\omega\operatorname{tg}\lambda - \frac{\operatorname{tg}\beta\sin\omega}{\cos\lambda} = \frac{\cos\omega\sin\lambda\cot\beta - \sin\omega}{\cos\lambda\cot\beta}$; setzt man nun $\sin\lambda\cot\beta = \operatorname{tg} n$ so ist:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\omega\sin n - \sin\omega\cos n}{\cos n\cos\lambda\cot\beta} = \frac{\sin(n-\omega)}{\cos n\cos\lambda\cot\beta}$; nun ist $\cos n = \frac{\sin n}{\sin\lambda\cot\beta}$ also ist auch:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(n-\omega)}{\frac{\sin n\cos\lambda\cot\beta}{\sin\lambda\cot\beta}} = \frac{\sin(n-\omega)}{\sin n\cot\lambda} = \operatorname{tg}\lambda \cdot \frac{\sin(n-\omega)}{\sin n}$ *.

Ferner ist in eben dem Dreyeke auch:

$\sin\delta = \cos\omega\sin\beta + \sin\omega\cos\beta\sin\lambda$ um nun (n) hinein zu bringen, dividire man die Gleichung mit $\sin\beta$, so ist:

$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = \cos\omega - \sin\omega\cot\beta\sin\lambda = \frac{\cos\omega\cos n - \sin\omega\sin n}{\cos n} = \frac{\cos(n+\omega)}{\cos n}$ also auch:

$$\sin\delta = \sin\beta \cdot \frac{\cos(n+\omega)}{\cos n} \ *$$

Für die Sonne für die β immer gleich 0 ist, ist in dem obigen Dreyeke:

$\cot 90^\circ\sin\omega - \cot(90^\circ+\alpha)\cos\lambda = \cos\omega\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\lambda = \cos\omega\sin\alpha$ woraus folgt:

$\operatorname{tg}\alpha = \cos\omega\operatorname{tg}\lambda$ Weiter ist eben dort: $\sin\delta = \cos\omega\cos 90^\circ + \sin\omega\sin 90\sin\lambda$ und zwischen

$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\omega}$ den 5 Stüken $(90^\circ-\delta;\ 90^\circ+\alpha;\ \omega;\ 90-\lambda;\ 90^\circ;)$: $-\cos\delta\sin\alpha = \sin\omega\cos 90^\circ - \cos\omega\sin\lambda\sin 90^\circ$

aus der ersten folgt: $\sin\delta = \sin\omega\sin\lambda$ und aus der zweyten $\cos\delta = \frac{\cos\omega\sin\lambda}{\sin\alpha}$; dividirt man aber den ersten Ausdruk durch den 2ten, so erhält man:

$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\omega\sin\alpha$ einen dritte Gleichung für δ.

Es ~~vert~~ ist aber eben dort auch:

$1 : \cos\delta = \cos\alpha : \cos\lambda$ also auch: $\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha$ *.

5. Seite. Der geodätische Antheil beym Gradmessungen, natürlich sehr wichtig — und das hiebey zu beobachtende Verfahren, ist so klar beschrieben, dass er keiner Erläuterung bedarf, und um einzusehen, dass der Winkel den die an die beyden Endpuncte des gemessenen Bogens gezogenen Halbmesser im Mittelpuncte der Erde einschliessen, gleich der Differenz der an diesen Orten gemessenen mittäglichen Zenithdistanzen eines und desselben Sterns weniger dem Winkel ist, unter welchem der gemessene Bogen aus dem Sterne gesehen, erscheint, kann folgende Figur dienen:

Die angegebene Gleichheit hat für die Sterne statt, die S. Halbkugel aber für Gestirne statt. mels, der kleinere zwey Orte der Erde S ein Stern südlich vom Zenithdistanz von A ist, so ist der Bogen BCA

nähmlich in der nördlichen Hemisphäre südlich vom Zenithe, in der südlichen die vom Zenith nördlich stehenden Wenn der grössere Kreis die Him, aber die Erdsphäre darstellt, und a, b, A, B, der ihnen entsprechende Zenith, und Pole bezeichnet, so ist da die wahre eigentlich ACS = z, und von B = BCS = z' gleich = bCa = g auch eigentlich = z − z'. Aber, wir sehen auch über den Mittelpunct der Erde, und die beobachteten Zenithdistanzen z" von A und z‴ von B sind nur die scheinbaren Zenithdistanzen, also muss ~~ihre~~ wenn ihre Differenz z" − z‴ gleich BCA = bCa = g werden soll, augenscheinlich noch um den Winkel bSa vermindert werden.

6. Seite. 68. Die Entwicklung der dort befindlichen zur Note (a) gehörigen Gleichungen, steht schon in diesem Buche Seite No (48 No. (48)). Jedoch benöthigt sie folgender Erläuterungen:

1stens Das dortige Verfahren gibt:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\varphi}}$$

; es muss aber, um dann den zweyten Werth von b so, wie er dort ist, durch die Tangente von φ auszudrücken, seyn: $r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi'}}$; ~~und dass diese Gleichung wirklich statt hat erhellt aus folgendem: (die dortige Figur wird beybehalten) Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gibt:~~

~~$y^2 + (1-\varepsilon^2)x^2 = a^2b^2$ Es ist aber x nicht nur gleich $r\cos\varphi$ sondern auch $= CM \sin CMA$ und y nicht nur $= r\sin\varphi$ sondern auch $= CM\cos. CMA$.~~

~~Nun ist, da CEM $= 180^0 - \varphi'$ und ECM ohnedieß $= \varphi$ ist: CME $= 180^0 - 180^0 + \varphi' - \varphi = \varphi' - \varphi$.~~

~~Ferner ist: CMA = CME + EMA und EMA $= 90^0 - \varphi'$ also CMA =~~

Es muss auch $r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi'}}$ seyn, da dem ganzen ein Irrung zu Grunde liegt, da oben (No 48) die Winkel unrecht bezeichnet worden, da die geocentrische Pohlhöhe ~~eigentlich~~ natürlich nicht

$=\varphi$, sondern $=\varphi$ gesetzt wird.

7. Seite. 43. Aus der Formel $\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\sigma$, zu finden, dass der größte und kleinste Werth der Zenithdistanz immer gleich sey $=\varphi-\delta$ (zur Zeit der Culmination nähmlich) wenn man nördliche Zenithdistanzen negativ und statt δ, $180-\delta$ setzt.

Denn ist der Stundenwinkel gleich 0, so ist:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta = \cos(\varphi-\delta) \text{ oder } z=\varphi-\delta;$$

Ist aber der Stundenwinkel $=180^\circ$, so ist:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta - \cos\varphi\cos\delta = -\cos(\varphi+\delta) \text{ dass heisst: } +\cos z = \cancel{180}\cos(\cancel{\varphi}180^\circ \cancel{+}\varphi \cancel{+}\delta) \text{ dass heisst}$$

$$+z = \cancel{\varphi} - (180^\circ-\delta)$$

8 Seite 52. Es sagt dort Halbmesser eines Kreises der mit dem elliptischen ~~Erde~~ Meridiane einerley Umfang hat: $=3266330$. Um diess zu finden, bemerkte man, dass wenn sie einerley Umfang haben sollen, sie auch einerley Flächeninnhalt haben müssen; nähmlich es ist $ab\pi = \pi r^2$ und hieraus $r=\sqrt{ab}$

Nun ist:
$$\left.\begin{array}{l}\log a = 6{,}5147723\\ \log b = 6.5133460\\ \hline \log ab = 13.0281183\end{array}\right\} \begin{array}{l}\log(\sqrt{ab}) = 6.5140591 \text{ also:}\\ r = 3266322\end{array}$$
also ist dort wahrscheinlich ein kleiner Fehler.

Ferner heisst es, Halbmesser einer Kugel, die mit der elliptischen Erde einerley Umfang hat: $=3268111$ Toisen. Auch hier ist ein Fehler. Denn die Aufgabe gibt die Bedingung:

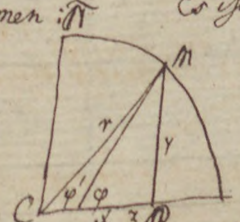
$$\frac{4}{3}a^2b\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ also hieraus } r=\sqrt[3]{a^2b}.$$

Nun ist: $\cancel{\log a = 6.5147723}$ $\cancel{\log b = 6.5133460}$ also $\cancel{\log b^2 = 3.0266920}$ $\cancel{\log ab^2 = 19.5414643}$ $\cancel{\text{und } \log\sqrt[3]{ab^2} = 6.5138214 \text{ also } r = 3264549.}$

$$\begin{array}{l}\log b = 6.5133460\\ \log a^2 = 3.0295446\\ \hline \log a^2b = 9.5428906\\ \log\sqrt[3]{a^2b} = 6.5142969\end{array} \text{ also } r = 3268112$$

9 Seite 68 Der Werth eines Meridian oder Breitengrades ist:

$$g = \frac{a\pi(1-\varepsilon^2)}{180(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$ und der eines Längengrades $$\gamma = \frac{a\pi\cos\varphi}{180\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$, warum diess so ist, ist schon in diesem Buche Nro (50) angegeben, es kommt nur darauf an, die Werthe von x und y zu bestimmen:



Es ist $x = r\cos\varphi' = \dfrac{b\cos\varphi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi'}}$. Es ist aber auch aus der Figur: $z = \dfrac{B^2}{A^2}x$, $Tg\varphi' = \dfrac{y}{x}$

$tg\varphi = \dfrac{y}{z} = \dfrac{A^2}{B^2}\cdot\dfrac{y}{x}$ oder: $tg\varphi' = \dfrac{B^2}{A^2}\cdot tg\varphi$ ** und da $\dfrac{y}{x} = Tg\varphi'$ ist, so ist

auch $y = \dfrac{b^2}{a^2}x\,tg\varphi$. Nun ist die Gleichung der Ellipse:

$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ also auch $\dfrac{a^2b^4}{a^4}x^2tg^2\varphi + b^2x^2 = a^2b^2$ oder $\dfrac{b^4}{a^2}x^2tg^2\varphi + b^2x^2 = a^2b^2$ oder $x^2\left(\cancel{\varphi}b^2+\dfrac{b^4}{a^2}tg^2\varphi\right) = b^2a^2$ oder mit b^2 alles dividirt:

dass heisst: $x^2\left(b^2+\dfrac{b^4}{a^2}tg^2\varphi\right) = a^2b^2$ oder ist: $x^2\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}tg^2\varphi\right) = a^2$ dass heisst $x^2(a^2+b^2tg^2\varphi) = a^4$ oder $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2tg^2\varphi}}$ dass heisst

$$x = \frac{a^2}{\dfrac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\cos^2\varphi}}} = \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}} = \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{a^2\cos\varphi}{a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$ oder mit a Zähler und Nenner dividirt: $x = \dfrac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$ *

z ist die Subnormale

y aber ist gleich $y = \frac{b^2}{a^2} x \, tg\varphi$; substituirt man hier den Werth von x so ist:

$$y = \frac{\frac{b^2}{a^2} tg\varphi \, a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 tg^2\varphi}} = \frac{b^2 tg\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 tg^2\varphi}} = \frac{b^2 tg\varphi \, Cos\varphi}{\sqrt{a^2 Cos^2\varphi + b^2 Sin^2\varphi}} = \frac{b^2 Sin\varphi}{\sqrt{a^2 Cos^2\varphi + b^2 Sin^2\varphi}}$$

weil aber $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ ist, so ist auch $y = \frac{a^2(1-\varepsilon^2) Sin\varphi}{\sqrt{a^2 Cos^2\varphi + a^2 Sin^2\varphi - a^2\varepsilon^2 Sin^2\varphi}} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2) Sin\varphi}{a\sqrt{1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi}}$

oder endlich:

$$y = \frac{a(1-\varepsilon^2) Sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi}}.$$

Daß aber der Krümungshalbmesser $= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ ist, erhellt aus folgendem: Der Krümmungshalbmesser der Elipse ist nach Vega II B. S. . in jedem Puncte $= \frac{(Normale)^3}{(\frac{1}{2} Paramet)^2}$; nun haben wir in diesem Buche (Nro 60) in der Gleichung I:

Normale $= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi}}$, der halbe Parameter aber ist gleich $\frac{b^2}{a}$ und es ist $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ also $\frac{1}{2}$ Paramet $= a(1-\varepsilon^2)$ * und $(\frac{1}{2}\text{Paramet})^2 = a^2(1-\varepsilon^2)^2$ und.

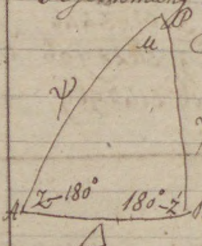
$$\text{Krümgshlbm.}\ \varrho = \frac{a^3(1-\varepsilon^2)^3}{a^2(1-\varepsilon^2)^2(1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 Sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \ **$$

---

10. Seite 68. Den Ausdruck für die Oberfläche der Zone findet man in diesem Buche Nro 51 vollständig entwickelt; das Differenziale der Länge des Bogens aber findet man Nro 62 ebenfalls ganz entwickelt

---

11. Seite 70. Bestimmung der geographischen Lage der Fixpuncte auf der Oberfläche einer Kugel.



Es nimmt, wenn P der Weltpol, und A, und B zwey Orte auf der Oberfläche der Kugel sind $AP = \psi$, $BP = \psi'$, $AB = \Delta$, das Azimuth von B gegen A oder $z' = 360° - BAP$, das Azimuth von A gegen B, $z' = 180° - ABP$, also ist $BAP = z - 180°$ und $ABP = 180° - z'$. ψ, z, Δ sind bekannt, ψ', z', u aber zu suchen.

Nach den Nepperschen Gleichungen ist:

$$tg\tfrac{1}{2}\left((180°-z')+u\right) = \frac{Cos\frac{1}{2}(\Delta-\psi)}{Cos\frac{1}{2}(\Delta+\psi)} \cdot Ctg\tfrac{1}{2}(z-180°) = tg\left(90° - \tfrac{1}{2}(z'-u)\right) = \frac{Cos\frac{1}{2}(\Delta-\psi)}{Cos\frac{1}{2}(\Delta+\psi)} \cdot - tg\tfrac{1}{2}z$$

$$tg\tfrac{1}{2}\left(u-(180°-z')\right) = \frac{Sin\frac{1}{2}(\Delta-\psi)}{Sin\frac{1}{2}(\Delta+\psi)} \cdot Ctg\tfrac{1}{2}(z-180°) = tg\left(90° + \tfrac{1}{2}(z'+u)\right) = \frac{Sin\frac{1}{2}(\Delta-\psi)}{Sin\frac{1}{2}(\Delta+\psi)} * - tg\tfrac{1}{2}z$$

und aus der Fundamentalformel folgt:

$$Sin\psi' : Sin\Delta = Sin(z-180°) : Sin u \qquad = Sin\psi' : Sin\Delta = - Sin z : Sin u$$

$$Sin\psi' : Sin(180°-z') = Sin(z-180°) : Sin\psi \qquad = Sin\psi' : - Sin z' = - Sin\psi : Sin z'$$

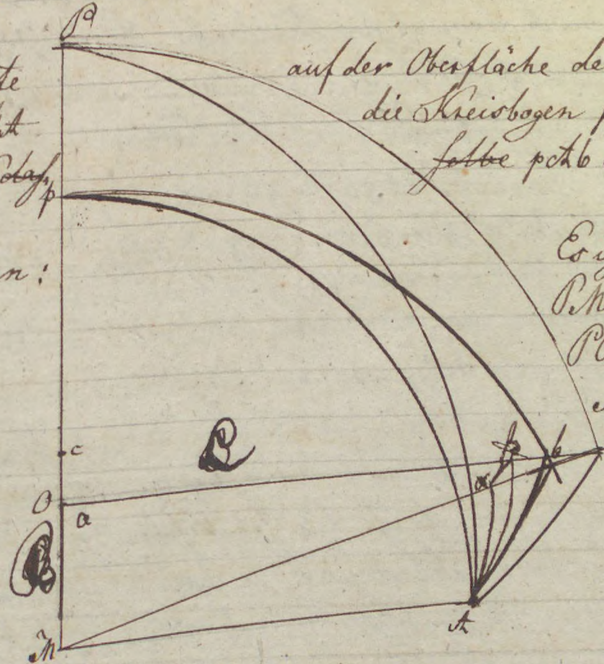
und also die gesuchten Gleichungen.

$$\text{I} \quad tg\tfrac{1}{2}(z'+u) = \frac{Sin\frac{1}{2}(\Delta+\psi)}{Sin\frac{1}{2}(\Delta-\psi)} \cdot Ctg\tfrac{1}{2}z$$

$$\text{II} \quad tg\tfrac{1}{2}(z'-u) = -\frac{Cos\frac{1}{2}(\Delta+\psi)}{Cos\frac{1}{2}(\Delta-\psi)} \cdot Ctg\tfrac{1}{2}z$$

$$\text{III} \quad Sin\psi' = -\frac{Sin\Delta \, Sin z}{Sin u} = -\frac{Sin z \, Sin\psi}{Sin z'}$$

12. S. 70. Bestimmung der Lage der Fixpuncte auf einem durch Umdrehung um die kleine Axe entstandenen Ellipsoids.



Sey P der Pol, A, und B zwey Orte auf der Oberfläche des Ellipsoids, aus M ziehe man mit dem Halbmesser MA die Kreisbogen pA, pb, bA, so ist das so entstandene sphärische Dreyek ~~das~~ ~~selbe~~ pAb dasselbe was wir früher hatten.

In diesem Dreyeke nahmen wir an:

$Ap = p\overset{a}{M}A = \psi$

$pB = p\overset{a}{M}b = \psi'$

$\overset{\frown}{Ab} = b\overset{a}{M}A = \Delta$

$p\overset{\frown}{A}b = z - 180^\circ$

$p\overset{a}{B}A = 180^\circ - z'$

$bp\overset{a}{A} = u$

Es ist aber im Ellipsoide:

$PMA = PA = \psi$

$POB = PB = \psi'$

$AB = \delta$

~~BPA~~ $APB = u$

So wurde früher schon ψ' fehlerhaft genommen, indem eigentlich ist:

Elliptisches $\psi' =$ Sphärischem $\psi' + OB\overset{a}{M}$. Um also das elliptische ψ' zu finden, müssen wir $OB\overset{a}{M}$ suchen.

Um $OB\overset{a}{M}$ zu finden, gibt die ebene Trigonometrie, da man in dem Dreyeke OBM, die zwey Seiten OM und OB, und den eingeschlossenen Winkel BOM kennt, ~~zur Bes~~ folgende Gleichung:

$$Tg\, OBM = \frac{OM \sin BOM}{OB - OM \cos BOM} = \frac{\frac{OM}{OB}\sin BOM}{1 - \frac{OM}{OB}\cos BOM}$$

Es ist aber BO die Normale des Punctes B bis an die kleine Axe verlängert also, wenn $a = 1$,

$$BO = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\psi'}}$$ siehe die Nummer (67) ferner ist $OM = CM - CO$ und

CM das Stük zwischen der kleinen Axe und der Normale von A, so wie CO, das Stük zwischen der kleinen Axe und OB also nach (Nro 65) für $a = 1$:

$$CM = \frac{\varepsilon^2 \cos^2\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\psi}}\ ;\ OC = \frac{\varepsilon^2 \cos^2\psi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\psi'}}$$ also $$OM = \frac{\varepsilon^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\psi}} - \frac{\varepsilon^2\cos^2\psi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\psi'}},$$ und

$$\frac{OM}{OB} = \frac{\varepsilon^2\cos^2\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi'}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi}} - \varepsilon^2\cos^2\psi'$$ also ~~auch~~ $$= \frac{\varepsilon^2\cos^2\psi\,(1-\varepsilon^2\cos^2\psi)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon^2\cos^2\psi')^{-\frac{1}{2}}} - \varepsilon^2\cos^2\psi'$$

also nach dem Newtonianischen Theorem entwikelt; und die höhern Potenzen von ε als die zweyte versäumt

$$\frac{OM}{OB} = \frac{\varepsilon^2\cos^2\psi\,(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\psi)}{1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\psi'} - \varepsilon^2\cos^2\psi'$$

Es ist aber: $\cos\psi' = \cos\psi\cos\delta - \sin\psi\sin\delta\cos z$ oder wenn man δ sehr klein setzt und seinen Sinus und

Cosinus nach der bekannten Reihe entwickelt:

$\mathrm{Cos}\,\psi' = \mathrm{Cos}\,\psi\,(1-\frac{1}{2}\delta^2) - \delta\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,z$ Läßt man die 4ten Potenzen von ε aus, so erhält man nach dem obigen Ausdruck: $\frac{OM}{OB} = \varepsilon^2 \mathrm{Cos}\,\psi(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathrm{Cos}^2\psi)(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathrm{Cos}^2\psi') - \varepsilon^2\mathrm{Cos}\,\psi'$ also

$\frac{OM}{OB} = \varepsilon^2(\mathrm{Cos}\,\psi - \mathrm{Cos}\,\psi')$ und wenn man statt $\mathrm{Cos}\,\psi'$ seinen eben gefundenen Werth setzt:

$$\frac{OM}{OB} = \varepsilon^2\delta(\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,z + \frac{1}{2}\delta\,\mathrm{Cos}\,\psi)$$

Nun ist nach No 53 Zweyte Anmerkung:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,\psi' = \mathrm{Cos}(\psi+\delta\,\mathrm{Cos}\,z)\\ \mathrm{Sin}\,\psi' = \mathrm{Sin}\,\psi + \delta\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,z\end{array}\right\}\text{ also } \mathrm{tg}\,OBM = \varepsilon^2\delta(\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,z + \frac{1}{2}\delta\,\mathrm{Cos}\,\psi)(\mathrm{Sin}\,\psi + \delta\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,z)$$ Siehe No 50 3ten Punct.

also, wenn man die höhern Potenzen δ as als die zweyte vernachläßigt:

$OBM = \varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{Cos}\,z$. und diess muss zu dem sphärischen ψ addirt werden, um das elliptische ψ' zu finden.

II Wenn wir aus B mit einem beliebigen ~~Halbmesser~~ Halbmesser z. B. mit AB die Kreisbogen $A\alpha$, $A\beta$, $\beta\alpha$ ziehen, so ist das sphärische Azimuth $180° - z' = A\alpha\beta$ nähmlich gleich dem Winkel den die Ebenen ABM, MBO, in ihrer Durchschnittslinie MB bilden, das elliptische Azimuth aber ist der Winkel den die Ebenen OBA, OBM in ihrer Durchschnittslinie BO bilden, oder es ist $A\beta\alpha = 180° - (180° - z'') = z''$

Das sphärische Dreyeck $A\alpha\beta$ gibt aber:

$\mathrm{Ctg}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Ctg}\,A\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\beta = -\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha\beta$ also $\mathrm{Ctg}\,\beta = \frac{\mathrm{Ctg}\,A\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\beta - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha\beta}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$ oder

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Ctg}\,A\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\beta - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha\beta}$$. Nun ist $\beta = z''$; $\alpha = 180° - z'$; $A\alpha = A\beta$

$= 90° - \frac{1}{2}\delta$ (Siehe No 53. Anmerk. 4); $\alpha\beta = d\psi = OBM = PBM - PBO = \psi' - \psi' - \varepsilon^2\delta^2\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{Cos}\,z$

$= -\varepsilon^2\delta^2\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{Cos}\,z$ also auch:

$$\mathrm{tg}\,z'' = \frac{\mathrm{Sin}\,z'}{\mathrm{tg}.\frac{1}{2}\delta\,\mathrm{Sin}\,d\psi' + \mathrm{Cos}\,z'\,\mathrm{Cos}\,d\psi'}$$, oder wenn man $d\psi'$ sehr klein annimmt, wo $\mathrm{Sin}\,d\psi = d\psi$, $\mathrm{Cos}\,d\psi' = 1$

ist, so ist auch: $\mathrm{tg}\,z'' = \frac{\mathrm{Sin}\,z'}{\mathrm{Cos}\,z' + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\delta\,d\psi'}$ oder für $d\psi'$ seinen Werth: $\mathrm{tg}\,z'' = \frac{\mathrm{Sin}\,z'}{\mathrm{Cos}\,z' + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\delta.\delta\varepsilon^2\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{Cos}\,z}$

nun ist δ ebenfalls klein, also $\mathrm{tg}\,\delta = \delta$, nahe, und auch z' kann ohne besondern Einfluss für z gesetzt werden: also ist $\mathrm{tg}\,z'' = \frac{\mathrm{Sin}\,z'}{\mathrm{Cos}\,z' - \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{Cos}\,z'}$ oder Zähler und Nenner mit $\mathrm{Cos}\,z'$ dividirt gibt:

$$\mathrm{tg}\,z'' = \frac{\mathrm{tg}\,z'}{1 - \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\mathrm{Sin}^2\psi}$$ oder um die Differenz beyder Azimuthe zu finden ist auch:

$\mathrm{tg}\,z'' - \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\mathrm{Sin}^2\psi\,\mathrm{tg}\,z'' = \mathrm{tg}\,z'$ oder $\mathrm{tg}\,z'' - \mathrm{tg}\,z' = \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{tg}\,z''$. Nun ist $\mathrm{tg}\,1 - \mathrm{tg}\,2 = \frac{\mathrm{Sin}(1-2)}{\mathrm{Sin}\,1.\mathrm{Cos}\,2}$ also:

$\frac{\mathrm{Sin}(z''-z')}{\mathrm{Sin}\,z''\,\mathrm{Cos}\,z'} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{tg}\,z''$ also $\mathrm{Sin}(z''-z') = \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{Sin}\,z''\,\mathrm{Cos}\,z'$ oder wenn man für z'' und z', z setzt

$\mathrm{Sin}(z''-z') = \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z = \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{Sin}\,2z$; weil aber die Differenz $(z''-z)$ gering, also $\mathrm{Sin}(z''-z')$ nahe gleich $z''-z'$ ist, so ist Correction des Azimuthes:

$$z''-z' = \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta^2\,\mathrm{Sin}\,2z. \text{ (II)}$$

Auch der elliptische Bogen δ der die Distanz der beyden Orte misst, ist vom sphärischen verschieden. Wie, und warum so, man diesen Winkel δ finden kann sehe (No. 53. Anm. 7) man hat zu seiner Bestimmung folgende Gleichungen:

$$\delta = \frac{\Delta}{a}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\psi\right) = \frac{\Delta}{b}\left(1-\varepsilon^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\psi\right) \text{ und } = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\psi\right)$$

Die beyden ersten findet man ohne Schwierigkeit, und um auch den letzten Werth zu finden, wird man wenn man $1-\varepsilon^2$ als Factor ausser das Zeichen setzt, im zweyten Ausdrucke haben:

$$\delta = \frac{\Delta}{b}(1-\varepsilon^2)\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\sin^2\psi}{(1-\varepsilon^2)}\right)$$ Nun ist $1-\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$ und $\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ also diese Werthe substituirt ist:

$$\delta = \frac{\Delta}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\psi}{\frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{\Delta}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)a^2}{a^2b^2}\sin^2\psi\right) = \frac{\Delta}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)}{b^2}\sin^2\psi\right)$$

$$\delta = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\sin^2\psi}{1-\varepsilon^2}\right) = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\psi(1-2\varepsilon^2 - -)\right) = \frac{\Delta b}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\psi\right)$$

Man versäumt nähmlich die höhern als 2ten Potenzen von ε. Ueber die kürzere Entwicklung dieses Ausdruckes sehe man ~~No.~~

13. Seite 70(c)

Mittelst Barometerbeobachtungen die Höhe eines Ortes zu bestimmen.

Worauf sich diese Art Höhen zu messen, gründet, sehe man in diesem Buche (No. 66), hier ist der Fortgang. Wir hatten dort die Gleichungen für den Druck der Luft in der Höhe z und an der Oberfläche der Erde;

$$(\mathrm{I})\ \log\frac{P}{p} = \frac{\mu g r}{a(1+\alpha x)}\cdot\frac{z}{r+z}\ .\ \cancel{\text{und }\log P} = \frac{\mu g r}{a(1+\alpha x)}\cdot\frac{H}{r+H}$$ wo wir statt z, die Höhe mit H bezeichnen.

Nun habe man in der obern Station den Barometerstand $= b$, das äussere Thermometer t, und das innere $= \tau$, an der unter untern Station aber dieselben Grössen $= b', t', \tau'$ beobachtet, ist ferner g die Schwere an der Oberfläche, und g' die, in der Höhe H über der Erde, so ist der Druck des Barometers in der Höhe H offenbar $= g'D.b$, und an der Oberfläche der Erde (oder der untern Station) $= gDb'$ (D heisst die Dichtigkeit des Quecksilbers) und da der Druck des Quecksilbers im Barometer dem Drucke der äussern Luft gleich seyn, oder das Gleichgewicht halten muss; so ist:

$g'Db = p$ und $gDb' = P$ oder auch; weil $g' = \frac{r^2 g}{(r+H)^2}$ ist, so ist:

$\log\left(\frac{r^2 g}{(r+H)^2}.D.b\right) = \log p$ und $\log(g.D.b') = \log P$ also:

$\log r^2 + \log g + \log D + \log b - 2\log(r+H) = \log p$ und $\log P = \log g + \log D + \log b'$ also auch:

$\log P - \log p = \log.g + \log.D + \log.b' - \log g - \log D - \log b - 2\log r + 2\log(r+H) = \log b' - \log b + 2\log(r+H) - 2\log r$ daher

$$\log\frac{P}{p} = \log\frac{b'}{b} + 2\log.\left(\frac{r+H}{r}\right) = \log\frac{b'}{b} + 2\log\left(1+\frac{H}{r}\right).\ (\mathrm{II})$$

Und da man das Gesetz der Wärmeänderung nicht kennt, man also, bey jeder Schichte das Mittel aus den Temperaturen an den beyden Grundflächen, als die constante Temperatur ~~bey~~ der ganzen Schichte nimmt, so ist hier:

$x = \frac{1}{2}(t+t')$ und also αx ($\alpha = 0.004$ nach No. 66) $\alpha x = 0.002(t'+t)$. Substituirt man diese Werthe in der Gleichung (I) so ist:

$$\log.\frac{b'}{b} + 2\log\left(1+\frac{H}{r}\right) = \frac{\mu g r}{a(1+0.002(t'+t))}\cdot\frac{H}{r+H},$$ und hier aus kann man die Höhe des obern Beobachtungsortes finden.

Denn man hat: $\frac{H \mu g r}{a(1+0.002(t'+t))} = (r+H)\left(\log.\frac{b'}{b} + 2\log\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)$ weiter

$$H = \left(\frac{a(1+0.002(t'+t)}{\mu g r}\left(\log.\frac{b'}{b}+2\log\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)\right)(r+H)$$ oder endlich:

$H = \frac{a}{\mu g}\left(1+0.002(t'+t)\left(\log\frac{b'}{b}+2\log\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)\right)\left(1+\frac{H}{r}\right)$. Da aber die Barometerstände nicht unter gleicher Temperatur beobachtet sind, so müssen sie auf einerley Temperatur gebracht werden, und da sich jedes Volume Quecksilber für 1 Grad Reaumur um seinen 0.0002 Theil ausdehnt, so ist also eigentlich; ~~wenn~~ statt b folgender Werth zu setzen:

$$b = (1+0.0002(\tau'-\tau))b$$ und so wird jene Gleichung:

$$H = \frac{a}{\mu g}\left(1+0.002(t'+t)\left(\log.\frac{b'}{(1+0.0002(\tau'-\tau))b} + 2\log\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)\right).\left(1+\frac{H}{r}\right) \quad * \text{(III)}$$

Den Factor $\frac{a}{\mu g}$ kann man am sichersten bey einer durch trigonometrische Messungen schon bekannten Höhe finden, Ramond fand für die Breite von 45°;

$\frac{a}{\mu g} = 18336$ Meter $= 9407.72$ Toisen also für die Breite $\varphi = 18336(1+0.00284\cos 2\varphi)$ Meter

oder $\frac{a}{\mu g} = 9407.72(1+0.00284\cos 2\varphi)$ also obige Gleichung:

$$H = 9407.72(1+0.00284\cos2\varphi)(1+0.002(t'+t)\left(\log\frac{b'}{(1+0.0002(\tau'-\tau))b}+2\log\left(1+\frac{H}{r}\right)\right).\left(1+\frac{H}{r}\right) \quad * \text{III}$$

Wenn man aber die zweyten und höhern Potenzen von $\frac{H}{r}$ was sehr klein seyn muss vernachlässigt, und $2\log\left(1+\frac{z}{r}\right) = 2.0.4342945\left(\frac{z}{r} - \frac{z^2}{r^2} + etc\right) = 0.868589\frac{z}{r}$ setzt, so ist; in Toisen:

$$H = 9407.72(1+0.00284\cos2\varphi)(1+0.002(t'+t))\left(\log\frac{b'}{(1+0.0002(\tau'-\tau))b}\left(1+\frac{H}{r}\right)+0.868598\frac{z}{r}\right)\right) \quad \text{(IV)}$$

ein genäherter Werth von H den Laplace in seiner Mecanique celeste gibt.

In den meisten Fällen kann man $\frac{z}{r}$ ganz vernachlässigen, so dass man wo nicht zu grosse Genauigkeit erforderlich ist, hat.

$$H = 9407.72(1+0.00284\cos2\varphi)(1+0.002(t'+t)).\log\frac{b'}{(1+0.0002(\tau'-\tau))b} = A\log\frac{b'}{(1+0.0002(\tau'-\tau)b)} \quad \text{(V)}$$

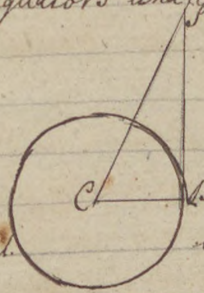
wenn der Factor von $\log.\frac{b'}{b} = A$ gesetzt wird. b', b kann in was immer für einem Maasse, t, t', τ, τ', aber nach Reaumurs Maass genommen werden, für Fahrenheits Maass ist $t, \tau = \frac{4F-128}{9}$ und für den ~~Wenn man~~ Centigrad ist $t, \tau = \frac{4}{5}C$.

Setzt man aber b, b' im Pariser Maass, t, τ, wieder im Reaumurschen Maasse voraus, so erhält man aus den Barometertafeln folgenden Ausdruck für die Erhöhung eines Ortes über die Meeresfläche:

$$H = A\log\frac{28.17}{b} + \{0.94+0.002(t+53+t-26)\}\{\tau-(53+t-26)\} \quad ** \text{ VI}$$

woraus man sehr bequem, jedoch minder genau die Erhöhung des Beobachtungsortes über die Meeresfläche aus einer <u>einzigen</u> Beobachtung erhalten kann.

14. Seite 71.(3) Um die Horizontalparallaxe des Aequators zu bestimmen, so ist, wenn a der Halbmesser des Aequators und R die Entfernung des ~~Beobachters~~ Sternes vom Mittelpuncte bezeichnet:



in dieser Figur: $CS = R$, $CB = a$, $CSB = p$, $CBS = 90°$ also:

$R : a = 1 : \sin p$ also $\sin p = \frac{a}{R}$; und wenn für einen andern Ort die Parallaxe mit π und die Entfern. des Beobachters vom Mittelpuncte mit r bezeichnet wird, so ist: $CB = r$, $CS = R$, $CSB = \pi$ also; die Horizontalparallaxe dieses Punct. $\sin \pi : 1 = r : R$ also $\sin \pi = \frac{r}{R}$ oder da $R = a : \sin p$ ist, $\sin \pi = \frac{r}{a} . \sin p$.

15. Seite 72. Die Bestimmung der Parallaxe der Länge und Breite $\lambda' - \lambda$, $\beta' - \beta$ findet man unter Nro (54) in diesem Buch vollständig abgeleitet.

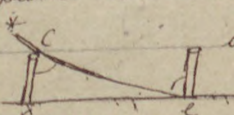
16 Allgemeine Theorie der Parallaxe.

Die Parallaxe ist der Unterschied der Örter eines und desselben Gegenstandes, von zwey verschiedenen Standpuncten aus betrachtet; je grösser also die Distanz beyder Orte ist, desto grösser ist auch die Parallaxe.

Es gibt in der Astronomie 3 Hauptgattungen Parallaxen, die tägliche, die jährliche und die Bradleysche Parallaxe, oder die Aberration.

Die tägliche Parallaxe ist der Unterschied der Stellung eines Sterns, gesehen aus dem Mittelpuncte und der Oberfläche der Erde, die jährliche Parallaxe aber ist der Unterschied der Orte eines Sternes, gesehen, aus dem Mittelpuncte der Erdbahn oder der Sonne, und aus der Erde.

Zur Kenntniss der Bradleyschen Parallaxe bemerke man: dass, obgleich die Geschwindigkeit des Lichts entsetzlich gross, ja fast unendlich ist, so ist sie doch noch mit der Geschwindigkeit der Bewegung der Erde vergleichbar ist, und es wird ein anderer Zeitpunct T seyn, in welchem das Licht den Mittelpunct des Objectiv und ein anderer t in welchem es den Mittelpunct des Ocularglases erreicht. Zum Beyspiele: In der Zeit $T - t$ in welcher das Licht brauchs



um vom Mittelpuncte des Objectiv zu jenem des Ocularglases zu kommen, schreite die Erde in ihrer Bahn um eE vor, so wird der Beobachter den Stern, da er selbst an einem andern Orte ist, auch an einem andern Orte sehen, wird also sein Rohr anders stellen müssen, als ohne diese Fortschreitung und der Winkel $E - e$ den diese Richtung mit der ursprünglichen macht, ist die Bradleysche Parallaxe oder die Aberration.

Jede der drey Classen der Parallaxe hat drey Arten, also sind in allem neun verschiedene Parallaxen. Bezeichnen wir durch:

a, a', Längen, Azimuthe oder Rectascensionen b, b', Breiten, Höhen, oder Declinationen	r, r', Entfernungen vom Sterne, und zwar seyen für einen Ort diese Grössen a, b, r für den andern a', b', r';

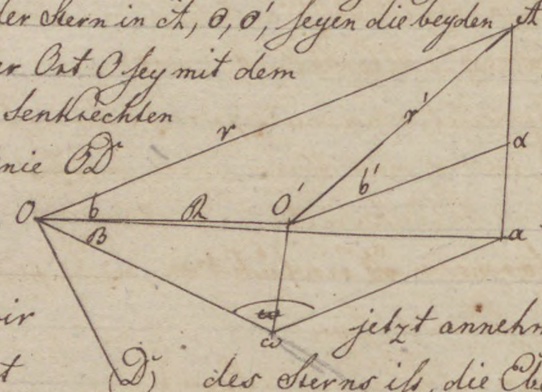
A, und B, sollen die Winkel eines Ortes gegen das andere und den Stern, und R die Entfernung beyder Orte von einander bezeichnen.

Die allgemeinen Gleichungen für alle Classen und Arten der Parallaxe sind

$$r'\mathrm{Cos.}\,b'\,\mathrm{Cos.}(a'-N) = r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}(a-N) - R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(A-N)$$
$$r'\mathrm{Cos.}\,b'\,\mathrm{Sin.}(a'-N) = r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}(a-N) - R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin.}(A-N)$$
$$r'\mathrm{Sin}\,b' = r\,\mathrm{Sin}\,b - R\,\mathrm{Sin}\,b$$

Ableitung dieser Formeln.

Es sey der Stern in A, O, O', seyen die beyden Orte aus welchen der Stern beobachtet wird, der Ort O sey mit dem Sterne in einer und derselben Ebene, ziehen wir die senkrechten O'ω, und Aa auf die Fläche Oaω, und die Hülfslinie OD endlich bezeichne die Richtung des Frühlings = Punctes.



Wenn wir jetzt annehmen, dass die Ebene in welcher der projicirte Ort des Sterns ist, die Ebene der Ekliptik sey, so wird im Dreyecke aOω seyn: aOω = DOa − DOω = a − A, ferner der Winkel Oaω = 180° − a − A.

Die Seiten werden seyn:

aω = O'α = r' Cos b', Oω = R Cos B und aO = r Cos b.

Ferner ist im Dreyecke: O'αA, Aα = Aa − αa = Aa − O'ω also gibt diess unmittelbar die dritte Gleichung, denn es ist: Aα = r' Sin b'; Aa = r Sin b, O'ω = R Sin B also:

$$r'\,\mathrm{Sin}\,b' = r\,\mathrm{Sin}\,b - R\,\mathrm{Sin}\,B.$$

Zur Bestimmung der beyden übrigen Gleichungen gibt die ebene Trigonometrie die Gleichung: $c = A\,\mathrm{Cos}\,B + b\,\mathrm{Cos}\,A$, nähmlich jede Seite ist gleich, der Summe der beyden übrigen Seiten, multipliciert mit den Cosinussen der anliegenden Winkel, also wird seyn:

$$r'\mathrm{Cos}\,b' = r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}(a'-a) - R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a'-A)$$
$$r\,\mathrm{Cos}\,b = r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Cos}(a'-a) + R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a-A)$$

Multipliciert man die erste dieser Gleichungen mit Sin a, und die zweyte mit Sin a', so ist:

$$r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Sin}\,a = r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a - R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a'-A)\,\mathrm{Sin}\,a$$
$$r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,a' = r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a' + R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a-A)\,\mathrm{Sin}\,a'$$

addiert man sie jetzt, so ist:

$$r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Sin}\,a + r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,a' = r\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a + r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a' + R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a-A)\,\mathrm{Sin}\,a' - R\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(a'-A)\,\mathrm{Sin}\,a$$
$$= r'\mathrm{Cos}\,b'(\mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a') + r\,\mathrm{Cos}\,b(\mathrm{Sin}\,a' - \mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin.}\,a) = R\,\mathrm{Cos}\,B(\mathrm{Cos}(a'-A)\,\mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Cos}(a-A)\,\mathrm{Sin.}\,a')$$

Es ist aber der Bogen $a = a' - (a'-a)$, also $\mathrm{Sin}\,a = \mathrm{Sin}\,a'\,\mathrm{Cos}(a'-a) - \mathrm{Cos}\,a'\,\mathrm{Sin}(a'-a)$ also ist

$\mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Sin}\,a'\,\mathrm{Cos}(a'-a) = -\mathrm{Cos}\,a'\,\mathrm{Sin}(a'-a)$ so dass man für $r'\mathrm{Cos}\,b'(\mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Cos}(a'-a)\,\mathrm{Sin}\,a')$ setzen kann:

$$-r'\mathrm{Cos}\,b'\,\mathrm{Cos}\,a'\,\mathrm{Sin}(a'-a)$$

Ferner ist: $a' = (a'-a)+a$ also: $\sin a' = \sin(a'-a)\cos a + \cos(a'-a)\sin a$ oder ebenfalls:

$\sin a' - \cos(a'-a)\sin a = \sin(a'-a)\cos a$, also auch: $r\cos b(\sin a' - \cos(a'-a)\sin a) = r\cos b\sin(a'-a)\cos a$

Entwikeln wir auch den zweyten Theil der Gleichung, so ist:

$R\cos B(\cos a\cos A\sin a' + \sin a\sin A\sin a') = \cos a\cos A\sin a + \sin a\sin A\sin a$

$R\cos B(\cos a\cos A\sin a' - \cos a'\cos A\sin a) = \cancel{R\cos}\, B\cos A(\cos a\sin a' - \cos a'\sin a) = R\cos A\sin(a'-a)\cos B$

also hier haben wir alle oberen Gleichungen verwandelt in folgende:

$-r'\cos b'\cos a'\sin(a'-a) + r\cos b\cos a\sin(a'-a) = R\cos B\cos A\sin(a'-a)$ oder

$r'\cos b'\cos a' = r\cos b\cos a - R\cos B\cos A$ — (1)

Die zweyte Gleichung wird eben so abgeleitet, man multipliciert die erste mit $\cos a$, die zweyte mit $\cos a'$, addirt, und reduciert sie, wie es das Vorige zeigt; so erhält man:

$r'\cos b'\sin a' = r\cos b\sin a - R\cos B\sin A$ — (2)

Jetzt kann man daher in die Formeln N einführen, multipliciert man die erste mit $\sin n$, und die andere mit $\cos n$, so wird seyn:

$r'\cos b'\sin n\cos a' = r\cos b\cos a\sin n - R\cos B\cos A\sin n$

$r'\cos b'\sin a'\cos n = r\cos b\sin a\cos n - R\cos B\sin A\cos n$ sie addirt, ~~gibt~~ oder subtrahiert gibt:

$r'\cos b'\sin(a'\pm n) = r\cos b\sin(a\pm n) - R\cos B\sin(A\pm N)$ für $\pm n$ kann man N setzen

$r'\cos b'\sin(a'+N) = r\cos b\sin(a+N) - R\cos B\sin(A+N)$ und diess gibt die zweyte Formel.

Multipliciert man aber die Gleichung (1) mit $\cos n$ und (2) mit $\sin n$ so ist:

$r'\cos b'\cos a'\cos n = r\cos b\cos a\cos n - R\cos B\cos A\cos n$
$r'\cos b'\sin a'\sin n = r\cos b\sin a\sin n - R\cos B\sin A\sin n$ addirt oder subtrahirt, gibt:

$r\cos b'\cos(a'\pm n) = r\cos b\cos(a\pm n) - R\cos B\cos(A\pm n)$ statt $\pm n$ N gesetzt gibt:

$r\cos b'\cos(a'+N) = r\cos b\cos(a+N) - R\cos B\cos(A+N)$ welches die erste der aufgestellten Hauptformeln ist.

---

17 Seite 72 Wenn Δ^{*} Δ' der geocentrische und der von der Oberfläche der Erde beobachtete Halbmesser eines Gestirnes λ, β die geocentrische, λ', β' die beobachtete Länge und Breite des Gestirns L aber die Länge der Erde bezeichnet, so ist:

$$\frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta} = \frac{\cos\beta'\sin(L-\lambda')}{\cos\beta\sin(L-\lambda)}.$$

Denn es ist offenbar. $\varrho : \varrho' = \sin\Delta : \sin\Delta'$ oder $\frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta} = \frac{\varrho'}{\varrho}$ Die zweyte der in N:o 71 entwickelten Hauptgleichungen der Parallaxe gibt aber:

$r'\cos b'\sin(a'-N) = r\cos b\sin(a-N) - R\cos B\sin(A-N)$ oder wenn man $r'=\varrho'$, $b'=\beta'$, $a'=\lambda'$, $r=\varrho$, $b=\beta$, $a=\lambda$, $A=L$ setzt, um diesen Ausdruck dem seinigen gleich zu schreiben:

$\varrho'\cos\beta'\sin(\lambda'-N) = \varrho\cos\beta\sin(\lambda-N) - R\cos B\sin(L-N)$ setzt man hierin da N willkührlich ist $N=L$, so ist: $\varrho'\cos\beta'\sin(\lambda'-L) = \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L)$ und $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta} = \frac{\cos\beta'\sin(\lambda'-L)}{\cos\beta\sin(\lambda-L)}$ *.

18. Seite 64. Gleichung der Refraction für jeden Barometer und Thermometerstand.

Es ändere sich z. B. für jeden einzelnen Grad Reaumur ein beliebiges Volume Quecksilber im Barometer um seinen $n$ten und das dieser Barometerhöhe zugehörige Volume Luft um seinen $m$ten Theil. Sey nun D, M, V, die Dichte, Masse und das Volume der Luftsäule im Normalzustande derselben, dass heisst bey 0° Grad Reaum. Temperatur und 28 Zoll Pariser Maass Barometerhöhe, δ, m, v, dieselben Grössen, für einen Zustand der Luft dem der Barometerstand b Zoll, und die Temperatur t Grade entspricht, so wird seyn:

$m : M = b(1-nt) : 28$ und
$V : v = 1 : 1+mt$ folglich auch $mV : Mv = b(1-nt) : 28(1+mt)$ also: da
$mV : Mv = \delta : D =$

$$\delta = \frac{b}{28}\cdot\left(\frac{1-nt}{1+mt}\right)\cdot D$$

Wenn also jetzt r die Refraction für den Normalzustand, und r' die Refraction für den der Barometerhöhe b und Temperatur t entsprechenden Luftzustand ist, so ist, weil die Refraction der Dichte der Luft proportionirt ist:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{r'}{r} \text{ also } r' = \frac{r\delta}{D} = \frac{rb}{28}\left(\frac{1-nt}{1+mt}\right).$$

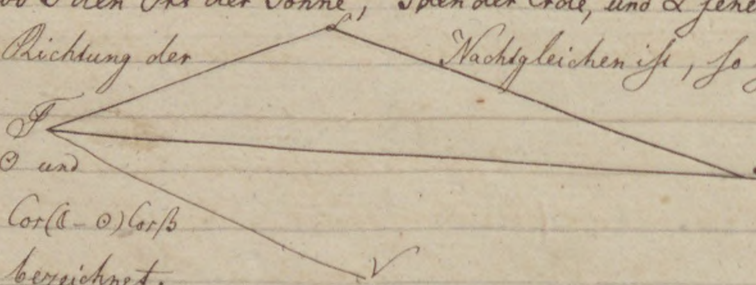
Nach den neusten Versuchen ist: $n = 0.00022$, $m = 0.00455$, also auch:

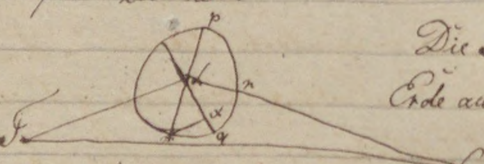
$$r' = r.\frac{b}{28}\left(\frac{1-0.00022t}{1+0.00455t}\right) = r.\frac{b}{28}.\frac{1}{(1+0.00455t)}.\frac{1}{(1+0.00022t)}$$ oder wenn man den ersten

Bruch $= B$, den zweyten $= t$, und den dritten $= t'$ setzt so ist:

$$r' = rBtt'. *$$

Seite 81. 19 Um die Grösse der sichtbaren Lichtphase des Mondes zu bestimmen, betrachte man die folgende Figur; wo S den Ort der Sonne, T den der Erde, und L jenen des Mondes bezeichnet, und wo TV die Richtung der Nachtgleichen ist, so ist $T = ☾ - ☉$ wenn die Länge der Sonne ☉ und die des Monden ☾ heisst und $\cos T = \cos(☾ - ☉)\cos\beta$ wenn man die Breite des Mondes mit β bezeichnet.





Die Sonne beleuchtet vom Monde die Hälfte $pnqm$, von der Erde aus aber werden wir aber nur den kleinen Theil mqx und zwar eigentlich in der Richtung der Tangente seines erhabenen Theiles sehen, da aber der Winkel, den die Entfernung LT mit dieser Tangente macht, sehr gering ist, so können wir selbe als parallel zu dieser Entfernung betrachten, und so die Linie mx für die kleine

halbe Axe der Ellipse annehmen, unter welcher die Phase erscheint, und deren grosse Axe $= 2a$ gleich dem Durchmesser des Mondes ist; diess angenommen, ist in dem ~~sphaerischen~~ geradlinigen Dreyeke Lmx
$mL : mx = \text{Sin}\, Lxm : \text{Sin}\, mLx : \text{Cos}\, x\,\text{Lm}$. d.h. $a : b = 1 : \text{Sin}\,(180-(T+S)-90°) = a : b = 1 : \text{Sin}\,(180-(T+S)-90)$
$a : b = 1 : \text{Cos}\,(T+S)$ also: $b = a\,\text{Cos}\,(T+S)$
also auch: $\frac{b}{a} = \text{Cos}\,(T+S)$ oder wie Littrow es in seiner pop. Astronomie thut, wenn man, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, S als sehr klein vernachlässigt, $\frac{b}{a} = \text{Cos}\, T$, daraus folgt $1 - \frac{b}{a} = 1 - \text{Cos}\, T$ d.h. $\frac{a-b}{a} = \text{Sin vers.}\, T$ oder $a - b = a\,\text{Sin vers.}\, T$.
Nehmen wir aber in der Gleichung:

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\,(T+S),$$

S nicht für 0 an, ~~sonst~~ können wir, da wir das Verhältniss der Entfernungen der Erde vom Monde und der Sonne kennen, seinen Werth bestimmen, und substituiren. Denn in dem zuerst betrachteten geradlinigen Dreyeke zwischen Sonne, Mond und Erde, ist:

$$tg\,S = \frac{\frac{LT}{ST}\,\text{Sin}\,T}{1 - \frac{LT}{ST}\,\text{Cos}\,T}$$

nun ist $\frac{LT}{ST}$ das Verhältniss zwischen der Parallaxe des Mondes und der Sonne, welches die Beobachtungen $= \frac{1}{389}$ ergeben, substituirt man daher diesen Werth für $\frac{LT}{ST}$ in dieser Gleichung, so ist:

$$tg\,S = \frac{\frac{\text{Sin}\,T}{389}}{1 - \frac{\text{Cos}\,T}{389}}$$

oder wenn man $\frac{\text{Cos}\,T}{389}$ als sehr klein betrachtet, $tg\,S = \frac{\text{Sin}\,T}{389}$
Nun ist aber $T = ☾ - ☉$ wie wir oben fanden, also auch $tg\,S = \frac{\text{Sin}\,(☾ - ☉)}{389}$, oder wenn man $tg\,S$ nach der bekannten Reihe $tg = \text{Bog} + \frac{1}{3}\text{Bog}^3 + \ldots$ entwikelt, und die höhern Potenzen von S vernachlässigt: $S = \frac{\text{Sin}\,(☾ - ☉)}{389}$ oder in Minuten und Secunden: $S = \frac{206264.8\,\text{Sin}\,(☾ - ☉)}{389}$ $= 8'.50''.25\,\text{Sin}\,(☾ - ☉)$, substituirt man daher diesen Werth von S in der Gleichung:

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\,(T+S),$$

so erhält man für die Grösse der Phase:

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\,(T + 8'.50''.25\,\text{Sin}\,(☾ - ☉))$$

ein Werth der genauer ist, als der in seiner pop. Astronomie ausgedrükte, weil er dort S ganz vernachlässigt.

---

20 Seite 110.

Sey in P der Pol, CA der Halbmesser des Aequators, N ein Ort an der Oberfläche der Erde, $A\alpha = a$ die Schwungkraft im Aequator $N\alpha'$ die im Puncte N, so ist offenbar

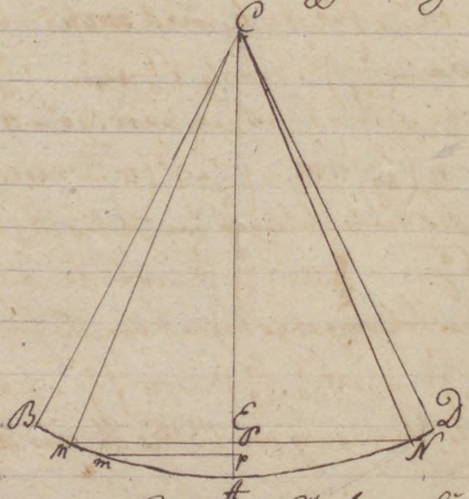
$$a' : a = MN : CA \text{ oder } a' = a.\frac{MN}{CA}$$

es ist aber $MN = CN\,\text{Cos}\,\varphi = CA\,\text{Cos}\,\varphi$
also auch $a' = a.\frac{CA\,\text{Cos}\,\varphi}{CA} = a\,\text{Cos}\,\varphi$ *. Die verminderte Schwere in N aber ist $= NB = a''$; oder $a'' = a'\,\text{Cos}\,\varphi$, da aber $a' = a\,\text{Cos}\,\varphi$ ist, so ist auch: $a'' = a\,\text{Cos}^2\varphi$. * Wenn also G die ursprüngliche und g die wirkliche beobachtete Schwere ist, so ist immer: $G - g = a\,\text{Cos}^2\varphi$ *.
Um die Schwungkraft a im Aequator zu finden gibt die Mechanik, dass diese der Central Kraft gleich sey. Es ist aber diese $= \frac{2\pi^2 r m}{g t^2}$ also ~~ist auch~~ die Beschleunigung $= \frac{2\pi^2 r}{t^2}$, und

da die Schwungkraft immer gleich der doppelten Beschleunigung ist, so ist selbe
oder $a = \frac{4\pi^2 r}{T}$ oder wenn man mit ihm $r = A$, $t = T$ setzt, so ist imer
$a = \frac{4\pi^2 A t^2}{T^2} x x$

---

21 Seite. 113 ~~Um~~ Die Zeit der Dauer eines Pendelschlages bey einem einfachen Pendel, das seine Schwingungen in sehr kleinen Bogen verrichtet, und dessen Länge $= r$ ist, zu finden.



Sey der Aufhängspunct des Pendels in C, seine Länge $AC = r$, und sein Schwingungsbogen $= BAD$, dessen größte Erhöhung $AE = b$, der Theil AP derselben $= x$, $PM = y$ also $EP = b - x$ und $y = \sqrt{2rx - x^2}$. Sey nun Mm ein sehr kleiner Bogen, so ist selber $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, er ist aber $dy = \frac{2r\,dx - 2x\,dx}{2\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{2dx(r-x)}{2\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{dx(r-x)}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ also $dy^2 = \frac{dx^2(r-x)^2}{2rx - x^2}$ also:

$$Mm = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2(r-x)^2}{2rx - x^2}} = \sqrt{\frac{2rx\,dx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rx\,dx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}} = \frac{r\,dx}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Nimmt man nun an dass der Bogen $BM = s$ in der Zeit t zurückgelegt werde, und dass der schwere Punct M am Ende dieser Bewegung in M die Geschwindigkeit v erhalten habe, so gibt die Fundamentalformel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung: $v = \sqrt{2g \cdot s}$ (weil Littrow die Schwere $= g$, also die Beschleunigung $= \frac{1}{2}g$ setzt); es ist aber ebenfalls nach dem mechanischen Satze „dass jeder schwere Körper der in einer ununterbrochenen krummen Linie gegen den Horizont herabsinkt, in jedem Puncte derselben, nach der Richtung des Elementes dieselbe Geschwindigkeit hat, als wenn er von eben der Höhe frey herabgefallen wäre" in unserem Falle: $v = \sqrt{2g \cdot EP} = \sqrt{2g \cdot (b-x)}$
und da $s = vt$ also $dt = \frac{ds}{v}$ ist, so hat man; weil $ds = Mm$ ist:
$dt = \frac{r\,dx}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2g)^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}}$ oder eigentlich $dt = \frac{-r\,dx}{(2g)^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ weil t abnimmt wenn x wächst, nähmlich weil $x + dx = t - dt$ und also $dt = t - x - dx - x$ ist.
daraus folgt $dt = -\frac{r\,dx}{(2g)^{\frac{1}{2}} \cdot (2r)^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{x^2}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (b-x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{r^{\frac{1}{2}}dx}{(4g)^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{x^2}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (b-x)^{\frac{1}{2}}}$ oder auch:

$dt = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x-\frac{x^2}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}dx\cdot(b-x)^{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(b-x)^{-\frac{1}{2}}$ also auch:

$t = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\int\left(\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx\cdot(b-x)^{-\frac{1}{2}}\right)$ oder da man $\frac{x}{2r}$ gegen die Einheit ohne Fehler vernachlässigen kann: $t = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx\,(b-x)^{-\frac{1}{2}}$; dieß Integral nach der allgemeinen Integralformel aus Vegas Integralrechnung §721. IV: $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\alpha-\beta x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cdot arc.tg.\sqrt{\frac{\beta x}{(\alpha-\beta x)}} + C$ entwikelt, gibt, da für unseren Fall $\beta=1$, und $\alpha = b$ ist:

$t = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg\sqrt{\frac{x}{b-x}} + C$, für $x=b$, wird ~~auch~~ $t=0$ also auch:

$0 = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg.\sqrt{\frac{b}{0}} + C = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.90^\circ$ also auch $C = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.90^\circ$

oder, ~~dann~~ wenn wir den Halbmesser $=1$ setzen, $2arc.90^\circ = \pi$ wird: $C = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\pi$ und daher:

$t = -\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg.\sqrt{\frac{x}{b-x}} + \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\pi = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\pi - 2arc.tg\sqrt{\frac{x}{b-x}}\right)$, setzen wir hierin $x=0$, so erhalten wir die Dauerzeit des Pendelschlages von B bis A, es ist nähmlich:

$t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\pi - 2arc.tg.\sqrt{\frac{0}{b}}\right) = \pi\cdot\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}$ und da diese Dauerzeit von B bis A genau der Hälfte der Dauerzeit des ganzen Schwingungsbogens von B bis D ist, so ist letzterer, nähmlich:

$t = 2\pi\left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. **

Daß die Dauerzeiten der Pendelsschwingung von B bis A, und ~~die~~ von A bis D einander vollkommen gleich ~~sind~~ wird so bewiesen:

Wenn der Bogen $AN = AM$ ist, so hat der schwere Punct in N dieselbe Geschwindigkeit, die er in M hatte, oder es ist in Nebenfalls $v = \sqrt{2g(b-x)}$; setzen wir nun die Zeit, die der Pendel zur Schwingung von A bis N braucht $=t$ so ist auch hier $dt = \frac{ds}{v} = \frac{r\,dx}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}(2g)^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}}$, hier aber bleibt dieser Bruch positiv, weil jetzt x zugleich mit t wächst, es ist daher eben so wie früher:

$t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\int\left(\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx\,(b-x)^{-\frac{1}{2}}\right)$ oder weil man auch hier $\frac{x}{2r}$ vernachlässigen kann, so ist:

$t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx\,(b-x)^{-\frac{1}{2}}$ oder das Integrale so wie vorhin entwikelt, gibt: $t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg.\sqrt{\frac{x}{b-x}} + C$

Hier ist aber Const. ~~weil~~ $=0$, weil für $x=0$ auch $t=0$ wird, und folglich bleibt:

$t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg\sqrt{\frac{x}{b-x}}$, um nun die Dauerzeit der Schwingung von A bis D zu erhalten, werden wir $x=b$ setzen müssen, und geschieht dieß, so wird:

$t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.tg.\sqrt{\frac{b}{0}} = t = \left(\frac{r}{4g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2arc.90 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$; daß heißt: die Dauerzeit der Schwingung von B nach A, ist genau so groß, wie die von A bis D.

Wir setzten hier voraus, daß wenn die Bögen AN und AM einander gleich sind, auch die Geschwindigkeiten des schweren Körpers in M und N einander gleich seyen, welches auf folgende Art erwiesen wird: Es ist die Geschwindigkeit im $M = \sqrt{2g.EP}$. EP aber ist gleich: $CP - CE$, und um diese beyden Größen zu bestimmen, setze ich $BCA = m$ und $MCA = u$ so ist in den Dreyeken CMP und CBE:

$CM : PC = \text{Sin tot} : \text{Cos } MCP = r : PC = 1 : \cos u$; $PC = r\cos u$ und daher $EP = r(\cos u - \cos m)$ dieß

$CB : EC = \text{Sin tot} : \text{Cos } BCE = r : EC = 1 : \cos m$; $EC = r\cos m$ in obiger Gleichung substituirt, gibt:

$v = \sqrt{2gr(\cos u - \cos m)}$ ist $u = m$ oder $= -m$, ~~so ist~~ daß heißt, kömmt der schwere Körper ~~nach~~

B oder D so wird $v=0$, ist $u=0$ oder der schwere Körper in A, so ist: $v=\sqrt{2rg\,\sin.\mathrm{vers.}\,m}$ wird endlich $u=\pi-u$, dass heisst wird der Bogen AN = AM, oder ist der schwere Körper in N so ist seine Geschwindigkeit: $v=\sqrt{2gr(\cos.\pi-u-\cos m)}=\sqrt{2gr(\cos u-\cos m)}$ genau so gross als in M was zu beweisen war.

---

22 Seite 146 Dass die Beschleinigung der Schwere $=\frac{1}{2}g$ sey, wenn letztere selbst g ist, folgt aus dem Fundamental Gesetze für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, dass die Beschleunigung stets der Hälfte der Kraft gleich sey unmittelbar; denn es ist:
$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ also $g=\frac{\pi^2 r}{t^2}$ und $\frac{1}{2}g=\frac{\pi^2 r}{2t^2}$ beym Secundenpendel ist $t=1''$, also ist die Beschleunigung der Schwere in $1''=\frac{1}{2}\pi^2 r$.

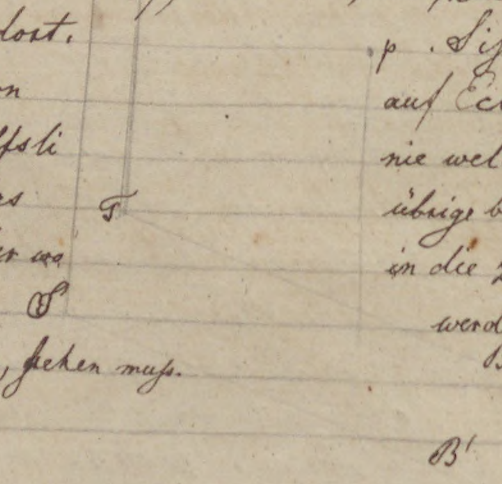
---

23. Seite 147 Die Entwickelung der Ausdrücke für die jährliche Parallaxe der Fixsterne findet man vollständig in diesem Buche unter No (56); jene für die Aberration aber ebenfalls hier unter No (63.)

24: Seite 128 Dort sagt der Verfasser, das vermöge der Theorie der Parallaxe, in den Quadraturen, die beobachtete Breite eines Fixsterns dieselbe sey, die man aus der Sonne sehen würde, d.h. mit andern Worten, in den Quadraturen meint er, verschwindet die Parallaxe der Breite.
Diess ist unrichtig, ~~um diess zu beweisen ist die Parallaxe der Breite:~~
$\cancel{\beta'-\beta=Q\sin(\beta-\varepsilon)+\frac{1}{2}Q^2\sin 2(\beta-\varepsilon)}$ ~~wo~~ $\cancel{Q=\frac{\sin\ldots}{\sin\varepsilon},\ \lg\varepsilon=\frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\cos(\ldots)}\lg\beta}$ ~~ist.~~
denn nur in dem Falle wenn die Entfernung des Sterns von der Erde und Sonne gleich gross ist, kann diess der Fall seyn, bey Fixsternen z. B. ist es der Fall.

---

25 Seite 164 Die dort befindlichen Ausdrücke der Parallaxe (des Unterschiedes des heliocentr. und geoc. Ortes. findet man unter No (57) entwickelt, nur, zeichne ich hier eine richtigere, und bessere Figur als dort.

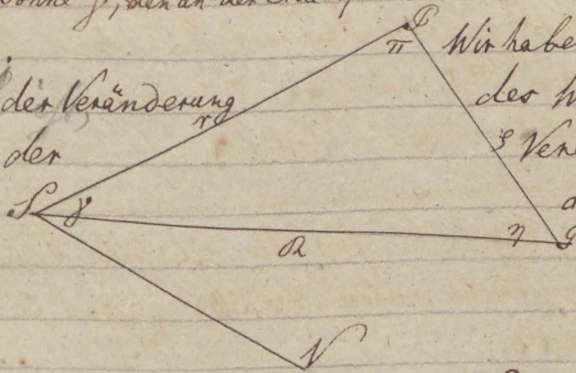


Erde, und p der schon
TB, SB' aber die Hülfsli
Winkel N macht; das
verständlich. Dort aber ...
u, und n eingeführt
λ, dort überall, r, b, r, stehen muss.

S ist hier der Ort der Sonne T jener der
auf Ecliptik projicirte Ort des Sternes,
nie welche mit der Axe der x und ξ den
übrige bleibt wie (No 57) und ist ohnediess
in die zuerst entwickelten Formeln die Grössen
werden ist gefehlt, indem statt ξ, β,

26. Seite 165 Der Ausdruck der die Synodische Revolution aus der tropischen gibt, folgt unmittelbar aus dem pag in diesem Buche entwickelten Ausdruck $S = \frac{\vartheta T}{\vartheta - T}$

27 Seite 165 Um den Ort des geocentrischen Stillstandes des Planeten zu finden, wo wir zur Vereinfachung der Aufgabe die Bahn desselben ~~…~~ vollkommen kreisförmig, und als in der Ecliptik liegend voraussetzen, verzeichne man sich das geradlinige Dreyeck SPT zwischen der Sonne, Erde, und dem Planeten, nenne den Winkel an der Sonne γ, den an der Erde η und den am Planeten π, ferner sollen die Seiten $ST = R$, $SP = r$, $PT = \rho$ seyn.



Wir haben nach unten $\frac{d\pi}{d\eta} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$.

Nun ist $d\pi$ = der Veränderung des Winkels π oder da die Sonne stets unbeweglich ist = der Veränderung der Länge der Erde $= dL$; und aus demselben Grunde $d\eta = dL$.

Ist aber N die Nachtgleichenlinie, so ist auch $\gamma = l - L$, $\pi = \lambda - l$, und $\eta = 180° - l + L - \lambda + l = 180° - \lambda - L$.

In diesem Dreyecke ist: $r : R = Sin\,\eta : Sin\,\pi$ also $\frac{R}{r} = \frac{Sin\,\pi}{Sin\,\eta}$; oder auch:

$r\, Sin\,\pi = R\, Sin\,\eta$, oder um die Bewegung des Planeten zu erhalten, differencirt:

$r \cos\pi\, d\pi = R\cos\eta\, d\eta$ oder $\frac{d\pi}{d\eta} = \frac{R\cos\eta}{r\cos\pi}$, hierin den Werth $\frac{R}{r}$ gesetzt gibt: $\frac{d\pi}{d\eta} = tg\,\pi\, Cotg\,\eta$

~~Da aber $\pi = \lambda - l$ und $\eta = 180° - \lambda - L$ ist, so ist: $\frac{d\pi}{d\eta} = \frac{d(\lambda - l)}{d(180° - \lambda - L)} = \frac{d\lambda - dl}{-dL - d\lambda}$ also auch: $\frac{d\lambda - dl}{-dL - d\lambda} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$. Da aber π auch gleich $180°$ … ist, also $d\pi$ … $dL + d\lambda$ … ist auch: $\frac{d\lambda - dl}{-dL + d\lambda} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$. Da nun wenn der Stillstand statt für den Ort $d\lambda = 0$ seyn muss, so ist für den Stillstand: $\frac{-dl}{-dL} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$ oder $\frac{dl}{dL} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$.~~ Siehe oben

Ist aber t, die Umlaufszeit der Erde, ϑ jene des Planeten, ferner a der Halbmesser der Planetenbahn in Theilen des zur Einheit angenommenen Halbmessers der Erdbahn, so ist nach Keplers drittem Gesetze: $t^2 : \vartheta^2 = 1 : a^3$ also $t^2 = \vartheta^2 a^3$ und $1 = \frac{\vartheta^2}{t^2} a^3$ oder $\frac{\vartheta}{t} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$. Da nun die Bahn als ein Kreis, also die Bewegung des Planeten vollkommen gleichförmig vorausgesetzt wird, so wird sicher $\frac{t}{\vartheta} = \frac{dl}{dL}$ seyn. Daher ist also auch: $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = tg\,\pi\, Ctg\,\eta$, und folglich für den Stillstand:

$tg\,\eta = tg\,\pi . a^{\frac{3}{2}}$. * Diess ist die erste Methode.

Was auch N für eine Grösse seyn mag, so geben die Gleichungen der Parallaxe zwischen dem heliocentrischen und Geocentrischen Orte des Planeten, immer die Gleichung:

$$tg(\lambda - N) = \frac{a\, Sin(l-N) - Sin(L-N)}{a\, Cos(l-N) - Cos(L-N)}$$ Differenzieren wir diese Gleichung, und bemerken, dass für den Stillstand $d(\lambda - N) = 0$ ist, so erhalten wir:

$0 = \{a\, Cos(l-N) - Cos(L-N)\}(a\, Cos(l-N)\, d(l-N) - Cos(L-N)\, d(L-N)) + \{a\, Sin(l-N) - Sin(L-N)\}(-a\, Sin(l-N)\, d(l-N) + Sin(L-N)\, d(L-N))$

daher auch $\{a\, Cos(l-N) - Cos(L-N)\}\{a\, Cos(l-N)\, d(l-N) - Cos(L-N)\, d(L-N)\} = \{a\, Sin(l-N) - Sin(L-N)\}\{-a\, Sin(l-N)\, d(l-N) + Sin(L-N)\, d(L-N)\}$

oder $\{a^2 \cos^2(L-N)\, d(l-N) - a\cos(L-N)\cos(l-N)\, d(l-N) + \cos^2(L-N)\, d(L-N) - a\cos(L-N)\cos(l-N)\, d(L-N)\}$
$= \{a \sin(l-N)\sin(L-N)\, d(L-N) - \sin^2(L-N)\, d(L-N) + a^2 \sin^2(l-N)\, d(l-N) + a\sin(L-N)\sin(l-N)\, d(l-N)\}$.

dass heisst:

$a\, d(l-N)\{a\cos^2(l-N) - \cos(L-N)\cos(l-N) + a\sin^2(l-N) - \sin(L-N)\sin(l-N)\}$
$= d(L-N)\{\cos^2(L-N) - a\cos(L-N)\cos(l-N) - a\sin(l-N)\sin(L-N) + \sin^2(L-N)\}$ oder die Glieder reduzirt:

$a\, d(l-N)\{a - \cos(L-l)\} = d(L-N)\{1 - a\cos(L-l)\}$ also: $\frac{a\, d(l-N)}{d(L-N)} = -\frac{(1-a\cos(L-l))}{(a-\cos(L-l))}$;

dass heisst weil $L-l=\gamma$ ist:

$\frac{a\, d(l-N)}{d(L-N)} = -\frac{(1-a\cos\gamma)}{a-\cos\gamma}$, es ist aber $\frac{d(l-N)}{d(L-N)} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ also auch $\frac{a}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\cos\gamma - 1}{a-\cos\gamma}$ hieraus folgt:

$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a\cos\gamma - 1}{a-\cos\gamma}$ also $a - \cos\gamma = a^{\frac{3}{2}}\cos\gamma - a^{\frac{1}{2}}$ daher $\cos\gamma(1+a^{\frac{3}{2}}) = a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})$ also:
$\cos\gamma = \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$. (I)

Aus der Gleichung:

$$tg(\lambda - N) = \frac{a\sin(l-N) - \sin(L-N)}{a\cos(l-N) - \cos(L-N)}$$ folgt wenn man zuerst $N=L$, dann $N=l$ setzt:

$tg(\lambda - L) = \frac{a\sin(l-L)}{a\cos(l-L) - 1}$; $tg(\lambda - l) = \frac{-\sin(L-l)}{a-\cos(L-l)}$; setzt man statt $L-l$, $l-L$, $\lambda-l$, $\lambda-L$, ihre Werthe so ist:

$-tg\eta = \frac{a\sin\gamma}{a\cos\gamma - 1}$ und $-tg\pi = \frac{-\sin\gamma}{a-\cos\gamma}$ oder:

$$tg\pi = \frac{\sin\gamma}{a-\cos\gamma}\ ;\ tg\eta = \frac{a\sin\gamma}{1-a\cos\gamma} \quad \text{(II)} *$$

Um η zu finden ist: $tg\eta = \frac{a\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{1-a\cos\gamma}$ oder für $\cos\gamma$ seinen Werth gesetzt, gibt; erstens für den Zähler:

$a\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{a}{1+a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(1+a^{\frac{3}{2}})^2 - a(1+a^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{a}{1+a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(1+a^{\frac{3}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}}+a)^2} = \frac{a}{1+a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+a^3+2a^{\frac{3}{2}} - a - a^2 - 2a^{\frac{3}{2}}}$
$= \frac{a}{1+a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+a^3-a-a^2}$

Und für den Nenner:

$1 - a\cos\gamma = 1 - \frac{a \cdot a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{(1+a^{\frac{3}{2}})} = \frac{1+a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} - a^2}{(1+a^{\frac{3}{2}})} = \frac{1-a^2}{(1+a^{\frac{3}{2}})}$ also der ganze Bruch, oder:

$tg\eta = \frac{a\sqrt{1+a^3-a-a^2}}{1-a^2} = \frac{a\sqrt{1-a-a^2(1-a)}}{} = \frac{a\sqrt{1-a(1-a^2)}}{1-a^2} = \frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1-a^2}}{1-a^2} = \frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}\sqrt{1+a}}$ oder
$tg\eta = \frac{a}{\sqrt{1+a}}$ ** Diess ist die zweyte Methode, man kann wenn man eben so in der Gleichung für $tg\pi$ den Werth von $\cos\gamma$ setzt, und endlich die Tangente von γ durch ihren Cosinus ausdrukt, auch die für den Stillstand stattfindenden Werthe von π und γ ausgedrükt durch den Halbmesser der Planetenbahn erhalten.

Es ist auch $\frac{(l-N)}{(L-N)} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$, daraus folgt: $L-N = a^{\frac{3}{2}}(l-N)$ und $l-N = \frac{(L-N)}{a^{\frac{3}{2}}}$. Substituirt man diese Werthe wechselweise in der Gleichung:

$\cos\gamma = \cos(l-L) = \cos((l-N)+(L-N)) = \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$, so erhalt man:

$$\operatorname{Cos}\left\{(l-N)-(l-N)a^{\frac{3}{2}}\right\} = \operatorname{Cos}\left\{(1-a^{\frac{3}{2}})(l-N)\right\} = -\frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$ und:

$$\operatorname{Cos}\left\{\frac{L-N}{a^{\frac{3}{2}}}-(L-N)\right\} = \operatorname{Cos}\left\{\frac{(1-a^{\frac{3}{2}})(L-N)}{a^{\frac{3}{2}}}\right\} = -\frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$; welche beyden Gleichungen die heliocentrische Bewegung des Planeten, und der Erde für die Zwischenzeit von der Conjunction bis zum Stillstande, geben, wenn N den Punct der Ekliptik bezeichnet, für welche die Conjunction statt hat. Um für dieselbe Zwischenzeit auch die geocentrische Bewegung des Planeten zu finden, wird man bloss die so gefundenen Werthe von $(l-N)$ und $(L-N)$ in der Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\lambda-N) = \frac{a\operatorname{Sin}(l-N)-\operatorname{Sin}(L-N)}{a\operatorname{Cos}(l-N)-\operatorname{Cos}(L-N)}$$ zu substituieren brauchen.

---

28. Seite 196

Es sey AMP die kreisförmige Planetenbahn, C der Mittelpunct derselben, die Sonne ausser dem Mittelpuncte in S, man kennt die Seiten $CM = CP = CA = a$, und $CS = a\varepsilon$, und den Winkel: $MCP = m$. Es ist der Winkel $MSP = v$, und der Radius vector $SM = r$ zu suchen:
In dem Dreyecke MCS hat man, $CM = a$, $CS = a\varepsilon$, $MCP = m$ und $MSC = 180° - v$; da zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind, so erhält man den dritten Winkel nach der Fundamentalformel der ebenen Trigonometrie unmittelbar; für den Winkel v:

$$-\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{Sin} m}{\varepsilon - \operatorname{Cos} m} \text{ oder } \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{Sin} m}{\operatorname{Cos} m - \varepsilon}$$; und den Radius vector des Planeten eben so unmittelbar nach einer Fundamentalformel der ebenen Trigonometrie:

$$r = \sqrt{a^2 + a^2\varepsilon^2 - 2a^2\varepsilon\operatorname{Cos} m} = a\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\operatorname{Cos} m}.$$

Diese beyden Gleichungen kann man nun in Reihen entwikeln; wenn man die 3ten Potenzen von ε vernachlässigt, so ist; für r

$$r = a(1+\varepsilon^2-2\varepsilon\operatorname{Cos} m)^{\frac{1}{2}} \text{ oder } \frac{r}{a} = (1+\varepsilon(\varepsilon-2\operatorname{Cos} m))^{\frac{1}{2}}$$; diese Potenz nach dem binomischen Lehrsatz entwikelt gibt:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-2\operatorname{Cos} m) - \frac{1}{8}\varepsilon^2(\varepsilon-2\operatorname{Cos} m)^2 + \text{etc}$$ dass heisst: $\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon\operatorname{Cos} m - \frac{1}{8}\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 4\varepsilon\operatorname{Cos} m - 4\operatorname{Cos}^2 m)$

d. h. $\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon\operatorname{Cos} m - \frac{4}{8}\varepsilon^2\operatorname{Cos}^2 m = 1 - \varepsilon\operatorname{Cos} m + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\operatorname{Cos}^2 m)$; es ist aber allgemein:
$\operatorname{Cos}^2 m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Cos} 2m$ also auch:

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\operatorname{Cos} m + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Cos} 2m\right) = 1 - \varepsilon\operatorname{Cos} m + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Cos} 2m\right)$$ oder endlich:

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\operatorname{Cos} m + \frac{1}{4}\varepsilon^2(1-\operatorname{Cos} 2m) *$$

Die Entwicklung von $\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{Sin} m}{\operatorname{Cos} m - \varepsilon}$ wird Nro (29.2) nachgetragen.

Die dort gegebene Gleichung für die Elipse findet man folgender Massen: Wenn die beyden Brennpuncte S und S' und die grosse Axe $= 2a$ ist, so ist sicher: $SM + S'M = 2a$. Nun ist in dem rechtwinkligten Dreyeke $S'MS'$:

$S'M^2 = SM^2 + SS'^2 - 2MS \cdot SS' \operatorname{Cos} MSS'$; da aber $SM = r$, also $S'M = 2a - r$, $SS' = 2a\varepsilon$ und $MSS' = 180^\circ - v$ ist, so ist auch:

$(2a-r)^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4a\varepsilon r \operatorname{Cos} v$ oder $4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ar\varepsilon \operatorname{Cos} v$ dass heisst:

$4a(1+\varepsilon \operatorname{Cos} v)r = 4a^2 - 4a^2\varepsilon^2$ oder $r = \frac{4a^2(1-\varepsilon^2)}{4a(1+\varepsilon \operatorname{Cos} v)} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v}$. Für $v = 90^\circ$ ist $r = a(1-\varepsilon^2)$ gleich dem Lothe im Brennpunkte auf die grosse Axe gezogen, also gleich dem Parameter der Elipse $= p$ und daher ist auch: $r = \frac{p}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v}$ eine 2te Gleichung für die Elipse. Ist ε grösser als die Einheit, so ist. $r = \frac{p}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v}$ wo $p = (\varepsilon^2 - 1)a$ ist, die Gleichung für die Hyperbel, und ist $\varepsilon = 1$, so ist:

$r = \frac{p}{1+\operatorname{Cos} v} = \frac{p}{2\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} v} = \frac{\frac{1}{2}p}{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} v}$ die Gleichung für die Parabel.

29 Seite 196 Unter No 28 haben wir um die wahre Anomalie aus der mittleren in der Hypothese des excentrischen Kreises zu bestimmen, die Gleichung entwikelt:

$\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{Sin} m}{\operatorname{Cos} m - \varepsilon}$. Diese Gleichung nun, soll in eine Reihe entwikelt werden. Dazu bemerke man, dass diese Gleichung auch eine Form der Nepperschen Gleichung ist. Denn die allgemeine Form der Nepperschen Gleichung ist: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} y$

Diese kann aber auch so ausgedrükt werden: Es ist:

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2} y}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \operatorname{tg} \frac{1}{2} y}$ (Nach den Grundformeln der Trigonometrie). Es ist aber $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} y$

und $\frac{a-1}{a+1} = b$ also $a = \frac{1+b}{1-b}$ und daher $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{1+b}{1-b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} y$, substituiren wir diesen Werth in der obigen Gleichung so ist: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{\frac{1+b}{1-b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} y + \operatorname{tg} \frac{1}{2} y}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y \left(\frac{1+b}{1-b}\right)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} y (1+b+1-b)}{1-b - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y (1+b)}$

$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} y}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y - b(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y)} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} y}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y - b \operatorname{Sec}^2 \frac{1}{2} y}$

$= \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} y \operatorname{Cos} \frac{1}{2} y}{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} y - \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} y - b} = \frac{\operatorname{Sin} y}{\operatorname{Cos} y - b}$ * Vergleichen wir nun unsere Gleichung mit: dieser jetzt entwikelten, so ist: $\frac{1}{2}(x+y) = v$, $y = m$ und $b = \varepsilon$. ~~Ist~~ Die Neppersche Gleichung ist aber in folgende Reihe entwikelt:

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y + b\sin y + \frac{1}{2}b^2\sin 2y + \frac{1}{3}b^3\sin 3y + ---$ In unserem Falle aber, da wir $\frac{1}{2}(x+y) = v$, und $y = m$ gesetzt haben, ist $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}m = v$ also $\frac{1}{2}x = v - \frac{1}{2}m$ und daher diese Reihe gleich:

$v - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \varepsilon\sin m + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin 2m + \frac{1}{3}\varepsilon^3\sin 3m$, oder wenn man die 3ten Potenzen von ε vernachlässigt:

$v = m + \varepsilon\sin m + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin 2m$, welches die gesuchte Reihe ist.

---

30 Seite 198 Um die dortige Reihe: $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos m - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos(2m-1) - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2}(3\cos 3m - 3\cos m) - \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.2^3}\left(4.2^2\cos 4m - 4.2^2\cos 2m\right)$ zu finden, müssen wir erst, das Lagrangesche Theorem vorausschiken.

Es sey also φx eine Function von x, und zwischen den drey veränderlichen Grössen x, y, z folgende Gleichung vorgegeben $x = y + z\varphi x$, man soll φx durch die Grössen y, z ausdrüken:

Weil $x = y + z\varphi x$ ist so ist auch $\varphi x = \varphi(y + z\varphi x)$ also nach Taylors Lehrsatz:

$$\varphi x = \varphi y + z\varphi x\frac{d\varphi y}{dy} + z^2(\varphi x)^2\frac{d^2\varphi y}{1.2\,dy^2} + z^3(\varphi x)^3\frac{d^3\varphi y}{1.2.3\,dy^3} + ---$$

oder auch wenn $\frac{d\varphi y}{dy} = Y'$, $\frac{d^2\varphi y}{1.2.dy^2} = Y''$ -- gesetzt wird:

$\varphi x = \varphi y + Y'z\varphi x + z^2(\varphi x)^2 Y'' + z^3(\varphi x)^3 Y''' + ---$ (I) Wenn man die Reihe umkehrt, so erhält man für φx folgende nach den Potenzen von z fortgehende Reihe:

$\varphi x = A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + A''''z^4 + ---$ Entwikelt man die Potenzen von φz, und setzt die Coefficienten von $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc $= B, C, D$ --- so erhält man:

$$(\varphi x)^2 = B + B'z + B''z^2 + B'''z^3 + B''''z^4 + ---- = A^2 + (A')^2z^2 + (A'')^2z^3 + -- + 2AA'z + 2A'A''z^3 + 2A''A'''z^4 --$$
$$(\varphi x)^3 = C + C'z + C''z^2 + C'''z^3 + C''''z^4 + ---- = A^3 + (A')^3z^3 + (A'')^3z^6 + -- + 3A^2A'z + -- + 3(A')^2z^2A + ---$$
$$(\varphi x)^4 = D + D'z + D''z^2 + D'''z^3 + D''''z^4 + --- = D^4 + (D')^4z^4 + -- + ---$$

so dass also die Factoren B, C, D, B', C', D' etc. also durch A, A', A'' etc ausgedrükt sind, so ist:

z. B. $B = A^2$, $B' = 2AA'$, $B'' = (A')^2 + 2AA''$ etc.

$C = A^3$, $C' = 3A^2A'$

$D = A^4$ etc. Substituirt man nun diese Werthe von φx, φx^2 etc. in der Gleichung (I) so ist:

$$\varphi x = \varphi y + AY'z + \left.\begin{matrix} A'Y' \\ +BY'' \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} A''Y' \\ +B''Y'' \\ +C''Y''' \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} A'''Y' \\ +B''Y'' \\ +C''Y''' \\ +DY'''' \end{matrix}\right\} z^4 + \text{etc.} -- = A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.}$$

Vergleicht man nun die zu einerley Potenzen von z gehörenden Coefficienten, so findet man:

$A = Y = \varphi y$

$A' = AY' = \varphi y.\frac{d\varphi y}{dy}$

$A'' = A'Y' + BY'' = \varphi y.\frac{d\varphi y}{dy}.\frac{d\varphi y}{dy} + (\varphi y)^2.\frac{d^2\varphi y}{1.2\,dy^2} = \frac{d(\varphi y)^2}{1.2.dy}.\frac{d\varphi y}{dy} + \frac{(\varphi y)^2}{1.2.}.\frac{d^2\varphi y}{dy^2} --$

$= \frac{d\left((\varphi y)^2.\frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.dy}$ eben so findet man $A''' = \frac{d^2\left((\varphi y)^3.\frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2.dy^2}$ u. s. w., so dass das Allgemeine Glied der Reihe ist: $\frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2..n.dy^{n-1}} = A^n$.

Nun soll man aus der vorgegebenen Gleichung: $x = y + z\varphi x$, jede andere Function fx von x durch y und z ausdrüken.

Jetzt wird $fx = f(y + z\varphi x)$ also nach Taylors Lehrsatz:

$$fx = fy + z\varphi x \frac{dfy}{dy} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{d^2fy}{2dy^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{d^3fy}{2.3dy^3} + etc.$$

Substituirt man nun auch hier die vorhin gefundenen Werthe von $\varphi x, (\varphi x)^2$ etc.

so ist, wenn man noch: $fy = \eta$, $\frac{dfy}{dy} = \eta'$, $\frac{d^2fy}{2dy^2} = \eta''$, etc. setzt:

$$fx = \eta + A\eta' z + \left.\begin{matrix}A'\eta'\\ B'\eta''\end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix}A''\eta'\\ B'\eta''\\ C\eta'''\end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix}A'''\eta'\\ +B''\eta''\\ +C'\eta'''\\ +D\eta\end{matrix}\right\} z^4 + etc.$$

— substituirt man nun weiter für A, A', A'' die vorhin gefundenen Werthe,

so ist:

$\eta = fy$

$A\eta = \varphi y \cdot \frac{dfy}{dy}$

$A'\eta' + B\eta'' = \varphi y \frac{d\varphi y}{dy} \cdot \frac{dfy}{dy} + (\varphi y)^2 \cdot \frac{d^2fy}{1.2\,dy^2} = \frac{d(\varphi y^2)}{1.2.dy^2}\,dfy + (\varphi y)^2 \cdot \frac{d^2fy}{1.2.dy^2} = \frac{d\left((\varphi y)^2 \cdot \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.dy}$

durch weitere Rechnung findet man:

$A''\eta' + B'\eta'' + C\eta''' = \frac{d^2\left((\varphi y)^3 \cdot \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3.dy^2}$ also:

$$fx = fy + \varphi y \cdot \frac{dfy}{dy} z + \frac{d\left((\varphi y)^2 \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.dy} z^2 + \frac{d^2\left((\varphi y)^3 \cdot \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3.dy^2} z^3 - - - \frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \cdot \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2..n\,dy^{n-1}} z^n . (I)$$

---

31 Ebenfalls vorausschicken muss man auch noch die Entwikelung der Potenzen der Cosinusse ausgedrükt, durch die Cosinusse der vielfachen Bogen.

Es ist: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ und $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; setzen wir hierin statt x, nx und statt y, x, so ist:

$\left.\begin{matrix}\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x\\ \cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x\end{matrix}\right\}$ (I.) Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit einer willkührlichen Grösse t, und gibt die zweyte dazu, so ist:

$\cos(n+1)x + t\sin(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x + t\sin nx \cos x + t\cos nx \sin x$

$= (\cos x + t\sin x)\cos nx + (\cos x - \frac{1}{t}\sin x) \cdot t\sin nx$

Setzt man $t = \sqrt{-1}$, so ist $\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$ also $-\frac{1}{t} = +\sqrt{-1}$ daher:

$\cos(n+1)x + \sqrt{-1}\sin(n+1)x = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\cos nx + (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\sqrt{-1}\sin nx$

Setzt man hierin statt n, nach der Reihe, 1, 2, 3, etc, so ist:

$\cos 2x + \sin 2x\sqrt{-1} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\cos x + (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\sqrt{-1}\sin x$

$= \cos^2 x + \sin x \cos x\sqrt{-1} + \sin x \cos x\sqrt{-1} + \sin^2 x = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^2$ eben so für $n = 2$

$\cos 3x + \sin 3x\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^3$, für $n = 4$ $\cos 4x + \sin 4x\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^4$ also allgemein für jede ganze positive Zahl n

$$\cos nx + \sin nx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^n \; *$$

Zieht man aber die erste mit $\sqrt{-1}$ zu multiplicirende Gleichung der Gleichungen (I.) von der zweyten ab, so ist: $\cos(n+1)x - \sqrt{-1}\sin(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x - \sin nx \cos x\sqrt{-1} - \cos nx \sin x\sqrt{-1}$

Hierin $n=1, =2, =3$, etc. gesetzt, gibt; für $n=1$

$\mathrm{Cos}\,2x - \mathrm{Sin}\,2x\sqrt{-1} = \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x\sqrt{-1} - \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1} = (\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^2$ für $n=2$, $\mathrm{Cos}\,3x - \mathrm{Sin}\,3x\sqrt{-1} = (\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^3$ für $n=3$, $\mathrm{Cos}\,4x - \mathrm{Sin}\,4x\sqrt{-1} = (\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^4$ also allgemein

(II) $\mathrm{Cos}\,nx \pm \mathrm{Sin}\,nx\sqrt{-1} = (\mathrm{Cos}\,x \pm \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^n$, wo n jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Ist nun:

$\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1} = a$
$\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1} = b$ so ist: $2\,\mathrm{Cos}\,x = a+b$, und $ab = 1$. wird nun $(a+b)$ zur $n$ten Potenz erhoben

so ist nach dem Binomialtheorem:

$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + n_2 b^{n-2} a^2 + n_1 b^{n-1} a + b^n$, setzt man nun überall $ab=1$

so ist: $(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-2} + n_2 a^{n-4} + n_3 a^{n-6} + \ldots + n_3 b^{n-6} + n_2 b^{n-4} + n_1 b^{n-2} + b^n$; setzt man nun statt a, b, ihre entsprechenden Werthe, so ist:

$2^n \mathrm{Cos}^n x = (\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^n + n_1(\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots + n_1(\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^{n-2} + (\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\sqrt{-1})^n$.

oder nach der Gleichung (II) deren Richtigkeit man auch für jeden andern gebrochenen, positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Werth von n beweisen kann:

$2^n \mathrm{Cos}^n x = (\mathrm{Cos}\,nx + \mathrm{Sin}\,nx\sqrt{-1}) + n_1(\mathrm{Cos}(n-2)x + \mathrm{Sin}(n-2)x\sqrt{-1}) + \ldots + n_1(\mathrm{Cos}(n-1)x - \mathrm{Sin}(n-1)x\sqrt{-1}) + (\mathrm{Cos}\,nx - \mathrm{Sin}\,nx\sqrt{-1})$

addirt man die von beyden Enden der Reihe gleichweit abstehenden Glieder, so ist:

$2^n \mathrm{Cos}^n x = 2\,\mathrm{Cos}\,nx + 2n_1 \mathrm{Cos}(n-2)x + 2n_2 \mathrm{Cos}(n-4)x +$ etc. oder wenn die Gleichung mit 2 dividdirt wird:

$2^{n-1}\mathrm{Cos}^n x = \mathrm{Cos}\,nx + n_1 \mathrm{Cos}(n-2)x + n_2 \mathrm{Cos}(n-4)x + n_3 \mathrm{Cos}(n-6)x +$ etc. (III)

---

32. Seite 198 Jetzt nachdem wir die Entwikelung der Gleichungen (I)° (II)° voraus geschikt haben, wird die Entwikelung von $\frac{r}{a}$ in eine unendliche Reihe nicht mehr schwer werden.

Wir haben die Gleichungen: $u = m - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u$ und $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u$. Vergleichen wir diese Gleichungen mit der Gleichung $x = y + z\varphi x$, so ist: $x = u$, $y = m$, $z = \varepsilon$, $\varphi = \mathrm{Sin}$; und in der zweyten $f = \mathrm{Cos}$. also auch nach der Gleichung (I)°:

$$\mathrm{Cos}\,u = \mathrm{Cos}\,m + \mathrm{Sin}\,m.\frac{d\,\mathrm{Cos}\,m}{dm}\varepsilon + \frac{d\left(\mathrm{Sin}^2 m.\frac{d\,\mathrm{Cos}\,m}{dm}\right)}{1.2.\,dm}\varepsilon^2 + \frac{d^2\left(\mathrm{Sin}^3 m.\frac{d\,\mathrm{Cos}\,m}{dm}\right)}{1.2.3.\,dm^2}\varepsilon^3 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{Cos}\,m - \varepsilon\,\mathrm{Sin}^2 m - \frac{d\,\mathrm{Sin}^3 m}{1.2.\,dm}.\varepsilon^2 - \frac{d^2\,\mathrm{Sin}^4 m}{1.2.3.\,dm^2}.\varepsilon^3 - \text{etc. also auch:}$$

$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\,\mathrm{Cos}\,m + \varepsilon^2\mathrm{Sin}^2 m + \frac{\varepsilon^3}{2}.\frac{d\,\mathrm{Sin}^3 m}{dm} + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3}.\frac{d^2\,\mathrm{Sin}^4 m}{dm^2} +$ etc so dass das allgemeine Glied der Reihe ist: $\frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n-1}.\frac{d^{n-2}\,\mathrm{Sin}^n m}{dm^{n-2}}$. Nun ist aber nach der Gleichung (II)°:

$2^{n-1}\mathrm{Cos}^n x = \mathrm{Cos}\,nx + n_1 \mathrm{Cos}(n-2)x + n_2 \mathrm{Cos}(n-4)x + n_3 \mathrm{Cos}(n-6)x$ etc. also auch; da:

$d\,\mathrm{Cos}\,nx = -n\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx$
$d^2\mathrm{Cos}\,nx = -n^2\mathrm{Cos}\,nx\,dx^2$
$d^3\mathrm{Cos}\,nx = +n^3\mathrm{Sin}\,nx\,dx^3$
$d^4\mathrm{Cos}\,nx = +n^4\mathrm{Cos}\,nx\,dx^4$
$d^5\mathrm{Cos}\,nx = -n^5\mathrm{Sin}\,nx\,dx^5$
$d^6\mathrm{Cos}\,nx = -n^6\mathrm{Cos}\,nx\,dx^6$
$d^7\mathrm{Cos}\,nx = +n^7\mathrm{Sin}\,nx\,dx^7$
$d^8\mathrm{Cos}\,nx = +n^8\mathrm{Cos}\,nx\,dx^8$

ist, wenn $(n-2)$ eine gerade Zahl ist; ~~das obere Zeichen wenn n die Form~~

$$\frac{2^{n-1}d^{n-2}\mathrm{Cos}^n x}{dx^{n-2}} = \pm n^{n-2}\mathrm{Cos}\,nx + n_1 (n-2)^{n-2}\mathrm{Cos}(n-2)x + \ldots$$

und wenn $(n-2)$ ungerade ist, so ist:

$$\frac{2^{n-1}d^{n-2}\mathrm{Cos}^n x}{dx^{n-2}} = \pm n^{n-2}\mathrm{Sin}\,x + n_1 (n-2)^{n-2}\mathrm{Sin}(n-2)x + n_2 (n-4)^{n-2}\mathrm{Sin}(n-4)x + \ldots$$

und zwar für ein gerades ~~n~~ gilt das obere Zeichen wenn $(n-2)$ die Form hat: $2(2p)$

das untere " " " " " " $2(2p+1)$

und für ein ungerades $(n-2)$ gilt das obere Zeichen wenn $(n-2)$ die Form hat: $2(2p+1)+1$

" " untere " " " " " " : $2(2p)+1$

Setzen wir nun $x = 90^\circ - m$ und nehmen wir einen der vier Werthe z. B. den ~~ersten~~, dritten so ist:

$$\frac{2^{n-1} d^{n-2} \cos^n x}{d x^{n-2}} = \frac{2^{n-1} d^{n-2} \cos^n (90-m)}{d (90-m)^{n-2}} = -\frac{2^{n-1} d^{n-2} \sin^n m}{d m^{n-2}} = n^{n-2} \sin n(90-m) + n_1 (n-2)^{n-2} \sin (n-2)(90-m) + n_2 (n-4)^{n-2} \sin (n-4)(90-m) + \text{etc.}$$

Es ist aber da $n-2 = 3, 7, 11, 15$ etc also: $n = 5, 9, 13, 17$ etc ist:

$\sin n(90-m) = \sin 90 n \cos nm - \cos 90 n \sin nm$, ist nun z. B $n = 5$ so ist $\sin 90 n = \sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90 n = 0$ also auch:

$\sin n(90-m) = \cos nm$ eben so wenn man $\sin (n-2)(90-m)$ etc. entwickelt so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \sin (n-2)(90^\circ-m) = -\cos (n-2) m \\ \sin (n-4)(90-m) = +\cos (n-4) m \\ \sin (n-6)(90-m) = -\cos (n-6) m \end{array}\right\}$$

also der Reihe allgemeines Glied:

$$\frac{\varepsilon^n}{1.2..n-1} \cdot \frac{d^{n-2} \sin^n m}{d m^{n-2}} = \frac{\varepsilon^n}{1.2..n-1 . 2^{n-1}} \left\{ n^{n-2} \cos nm - n_1 (n-2)^{n-2} \cos (n-2) m + \cos (n-4) m \, (n-4)^{n-2} n_2 \text{ etc.} \right.$$

So dass man z. B. für $n = 3$ hat:

$-\frac{\varepsilon^3}{1.2.2^2}(3\cos 3m - 3\cos m)$ für $n = 4$ wird: $-\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.2^3}(4^2 \cos 4m - 4 \cos 2m \, 2^2)$ etc. so, dass unsere Reihe wird; da $\sin^2 m$ bekanntlich $= \frac{1}{2}(1-\cos 2m)$ ist:

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1) - \frac{\varepsilon^3}{1.2.2^2}(3\cos 3m - 3\cos m) - \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.2^3}(4^2 \cos 4m - 4.2^2.\cos 2m) - - -$$

oder um es so zu schreiben, wie er es in seiner populären Astronomie thut:

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1) - \frac{\varepsilon^3}{2^3}(3\cos 3m - 3\cos m) - \frac{3\varepsilon^4}{1.2^4}(4^2 \cos 4m - 4.2^2 \cos 2m) \text{ etc.}$$

---

33 Seite 197 Wenn T die Umlaufszeit des Planeten, t die Zeit seit dem Durchgange durch das Perihelium, und m die mittlere Anomalie bezeichnet, so ist $m = 360.\frac{t}{T}$;

und die Gleichung der Ellipse ist: $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$.

Um nun die wahre Anomalie v. aus der mittleren zu bestimmen, sey $\frac{1}{2} f$ die Fläche, welche der Radius vector des Planeten in der Zeit t, und $\frac{1}{2} F$ die Fläche welche er in der Zeit T zurüklegt, so ist nach Keplers zweytem Gesetze:

$\frac{1}{2} f : \frac{1}{2} F = t : T$, also auch: $f = \frac{F}{T}.t$ und $df = \frac{F}{T}.dt$. $\frac{1}{2} F$ ist aber die ganze Fläche der Ellipse $= \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$ wenn die grosse Axe $= a$, die kleine $= a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und die Ludolphische zahl $= \pi$ ist, da ferner $df = r^2 dv$, und $dt = \frac{T}{2\pi}.dm$ ist, so ist wenn diese Werthe in der obigen Gleichung substituirt werden:

$$r^2 dv = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} . \frac{T}{2\pi}.dm = \frac{a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}\, dm}{1}$$ also: $$\frac{dv}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{dm}{r^2}.$$ Es ist aber

$$r^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon)^2 T}{(1+\varepsilon \cos v)^2}$$ also auch: $$\frac{dv}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{dm(1+\varepsilon\cos v)^2}{a^2(1-\varepsilon)^2}$$ oder:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon \cos v)^2}$$ Um diese Gleichung leichter zu integriren,

So kann man da $\cos v = \cos^2\frac{1}{2}v - \sin^2\frac{1}{2}v$ ist, diese Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{\left(1+\varepsilon\left(\cos^2\frac{1}{2}v - \sin^2\frac{1}{2}v\right)\right)^2} = \frac{dv}{\left((1+\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}v + (1-\varepsilon)\sin^2\frac{1}{2}v\right)^2}$$

diese kann aber auch so verwandelt werden, es ist:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{dv}{(1+\varepsilon)^2\cos^4\frac{1}{2}v}}{\left(\frac{(1+\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}v+(1-\varepsilon)\sin^2\frac{1}{2}v}{(1+\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}v}\right)^2} = \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2\cos^4\frac{1}{2}v\left(1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}v\right)^2}$$

nun sey $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}v = tg^2\frac{1}{2}u$

so ist: $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2\cos^4\frac{1}{2}v\sec^4\frac{1}{2}u}$ Nun ist $d\,tg\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,d\,tg\frac{1}{2}v$ nähmlich:

$\frac{\frac{1}{2}du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{\frac{1}{2}dv}{\cos^2\frac{1}{2}v}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ also: $du\sec^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}v = dv\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$

daher: $\sec^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}u = \frac{dv}{du}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$.

Es ist aber auch: $\sec^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}v = \frac{\sec^2\frac{1}{2}u}{1+tg^2\frac{1}{2}v} = \frac{\sec^2\frac{1}{2}u}{1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u} = \frac{(1-\varepsilon)\sec^2\frac{1}{2}u}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u}$

$= \frac{1-\varepsilon}{\cos^2\frac{1}{2}u - \varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u + \sin^2\frac{1}{2}u + \varepsilon\sin^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos u}$ * daher ist auch:

$\sec^4 u\cos^4 v = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos u}\cdot\frac{dv}{du}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \frac{dv(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon\cos u)du}$

$$dm = \frac{dv(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varepsilon)^2\cdot\frac{dv(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon\cos u)du}} = \frac{(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon\cos u)du}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon\cos u)du}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

oder endlich $dm = (1-\varepsilon\cos u)du$ also $m = u - \varepsilon\sin u$ *

Hat man also m aus $m = 360\frac{t}{T}$ gefunden, so erhält man u aus $m = u - \varepsilon\sin u$, dann v aus:

$tg\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{1}{2}u$, und r aus $r = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} = a(1-\varepsilon\cos u)$ **

---

34 Seite 198 Um v durch m in einer Reihe auszudrüken, hat man:

$tg\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{1}{2}u$. Diess ist eine Form der Neppersehen Gleichung, und für welche daher daher die Reihe gilt:

$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u + b\sin u + \frac{1}{2}b^2\sin 2u + \frac{1}{3}b^3\sin 3u + \frac{1}{4}b^4\sin 4u + etc.$ wo $b = \frac{a-1}{a+1}$ ist.

In unserem Falle nun ist $b = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-1}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}+1} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon}}$ oder Zähler und Nenner mit dem Nenner multiplicirt, gibt:

$$\frac{(\sqrt{1+\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon})(\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon})}{(\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon})^2} = \frac{1+\varepsilon-\sqrt{1-\varepsilon^2}+\sqrt{1-\varepsilon^2}-1+\varepsilon}{1+\varepsilon+2\sqrt{1-\varepsilon^2}+1-\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{2(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Aus der obigen Reihe folgt also:

$v = u + 2\Sigma\left(\frac{b^n\sin nu}{n}\right)$; man muss also um v zu entwikeln erst u, dann $\frac{\sin nu}{n}$ und b^n bestimmen.

I Bestimmung von u.

Setzen wir in der Gleichung (I)° Nro 30 $fx = u$ so ist: $fy = m$, $z = \varepsilon$ $\varphi = \sin$ und daher:

$$u = m + \varepsilon\sin m + \frac{d(\sin^2 m)\varepsilon^2}{1.2.dm} + \frac{d^2(\sin^3 m)\varepsilon^3}{1.2.3\,dm^2} + etc. = m + \varepsilon\sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.dm}\,d\sin^2 m + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.dm^2}\,d\sin^3 m$$

also das allgemeine Glied dieser Reihe $= \frac{\varepsilon^n}{1.2.n.dm^{n-1}}\,d^{n-1}\sin^n m$.

Wir fanden aber unter No 32:

$$2^{n-1}\frac{d^{n-2}\sin^n m}{dm^{n-2}} = n^{n-2}\cos nm - n_1(n-2)^{n-2}\cos(n-2)m + n_2(n-4)^{n-2}\cos(n-4)m - + etc.$$

daher $\frac{d^{n-1}\sin^n m}{dm^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\{n^{n-1}\sin nm - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)m + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)m - \text{etc.}$

~~hierin $\varepsilon = 1$ gesetzt giebt~~ daher auch:

$$\frac{\varepsilon^n}{1.2.3.n}\cdot\frac{d^{n-1}\sin^n m}{dm^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{1.2..n.2^{n-1}}\{n^{n-1}\sin nm - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)m + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)m - \text{etc}$$

also ist wenn man hierin nach der Reihe $n = 1, 2, 3, 4,$ etc setzt:

$$u = m + \varepsilon\sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.2^2}(2\sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^3}(3^2\sin 3m - 3\sin m) + + \text{etc.} \quad (\mathfrak{A}).$$

II Für $\sin nu$:

Setzt man in der Formel (I) Nro 30; $f = \sin n$, $x = u$, $y = m$, $z = \varepsilon$, und $\varphi = \sin$ so ist:

$$\sin nu = \sin nm + n\sin m.\frac{d\sin nm}{dm}\varepsilon + \frac{d(\sin^2 m.\frac{d\sin nm}{dm})}{1.2.dm}\varepsilon^2 + - - -$$ dass heisst:

$$\sin nu = \sin nm + n\sin m\cos nm\,\varepsilon + \frac{n\varepsilon^2}{1.2}d(\sin^2 m\cos nm) + \text{etc} -$$ also:

$$\frac{1}{n}\sin nu = \frac{1}{n}\sin nm + \varepsilon\sin m\cos nm + \frac{\varepsilon^2}{2}d(\sin^2 m\cos nm) + \text{etc.} - - \frac{\varepsilon^n}{1.2.n}\frac{d^{n-1}(\sin^n m\cos nm)}{dm^{n-1}}$$

Es ist aber nach Nro 32.

$$2^\pi\cos^\pi x\cos nm = \cos\pi x\cos nm + \pi_1\cos(\pi-2)x\cos nm + \pi_2\cos(\pi-4)x\cos nm + \text{etc.}$$

also ist für $n = 5, 9, 13, 17$ etc und $x = 90 - m$

$$\cos(\pi 90 - \pi m) = \cos 90\pi\cos\pi m + \sin 90\pi\sin\pi m = +\sin\pi m$$

$$\cos(\pi-2)(90-m) = -\cos(90\pi + \pi m - 2m) = -\cos 90\pi\cos(\pi m - 2m) + \sin 90\pi\sin(\pi m - 2m) = -\sin(\pi-2)m$$

$$\cos(\pi-4)(90-m) = +\sin(\pi-4)m\ ;\ \cos(\pi-6)(90-m) = -\sin(\pi-6)m \text{ etc.}$$ also auch:

$$2^\pi\sin^\pi m\cos nm = \sin\pi m\cos nm - \pi_1\sin(\pi-2)m\cos nm + \pi_2\sin(\pi-4)m\cos nm \text{ etc.}$$ oder wenn man die Producte der Sin. Cos nach den bekannten allgemeinen Formeln der Trigonometrie verwandelt:

$$2^\pi\sin^\pi m\cos nm = \tfrac{1}{2}\sin(\pi+n)m + \tfrac{1}{2}\sin(\pi-n)m - \pi_1\{\tfrac{1}{2}\sin(\pi+n-2)m + \tfrac{1}{2}\sin(\pi-n-2)m\} + \pi_2(\tfrac{1}{2}\sin(\pi+n-4)m + \tfrac{1}{2}\sin(\pi-n-4)m) - \pi_3\{\tfrac{1}{2}\sin(\pi+n-6)m + \tfrac{1}{2}\sin(\pi-n-6)m\} + - \text{etc.}$$

also auch:

$$2^{\pi+1}\sin^\pi m\cos nm = \sin(\pi+n)m + \sin(\pi-n)m - \pi_1\{\sin(\pi+n-2)m + \sin(\pi-n-2)m\} + \pi_2\{\sin(\pi+n-4)m + \sin(\pi-n-4)m\} - \pi_3(\sin(\pi+n-6)m + \sin(\pi-n-6)m\} + - \text{etc.}$$

das $\pi-1$te Differenziale dieses Ausdrucks multipliciert mit $\frac{\varepsilon^\pi}{1.2.\pi}$ ist daher:

$$\frac{\varepsilon^\pi d^{\pi-1}\sin^\pi m\cos nm}{1.2..\pi.dm^{\pi-1}} = \frac{\varepsilon^\pi}{1.2...\pi.2^{\pi+1}}\left\{\begin{array}{l}(\pi+n)^{\pi-1}\sin(\pi+n)m + (\pi-n)^{\pi-1}\sin(\pi-n)m \\ -\pi_1\{(\pi+n-2)^{\pi-1}\sin(\pi+n-2)m + (\pi-n-2)^{\pi-1}\sin(\pi-n-2)m\} \\ +\pi_2\{(\pi+n-4)^{\pi-1}\sin(\pi+n-4)m + (\pi-n-4)^{\pi-1}\sin(\pi-n-4)m\} \\ +\pi_3\{(\pi+n-6)^{\pi-1}\sin(\pi+n-6)m + (\pi-n-6)^{\pi-1}\sin(\pi-n-6)m\}\end{array}\right.$$

Setzt man nun hier nach der Reihe für π die Zahlen $0, 1, 2, 3$ etc, und setzt den Werth für $\pi = 0 = \mathfrak{A}^0$, für $\pi = 1 = \mathfrak{A}^1$, für $\pi = 2 = \mathfrak{A}^2$, so ist:

$$\mathfrak{A}^0 = \frac{1}{n}\sin nm$$

$$\mathfrak{A}^1 = \sin(n+1)m - \sin(n-1)m$$

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{2}\{(n+2)\sin(n+2)m - 2n\sin nm + (n-2)\sin(n-2)m\}$$

$$\mathfrak{A}^3 = \frac{1}{1.2.3}\{(n+3)\sin(n+3)m - 3(n+1)^2\sin(n+1)m + 3(n-1)\sin(n-1)m - (n-3)^2\sin(n-3\,m)$$

und so weiter, nämlich allgemein:

$$A^{\pi} = \frac{1}{1.2.3\ldots\pi}\Big\{(\pi+n)^{\pi-1}\sin(\pi+n)m - \pi_1(\pi+n-2)^{\pi-1}\sin(\pi+n-2)m + \pi_2(\pi+n-4)^{\pi-1}\sin(\pi+n-4)m - \text{etc.}\Big\}$$

und $\frac{\varepsilon}{2} = \alpha'$, $\frac{\varepsilon^2}{4} = \alpha^2$ $\frac{\varepsilon^3}{(2)^3} = \alpha^3$, so ist:

$$\tfrac{1}{2}\sin nu = A^0\alpha^0 + A'\alpha' + A^2\alpha^2 + A^3\alpha^3 + \text{etc.} \ldots \quad (B)$$

(III) Endlich kömmt noch b^n zu bestimmen.

Aus der Gleichung

$0 = \frac{\varepsilon^2}{x} + x - 2$ folgt: $2x = \varepsilon^2 + x^2$ oder $x^2 - 2x = -\varepsilon^2$ dass heisst:

$x^2 - 2x + 1 = 1 - \varepsilon^2$ und also: $x - 1 = \sqrt{1-\varepsilon^2}$ daher $x = 1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}$, und weil $b = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ ist, so ist auch: $x = \frac{\varepsilon}{b}$. daher auch: $0 = \varepsilon b + \frac{\varepsilon}{b} - 2$ oder $0 = b^2\varepsilon + \varepsilon - 2b$ oder $0 = b^2\varepsilon + \varepsilon - 2b$. Vergleicht man nun diese Gleichung mit der in No. 3 gegebenen, und setzt f = nte Potenz, so ist: $x = 2b$, $y = \varepsilon$, $z = \varepsilon$ $\varphi = \frac{2\text{te Potenz}}{2}$, ~~und also nach dem Lagrange~~; dividiren wir aber um die Gleichung bequemer zu machen: das Ganze mit 2, und setzen wir $\frac{\varepsilon}{2} = \alpha$, so ist: f = nte Potenz, $x = b$, $y = \alpha$, $z = \alpha$, φ = 2te Potenz, und also nach dem Lagrangeschen Theorem:

$$b^n = \alpha^n + \alpha^2\frac{d\alpha^n}{d\alpha}.\alpha + \frac{d(\alpha^4\frac{d\alpha^n}{d\alpha})\alpha^2}{1.2.d\alpha} + \frac{d^2(\alpha^6.\frac{d\alpha^n}{d\alpha})\alpha^3}{1.2.3.d\alpha^2} + \text{etc. nähmlich:}$$

$$b^n = \alpha^n + n\alpha^2\alpha^{n-1}.\alpha + \frac{d(\alpha^4.n\alpha^{n-1})\alpha^2}{1.2.d\alpha} + \frac{d^2(\alpha^6 n\alpha^{n-1})\alpha^3}{1.2.3\,d\alpha^2} + \text{etc}; \text{ also:}$$

$$b^n = \alpha^n + n\alpha^2\alpha^n + \frac{1}{2}(n(n+3)\alpha^{n+2})\alpha^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2(n\alpha^{n+5})\alpha^3}{d\alpha^2} = \alpha^n + n\alpha^2\alpha^n + \frac{1}{1.2.3}(n(n+5)(n+4)\alpha^{n+3})\alpha^3$$

dass heisst:

$$b^n = \alpha^n\Big\{1 + n\alpha^2 + \frac{n(n+3)}{2}.\alpha^4 + \frac{n(n+5)(n+4)}{1.2.3}\alpha^6 + \frac{n(n+7)(n+6)(n+5)}{1.2.3.4}\alpha^8 + \text{etc}\Big\} \quad (C)$$

Nun da wir alle Werthe in der Gleichung:

$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u + \Sigma\left(\frac{b^n\sin nu}{n}\right)$ schon entwickelt haben, so dürfen wir, um eine allgemeine Formel für v zu erhalten, nur diese Werthe substituiren, was auf folgende Weise geschieht; wenn wieder $\frac{\varepsilon}{2} = \alpha$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\alpha\sin m - \frac{1}{4}\alpha^2\sin 2m + \frac{1}{1.2.3}\alpha^3(3^2\sin 3m - 3\sin m) - + \text{etc.} + \Sigma\left(\frac{b^n\sin nu}{n}\right) \text{ dass heisst:}$$

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}m + \frac{\frac{1}{2}\alpha^n}{1.2\ldots n}\Big\{n^{n-1}\sin nm - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)m + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)m - + \text{etc.}\Big\}$$
$$+\sum^n\Big\{\{A^0\alpha^0 + A'\alpha' + A^2\alpha^2 + A^3\alpha^3 + \text{etc}\} \times \Big\{\alpha^n + n\alpha^{n+2} + \frac{n(n+3)}{1.2}.\alpha^{n+4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\alpha^{n+6} \text{ etc.}\Big\}$$

also:

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}m + \frac{\frac{1}{2}\alpha^n}{1.2\ldots n}\Big\{n^{n-1}\sin nm - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)m + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)m - + \text{etc.}\Big\}$$
$$+\sum^n\begin{cases} \alpha^n A^0 + \alpha^{n+1}A' + \alpha^{n+2}(A^2 + A^0 n) + \alpha^{n+3}(A^3 + A'n) + \alpha^{n+4}(A^4 + nA^2 + A^0\frac{n.n+3}{1.2}) \\ + \alpha^{n+5}(A^5 + A^3 n + A'.\frac{n.n+3}{1.2}) + \alpha^{n+6}(A^6 + A^4 n + A^2\frac{n(n+3)}{1.2} + A^0.\frac{n.n+4.n+5}{1.2.3}) \\ + \alpha^{n+7}(A^7 + A^5 n + A^3\frac{n.n+3}{1.2} . A'\frac{n.n+4.n+5}{1.2.3}) \\ + \alpha^{n+8}(A^8 + A^6 n + A^4\frac{n.n+3}{1.2} + A^2.\frac{n.n+4.n+5}{1.2.3} + A^0\frac{n.n+6.n+7.n+5}{1.2.3.4}) \\ + \alpha^{n+9}(A^9 + A^7 n + A^6\frac{n.n+3}{1.2} + A^4\frac{n.n+4.n+5}{1.2.3} + A^2\frac{n.n+5.n+6.n+7}{1.2.3.4} + A^0\frac{n.n+6.n+7.n+8.n+9}{1.2.3.4.5}) \end{cases}$$

wo n nach der Reihe $= 1, 2, 3, 4,$ etc. gesetzt werden soll.

Wenden wir nun gleich diese Allgemeine Formel an, und suchen wir die Factoren für die 3 ersten Potenzen von ε.

Aus der Gleichung ( ) hat man erstens; wenn man nach der Reihe $\pi = 0, 1, 2,$ etc. aber $A^{\pi,0} = 1.2.3$ etc. setzt:

$A^{1,0} = \sin m$; $A^{1,1} = \sin 2m$; $A^{1,2} = \frac{1}{2}(3\sin 3m - \sin m)$; $A^{1,3} = \frac{1}{6}(8\sin 4m - 6\sin m)$

$A^{2,0} = \frac{1}{2}\sin 2m$; $A^{2,1} = \sin 3m - \sin m$; $A^{2,2} = 2(\sin 4m - \sin 2m)$; $A^{2,3} = \frac{1}{6}(25\sin 5m - 27\sin 3m + 3\sin m)$

$A^{3,0} = \frac{1}{3}\sin 3m$; $A^{3,1} = \sin 4m - \sin 2m$; $A^{3,2} = \frac{1}{2}(5\sin 5m - 6\sin 3m + \sin m)$

und mit diesen Werthen erhält man, aus der Gleichung: ( ) wenn man bemerkt, dass alle ~~Glieder~~ doppelt vorkommen, und also, wenn man nur die ~~ersten~~ Glieder vor dem Mittelgliede nimmt, statt $\frac{1}{2}\alpha$, α stehen wird:

für $n=1$: $\alpha \sin m + \alpha A^{1,0} + \alpha^2 A^{1,1} + \alpha^3 A^{1,2}$ für $n=2$: $\alpha^2 \sin 2m + \alpha^2 A^{2,0} + \alpha^3 A^{2,1}$ und

für $n=3$: $\frac{\alpha^3}{1.2.3}(3^2 \sin 3m - 3\sin m) + \alpha^3 A^{3,0} +$ etc. $= \frac{\alpha^3}{2}(3\sin 3m - \sin m) + \alpha^3 A^{3,0}$ daher die Factoren von $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$; wie folgt:

von $\alpha = \sin m + A^{1,0}$ – – – – – – – – $= \sin m + \sin m$

von $\alpha^2 = \sin 2m + A^{1,1} + A^{2,0}$ – – – – – – $= \sin 2m + \sin 2m + \frac{1}{2}\sin 2m$

von $\alpha^3 = \frac{3}{2}\sin 3m - \frac{1}{2}\sin m + A^{1,2} + A^{2,1} + A^{3,0} = \frac{3}{2}\sin 3m - \frac{1}{2}\sin m + \frac{3}{2}\sin 3m - \frac{1}{2}\sin m + \sin 3m - \sin m + \frac{1}{3}\sin 3m$

dass heisst.

Factor von $\alpha = 2\sin m$

" " $\alpha^2 = \frac{5}{2}\sin 2m$ daher auch:

" " $\alpha^3 = \frac{13}{3}\sin 3m - \sin m$

$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}m + 2\alpha \sin m + \frac{5}{2}\alpha^2 \sin 2m + \frac{\alpha^3}{4}\left(\frac{13}{3}\sin 3m - \sin m\right) +$ etc. also:

$v = m + 4\alpha \sin m + 5\alpha^2 \sin 2m + 2\alpha^3\left(\frac{13}{3}\sin 3m - \sin m\right) +$ etc. oder wenn man für α seinen Werth setzt, der $= \frac{\varepsilon}{2}$ ist:

$v = m + 2\varepsilon \sin m + \frac{5}{4}\varepsilon^2 \sin 2m + \frac{1}{4}\varepsilon^3\left(\frac{13}{3}\sin 3m - \sin m\right) +$ etc welches die gesuchte Reihe, so wie er sie in seiner populären und grossen Astronomie anführt ist.

---

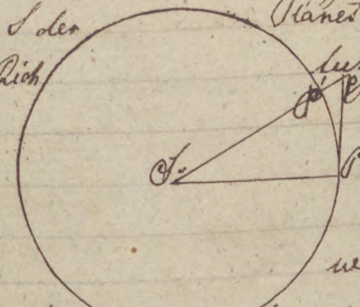
35 Seite 197. Es ist $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$; und hypothetisch $tg\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\, tg\frac{1}{2}u$ gesetzt worden, nun ist auch, nach einer trigonometrischen Fundamentalformel $\cos v = \frac{1 - tg^2\frac{1}{2}v}{1 + tg^2\frac{1}{2}v}$ also für $tg^2\frac{1}{2}v$ seinen Werth gesetzt:

$\cos v = \frac{1 - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-\varepsilon-(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-\varepsilon-tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u}{1-\varepsilon+tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-tg^2\frac{1}{2}u-\varepsilon \sec^2\frac{1}{2}u}{\sec^2\frac{1}{2}u+\varepsilon(1-tg^2\frac{1}{2}u)}$ oder Zähler und Nenner mit $\sec^2\frac{1}{2}u$ dividirt:

$\cos v = \frac{\cos^2\frac{1}{2}u - \sin^2\frac{1}{2}u - \varepsilon}{1 - \varepsilon(\cos^2\frac{1}{2}u - \sin^2\frac{1}{2}u)} = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}$ also auch $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon \cos u)}{1 - \cos u.\varepsilon + \varepsilon \cos u - \varepsilon^2}$ oder

$r = a(1 - \varepsilon \cos u)$ * * * *

36 Seite 233 Wenn man die Bahn der Planeten als Kreise voraussetzt, so lässt sich sehr leicht erweisen, dass sich die Kräfte verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten:



Denn es sey die Sonne in S der Planet in P, würde die Centralkraft aufhören auf ihn zu wirken, so würde er in der Richtung der Tangente seiner Bahn fortgehen, und also z. B. am Ende des ersten ~~Tages~~ Tages in p seyn, da er aber einen Kreis um die Sonne beschreibt, so muss er am Ende des ersten ~~Tages~~ Tages in P' seyn, so dass ihm also die Sonne in dieser Zeit um die Linie $P'p = K$ an sich gezogen hat, es ist aber $P'p = K = Sp - SP'$ oder wenn man $P'S = PS = r$ und die Umlaufszeit $= t$ setzt, $K = Sp - r$; es ist aber $Sp =$ ~~Secante~~ Secante von $PSP' = r \operatorname{Sec} \frac{360}{t} = \frac{r}{\operatorname{Cos}\frac{360}{t}}$ also auch:

$K = \frac{r}{\operatorname{Cos}\frac{360}{t}} - r$, es ist aber $\operatorname{Cos}\frac{360}{t} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{360}{t}\right)^2 + \text{etc}$ also auch, weil der Winkel der täglichen Bewegung für welchen man auch den in einer Minute oder Secunde nehmen kann, nur klein, also die höhern als 2ten Potenzen desselben vernachlässigt werden können:

$$K = \frac{r}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{360}{t}\right)^2\right)} - r = r\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{360}{t}\right)^2\right) - r = \frac{1}{2}r\cdot\left(\frac{360}{t}\right)^2$$ woraus folgt: $2t^2K = 360^2 \cdot r$ oder $t^2 = \frac{360^2}{2K} r$ also $t = 360\sqrt{\frac{r}{2K}}$.

Für einen zweyten Planeten ist eben so: $t'^2 = 360^2 \cdot \frac{r'}{2K'}$ oder $t' = 360\sqrt{\frac{r'}{2K'}}$.

Nun ist aber nach dem dritten Keplerischen Gesetze:

$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{r^3}{r'^3}$ also für t und t', die Werthe substituirt: $\frac{\frac{360^2 \cdot r}{2K}}{\frac{360^2 \cdot r'}{2K'}} = \frac{r^3}{r'^3}$ nämlich:

$\frac{K'r}{Kr'} = \frac{r^3}{r'^3}$ oder endlich $\frac{K'}{K} = \frac{r^3 \cdot r'}{r'^3 \cdot r} = \frac{r^2}{r'^2}$ *

was zu beweisen war.

---

37 S. 233 Geschwindigkeit heisst in der Mechanik das Element des Raumes, getheilt durch das Element der Zeit in welcher dieser Raum zurückgelegt wurde, oder eigentlich, wenn Raum und Zeit in Zahlen ausgedrückt wird, so ist der Zahlquotient der entsteht, wenn man die Raumzahl durch die Zeitzahl dividirt, die Geschwindigkeit ~~[illegible]~~ eines Körpers. Wenn man also das Element des Raumes durch ds, das der Zeit durch dt, und die Geschwindigkeit mit c bezeichnet, so ist:

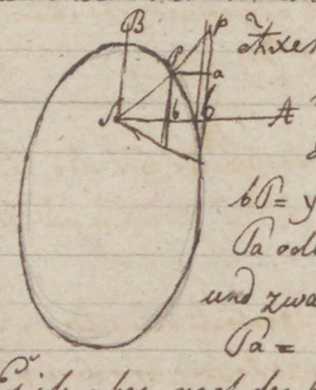
$$c = \frac{ds}{dt}. \text{ (I)}$$

Diese Geschwindigkeit bleibt constant, so lange keine störende Kraft auf sie einwirkt, so wie aber diess geschieht, so wird sie desto mehr geändert, je grösser die Stärke der Kraft ist, und wie länger sie wirkt, so dass sie also mit der Kraft und Dauer der Wirkung dieser Kraft, in zusammengesetztem Verhältnisse steht; ist daher dc, die durch diese Kraft K, hervorgebrachte Veränderung der Geschwindigkeit, in einem unendlich kleinen Zeittheil dt, so ist:

$dc = K.dt$ Nach (I) ist aber auch: $dc = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$ also, wenn dt unveränderlich ist: $dc = \frac{d^2s}{dt}$ also auch $K.dt = \frac{d^2s}{dt}$ woraus die Kraft folgt:

$$K = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ (II)}.$$

Diese Kraft, läßt sich aber in zwey andere zerlegen, deren Kräfte und Richtungen sich wie die zwey Seiten eines Parallelograms verhalten, dessen Diagonale die gegebene Kraft K ist. Zerlegen wir also diese Kraft, in zwey andere, deren Richtungen den Axen der Coordinaten x und y parallel sind, so wird seyn; wenn SA, SB, die



Axen der Coordinaten X, Y, des Punctes P bezeichnen, die Kraft K nach x zerlegt $= Pa$, und nach $y = ap$, also auch:

$Pp : Pa = SP : Sb$ und $Pp : pa = SP : bP$, nun ist : $Pp = K$, $SP = r$, $Sb = x$ $bP = y$ also auch: $K : Pa = r : x$ und $K : pa = r : y$ also auch:

Pa oder K nach x zerlegt $= \frac{Kx}{r}$ und pa oder K nach y zerlegt $= \frac{Ky}{r}$ und zwar weil sowohl Pa die Abscisse als pa die Ordinate veringert:

$Pa = -K.\frac{x}{r}$ und $pa = -K.\frac{y}{r}$.

Es ist aber nach der Gleichung (II) da x, y die Wege sind nach denen Pa, und pa wirken:

$Pa = \frac{d^2x}{dt^2}$ und $pa = \frac{d^2y}{dt^2}$ also auch: $\frac{d^2x}{dt^2} = -K.\frac{x}{r}$ und $\frac{d^2y}{dt^2} = -K.\frac{y}{r}$ also auch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + K.\frac{x}{r} &= 0\\ \frac{d^2y}{dt^2} + K.\frac{y}{r} &= 0\end{aligned}\right\}$$ (III) Die allgemeinen Gleichungen für die Centralbewegung.

---

38 Seite 236 Diesen allgemeinen Gleichungen (III) kann man aber eine noch bessere Form geben:

Man hat also: $\frac{d^2x}{dt^2} + K.\frac{x}{r} = 0$ (1)

$\frac{d^2y}{dt^2} + K.\frac{y}{r} = 0$ (2)

Multiplicirt man (1) mit dx, und (2) mit dy, so erhält man:

(3) $\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{xK\,dx}{r} = 0$ und (4) $\frac{dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{y\,dy\,K}{r} = 0$ addirt man jetzt (3) und (4)

so ist: (5) $\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{x\,dx\,K}{r} + \frac{dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{y\,dy.K}{r} = 0$ daß heißt:

(6) $\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{dy\,d^2y}{dt^2} + K\left(\frac{x\,dx}{r} + \frac{y\,dy}{r}\right) = 0$ oder wenn man integrirt:

$A = \int\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \int\frac{dy\,d^2y}{dt^2} + K\int\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{r}\right)$ oder, wenn dt unveränderlich ist, so ist auch: $\int\frac{d\left(\frac{dx^2}{dt}\right)}{2.dt} + \int\frac{d\left(\frac{dy^2}{dt}\right)}{2.dt} + K\int\left(\frac{x\,dx}{r} + \frac{y\,dy}{r}\right) = A$ wo A die Constante der Integration bezeichnet.

Also auch; wenn man wirklich integrirt:

$\frac{dx^2}{2dt^2} + \frac{dy^2}{2dt^2} + K\int\left(\frac{x\,dx}{r} + \frac{y\,dy}{r}\right) = A$ also endlich

$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = A - 2K\int\left(\frac{x\,dx}{r} + \frac{y\,dy}{r}\right)$ * (I)

II Multiplicirt man ferner (1) mit y und (2) mit x, so ist auch:

(2) $\frac{y\,d^2x}{dt^2} + \frac{xyK}{r} = 0$ und (3) $\frac{x\,d^2y}{dt^2} + \frac{xyK}{r} = 0$. Subtrahirt man nun die 2te von der 1sten

so ist: $\frac{y\,d^2x}{dt^2} + \frac{xyK}{r} - \frac{x\,d^2y}{dt^2} - \frac{xyK}{r} = 0 = \frac{y\,d^2x}{dt^2} - \frac{x\,d^2y}{dt^2} = 0$ (4)

Dieß kann man auch so schreiben:

$\frac{d\left(\frac{y\,dx}{dt}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{x\,dy}{dt}\right)}{dt} = 0$ oder wenn man nun integrirt: $\frac{y\,dx}{dt^2} - \frac{x\,dy}{dt^2} = B$

wo B = der Constanten der ~~Intt~~ Integration gleich ist. ~~Hieraus folgt~~ Wenn man aber noch vor

$\cancel{ydx - xdy}$ der Integration, beyderseits mit dt multiplicirt, so ist:

$$y\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0 \text{ also } \frac{ydx}{dt} - \frac{xdy}{dt} = B \text{ oder endlich: } ydx - xdy = Bdt$$

so daß man also für die Gleichungen (III) in noch allgemeinerer Form hat:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx^2+dy^2}{dt^2} = A - 2k\displaystyle\int\left(\frac{xdx}{r} + \frac{ydy}{r}\right) \\ ydx - xdy = Bdt. \end{array}\right\}\text{(IV)}$$

Nimmt man nun mit Littrow an, der Radius vector (r) bilde mit der Axe der x den Winkel v, so ist: $x = r\operatorname{Cos} v$, und $y = r\operatorname{Sin} v$, also lassen sich die Gleichungen (IV) auch unter folgende Gestalt bringen: Es ist:

$dx = d(r\operatorname{Cos}v) = dr\operatorname{Cos}v - r\operatorname{Sin}v\,dv$ also $dx^2 = dr^2\operatorname{Cos}^2v - 2r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v\,dv + r^2\operatorname{Sin}^2v\,dv^2$ und:

$dy = d(r\operatorname{Sin}v) = dr\operatorname{Sin}v + r\operatorname{Cos}v\,dv$ also $dy^2 = dr^2\operatorname{Sin}^2v + 2r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v\,dv + r^2\operatorname{Cos}^2v\,dv^2$ daher auch:

$dx^2 + dy^2 = dr^2(\operatorname{Sin}^2v + \operatorname{Cos}^2v) - 2r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v\,dv + 2r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v\,dv + r^2dv^2(\operatorname{Sin}^2v + \operatorname{Cos}^2v) = dr^2 + r^2dv^2$

Ferner ist:

$$\int\left(\frac{xdx}{r} + \frac{ydy}{r}\right) = \int\left(\operatorname{Cos}v(dr\operatorname{Cos}v - r\operatorname{Sin}v\,dv) + \operatorname{Sin}v(dr\operatorname{Sin}v + r\operatorname{Cos}v\,dv)\right) = \int dr\operatorname{Cos}^2v - r\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v\,dv + dr\operatorname{Sin}^2v + r\operatorname{Cos}v\operatorname{Sin}v\,dv$$
$$= \int dr(\operatorname{Sin}^2v + \operatorname{Cos}^2v) = \int dr$$

~~also~~ Ferner ist:

$ydx = r\operatorname{Sin}v(dr\operatorname{Cos}v - r\operatorname{Sin}v\,dv) = r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v - r^2\operatorname{Sin}^2v\,dv$ und

$xdy = r\operatorname{Cos}v(dr\operatorname{Sin}v + r\operatorname{Cos}v\,dv) = r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v + r^2\operatorname{Cos}^2v\,dv$ also auch:

$ydx - xdy = r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v - r^2\operatorname{Sin}^2v\,dv - r\,dr\operatorname{Sin}v\operatorname{Cos}v - r^2\operatorname{Cos}^2v\,dv = r^2dv(-\operatorname{Sin}^2v - \operatorname{Cos}^2v) = r^2dv$

also können die Gleichungen IV auch so geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dr^2 + r^2dv^2}{dt^2} = A - 2k\displaystyle\int dr \\ r^2dv = Bdt \end{array}\right\}\text{(IV)}$$ und so hat sie Littrow in seine Populäre Astronomie aufgenommen.

Die zweyte dieser Gleichungen $r^2dv = Bdt$ enthält schon unmittelbar das ~~erste~~ Keplerische Gesetz denn da B constant ist, so ist für eine andere Zeit: $r'^2dv' = Bdt'$ also auch: $\dfrac{r^2dv}{r'^2dv'} = \dfrac{dt}{dt'}$. *

---

39 Seite. 236 Auflösung der geraden Aufgabe von den Centralkräften.

Da nach Keplers zweytem Gesetze alle Planeten Ellipsen beschreiben, in deren einem Brennpuncte die Sonne sich befindet, so ist die Gleichung der Bahn:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\operatorname{Cos}v}$$

Wenn man aber aus der 2ten der Gleichungen (IV) No. (38) den Werth von dt nimmt und ihn in der ersten substituirt, so erhält man: $\dfrac{dr^2 + r^2\cancel{dt}^2}{\frac{r^4dv^2}{B^2}} = A - 2k\int dr$ oder: $\dfrac{B^2dr^2 + B^2r^2dv^2}{r^4dv^2} = A - 2k\int dr$ (d.h.

$$\frac{B^2dr^2}{r^4dv^2} + \frac{B^2}{r^2} = A - 2\int k\,dr \quad \ldots (a)$$ Nun ist $dr = d\left(\dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\operatorname{Cos}v}\right) = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)\varepsilon\operatorname{Sin}v\,dv}{(1+\varepsilon\operatorname{Cos}v)^2}$ oder:

$dr^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2\varepsilon^2\sin^2 v\,dv^2}{(1+\varepsilon\cos v)^4}$ also auch: $\frac{dr^2}{r^4dv^2} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2\varepsilon^2\sin^2 v\,dv^2(1+\varepsilon\cos v)^4}{a^4(1-\varepsilon^2)^4dv^2(1+\varepsilon\cos v)^4}$

$= \frac{\varepsilon^2\sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^2\cos^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$; aus der Gleichung $r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}$ folgt aber:

$r + r\varepsilon\cos v = a(1-\varepsilon^2)$ also $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{r\varepsilon}$ daher $\cos^2 v = \frac{(a(1-\varepsilon^2)-r)^2}{r^2\varepsilon^2}$ folglich auch:

$\frac{dr^2}{r^4dv^2} = \frac{\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2(a(1-\varepsilon^2)-r)^2}{r^2\varepsilon^2}}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{r^2\varepsilon^2 - a^2(1-\varepsilon^2)^2+2a(1-\varepsilon^2)r - r^2}{a^2r^2(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{2a(1-\varepsilon^2)r - r^2(1-\varepsilon^2) - a^2(1-\varepsilon^2)^2}{a^2r^2(1-\varepsilon^2)^2}$

woraus folgt: $\frac{dr^2}{r^4dv^2} = \frac{2}{ar(1-\varepsilon^2)} - \frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)} - \frac{1}{r^2}$ oder auch: $= \frac{2a^2(1-\varepsilon^2)-ar(1-\varepsilon^2)}{a^3r(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{1}{r^2}$

nun Zähler und Nenner des ersten Gliedes mit $a(1-\varepsilon^2)$ dividirt, gibt:

$$\frac{dr^2}{r^4dv^2} = \frac{2a-r}{a^2r(1-\varepsilon^2)} - \frac{1}{r^2}$$

Substituirt man nun den Werth von $\frac{dr^2}{r^4dv^2}$ oben in der Gleichung (a), so ist:

$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2(2a-r)}{a^2r(1-\varepsilon^2)} - \frac{B^2}{r^2} = A - 2\int K dr = \frac{2aB^2}{a^2r(1-\varepsilon^2)} - \frac{rB^2}{a^2(1-\varepsilon^2)r} = A - 2\int Kdr$

dessen Differenziale ist: $= \frac{2B^2}{ar(1-\varepsilon^2)} - \frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = A - 2\int Kdr$

$\frac{-a(1-\varepsilon^2)dr\,2.B^2}{a^2r^2(1-\varepsilon^2)^2} = -2Kdr$ $= 2Kdr = \frac{a(1-\varepsilon^2)dr.2B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2r^2} = \frac{2drB^2}{a(1-\varepsilon^2).r^2}$ woraus endlich folgt:

$$K = \frac{B^2}{a(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{1}{r^2} \quad (V)$$

welche Gleichung, da $\frac{B^2}{a(1-\varepsilon^2)}$ constant ist, schon unmittelbar Keplers zweytes Gesetz ausdrükt, wenn die Bahnen Elipsen sind.

Seite 237 40 Um nun auch das dritte Keplerische Gesetz aus rein mechanischen Gründen abzuleiten, sey Kürze halber $A = -\frac{\mu^2}{a}$, und $B^2 = a(1-\varepsilon^2).\mu^2$ so ist nach der Gleichung (V) No. 39.

$K = \frac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2}{a(1-\varepsilon^2)r^2} = \frac{\mu^2}{r^2}$ ferner ist aus einer der Gleichungen (IV) No. 38. $dv^2 = \frac{B^2dt^2}{r^4}$

also wenn man diese Werthe in der Gleichung (a) substituirt:

$\frac{a(1-\varepsilon^2).\mu^2}{r^2} + \frac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2dr^2}{r^4.\frac{B^2dt^2}{r^4}} = -\frac{\mu^2}{a} - 2\int\frac{\mu^2dr}{r^2}$ dass heisst wegen $B^2 = a(1-\varepsilon^2)$

$\frac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2}{r^2} + \frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{a} + \frac{2\mu^2}{r}$ also auch $dt^2\left(\frac{2\mu^2}{r} - \frac{\mu^2}{a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2}{r^2}\right) = dr^2$

dass heisst: $dt^2 = \frac{dr^2}{\frac{2\mu^2}{r} - \frac{\mu^2}{a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2}{r^2}} = \frac{r^2dr^2}{2\mu^2r - \frac{r^2\mu^2}{a} - a(1-\varepsilon^2)\mu^2} = \frac{ar^2dr^2}{2a\mu^2r - r^2\mu^2 - a(1-\varepsilon^2)\mu^2}$

oder $dt^2 = \frac{\frac{a}{\mu^2}r^2dr^2}{2ar - r^2 - a^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{\frac{a}{\mu^2}r^2dr^2}{2ar - r^2 - a^2 + a^2\varepsilon^2} = \frac{\frac{a}{\mu^2}r^2dr^2}{a^2\varepsilon^2 - a^2 + 2ar - r^2}$ woraus

endlich folgt: $dt^2 = \frac{\frac{a}{\mu^2}r^2dr^2}{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}$ und $dt = \frac{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\mu}rdr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}}$ *.

Man hat $r = a(1-\varepsilon\cos u)$ also $dr = a\varepsilon\sin u\,du$ und daher auch die Gleichung * gleich:

$$dt = \frac{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\mu}.a(1-\varepsilon\cos u).a\varepsilon\sin u\,du}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-a(1-\varepsilon\cos u))^2}} = \frac{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\mu}(1-\varepsilon\cos u).\varepsilon\sin u\,du}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-a^2\varepsilon^2\cos^2u}} = \frac{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\mu}(1-\varepsilon\cos u)\varepsilon\sin u\,du}{\sqrt{a^2\varepsilon^2\sin^2u}}$$

d. h. $dt = \dfrac{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\mu}(1-\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u)\cdot\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u\,du}{a\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\mu}(1-\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u)\,du$ also auch $dt.\mu.a^{-\frac{3}{2}} = (1-\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u)\,du$ also auch wenn u mit t verschwindet:

$t.\mu.a^{-\frac{3}{2}} = u - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u$. Für $t = T$ = der ganzen Umlaufszeit ist u = dem ganzen Umkreis $= 2\pi$ also für diesen Fall: $T.\mu.a^{-\frac{3}{2}} = 2\pi - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,2\pi = 2\pi$, worin das ~~dritte~~ Keplerische Gesetz unmittelbar enthalten ist. Das für $t = T$, $u - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u = 2\pi$ wird, erhellet daraus: es ist $u - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u = m$ = mittl. Anom. also auch $t.\mu.a^{-\frac{3}{2}} = m$ Nun ist für den ganzen Umlauf T, m offenbar $= 2\pi$ wenn der Halbmesser 1 gesetzt wird, also ist auch: $T.\mu.a^{-\frac{3}{2}} = 2\pi$

Die constante Grösse μ, die allen Planeten und Cometen unseres Systemes zukommt zu bestimmen ist sehr wichtig, die letzte Gleichung gibt:

$$\mu = \frac{2\pi}{T}.a^{\frac{3}{2}}$$

Ist also bey irgend einem Planeten, T, und a, bekannt, so ist auch μ gegeben, z. B. für die Erde ist $a = 1$ und $T = 365.256384$ Tagen ferner ist $\pi = 3.14125$ also (1) $\mu = \dfrac{2\pi}{365.256384}$ Halbmessern der Erdbahn oder: (2) $\mu' = \dfrac{2\pi}{(365.256384)(3600)(24)}$ Halbmessern der Erdbahn für T in Zeitsecunden oder für 15 geographische Meilen auf einen Grad des Aequators, so ist der Halbmesser der Erdbahn = 859.4368 geogr. Mln. und die halbe grosse Axe der Erdbahn = 20612966 geogr. Mln daher μ'' in geographischen Meilen: $= 20612966.\mu'$

Aus der ersten folgt:

$\log.2. = 0.3010300$
$\log.\pi = 0.4971499$
$\log 2\pi = 0.7981799$
$\log T = 7.4374023$
$\log\mu = 8.2355822$
$\mu = 0.0172022$

Aus der zweyten folgt:

$\log 2\pi = 0.7981799$
$\log.T = 2.5625977$
$\log.(60)^2 = 3.5563025$
$\log 24 = 1.3802112$
$\log.$ Nenn. $= 7.4991114$
d. Erg $= 2.5008886$
$\log 2\pi = 0.7981799$
$\log\mu' = 3.2990685$
$\mu' = 0.0000001991$

Aus der 3ten folgt:

$\log\mu' = 3.2990685$
$\log a = 7.3141405$
$\log\mu'' = 0.6132090$
$\mu'' = 4.10404.$

Man hat also für μ folgende Werthe:

$\mu = 0.0172022$ Erdh. T in Tagen
$\mu = 0.0000001991$ " T in Secunden
$\mu = 4.10404$ geographische Mln.

Seite 239. 41 Die verkehrte Aufgabe von Centralkräften aufzulösen.

Setzt man in der Gleichung (a) No. (39) $k = \dfrac{\mu^2}{r^2}$ und $C = \dfrac{\mu^2}{a}$ so ist:

$\dfrac{B^2}{r^2} + \dfrac{B^2dr^2}{r^4dv^2} = -\dfrac{\mu^2}{a} - 2\int\dfrac{\mu^2}{r^2}dr$ daß heisst: $\dfrac{B^2}{r^2} + \dfrac{B^2dr^2}{r^4dv^2} = -\dfrac{\mu^2}{a} + \dfrac{2\mu^2}{r}$ also auch: $r^4dv^2\left(\dfrac{B^2}{r^2} + \dfrac{2\mu^2}{r} - \dfrac{\mu^2}{a}\right) = B^2dr^2$ nähmlich: $dv^2\left(2r^3\mu^2 - \dfrac{r^4\mu^2}{a} - B^2r^2\right) = B^2dr^2$ oder weil $B^2 = a(1-\varepsilon^2).\mu^2$ gesetzt wurde: $dv^2\left(2r^3\mu^2 - \dfrac{r^4\mu^2}{a} - a(1-\varepsilon^2)\mu^2.r^2\right) = a(1-\varepsilon^2)\mu^2.dr^2$ also auch:

$dv^2 = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)\mu^2.dr^2}{2r^3\mu^2 - \frac{r^4\mu^2}{a} - a(1-\varepsilon^2)\mu^2.r^2} = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)dr^2}{2r^3 - \frac{r^4}{a} - a(1-\varepsilon^2)r^2}$ also auch $dv = \dfrac{dr\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}{\sqrt{2r^3 - \frac{r^4}{a} - a(1-\varepsilon^2)r^2}}$

oder endlich:

$$dv = \frac{dr\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}{r^2\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r^2}}}$$

Setzt man nun zur Vereinfachung dieses Ausdruks $r = \dfrac{1}{z}$ so ist:

$dv = \dfrac{d\left(\frac{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}{z}\right)}{\frac{1}{z^2}\sqrt{2z - \frac{1}{a} - a(1-\varepsilon^2).z^2}} = \dfrac{-\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}.dz}{\sqrt{2z - \frac{1}{a} - a(1-\varepsilon^2)z^2}}$ Multiplicirt man nun Zähler und Nenner mit $-\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}$ so ist:

$$dv = \frac{a(1-\varepsilon^2).dz}{\sqrt{2az(1-\varepsilon^2) - (1-\varepsilon^2) - a^2(1-\varepsilon^2)^2.z^2}} = \frac{a(1-\varepsilon^2).dz}{\sqrt{\varepsilon^2 - \{1 - a(1-\varepsilon^2)z\}^2}} *$$

Das Integrale dieses Ausdruks ist:

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a(1-\varepsilon^2)z - 1}{\varepsilon}$$ Siehe (N^{ro} 45)

und wenn man $r = \frac{1}{z}$ wieder herstellt:

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a(1-\varepsilon^2)\frac{1}{r} - 1}{\varepsilon} = \frac{a(1-\varepsilon^2) - r}{r\varepsilon}$$ woraus endlich für die zur Kraft $\frac{\mu^2}{r^2}$ gehörige Bahn folgt:

$$r\varepsilon \operatorname{Cos} v = a(1-\varepsilon^2) - r$$ dass heisst: $$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} *$$

Die Bahn ist also ein Kegelschnitt, und zwar eine Elipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem a, positiv, negativ oder unendlich ist.

---

42 Seite. 239 Es ist die Geschwindigkeit überhaupt, in jedem Puncte der Bahn:

$$c = \frac{ds}{dt}$$ also auch $$c^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$$ Nun ist, wenn man die Kraft K in zwey andere zerlegt, deren Richtungen den Coordinaten x, y, parallel sind (die Coordinaten rechtwinklig vorausgesetzt) $s^2 = x^2 + y^2$ also auch: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und also:

$$c^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$$ und $$c = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}}$$ welches nach N^{ro} (38) gleich ist:

$$c = \sqrt{\frac{r^2 dv^2 + dr^2}{dt^2}} = \mu\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$ Siehe N^{ro} (46)

In der Sonnennähe ist $r = a(1-\varepsilon)$ also:

$$c = \mu\sqrt{\frac{2}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{a}}$$ oder $$c^2 = \frac{2\mu^2}{a(1-\varepsilon)} - \frac{\mu^2}{a}$$ daraus folgt für die Sonnennähe; wenn $a(1-\varepsilon^2) = q$ gesetzt wird:

$$c^2 = \frac{2\mu^2}{q} - \frac{\mu^2}{a}$$ oder $$a(2\mu^2 - c^2 q) = q\mu^2$$ also $$a = \frac{\mu^2 \cdot q}{2\mu^2 - c^2 q}.$$

In der Sonnenferne aber ist $r = q' = a(1+\varepsilon)$ also auch:

$$c = \mu\sqrt{\frac{2}{a(1+\varepsilon)} - \frac{1}{a}}$$ oder $$c^2 = \frac{2\mu^2}{q'} - \frac{\mu^2}{a}$$ woraus folgt: $$q'c^2 = 2\mu^2 - \frac{q'\mu^2}{a}$$

also $a(2\mu^2 - q'c^2) = q'\mu^2$ also auch $$a = \frac{q'\mu^2}{2\mu^2 - q'c^2} *.$$

Und die Bahn ist eine Hyperbel, Parabel oder Elipse, je nachdem a, negativ, unendlich oder positiv ist.

---

43 Seite 240 & 241 Bestimmung der Kräfte welche auf einen schief geworfenen Körper (auf der Oberfläche der Erde) wirken.

Die Fundamental gleichungen für die Centralbewegung sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Kx}{r} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ky}{r} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Nimmt man nun an, was auch wirklich der Fall ist, dass die Kraft des ersten Wurfes nur klein gegen die Kraft der Erde sey, so ist die Kraft nach x zerlegt, oder $\frac{Kx}{r}$ sehr klein, also auszulassen, $\frac{Ky}{r}$ aber wird für unsere Versuche immer einer constanten Grösse g gleich seyn, so dass man für unseren Fall hat:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$ Um sie zu integriren kann man diese

$$\frac{d^2y}{dt^2} + g = 0$$ Gleichungen auch so schreiben: $$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = 0$$ und $$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} + g = 0$$

oder beyde Theile mit dt multiplicirt, gibt:

$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$ und $d\left(\frac{dy}{dt}\right) + g\,dt = 0$ nun integrirt ist:

$\frac{dx}{dt} = a$ und $\frac{dy}{dt} + g\,dt = b$ zum zweyten Mahle integrirt, gibt:

$\frac{x}{t} = a$ also $x = at$ und

$\frac{y}{t} + g\int dt = b$ oder $y = bt - gt\int dt$ dass heisst: $y = bt - \frac{1}{2}gt^2$

Es ist also: $t = \frac{x}{a}$ folglich:

$y = \frac{bx}{a} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{a^2}$ oder $a^2y = abx - \frac{1}{2}gx^2$ dass heisst: $2a^2y = 2abx - gx^2$ oder endlich

$2abx = 2a^2y + gx^2$

für die Gleichung der Bahn, welche also eine Parabel ist.

---

44 Seite. 241 Bestimmung der auf einen senkrecht auf die Erdoberfläche geworfenen Körper wirkenden Kräfte

In diesem Falle ist der Werth der Kraft nach x zerlegt, durch die ganze Bahn $= 0$ ~~und~~ also reduzieren sich die Fundamentalformeln für die Centralkräfte auf die einzige:

$\frac{d^2y}{dt^2} + g = 0$ deren Integrale sind; da man sie auch so schreiben kann: $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} + g = 0$ oder auch $d\left(\frac{dy}{dt}\right) + g\,dt = 0$; erstens $\frac{dy}{dt} = c = b - gt$ und $\frac{y}{t} = b - gt\int dt = \cancel{bt} - \frac{1}{2}gt^2$.

welche Gleichungen für senkrecht aufwärts geworfene Körper gelten, für senkrecht abwärts geworfene Körper ist g negativ. Uebrigens ist bey allen diesen Gleichungen vorausgesetzt worden, dass sich der Körper in einem vollkommen leeren Raume bewegt.

---

45 Seite 239 Dort heisst es dass ~~stat~~

$$\int \frac{a(1-\varepsilon^2)\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2 - (1 - a(1-\varepsilon^2)z)^2}} = \operatorname{Cos} v = \frac{a(1-\varepsilon^2).z - 1}{\varepsilon}$$ sey.

Nach Vegas II Band. S. 584 Formel (IV) für die Integrirung der Trinomien ist:

$\int \frac{m\,dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{m}{\sqrt{c}}.\text{arc. tg.}\frac{2cx - b}{2\sqrt{a+bx-cx^2}\sqrt{c}}$; Nun sey $\text{arc. tg.}\frac{2cx-b}{2\sqrt{a+bx-cx^2}\sqrt{c}} = q$ so ist $\text{tg}\,q = \frac{2cx-b}{2\sqrt{a+bx-cx^2}\sqrt{c}}$.

Es ist aber auch $\text{Sin}\,q = \frac{\text{tg}\,q}{\sqrt{1+\text{tg}^2 q}}$ also auch $\text{Sin}\,q = \frac{\frac{2cx-b}{2\sqrt{a+bx-cx^2}\sqrt{c}}}{\sqrt{\frac{4ac+4bxc-4c^2x^2+(2cx-b)^2}{(2\sqrt{c}\sqrt{a+bx-cx^2})}}} = \frac{2cx-b}{\sqrt{4c(a+bx-cx^2)+(2cx-b)^2}}$

$= \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + 4bcx - 4c^2x^2 + 4c^2x^2 - 2cbx + b^2}}$

$= \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$ also ist $q = \text{arc. Sin.}\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$ und da q auch gleich $\text{arc. tg.}\frac{2cx-b}{2\sqrt{a+bx-cx^2}\sqrt{c}}$ ist, so können beyde Werthe für einander gesetzt werden, also ist:

$\int\frac{m\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{m}{\sqrt{c}}\,\text{arc. Sin.}\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$ Nun ist $dv = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2-(1-a(1-\varepsilon\varepsilon)z)^2}} = \frac{p\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2-(1-pz)^2}}$ für $a(1-\varepsilon\varepsilon) = p$

Vergleicht man beyde Integralien, so findet man: $x = z$, $m = p$, $a = \varepsilon^2 - 1$, $b = 2p$, $c = p^2$ also auch:

$v = \frac{p}{\sqrt{p^2}}\,\text{arc Sin}\,\frac{2p^2z - 2p}{\sqrt{4p^2(\varepsilon^2-1)+4p^2}}$ dass heisst $v = \text{arc Sin.}\frac{2p(pz-1)}{2p\sqrt{\varepsilon^2}}$ also eigentlich $v + \text{Const.} = \text{arc. Sin.}\frac{pz-1}{\varepsilon}$

und daher $\text{Sin}(v + \text{Const.}) = \frac{pz-1}{\varepsilon}$

Um die Constante zu bestimmen sey $r = a(1-\varepsilon)$ ~~für~~ also $z = \frac{1}{a(1-\varepsilon)}$ für $v = 0$ (fange nähmlich die Bewegung im Perihelio an) so ist: $\sin A = \frac{pz-1}{\varepsilon} = \frac{\frac{a(1-\varepsilon^2)}{a(1-\varepsilon)} - 1}{\varepsilon} = 1$ also $C = 90^\circ$

und daher:

$$\int \frac{dz \cdot p}{\sqrt{\varepsilon^2 - (1-pz)^2}} = \sin(90^\circ + v) = \frac{pz-1}{\varepsilon}$$ nähmlich: $= \cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cdot z - 1}{\varepsilon}$ was gesucht wurde.

---

46. Seite 239 Es heisst dort, dass $c = \sqrt{\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}}$ sey (S. No 42) oder auch $c = \mu\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}$

Es ist nach No (38) $\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = A - 2\int K dr$ also auch $c = \sqrt{A - 2\int K dr}$, nun setzt er $A = -\frac{\mu^2}{a}$, und es ist $K = \frac{\mu^2}{r^2}$ folglich ist auch:

$c = \sqrt{-\frac{\mu^2}{a} - 2\int \frac{\mu^2}{r^2} dr} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{r} - \frac{\mu^2}{a}} = \mu\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$ wie bey Littrow am angezeigten Orte.

Nehmen wir nun a positiv, so ist für die Elipse die Geschwindigkeit ~~anfängliche nähmlich~~ $c = \mu\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$ also kleiner als $\mu\sqrt{\frac{2}{r}}$

Setzt man a negativ so ist für die Hyperbel in jedem Puncte der Bahn:

$c = \mu\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{a}}$ also grösser als $\mu\sqrt{\frac{2}{r}}$

Ist $a = \infty$, so ist für die Parabel in jedem Puncte der Bahn:

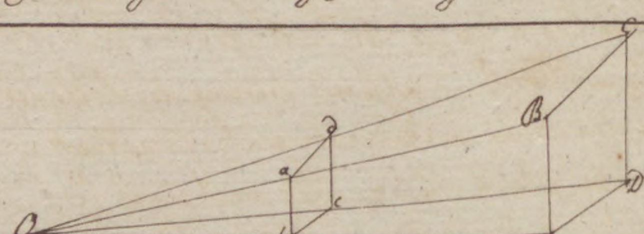
$c = \mu\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{\infty}}$ also gleich $\mu\sqrt{\frac{2}{r}}$

Ist endlich $a = r$, so ist für den Kreis, in jedem Puncte des Umfanges:

$c = \mu\sqrt{\frac{1}{r}} = \frac{\mu}{\sqrt{r}}$ völlig übereinstimmend mit dem was Littrow Seite 240 sagt, nur dass er, dort, statt allgemein, die Geschwindigkeiten, wenn der Planet in der Sonnennähe ist, ansetzt.

---

47 Seite 207



Dass sich die Beleuchtung wie verkehrt das Quadrat der Entfernung verhalte, ist sehr leicht darzuthun denn wenn die Seite ab mit x, bc mit y, AB mit X und AD mit Y bezeichnet wird, so ist der beleuchtete Raum in der Entfernung $Ob = xy$ und in jener in der Entfernung $OA = XY$. Es ist aber Ob zu: $OA = abcd\,(xy)$ zu $ABCD\,(XY)$, es ist aber $Ob : ba = 2Ob$ (vermöge der Voraussetzung) $: AD$ also $AD = 2ab$; ferner $Ob : 2Ob = ab : AB$ also $AB = 2ab$, und daher $XY = 4xy$ also auch: $Ob : OA = xy : 4xy$ also auch: $Ob^2 : OA^2 = xy : XY = xy : 4xy$.

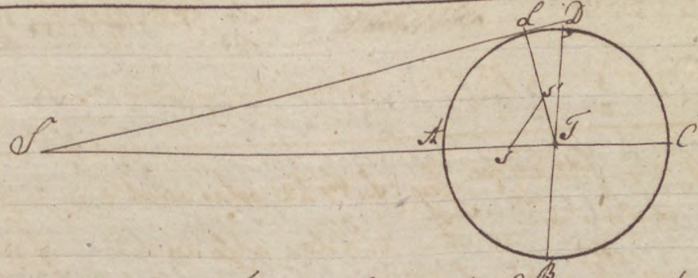
---

48 Seite 262 Die Evection nennt man die ~~Veränderung~~ der grössten und kleinsten Werthe der Geschwindigkeit des Mondes, denn schon die Alten bemerkten, dass die Geschwindigkeit des Mondes nichts weniger als gleichförmig sey, dass aber auch weder seine grösste, noch seine kleinste Geschwindigkeit immer einerley Werth habe, sondern dass beyde einer periodischen Änderung

unterworfen seyen, die sie Evection nannten.

---

49 Seite 264



Ist S die Masse der Sonne, T die der Erde ϱ, die Entfernung der ersteren, r die Entfernung der letzteren vom Monde, und R die Entfernung der Erde von der Sonne, so ist die Kraft die Sonne und Erde auf den Mond ausüben $= \frac{S}{\varrho^2}$, und $\frac{T}{r^2}$. Die Kraft der Sonne läßt sich in zwey andere zerlegen und zwar nach der Richtung LT in die Kraft x und nach ST in die Kraft y, um beyde zu bestimmen hat man: $\frac{S}{\varrho^2} : x = \varrho : r$ also $x = \frac{S}{\varrho^2} \cdot \frac{r}{\varrho}$ und $\frac{S}{\varrho^2} : y = \varrho : R$ also $y = \frac{S}{\varrho^2} \cdot \frac{R}{\varrho}$. Diese Kraft y fällt mit jener der Sonne auf die Erde $\frac{S}{R^2}$ zusammen, und würde daher wären sich beyde gleich die Bewegung des Mondes gar nicht stören — so daß also nur durch die Differenz dieser beyden Kräfte eine Störung statt finden kann. Die störende Kraft ist also $P = \frac{SR}{\varrho^3} - \frac{SR}{R^3} = \frac{S(R^3 - \varrho^3)}{\varrho^3 R^2}$.
Da ihre Richtung TS ist, so kann man sie durch die kleine Linie Ts vorstellen, und ist dann ss' senkrecht auf Ts, so läßt auch die Kraft sich ~~nach~~ in ~~der~~ zwey Seitenkräfte $s'T = P \cos T$ nach der Richtung LT und $ss' = P \sin T$ ~~nach der Richtung~~ senkrecht auf TL zerlegen, so daß also die auf den Mond wirkenden Centralkräfte sind; weil wenn $E = ☾ - ☉$ ist, $T = -E$ ist:

$$N = \frac{T}{r^2} + \frac{Sr}{\varrho^3} - P \cos E$$

, also die Störung der Kraft der Erde durch die Sonne $N = \frac{Sr}{\varrho^3} - P \cos E$, und die auf den Mond wirkende Tangentialkraft: $M = -P \sin E$.
Für die Zeit der Neumonde ist ϱ nahe gleich $R - r$, also auch; weil $\cos E = 1$ ist
$N = \frac{Sr}{(R-r)^3} - \frac{SR}{(R+r)^3} + \frac{S}{R^2} = S\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R-r)^2}\right)$ für die Zeit der Vollmonde ist ϱ nahe $= R + r$, und $\cos E$ wieder 1, also auch: $N = \frac{Sr}{(R+r)^3} + \frac{SR}{(R+r)^3} - \frac{S}{R^2}$ also auch $N = S\left(\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{R^2}\right)$.
Da r klein ist, so kann man die höhern als ersten Potenzen vernachläßigen, also ist; für die Zeit der Neumonde, ~~m~~

$N = \frac{SR^2 - 2SrR - SR^2}{R^4}$ (weil er im Nenner $(R-r)^2 = R^2$ setzt, also $N = -\frac{2Sr}{R^3}$; und für die Vollmonde:
$N = \frac{SR^2 - SR^2 - 2SrR}{R^4}$ (wieder aus derselben Ursache wie früher) also $N = -\frac{2Sr}{R^3}$ so daß also die Kraft der Erde durch die Sonne ~~im den Größe~~ Syzygien um die Größe verm~~indert~~ wird:

$$N = -\frac{2Sr}{R^3}$$

In den Quadraturen ist $E = 90^\circ$ oder 270° also $N = +\frac{Sr}{R^3}$.
Die Kraft der Erde wird daher durch die Sonne überhaupt vermindert, um das Mittel dieser Verminderung zu bestimmen, so ist überhaupt für jeden Punct der Bahn $\varrho = R - r \cos E$ also wenn die höhern Potenzen von r vernachläßigt werden: $\varrho^3 = R^3 - 3R^2 r \cos E$, also $N = \frac{Sr}{(R^3 - 3R^2 r \cos E)} - \frac{SR \cos E}{(R^3 - 3R^2 r \cos E)} + \frac{S}{R^2}$

daß heißt $-\frac{S(r-R\cos E)}{R^3-3R^2r\cos E}+\frac{S\cos E}{R^2}=\frac{SrR^2-SR^3\cos E+SR^3\cos E-3SR^2r\cos^2E}{R^2(R^3-3R^2r\cos E)}$

$=$ ~~[illegible]~~ $=$ ~~[illegible]~~ $=\frac{Sr}{R^3}(1-3\cos^2E)(1+\frac{3r}{R}\cos E)$

$=\frac{Sr}{R^3}(1-3\cos^2E)=\frac{Sr}{R^3}(1-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2E)=\frac{Sr}{R^3}(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos 2E)=-\frac{Sr}{2R^3}(1+3\cos 2E)$, abstrahiret man also von den periodischen von E abhängigen Störungen, so ist:

$N=-\frac{Sr}{2R^3}$ eine constante Verminderung.

Auch die Tangentialkraft M kann man auf ähnliche Weise ausdrüken, denn es ist: $\varrho=R-r\cos E$ also die höhern als ersten Potenzen von r vernachläßigt, $\varrho^3=R^3-3rR^2\cos E$ und die Tangentialkraft ist:

$M=\frac{S\sin E}{R^2}-\frac{SR\sin E}{R^3-3rR^2\cos E}=\frac{SR^3\sin E-3SR^2r\sin E\cos E-SR^3\sin E}{R^2(R^3-3rR^2\cos E)}$

$=-\frac{3Sr}{R^3}(1+3rR^{-1}\cos E)(\sin E\cos E)=-\frac{3Sr}{R^3}\sin E\cos E=-\frac{3}{2}\cdot\frac{Sr}{R^3}\sin 2E.$

Der Ausdruk $M=-P\sin E$ ist auch $M=-\frac{S(\varrho^3-R^3)}{R^2\varrho^3}\sin(☾-☉)$

Daraus folgt: Für den ersten Quadranten ist: $R>r$ und $☾>☉$ also M negativ

Für den zweyten ist $\varrho>R$, und $☾>☉$ also M positiv.

Im dritten Quadranten ist $\varrho>R$ und $☾>☉$ also M negativ, wie im ersten.

Im vierten endlich ist $R>\varrho$ und $☾>☉$ also M positiv wie im zweyten mit Littrow ganz übereinstimmend.

---

50. Seite 269 Jeder Werth, der in den Syzygien seinen größten, in den Quadraturen seinen kleinsten Werth erhält, muß dem Cosinusse des doppelten Bogens, von dem die Stellungen abhängen proportional seyn, hier wird also $c=A\cos 2E$ seyn, und wenn mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit dt der Bogen ds zurükgelegt wird, so ist:

$ds=A\cos 2E\cdot dt$ weil aber t und E von einander abhängig sind, so ist auch $dt=BdE$ zu setzen also $ds=AB\cos 2E\,dE$ oder $s=\frac{AB}{2}\sin 2E$.

---

51. Seite 271 Für die Syzygien ist: $N=\frac{T}{r^2}-\frac{2Sr}{R^3}$, ist dann $r=1-e$ so ist: $N=\frac{T}{(1-e)^2}-\frac{2S(1-e)}{R^3}$ $=T(1+e)^2-\frac{2S(1-e)}{R^3}$; Ist aber $r=1+e$ so ist: $N'=\frac{T}{(1+e)^2}-\frac{2S(1+e)}{R^3}=T(1-e^2)-\frac{2S(1+e)}{R^3}$ also auch: $N-N'=T+2eT+e^2T-\frac{2S}{R^3}+\frac{2eS}{R^3}-T+2eT-e^2T-\frac{2S}{R^3}+\frac{2eS}{R^3}=4eT+\frac{4eS}{R^3}$ wie bey Littrow.

In den Quadraturen aber ist: $N=\frac{T}{r^2}+\frac{Sr}{R^3}$ Ist nun $r=1-e$ so ist:

$N=\frac{T}{(1-e)^2}+\frac{S(1-e)}{R^3}=T(1+2e)+\frac{S(1-e)}{R^3}$ Und ist $r=1+e$, so ist:

$N'=\frac{T}{(1+e)^2}+\frac{S(1+e)}{R^3}=T(1-2e)+\frac{S(1+e)}{R^3}$ also auch:

$N-N'=T+2eT+\frac{S}{R^3}-\frac{eS}{R^3}-T+2eT-\frac{S}{R^3}-\frac{Se}{R^3}$ nähmlich: $N-N'=4eT-\frac{2eS}{R^3}$.

mit dem Verf. ganz übereinstimmend.

52 Seite 282 Dort heißt es daß $\frac{a^3}{R^3} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + 3\varepsilon\cos m + \frac{9\varepsilon^2}{2}\cos 2m$ sey.

Es ist: $\frac{R}{a} = 1 - \varepsilon\cos m - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1)$ die höheren Potenzen von ε vernachlässigt also ist:

$\frac{a}{R} = 1 + \varepsilon\cos m + \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1)$ und also ~~$\frac{a^3}{R^3} = \left(1 + \varepsilon\cos m + \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1)\right)^3$ oder wenn man auch hier die höheren als 2ten Potenzen von ε vernachlässigt, nach dem binomischen Lehrsatze:~~

$\cancel{\frac{a^3}{R^3} = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2(\cos 2m - 1)(1 + 3\varepsilon\cos m)^2 + 9\varepsilon^2\cos^2 m = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2m - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + 9\varepsilon^2\cos^2 m}$

$\cancel{= 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2m - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + 9\varepsilon^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2m\right) = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2m - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{9}{2}\varepsilon^2 + \frac{9}{2}\varepsilon^2\cos 2m}$

Es sey nun $x = \cos m + \frac{1}{2}\varepsilon(\cos 2m - 1)$ so ist $\frac{a^3}{R^3} = (1 - \varepsilon x)^{-3} = 1 + 3\varepsilon x + 6\varepsilon^2 x^2$ für x den Werth gesetzt ist:

$\frac{a^3}{R^3} = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2(\cos 2m - 1) + 6\varepsilon^2\cos^2 m = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2(\cos 2m - 1) + \frac{6\varepsilon^2(\cos 2m + 1)}{2}$ oder:

$\frac{a^3}{R^3} = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2m - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + 3\varepsilon^2\cos 2m + 3\varepsilon^2 = 1 + 3\varepsilon\cos m + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2m - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{6}{2}\varepsilon^2\cos 2m + \frac{6}{2}\varepsilon^2$

oder endlich: $\frac{a^3}{R^3} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + 3\varepsilon\cos m + \frac{9}{2}\varepsilon^2\cos 2m$ ×

---

53 Seite 328 Da der Unterschied zwischen den beobachteten und berechneten Zeiten der Jupiterstrabanten Finsternisse für $0° = 0$, für $90° = \omega$ am größten, für $180° = 0$ und für $270° = -\omega$ ist, so ist offenbar daß die Correction für jeden Punct der Bahn, dem Sinus der ~~mittleren~~ Anomalie für denselben Punct proportional seyn müsse, oder daß wenn M die Anomalie, x die gesuchte Correction für irgend einen Punct ist, immer seyn wird:

$x : \omega = \sin M : 1$ oder $x = \omega\sin M$. Da diese Gleichung für jeden Punct der Bahn statt findet, so ist auch im Perihelio $x = \omega\sin M$, und daher für jede andere Zeit $\frac{T^a}{360°}$ nach dem Perihelio:

$$x = \frac{\omega\sin M\cdot T}{360°} = \frac{\omega}{360°}\cdot T\cdot\sin M$$

---

54. Seite 328 Um die größte Mittelpunctsgleichung zu bestimmen, erwäge man zuerst daß dann $d(v - m) = 0$ oder $dv = dm$ ist. Nun hat man zwischen den Größen m, v, ε, u folgende Gleichungen:

I $m = u - \varepsilon\sin u$ und

II $\mathrm{tg}\frac{1}{2}u = \mathrm{tg}\frac{1}{2}v\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \mathrm{tg}\frac{1}{2}v\cdot\mathrm{tg}(45° - \frac{1}{2}\varphi)$ wenn man $\varepsilon = \sin\varphi$ setzt. Differenzirt man diese Gleichungen, so ist:

III $dm = du - \varepsilon\cos u\,du - \sin u\cos\varphi\,d\varphi = (1 - \varepsilon\cos u)du - \sin u\cos\varphi\,d\varphi$ und *

IV $\frac{du}{\sin u} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ * ~~(Siehe Nro~~) Daraus folgt: *(wenn man $\mathrm{tg}\frac{1}{2}v\,\mathrm{tg}\frac{90° - \varphi}{2}$ logarithmisch differenziert,)

$du = \frac{\sin u}{\sin v}dv - \frac{\sin u}{\cos\varphi}d\varphi$ und daher, weil auch $1 - \varepsilon\cos u = \frac{r}{a}$ ist:

$dm = \frac{r\sin u}{a\sin v}dv - \frac{r\sin u}{a\cos\varphi}d\varphi - \sin u\cos\varphi\,d\varphi$ Man hat aber für r folgende Werthe $r = \frac{a\cos^2\varphi}{1 + \varepsilon\cos v} = \frac{a\cos\varphi\sin u}{\sin v}$ (Siehe Nro) daher ist auch:

$dm = \frac{r^2\,dv}{a^2\cos\varphi} - \frac{r\sin u}{a\cos\varphi}d\varphi - \sin u\cos\varphi\,d\varphi$ oder

$dv = \frac{a^2\cos\varphi\,dm}{r^2} + \frac{a\sin u}{r}d\varphi + \frac{a^2\cos\varphi\sin u}{r^2}d\varphi = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,dm + \frac{a\sin u}{r\,\cancel{\cos\varphi}}d\varphi + a\cos^2\varphi\cdot\frac{a}{r^2}\sin u\,d\varphi$

Es ist aber $a\cos^2\varphi = r(1 + \varepsilon\cos v)$ (Siehe Nro) daher auch:

$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, dm + \frac{a}{r}\sin u\, d\varphi + (1+\varepsilon\cos v)\cdot\frac{a}{r}\sin u\, d\varphi$ Ferner ist $\sin u = \frac{r\sin v}{a\cos\varphi}$ also:

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, dm + \frac{\sin v}{\cos\varphi}d\varphi + (1+\varepsilon\cos v)\cdot\frac{\sin v}{\cos\varphi}d\varphi = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, dm + \frac{\sin v}{\cos\varphi}d\varphi + \frac{\sin v}{\cos\varphi}d\varphi + \frac{\varepsilon\cos v\sin v}{\cos\varphi}d\varphi$$

nähmlich: $dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, dm + \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{\cos\varphi}\sin v\, d\varphi$ oder endlich wenn man die Bedeutung von $\cos\varphi$ wieder herstellt:

$$dv = \frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}dm + \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{\cos\varphi}\sin v\, d\varphi$$

Weil aber für die größte Mittelpunctsgleichung $dm = dv$ ist, so ist auch:

$\frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ oder $\frac{r^2}{a^2} = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ oder $\frac{r}{a} = \sqrt[4]{1-\varepsilon^2}$; Weil aber auch $\frac{r}{a} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos v}$ ist, so ist: $\sqrt[4]{1-\varepsilon^2} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos v}$ also ist auch $(1+\varepsilon\cos v) = (1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}$

Nun läßt sich die erste Gleichung auch so schreiben:

$$dv = dm + \frac{(1+1+\varepsilon\cos v)}{\cos\varphi}\sin v\, d\varphi$$ (weil der Coefficient von $dm = 1$ ist)

also ist auch:

$$dv = dm + \left(\frac{1+(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}}{\cos\varphi}\right)\sin v\, d\varphi = \frac{(1+(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}})}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}\sin v\, d\varphi$$ nähmlich:

$$dv - dm = d\varphi\sin v\left(\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

Nun ist:

$\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v}$ und $\cos v = \frac{1}{\varepsilon^2}\left((1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}} - 1\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}\right)$

daß heißt:

$$\cos v = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{32}\varepsilon^4 - \frac{5}{128}\varepsilon^6 - etc\right)\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3\varepsilon^2}{4} + \frac{3\varepsilon^4}{2^5} + \frac{5\varepsilon^6}{2^7}\right) = -\frac{3}{4}\varepsilon - \frac{3}{2^5}\varepsilon^3 - \frac{5\varepsilon^5}{2^7}$$

Also $\cos^2 v = \left(-\frac{3}{4}\varepsilon - \frac{3}{2^5}\varepsilon^3 - \frac{5}{2^7}\varepsilon^5\right)^2 = \frac{9}{16}\varepsilon^2 + \frac{9}{2^{10}}\varepsilon^6 + \frac{18}{4.2^5}\varepsilon^4 + \frac{30}{4.2^7}\varepsilon^6$ (die höhern als 6ten Potenzen von ε werden vernachläßiget)

und daher:

$$\sqrt{1-\cos^2 v} = \left(1-\frac{9}{16}\varepsilon^2 - \frac{9}{2^{10}}\varepsilon^6 - \frac{18}{4.2^5}\varepsilon^4 - \frac{30}{4.2^7}\varepsilon^6\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{9}{16}\varepsilon^2 - \frac{18}{2^7}\varepsilon^4 - \left(\frac{9.2^9+30.2^{10}}{2^{19}}\right)\varepsilon^6\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{18}{2^8}\varepsilon^4 - \left(\frac{9.2^9+30.2^{10}}{2^{20}}\right)\varepsilon^6 - \frac{81}{2^7}\varepsilon^4 - \frac{18.18}{2^{12}}\varepsilon^6$$

$$= 1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \left(\frac{18.2^7+81.2^8}{2^{15}}\right)\varepsilon^4 - \left(\frac{(9.2^9+30.2^{10})2^{12}+18^2(9.2^9+30.2^{10})}{2^{32}}\right)\varepsilon^6$$

$$= 1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \frac{4233}{65536}\varepsilon^6 + etc.$$

Ferner ist:

$(1-\varepsilon^2)^{-1} = 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6 + etc$ und $(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{32}\varepsilon^4 + \frac{15}{128}\varepsilon^6 + etc.$

also auch:

$$dv - dm = \left(1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \frac{4233}{65536}\varepsilon^6\right)\left(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+1+\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{5}{32}\varepsilon^4+\frac{15}{128}\varepsilon^6\right)d\varepsilon$$

$$= \left(1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \frac{4233}{65536}\varepsilon^6\right)\left(2+\frac{5}{4}\varepsilon^2+\frac{37}{32}\varepsilon^4+\frac{143}{128}\varepsilon^6\right)d\varepsilon$$

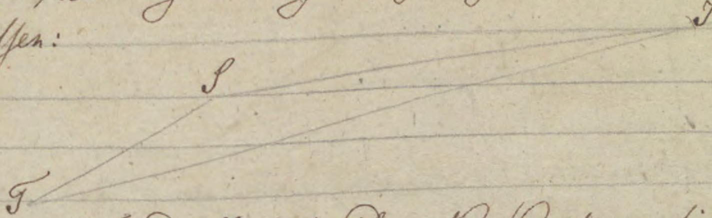
$$= \left(2-\frac{18}{32}\varepsilon^2 - \frac{450}{2048}\varepsilon^4 - \frac{8466}{65536}\varepsilon^6 + \frac{5}{4}\varepsilon^2 - \frac{45}{128}\varepsilon^4 - \frac{1125}{2048}\varepsilon^6 + \frac{37}{32}\varepsilon^4 - \frac{333}{32^2}\varepsilon^6\right)d\varepsilon$$

nähmlich:

$dv - dm = \left(2+\frac{11}{16}\varepsilon^2 + \frac{599}{1024}\varepsilon^4 + etc\right).d\varepsilon = 2d\varepsilon + \frac{11}{16}\varepsilon^2 d\varepsilon + \frac{599}{1024}\varepsilon^4 d\varepsilon + etc$ oder endlich wenn man integriret:

$dv - dm = 2\varepsilon + \frac{11}{48}\varepsilon^3 + \frac{599}{5120}\varepsilon^5 + \frac{17219}{229376}\varepsilon^7 + etc.$ für den gesuchten größten Werth der Mittelpunctsgleichung.

§S Seite 346 Um die Lichtgleichung zu bestimmen, sey in S die Sonne, in T die Erde und in J, der Jupiter. Ferner sey $ST = r$, $SJ = R$, und die Länge der Sonne $= \odot$ und die Jupiters ♃ bekannt.
Erstens wird man um die Zeit finden zu können, die das Licht, um den Weg vom Jupiter zur Erde zurückzulegen, braucht, die Länge des Weges, dass heisst die Entfernung Jupiters von der ~~Sonne~~ Erde suchen müssen:



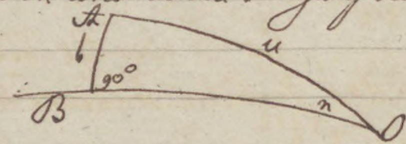
Sey diese Entfernung $JT = D$. In diesem Dreyeke kennt man die Seiten $ST = r$, und $SJ = R$ und den Winkel $TSJ = \odot - \text{♃}$. Es ist aber wen ♁ die Länge der Erde ist: $TSJ = \text{♃} - \text{♁} = \text{♃} - (180 + \odot)$
Da man die zwey Seiten ST, SJ, sammt dem eingeschlossenen Winkel kennt, so hat man:
$D = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\text{♃} - (180° + \odot))} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\odot - \text{♃})}$ Löst man diese Potenz nach dem binomischen Lehrsatz auf, so ist, wenn die höhern als 1ten Potenzen von $\frac{1}{R}$ vernachlässigt werden:
$D = (R^2 + (r^2 - 2Rr \cos(\odot - \text{♃}))^{\frac{1}{2}} = R + \frac{r^2}{2R} - r\cos(\odot - \text{♃}) - \frac{r^2 \cos^2(\odot - \text{♃})}{2R}$ dass heisst:
$D = \frac{r^2}{2R}(1 - \cos^2(\odot - \text{♃})) - r\cos(\odot - \text{♃}) + R = \frac{r^2}{2R}\sin^2(\odot - \text{♃}) - r\cos(\odot - \text{♃}) + R$ oder weil $\sin^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2)$ ist
$D = R + \frac{r^2}{4R} - r\cos(\odot - \text{♃}) - \frac{r^2}{4R}\cos 2(\odot - \text{♃})$ * die gesuchte Entfernung Jupiters von der Erde.

Nimmt man aber die Erd und Jupitersbahn, wie man ohne grosse Fehler thun kann, für Kreise und nimmt die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zur Einheit, so ist: $R = 5.2028$, also
$D = R + \frac{1}{4R} - \cos(\odot - \text{♃}) - \frac{1}{4R}\cos 2(\odot - \text{♃}) = 5.2028 + \frac{1}{20.8112} - \cos(\odot - \text{♃}) - \frac{1}{20.8112}\cos 2(\odot - \text{♃})$
die Entfernung Jupiters von der Erde in Theilen des mittleren Halbmessers der Erdbahn.
Da nun das Licht um diesen letzten zu durchlaufen 493 Zeitsec. braucht, so wird es vom Jupiter zur Erd $493D$ Zeitsecunden brauchen. Es ist aber:
$493''.D = 493''.(5.2028) + \frac{493''}{20.8112} - 493''\cos(\odot - \text{♃}) - \frac{493''}{20.8112}\cos 2(\odot - \text{♃})$

$= 2564''.9804 + 23''.6892 - 493''\cos(\odot - \text{♃}) - 23''.6892 \cos 2(\odot - \text{♃})$ oder endlich:
$493''D = 2588''.6696 - 493''.\cos(\odot - \text{♃}) - 23''.6892 \cos 2(\odot - \text{♃})$ für die gesuchte Zeit;

Will man aber auf die Excentricität der Jupitersbahn Rücksicht nehmen, so ist:
$R = a(1 - \varepsilon \cos m) = 5.2028(1 - 0.048 \cos m)$ weil die Excentricität der Jupitersbahn $= 0.048$ ~~seiner~~ ihrer grossen Axe ist. Für diesen Fall ist also:
$493''.D = 2588.6696 - (0.048)(5.2028)(493)\cos m - 493''.\cos(\odot - \text{♃}) - 23''.6892 \cos 2(\odot - \text{♃})$
nähmlich:
$493''D = 2588''.6696 - 123''\cos m - 493''.\cos(\odot - \text{♃}) - 23''.6892 \cos 2(\odot - \text{♃})$.
Auf die geringe Excentricität der Erdbahn Rücksicht zu nehmen, ist ganz überflüssig.

56 Seite 347. Sey OB ein Stück der Jupitersbahn, OA ein Stück der fixen Bahn eines Satelliten K die Länge des aufsteigenden Knotens beyder Bahnen, l die wahre jovicentrische Länge in der Bahn, u das Argument der Breite, b die Breite des Satelliten über der Jupitersbahn und n die Neigung der fixen Bahn des Satelliten gegen die Jupitersbahn:



Es ist:

$\sin b : \sin u = \sin n : 1$ also $\sin b = \sin u \sin n$, es ist aber $u = l - K$ also auch:

$\sin b = \sin n \sin(l-K)$ oder weil b und u klein sind $b = n \sin(l-K)$

Nach der dortigen Tafel ist aber für den Satelliten für das Jahr 1801+t:

$K = 314°.465 - 0°.267t + 50''.1.t$ (weil die fixe Bahn des Satelliten, die Bahn Jupiters und sein Aequator immer ~~eine~~ gemeinschaftliche Knoten haben) $50''.1$ ist die jährliche Praecession der Nachtgleichen,

oder $K = 314°.465 + 49''.833t = 314°.465 + 0°.01384t$ und daher für den ersten Satelliten: $b = 3°.090 \sin(l - 314°.465 - 0°.01384t)$.

Für die fixe Bahn des zweyten Satelliten ist:

$b' = 3°.074 \sin(l' - 314°.465 - 0°.01384t)$ Es ist aber für die wahre Bahn, wenn db' die Breite des Satelliten über die fixe Bahn bezeichnet:

$db' = 0°.464 \sin(l' - 12°.880 + 12°.0483t - 50''.1.t) = 0°.464 \sin(l' - 12°.880 + 12°.0344t)$

daher die Breite des zweyten Satelliten über der Jupitersbahn:

$b' + db' = b' = 3°.074 \sin(l' - 314°.465 - 0.01384t) + 0°.464 \sin(l' - 12°.880 + 12°.0344t)$

So ist für den dritten, die Breite über der Jupitersbahn:

$b'' = 3°.008 \sin(l'' - 314°.465 - 0.01384t) + 0°.205 \sin(l'' - 222.978 + 2°.5400t)$

und für den vierten:

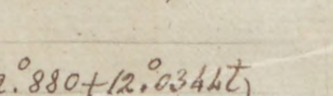
$b''' = 2°.683 \sin(l''' - 314.465 - 0.01384t) + 0°.249 \sin(l''' - 70°.479 + 0°.6776t)$

---

57. Seite 348 Die analytische Bestimmung der Gestalt, unter welcher sich uns Saturns Ring zu jeder Zeit zeigt, siehe: No 61 und No.

---

58 Seite 361 Wenn r den Halbmesser der Planetenbahn, und t die siderische Umlaufszeit und α den Bogen den er in einer Secunde zurücklegt bezeichnet, so ist:



$86400t : 360 = 1'' : \alpha$ also $\alpha = \frac{360°}{24^h} \cdot \frac{1}{t}$.

Der Fall des Planeten zur Sonne aber in einer Secunde oder bc ist gleich $r \,\mathrm{Sinvers}\, \alpha$ $= r(1 - \cos\alpha) = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$, oder auch weil α nur sehr klein ist: $g = \frac{1}{2} r\alpha^2 \sin^2 1''$. Da sich aber auch die Fallhöhen wie die Zeiten verhalten, so ist auch: $g = ct. \frac{r}{t^2}$ wo ct constant ist, und eben so für einen anderen Planeten $g' = ct.\frac{r'}{t'^2}$ und daher auch das Verhältniss beyder Fallhöhen $\frac{g}{g'} = \frac{rt'^2}{r't^2}$. Um nun diese Fallhöhen auf gleiche Entfernungen zu bringen, muss man jede mit dem Quadrate der ihr entsprechenden Entfernung multiplicieren, weil $g:g' = \frac{1}{r^2}:\frac{1}{r'^2}$ also auch $g'r'^2 = gr^2$ ist, so hat man:

$\frac{gr^2}{g'r'^2} = \frac{r^3t'^2}{r'^3t^2}$; Es ist aber das Verhältniss der Anziehung zweyer Körper in derselben Entfernung das Verhältniss ihrer Massen, also ist auch wenn m, m' diese Massen sind: $\frac{m}{m'} = \frac{r^3t'^2}{r'^3t^2}$.

wo die Masse des Satelliten gegen den Hauptplaneten, und die des Hauptplaneten gegen die Sonne, was hier wohl geschehen kann, vernachlässigt wird

---

59. Seite 362 (Nota B)

Wenn wieder T die Umlaufszeit (siderische) der Erde, und α den in einer Secunde zurükgelegten Bogen bezeichnet, so ist: $T(86400) : 15.24^h = 1 : \alpha$ also:

$\alpha = \frac{15.24^h}{86400\,T} = \frac{15}{T}$ oder da $T = 365.25638$ ist: $\log 15 = 1.17609$, $dC \log T = 7.43740$ also $\log \alpha = 8.61349$ und $\alpha = 0.''04107$

Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist aber: $r = 20143000$ geogr. Mln. oder $= (20143000)\,22830$ Pariser Fuss, also die Fallhöhe der der Erde in $1''$ = r Sinvers. a

$= Sin^2 1''.\frac{r\alpha^2}{2}$ = $\log \alpha^2 = 7.22698$ $\log r = \log(20143000) = 7.3041242$, $\log 22830 = 4.3585059$ = 11.6626301; also auch

$\log. g = 7.9597993$ und $g = 0.0091159$ Fuss

Da nun die Körper auf der Oberfläche der Erde in der ersten Secunde um 15.11 Fuss fallen, so ist ~~die~~ wenn a den Erdhalbmesser bezeichnet: (15.11) Fuss: $\frac{1}{a^2} = x : \frac{1}{r^2}$ woraus folgt dass die Körper in einer der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde gleichen Distanz vom Erdmittelpuncte um $15.11.\frac{a^2}{r^2}$ Fuss

oder $\log. 15.11 = 1.17926$; $\log a = \log 19597980 = 7.2922114$; $\log. a^2 = 4.5844228$; $\log r^2 = 3.3252602$

daher $\log x = 2.43842$ und $x = 0.00000002744 5$: Daher haben wir

$\frac{\text{Masse der Sonne}}{\text{Masse der Erde}} = \frac{r\alpha^2 Sin^2 1''\, r^2}{2\,(15.11)a^2} = \frac{r^3 Sin^2 1''.\alpha^2}{2.(15.11).a^2}$ = $\log r^3 = 4.9878903$; $\log Sin^2 1'' = 9.3711498$; $\log.\alpha^2 = 7.2270494$

$\log. r^3 Sin^2 1''.\alpha^2 = 1.5860895$ ferner $\log. 2 = 0.3010300$; $\log. 15.11 = 1.1792645$; $\log a^2 = 4.5844228$ also auch

$\log. 2.(15.11)a^2 = 6.0647173$ also auch: $dC.\log(30.22)a^2 = 3.9352827$ und $\log x = 5.5213722$ daher auch:

$\frac{\text{Masse der Sonne}}{\text{Masse der Erde}} = 332179$

---

60. S. 364. N. (E)

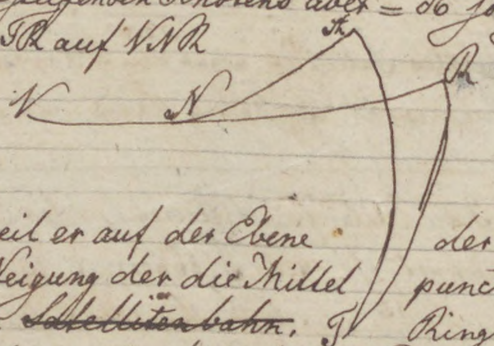
Ist l die Länge des Fadens, a die beobachtete Ablenkung, p die Anziehung des Berges und P die der Erde so ist: $p : P = $ Sinversa $: l\,$Sin a oder da a nur klein ist: $p : P = \frac{1}{2}a^2 : al = p : P = \frac{1}{2}a : l$

Ist aber r die Entfernung des Lothes vom Berge, ~~und~~ R die von der Erde, m die Masse des Berges und M die der Erde, so ist auch: $p : P = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2}$; also auch $\frac{1}{2}a : l = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2}$; es ist aber der Cubikinhalt der Erde $= \frac{4}{3}R^3\pi$ also wenn x die Dichte derselben bezeichnet, so ist: $M = \frac{4}{3}\pi R^3 x$ wo $\pi = 3.14159$ ist. folglich ist auch: $\frac{1}{2}a : l = \frac{m}{r^2} : \frac{4}{3}\pi x R$ daher auch die gesuchte Dichte:

$\frac{4xa\pi R}{6} = \frac{ml}{r^2}$ also $x = \frac{6ml}{4ar^2R\pi} = \frac{3ml}{2Rr^2a\pi}$ **

Cf S. 348 N. (C) Um die Gestalt des Saturnringes, wie er aus der Erde gesehen erscheint, zu bestimmen, nehme man seinen Umfang für die Bahn eines Satelliten an:

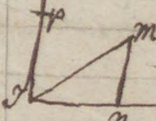
Denkt man sich eine dem Mittelpuncte Saturns concentrische Kugel, so soll die Ebene der Ekliptik diese Kugel in dem größten Kreise VNR, die Ebene des Ringes in dem größten Kreise NA und die Linie die die Mittelpuncte Saturns und der ~~Satellit~~ Erde verbindet in dem Puncte T schneiden. ferner sey die ~~heliocen~~ geocentrische Länge ~~des Ringes~~ ~~Erde~~ Saturns $= \lambda$, die ~~heliocentrische~~ geocentrische Breite $= \beta$, die Neigung der Ringebene gegen die Ekliptik $= n$, die Länge ihres aufsteigenden Knotens aber $= ☊$ so ist; wenn noch V den Frühlingspunct bezeichnet, und TR auf VNR TA aber auf NA senkrecht ist:



$VN = ☊$, $ANR = n$

$TR = -\beta$, $VNR = 180° + \lambda$.

Der Bogen AT aber mißt, weil er auf der Ebene der ~~Satelliten~~ Ringbahn senkrecht ist, ~~mißt die Bogen~~ Neigung der die Mittelpuncte ~~Saturns~~ und der Erde verbindenden Linie gegen die ~~Satellitenbahn~~ Ringbahn.



Sey nun a die halbe große, b die halbe kleine Axe des Ringes T der Mittelpunct Saturns und T der der Erde, so ist in dem Dreyeke mTn, weil mTn der durch AT gemessene Winkel ist; $Tm : mn = 1 : \text{Sin } AT$ nähmlich weil wenn der Ring ein Kreis ist $Tm = Tp = a$, mn aber $= b$ ist: $a : b = 1 : \text{Sin } AT$ nähmlich $\frac{b}{a} = \text{Sin } AT$.

Der Winkel ATR aber ist der Winkel den der durch ~~Saturn~~ Saturn gehende Breitenkreis mit der kleinen Axe des Ringes macht, denn AR ist ein Breitenkreis weil er senkrecht auf der Ecliptik steht, und durch den Mittelpunct der Erde geht, und ist ~~Saturns~~ Saturnsbreitenkreis weil er auch durch ~~Jupiter~~ Saturn geht. Der Kreis AT aber ist senkrecht auf der Ebene der Ringbahn, die kleine Axe liegt also in der Ebene desselben, und der Winkel den er mit dem Breitenkreise macht, muss daher derselbe seyn, den die kleine Axe mit diesem Breitenkreise macht. Kennt man also den Bogen AT und den Winkel ATR so ist die Gestalt des Ringes bestimmt, ~~und kennt man dann noch NA so ist~~ TA und ATR aber kann man gerade so aus NR und TR bestimmen, wie wir Seite 61 No (4) die Declination und Position aus der Länge und Breite bestimmt haben. Nehmen wir nähmlich die Ringebene für den Aequator an, und vergleichen wir dann die bekannten Stücke mit denen in No (4) so ist:

$\alpha = NA$; $\lambda = (☊ - \lambda)$ $ATR = \pi$

$\delta = AT$; $\beta = -\beta$ und daher nach den dortigen Ausdrüken:

$\text{Sin } AT = \text{Sin}(☊ - \lambda) \text{Cos}\beta \text{ Sin. } n - \text{Sin}\beta \text{ Cos } n$ und $\text{Sin } ATR = \frac{\text{Cos}(☊ - \lambda) \text{Sin. } n}{\text{Cos } AT}$; für die Sonne erhält man nun die angeführten Gleichungen gleich, wenn man statt der Erde die Sonne, und statt λ, β, L, B, setzt.

62 Seite 1 Sieh hierüber Nro

63 Seite Siehe deswegen Nro

64 Seite Steht unter Nro

65 Seite 100
Zweyter Theil
alles Folgende

Um die Horizontalparallaxe eines Planeten ~~zu finden~~ für den Aequator zu finden, pflegt man auch an zweyen Orten, die in demselben Meridiane jedoch auf entgegengesetzten Seiten des Aequators liegen, die Zenithdistanz des Planeten an einem und demselben Tage, im Augenblicke der Culmination zu messen; weil dann, die gesuchte Horizontalparallaxe des Planeten für den Aequator aus der einfachen Gleichung:

$$\pi = \frac{(z+z') - (\varphi+\varphi')}{\sin z + \sin z'}$$

entwickeln kann. wo π, die Horizontalparallaxe für den Aequator, φ, z die Polhöhe und Zenithdistanz an einem, φ', z', aber am anderen Orte bezeichnen. Um diese Gleichung zu finden, bemerke man dass wenn C der Mittelpunct, CF der Aequator der Erde und A, B, die beyden Beobachtungsorte, S aber der Ort des Planeten, p, p', aber die Horizontalparallaxe desselben für die beyden Beobachtungsorte ~~bezeichnet~~ ist; in folgender Figur man folgende Gleichheiten hat:

$ACF = \varphi$
$SAD = z$
$SCD =$ wahrer Zd. $= \delta$
$ASC = p$

$BCF = \varphi'$
$SBE = z'$
$SCE =$ wahrer Zd. $= \delta'$
$SCB = p'$

Nun ist in den Dreyecken: SAC, und SCB:

~~$180° - z + p + \delta$~~ $180° - z + 180° - z' + p + p' + \varphi + \varphi' = 360°$ dass heisst:

$(p+p') + (\varphi - \varphi') - (z+z') = 0$ oder:

$p + p' = z + z' - \varphi - \varphi'$ nun ist aber: $p = \pi \sin z$ und $p' = \pi \sin z'$

also auch: $\pi(\sin z + \sin z') = (z+z') - (\varphi+\varphi')$ oder

$$\pi = \frac{(z+z') - (\varphi+\varphi')}{\sin z + \sin z'}$$

66 Siehe hierüber die Nro.

No 67 Littrows populäre Astronomie II Band, Seite 13

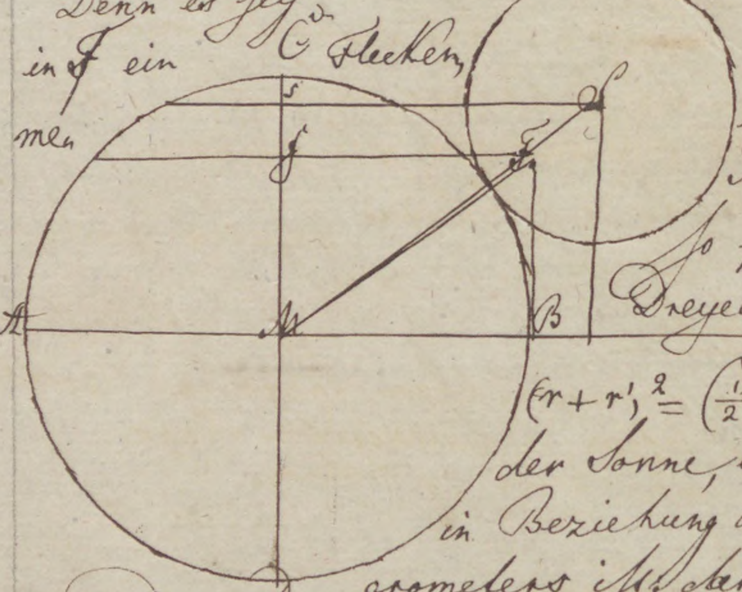
I. Aufgabe.

Die Differenz der Rectascension, Declination, geocentrischen Länge und Breite des Sonnenmittelpunctes und eines ihrer Fleckens zu bestimmen.

Auflösung.

Die Differenz der Rectascensionen, und Declinationen der Sonne und des Fleckens erhält man durch unmittelbare Beobachtungen, und zwar am Besten mit dem Kreismicrometer.

Denn es sey in S der Mittelpunct der Sonne in F ein Flecken, in M der Mittelpunct des Micrometers, r' der Halbmesser des Micrometers, und r der der Sonne so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreyecke SMS':



$(r+r')^2 = (\frac{1}{2} 15 t \cos\delta)^2 + d^2$ wo δ die Declination der Sonne, und d die Declination der Sonne in Beziehung auf den Mittelpunct des Micrometers ist, daraus folgt:

$$d^2 = (r+r')^2 - (\tfrac{1}{2} 15 t \cos\delta)^2$$

Eben so ist für den Flecken, wenn t' die Zeit zwischen dem Ein und Austritte desselben in den Mikrometer bezeichnet, seine Declination in Beziehung auf den Mittelpunct des Micrometers:

$$d'^2 = (r+r')^2 - (\tfrac{1}{2} 15 t' \cos\delta)^2$$ und

$d' - d = dd'$ ist die Differenz der Declinationen des Sonnenmittelpunctes und des Fleckens.

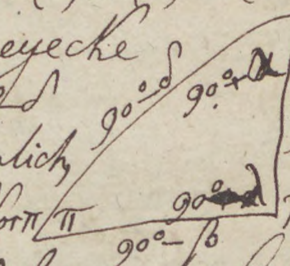
Die Differenz der Rectascensionen des Fleckens und der Sonne aber, wird dem halben Unterschiede zwischen den Summen der Ein und Austritte der Sonne und des Flecken in das Micrometer gleich seyn.

dem nun aus diesen, durch unmittelbare Beobachtungen gegebenen
Differenzen, jene der Länge und Breite abzuleiten, hat man die
beyden allgemeinen Differenzialformeln:

$d(1) \sin(6) + d(2) \sin(1) \cos(6) - d(3) \sin(4) \cos(5) - d(4) \sin(5) = 0$ und

$d(4) \sin(5) \sin(6) = d(4) \sin(3) \sin(2) = d(1) \pm d(3) \cos(2) \pm d(5) \cos(6)$

Und in dem Dreyecke



zwischen 4 auf einanderfolgenden Stücken; für $(1) = 90° - \delta$ $(2) = (90° + \alpha)$ etc. ferner $\beta = 0$, und δ gleich unveränderlich, hat man:

$-d\delta \sin\pi + d\alpha \cos\delta \cos\pi - d\lambda = 0$ und:

$d\lambda = d\delta \sin\pi - d\alpha \cos\delta \cos\pi$ und die 2te zwischen 3 Seiten und einem Winkel, oder zwischen 3 Winkeln und 1 Seite, gibt für $(1) = (90° - \beta)$, $(2) = \pi$ etc. ~~und~~ $\beta = 0$ und e unveränderlich:

$d\alpha \cos\delta \sin\pi = -d\beta + d\lambda \cos\pi$ oder: $d\beta = d\lambda \cos\pi - d\alpha \cos\delta \sin\pi$

so dass also $d\lambda$ und $d\beta$ aus den Gleichungen:

$d\lambda = d\delta \sin\pi - d\alpha \cos\delta \cos\pi$ und

$d\beta = d\lambda \cos\pi - d\alpha \cos\delta \sin\pi$ gegeben sind.

II Aufgabe.

Aus der bekannten geocentrischen Länge und Breite des Fleckens dessen heliocentrische Länge und Breite zu bestimmen.

Auflösung.

Sey F der Flecken S der Ort der Sonne und E jener der Erde ferner f der auf die Ekliptick projicirte Ort des Fleckens, man verbinde nun diese 3 Orte durch gerade Linien, so ist dadurch in der Ebene der Ekliptik das Dreyeck SEf entstanden, in welchem, wenn r den Sonnenhalbmesser, l, b, die heliocentrische, ~~Läng~~ λ, β, aber die geocentrische Länge und Breite und R die Distanz der Erde vom Sonnenmittelpuncte, ϱ aber jene der Erde vom Flecken, und endlich L die Länge der ♈ bezeichnet, ist:

$SE = R$; $Sf = r \cos b$; $Ef = \varrho \cos\beta$ oder $Sf = r'$; $Ef = \varrho'$ dann, wenn ♈S die Nachtgleichen-Linie ist: $S = ♈SE - ♈Sf = L - l$; $f = l - \lambda$; endlich:

$E = 180° - L + l - l + \lambda = 180° - (L - \lambda)$

Nun finden aber zwischen den Seiten und Winkeln des Dreyeckes

SEf folgende Proportionen statt:

$Sf : SE : Ef = \sin E : \sin f : \sin S$

$SE : Sf : Ef = \sin f : \sin E : \sin S$ oder

$Ef : SE : Sf = \sin S : \sin f : \sin E$

$r' : R : \varrho' = \sin(\mathfrak{L}-\lambda) : \sin(l-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-l)$

$R : r' : \varrho' = \sin(\mathfrak{L}-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-l)$

$\varrho' : R : r' = \sin(\mathfrak{L}-l) : \sin(l-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-\lambda)$

Für unseren Fall sind die zwey Verhältnisse brauchbar:

$r' : \varrho' = \sin(\mathfrak{L}-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-l)$ oder: $r \cos b : \varrho \cos \beta = \sin(\mathfrak{L}-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-l)$ und

$R : \varrho' = \sin(l-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-\lambda)$ oder: $R : \varrho \cos \beta = \sin(l-\lambda) : \sin(\mathfrak{L}-\lambda)$

Hieraus folgt:

$$\sin(l-\lambda) = \frac{R \sin(\mathfrak{L}-\lambda)}{r \cos b} \text{ und } \sin(\mathfrak{L}-l) = \frac{\varrho \cos \beta}{r \cos b} \sin(\mathfrak{L}-\lambda)$$

oder weil R sehr wenig von ϱ unterschieden seyn wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin(l-\lambda) &= \frac{R}{r \cos b} \sin(\mathfrak{L}-\lambda) \\ \sin(\mathfrak{L}-l) &= \frac{R \cos \beta}{r \cos b} \sin(\mathfrak{L}-\lambda) \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Die Breite des Fleckens aber ist $Ff = r \sin b = \varrho \sin \beta = R \sin \beta$ weil ϱ nahe gleich R ist, es ist daher:

$r \sin b = R \sin \beta$ und daraus unmittelbar die heliocentrische Breite des Fleckens, aus:

$$\sin b = \frac{R}{r} \sin \beta = \text{Sonnenparallaxe} \cdot \sin \beta$$

III. Aufgabe.

Aus der gegebenen heliocentrischen Länge und Breite des Fleckens, die Neigung n der Ebene des Sonnenaequators gegen die Ekliptik, die constante heliocentrische Declination D des Fleckens, ferner noch die Chorde $\frac{1}{2}m$ zwischen dem ersten und dritten Beobachtung gesehenen Orte des Fleckens und endlich noch die Revolutionszeit der Sonne zu bestimmen.

Auflösung.

Da Aufgaben solcher Art in der ~~...~~ Astronomie sehr häufig vorkommen, so wollen wir sie hier ganz allgemein auflösen.

Es seyen XYZ, X'Y'Z' zwey Octanten einer Kugelfläche welche unter sich den Winkel XKX' bilden, und P irgend ein Punct in oder außerhalb den beyden Flächen, so ist nach dem §. 28. No 21 aufgeführten Satze:

$$\cos PX' = \cos PX \cos XX' + \cos PY \cos X'Y + \cos PZ \cos X'Z$$
$$\cos PY' = \cos PX \cos XY' + \cos PY \cos Y'Y + \cos PZ \cos Y'Z$$
$$\cos PZ' = \cos PX \cos Z'X + \cos PY \cos Z'Y + \cos PZ \cos Z'Z$$

Nennen wir nun die senkrechten Abstände des Punctes P von ZY, ZX, XY, nach der Ordnung x, y, z, und die senkrechten Abstände desselben Punctes von den Bogen Z'Y', Z'X', X'Y' nach der Ordnung x', y', z', sey ferner r der Halbmesser jener Kugel, zu welcher die beyden Octanten XYZ & X'Y'Z' gehören, so ist:

$x = r\cos PX$ und $x' = r\cos PX'$
$y = r\cos PY$ und $y' = r\cos PY'$
$z = r\cos PZ$ und $z' = r\cos PZ'$

oder wenn man für $\cos PX'$, $\cos PY'$, $\cos PZ'$ ihre Werthe substituirt; so erhält man:

$$x' = r\cos PX \cos XX' + r\cos PY \cos X'Y + r\cos PZ \cos X'Z$$
$$y' = r\cos PX \cos XY' + r\cos PY \cos Y'Y + r\cos PZ \cos Y'Z$$
$$z' = r\cos PX \cos XZ' + r\cos PY \cos Z'Y + r\cos PZ \cos Z'Z$$

oder weiter, weil $r\cos PX = x$, $r\cos PY = y$ etc ist, so ist auch:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos XX' + y\cos X'Y + z\cos X'Z \\ y' &= x\cos XY' + y\cos Y'Y + z\cos Y'Z \\ z' &= x\cos XZ' + y\cos Z'Y + z\cos Z'Z \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Es sey nun $KX' = \varphi$, $KX = \psi$ und XKX' oder die Neigung beyder Ebenen gegeneinander $= \theta$, so ist:

I. Aus den Dreyecken X'KX, X'KY, und X'KZ worinn man hat:

1tens $XKX' = \theta$; $X'K = \varphi$; $XK = \psi$ in dem Dreyecke: XKX'
2tens $X'KY = 180° - \theta$; $X'K = \varphi$; $YK = 90° - \psi$ " " " : $X'KY$
3tens $X'KZ = 90° - \theta$; $X'K = \varphi$; $ZK = 90°$ " " " : $X'KZ$

$\cos X'X = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\theta$
$\cos X'Y = \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\theta$
$\cos X'Z = \sin\varphi \sin\theta$

II. Aus den Dreyecken Y'KX, Y'KY, Y'KZ worinn ist: hat man:

1tens $\Delta Y'KX$: $Y'K = 90° - \varphi$; $KX = \psi$; $Y'KX = 180° - \theta$
2tens $\Delta Y'KY$: $Y'K = 90° - \varphi$; $YK = 90° - \psi$; $YKY' = \theta$
3tens $\Delta Y'KZ$: $Y'K = 90° - \varphi$; $ZK = 90°$; $Y'KZ = 90° + \theta$

$\cos Y'X = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta$
$\cos Y'Y = \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta$
$\cos Y'Z = \cos\varphi \sin\theta$

III. Aus den Dreyecken: Z'KX; Z'KY, Z'KZ in welchen ist:

1tens $\Delta Z'KX$: $Z'K = 90°$; $KX = \psi$; $Z'KX = 90° + \theta$
2tens $\Delta Z'KY$: $Z'K = 90°$; $KY = 90° - \varphi$; $Z'KY = 90° - \theta$
3tens $\Delta Z'KZ$: $Z'K = 90°$; $KZ = 90°$; $Z'KZ = \theta$

$\cos Z'X = -\sin\psi \sin\theta$
$\cos Z'Y = +\cos\psi \sin\theta$
$\cos Z'Z = \cos\theta$

Nun sollte man diese letztgefundenen Werthe von $X'X$, $X'Y$, $X'Z$ etc. etc. oben in den Gleichungen (I) substituiren, da wir aber zu unserem Zwecke bloss die letzte dieser Gleichungen brauchen, und daher die Substitution auch nur für diese ausführen, wodurch wir erhalten:

$z' = -x\sin\psi\sin\theta + y\cos\psi\sin\theta + z\cos\theta$ oder durch $\cos\theta$ dividirt:

$z'\sec\theta = -x\sin\psi\,tg\theta + y\cos\psi\,tg\theta + z$ woraus folgt:

$z = x\sin\psi\,tg\theta - y\cos\psi\,tg\theta + z'\sec.\theta$

Setzt man nun die constanten Factoren von x, y, z, der Reihe nach, gleich: A, B, und D, so ist:

$z = Ax + By + D$ ein Ausdruck den man die Gleichung der Ebene nennt, und in welchem $A = +\sin\psi\,tg\theta$; $B = -\cos\psi\,tg\theta$, und $D = \pm\sec.\theta$ ist.

Geht man wieder auf die ursprünglichen Bedeutungen von A, B, D, zurück, so erhält man:

$tg\psi = -\frac{A}{B}$; $tg^2\theta(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = A^2 + B^2$ nähmlich: $tg\theta = \sqrt{A^2+B^2}$

oder: $tg\theta(\sin\psi - \cos\psi) = A + B$ d.h.: $tg.\theta = \frac{A+B}{\sin\psi - \cos\psi}$

nähmlich: $tg\theta = \frac{A+B}{2\sin 45^\circ \sin\frac{1}{2}(2\psi - 90^\circ)} = \frac{A+B}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}(2\psi - 90^\circ)} = \frac{A+B}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(2\psi - 90^\circ)}$

oder endlich: $tg\theta = \frac{A+B}{1.414\sin\frac{1}{2}(2\psi - 90^\circ)}$.

Kehren wir nun von dieser allgemeinen Aufgabe zu unserem speciellen Fälle zurück, um die allgemeine Brauchbarkeit derselben zu sehen.

Die allgemeine Auflösung gab uns die Gleichung:

$z' = x\cos Z'X + y\cos Z'Y + z\cos Z'Z$

Bezeichne nun für unseren Fall $Z'Y'X'$ die Ebene des Sonnenaequators, und XYZ jene der Ekliptick, und behalten wir für die heliocentrischen Längen und Breiten die angenommenen Bezeichnungen bey, so sind die senkrechten Abstände des Punctes P oder hier den Flecken bezeichnet, von der Ebene der Ekliptick in Beziehung auf den Mittelpunct der Sonne:

$x = r\cos b\cos l$ also: $z' = r\cos b\cos l\cos Z'X + r\cos b\sin l\cos Z'Y + r\sin b\cos Z'Z$

$y = r\cos b\sin l$ und daraus:

$r\sin b = z'\sec.Z'Z - r\cos b\sin l\cos Z'Y\sec.Z'Z - r\cos b\cos l\cos Z'X\sec Z'Z$

$z = r\sin b$

oder: $\sin b = \frac{z'}{r}\sec.Z'Z - \cos b\sin l\cos Z'Y\sec Z'Z - \cos b\cos l\cos Z'X\sec Z'Z$

Setzen wir nun die Constanten Grössen: $-\cos Z'X\sec Z'Z = +A$; $\cos Z'Y\sec Z'Z = +B$ und: $\frac{z'}{r}\sec Z'Z = D$; so ist:

$\sin b = A\cos b\cos l + B\cos b\sin l + D$ oder mit Littrow der für A, B, D

x, y, z setzt:

$$\sin b = \cos b \cos l\, x + \cos b \sin l\, y + z$$

Zwey andere Beobachtungen des Fleckens geben eben zwey andere Gleichungen so dass man aus drey Beobachtungen die Gleichungen hat:

$$\sin b = x \cos b \cos l + y \cos b \sin l + z$$
$$\sin b' = x \cos b' \cos l' + y \cos b' \sin l' + z$$
$$\sin b'' = x \cos b'' \cos l'' + y \cos b'' \sin l'' + z$$

Und daraus wird man die unbekannten Constanten x, y, z, durch gewöhnliche Elimination bestimmen können; kennt man aber x, y, und z so gibt die allgemeine Auflösung für $\vartheta = n$; $\psi = k$:

$$\operatorname{tg} k = -\frac{x}{y} \; ; \; \operatorname{tg} n = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Um nun die constante heliocentrische Declination D des Fleckens zu bestimmen, hat man: $z' = \dfrac{r.\text{ mit dem senkrechten Abstande der Fl. v. d. Ekl.}}{\sec ZZ' = \text{Neigung} = \sec n}$

$z' = r \sin D$; Es ist aber:

nähmlich $z' = \dfrac{rz}{\sec n} = \dfrac{r^2 \sin b}{\sec n}$ also auch:

$$\frac{r^2 \sin b}{\sec. n} = r \sin D \text{ also } \sin D = r \sin b \cos n.$$

Da man theils der Bestimmung der Constanten x, y, z, theils auch der Bestimmung der Rotation der Sonne wegen mehrere Orte des Fleckens haben muss, so pflegt man diesen an 3 aufeinander folgenden Tagen zu beobachten, und daraus wird man die Chorde zwischen dem Orte des Fleckens in der ersten und dritten Beobachtung, ~~und~~ daraus den Winkel den der Bogen dieser Chorde im Mittelpuncte der Sonne misst, und daraus endlich unmittelbar die Rotation der Sonne bestimmen können.

Seyen M, N die Orte des Fleckens in der ersten und dritten Beobachtung, beyde verbinde man durch die rechtwinkeligen Coordinaten Mp, ps, Ss & Nq, qt, St mit dem Centrum der Sonne und durch die Chorde MN miteinander, so ist, wenn man noch aus den Puncten N und q zwey parallelen Nb und qa zu den Coordinaten MN und st zieht:

$$MN^2 = Mb^2 + bN^2 = C^2 = (z''-z)^2 + bN^2 = (z''-z)^2 + (y''-y)^2 + (x''-x)^2$$

Es sey nun m der Winkel den die an die beyden Orte M, N des Fleckens gezogenen Secanten im Centrum der Sonne einschliessen, so ist, da r cos D der Halbmesser des Parallelkreises des Fleckens ist: nahmlich:

$$\frac{1}{2} C = r \cos D \sin \frac{1}{2} m$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(z''-z)^2+(y''-y)^2+(x''-x)^2} = r\cos D \sin\tfrac{1}{2}m \quad \text{oder:}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}m = \frac{\sqrt{(z''-z)^2+(y''-y)^2+(x''-x)^2}}{2r\cos D}$$

Es ist aber:

$$(z''-z)^2 = (r\sin b'' - r\sin b)^2 = r^2(\sin^2 b'' - 2\sin b''\sin b + \sin^2 b)$$

$$(y''-y)^2 = (r\cos b''\sin l'' - r\cos b\sin l)^2 = r^2(\sin^2 l''\cos^2 b'' - 2\sin l\sin l''\cos b\cos b'' + \cos^2 b\sin^2 l)$$

$$(x''-x)^2 = (r\cos b''\cos l'' - r\cos b\cos l)^2 = r^2(\cos^2 l''\cos^2 b'' - 2\cos l\cos l''\cos b\cos b'' + \cos^2 b\cos^2 l)$$

$$(z''-z)^2+(y''-y)^2+(x''-x)^2 = r^2\left\{\begin{array}{l}\sin^2 b'' - 2\sin b''\sin b + \sin^2 b + \sin^2 l''\cos^2 b'' - 2\sin l\sin l''\cos b\cos b'' \\ + \cos^2 b\sin^2 l + \cos^2 l''\cos^2 b'' - 2\cos l\cos l''\cos b\cos b'' + \cos^2 b\cos^2 l\end{array}\right\}$$

$$= r^2\left\{\begin{array}{l}\sin^2 b'' - 2\sin b''\sin b + \sin^2 b + \cos^2 b''(\sin^2 l'' + \cos^2 l'') + \cos^2 b(\sin^2 l + \cos^2 l) \\ - 2\cos b\cos b''(\sin l\sin l'' + \cos l\cos l'')\end{array}\right.$$

$$= r^2\left\{\sin^2 b'' - 2\sin b''\sin b + \sin^2 b + \cos^2 b'' + \cos^2 b - 2\cos b\cos b''\cos(l''-l)\right\}$$

$$= r^2\left\{2(1 - \sin b''\sin b - \cos b\cos b''\cos(l''-l))\right\}$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}m = \frac{r\sqrt{2\cdot(1-\sin b''\sin b - \cos b\cos b''\cos(l''-l))}}{2r\cos D} \quad \text{oder}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}m = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2(1-\sin b''\sin b - \cos b\cos b''\cos(l''-l))}\right\}\sec D.$$

Heisst nun T die Zeit der Rotation der Sonne und ϑ die Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung; so ist endlich:

$$m : \vartheta = 360° : T$$ oder endlich die Rotation der Sonne

$$T = 360°\cdot\frac{\vartheta}{m} \quad ***$$

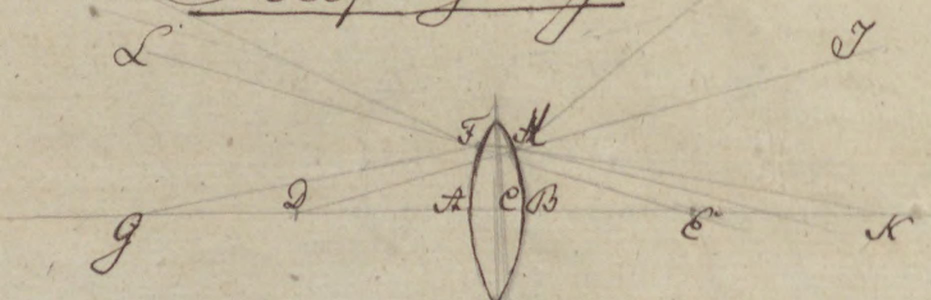
No. 68 Siehe Seite 59.

No. 69

Aufgabe.

Die Gleichungen zu bestimmen, welche die Gesetze der Formation der Bilder durch Brechung der Lichtstrahlen enthalten.

Auflösung.



Es sey ACBHF eine biconvexe Glaslinse DE ihre Axe und D, E, die Mittelpuncte jener Kugeln, zu welchen die Flächen HB und FA gehören. ferner sey G ein leuchtender Punct irgend wo in der Axe der Linse DE dessen Strahl die Linse in dem Puncte F treffe, nach dem Durchgange aber in H verlasse, und nach K gebrochen werde endlich seyen DF, EL, Lothe gegen die Puncte H und F gezogen.

Nach diesen Voraussetzungen, hat man aus der Natur der Brechung:

$\sin GFL : \sin EFH = n : 1$
$\sin FHD : \sin IHK = 1 : n$

Hier kann man nun, da wenn man mit Linsen gut sehen soll, alle von der Axe zuweit auffallende Strahlen ausschliessen muss und daher der Einfalls, so wie der Refractions winkel nur klein sind, die Bogen für die Sinus setzen, wodurch man erhält:

$GFL : EFH = n : 1$ || $GFL = n . EFH$ || also: $GFL + IHK = n(EFH + FHD)$
$FHD : IHK = 1 : n$ || $IHK = n . FHD$ ||

Es ist aber $GFL = G + E$; und $IHK = K + D$ also auch:

$$G + K + D + E = n(EFH + FHD)$$

Ferner ist: $EFH + FHD = D + E$ also:

$$G + K + D + E = n(D + E) \quad \text{daher} \quad G + K = (D + E)(n - 1)$$

nun ist:

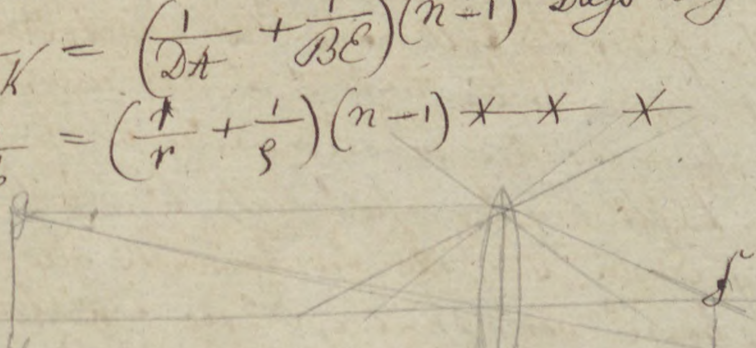
$\operatorname{tg} FGB = \frac{FA}{AG} = FGB$; $\operatorname{tg} AKB = \frac{HB}{BK} = AKB$; $\operatorname{tg} FDA = \frac{FA}{DA} = FDA$

$\operatorname{tg} FEB = \frac{HB}{BE} = FEB$ also auch:

$$\frac{FA}{AG} + \frac{HB}{BK} = \left(\frac{FA}{DA} + \frac{HB}{BE}\right)(n-1)$$ es ist aber: $FA = HB$ also auch:

$$\frac{1}{AG} + \frac{1}{BK} = \left(\frac{1}{DA} + \frac{1}{BE}\right)(n-1)$$ das heisst:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right)(n-1)$$ * * *



Geben wir nun dem Gegenstande eine Höhe GH und nehmen wir an, dass seine Strahlen mit der Axe parallel auf die Linse auffallen, also dass das Bild des leuchtenden Gegenstandes sich im Brennpuncte bilde, so hat man nach dem Früheren:

$$LFG = n . HFE$$
$$IHf = n . FHD$$

Nun ist: $\angle FG + IHf = (MFE + FHD).n$ oder:

$E + D + f = (D+E)n$ also: $f = (D+E)(n-1)$

Es ist aber:

$tg\,f = \frac{FA}{fC}$; $tg\,D = \frac{MB}{DC}$; $tg\,E = \frac{FA}{EC}$ also auch:

$\frac{FA}{fC} = \left(\frac{MB}{DC} + \frac{FA}{EC}\right)(n-1)$ d. h. weil $FA = MB$ ist:

$\frac{1}{fC} = \left(\frac{1}{DC} + \frac{1}{EC}\right)(n-1)$ nähmlich:

$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right)(n-1)$ daher ist auch da $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right)(n-1)$ ist;

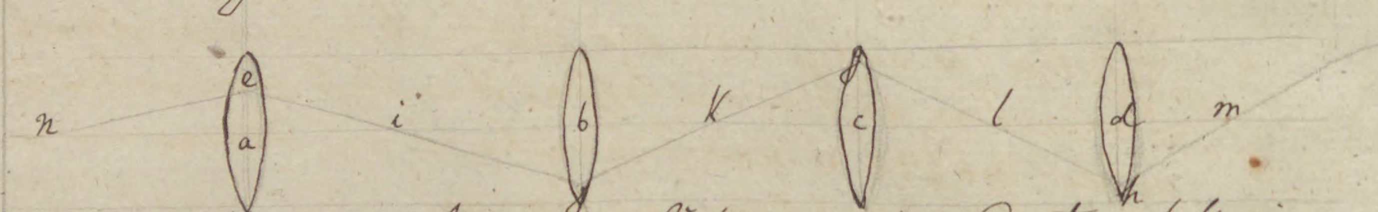
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right)$$; daraus folgt:

$\frac{ab}{f} = b + a$ also: $b = \frac{af}{a-f}$; und : $a : b = A : B$ also:

$B = \frac{Ab}{a} = \frac{Af}{a-f}$ * und die Voraussetzung dass die Bilder der Gegenstände sich im Brennpuncte bilden, hat bey allen ~~[illegible]~~ sehr entfernten Objecten mit Grund statt.

70 Aufgabe:

Allgemeine Theorie der Fernröhre.



~~Seyen~~ a, b, c, d ein System von Linsen, aus dem Puncte n falle ein Lichtstrahl auf die 1te Linse in dem Puncte e, auf die zweyte in f, u. s. w. und treffe die Axe in den Puncten i, k, l, m etc.

~~Nun~~ sey ferner die Entfernung des Punctes der Axe wo der Strahl herkömmt von der ersten Linse $= a'$, der zweyten b' der nten n, die und die Entfernung des Punctes wo der Strahl nach der Brechung die Axe wieder trifft, bey der ersten Linse b', bey der 2ten b'', der nten n

weiter sey δ' die Tangente des Winkels des Strahles ~~mit~~ der Axe vor der ersten, δ'' vor der 2ten, δ^n vor der nten Brechung desselben, und eben so s', s'', s''', s^n der Abstand des Punctes wo der Strahl die erste, ~~[illegible]~~ 2te, 3te, nte Linse trifft, von ihrem Mittelpuncte

Endlich h' die Entfernung der ersten Linse von der 2ten, h'' jene der 2ten von der 3ten h^n jene der $n-1$ von der nten. So sind in diesem Systeme von Gläsern folgende Gleichungen enthalten:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
h' = b' + a'' & \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'} & s' = a'\vartheta' = b'\vartheta'' & s' + s'' = (b' + a'')\vartheta'' & \vartheta' + \vartheta'' = \frac{s'}{a'} + \frac{s'}{b'} \\
h'' = b'' + a''' & \frac{1}{a''} + \frac{1}{b''} = \frac{1}{f''} & s'' = a''\vartheta'' = b''\vartheta''' & s'' + s''' = (b'' + a''')\vartheta''' & \vartheta'' + \vartheta''' = \frac{s''}{a''} + \frac{s''}{b''} \\
h''' = b''' + a^{IV} & \frac{1}{a'''} + \frac{1}{b'''} = \frac{1}{f'''} & s''' = a'''\vartheta''' = b'''\vartheta^{IV} & s''' + s^{IV} = (b''' + a^{IV})\vartheta^{IV} & \vartheta''' + \vartheta^{IV} = \frac{s'''}{a'''} + \frac{s'''}{b'''} \\
 & & s^{IV} = a^{IV}\vartheta^{IV} = b^{IV}\vartheta^{V} & - - - - = - - - - & - - - - \\
- - - - - - & - - - - & - - - - & - - - - = - - - - & - - - - \\
h^n = b^n + a^{n+1} & \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{f^n} & s^n = a^n\vartheta^n = b^n\vartheta^{n+1} & s^n + s^{n+1} = (b^n + a^{n+1})\vartheta^{n+1} & \vartheta^n + \vartheta^{n+1} = \frac{s^n}{a^n} + \frac{s^n}{b^n}
\end{array}$$

dass heisst, die zwey letzten Reihen von Gleichungen, können auch so geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l|l}
s' + s'' = h'\vartheta'' & \vartheta' + \vartheta'' = \frac{s'}{f'} \\
s'' + s''' = h''\vartheta''' & \vartheta'' + \vartheta''' = \frac{s''}{f''} \\
s''' + s^{IV} = h'''\vartheta^{IV} & \vartheta''' + \vartheta^{IV} = \frac{s'''}{f'''} \\
s^{IV} + s^{V} = h^{IV}\vartheta^{V} & \vartheta^{IV} + \vartheta^{V} = \frac{s^{IV}}{f^{IV}} \\
- - - - = - - - - & - - - - = - - - - \\
- - - - = - - - - & - - - - - - \\
s^n + s^{n+1} = h^n\vartheta^{n+1} & \vartheta^n + \vartheta^{n+1} = \frac{s^n}{f^n}
\end{array}\right\} (A)$$

Und in dieser Gestalt enthalten diese Gleichungen die ich (A) nenne die ganze Theorie der Fernröhre. Ihre Anzahl ist immer $(2n-1)$ während die Anzahl der unbekannten Grössen $= (2n+1)$ ist, so dass sich letztere bis auf 2, alle aus diesen Gleichungen durch gewöhnliche Elimination bestimmen lassen. Für diese zwey wollen wir die beyden ersten Grössen s' und ϑ' annehmen, und daraus und aus den Werthen von f' und h' alle übrigen bestimmen.

Entwickeln wir nun aus jenen allgemeinen Gleichungen die Theorie des eigentlichen Astronomischen Fernrohres mit zwey Gläsern, so ist: aus jenen allgemeinen Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l}
s' + s'' = h'\vartheta'' & \text{Hieraus folgt nun:} \\
\vartheta' + \vartheta'' = \frac{s'}{f'} & s'' = h'\vartheta'' - s' \text{ und:} \\
\vartheta'' + \vartheta''' = \frac{s''}{f''} & \vartheta'' = \frac{s'}{f'} - \vartheta' \text{ daher auch:}
\end{array}$$

$$s'' = \frac{h's'}{f'} - h'\vartheta' - s'$$

$$= \frac{h's'}{f'} - h'\vartheta' - f'\vartheta' + f'\vartheta''$$

$$= \frac{h's'}{f'} - h'\vartheta' - f'\vartheta' + f'\frac{s'}{f'} - f'\vartheta'$$

$$= \frac{h's'}{f'} - h'\vartheta' - f'\vartheta' + f'\left(\frac{s'}{f'} - \vartheta'\right)$$

nähmlich:

$$s'' = s'\left(\frac{h'}{f'} - 1\right) - h'\vartheta'$$

und dieses s'' gibt die Öffnung die die Linse haben muss, um die Strahlen des Gegenstandes gut aufnehmen, und in ein deutliches Bild vereinen zu können.

Nun haben wir die Gleichung:

$\vartheta''' + \vartheta'' = \frac{s''}{f''}$; daher auch: $\vartheta''' = \frac{s''}{f''} - \vartheta'' = \frac{s'}{f''}\left(\frac{h'}{f'} - 1\right) - \frac{h'}{f''}\vartheta' - \frac{s'}{f'} + \vartheta'$

oder: $\vartheta''' = \frac{s'}{f''}\left(\frac{h'}{f'} - 1\right) - \frac{s'}{f'} - \left(\frac{h'}{f''} - 1\right)\vartheta'$ und dieses ϑ''' ist der Winkel unter welchem man das Bild des Gegenstandes sieht.

III. Die Vergrösserung ist aber:

$$= \frac{\vartheta'''}{\vartheta'} = \frac{s'}{f''\vartheta'}\left(\frac{h'}{f'} - 1\right) - \frac{s'}{f'\vartheta'} - \frac{h'}{f''} + 1$$

Nun ist aber nothwendig zum deutlichen Sehen, dass $h' = f' + f''$ sey, und zwar bey allen optischen Instrumenten ist diess die Bedingungsgleichung. Setzt man daher in der obigen Gleichung: $h' = f' + f''$ so ist, die Vergrösserung:

$$\frac{\vartheta'''}{\vartheta'} = \frac{s'}{f''\vartheta'}\left(\frac{f' + f''}{f'} - 1\right) - \frac{s'}{f'\vartheta'} - \frac{f' + f''}{f''} + 1 = \cancel{\frac{s'}{f''\vartheta'}\left(\frac{f' + f''}{f'} - 1\right) - \frac{s'}{f'\vartheta'} - \frac{f'}{f''} + 1 - 1}$$

$$= \frac{s'}{f''\vartheta'} + \frac{s'}{f''\vartheta'} - \frac{s'}{f''\vartheta'} - \frac{s'}{f'\vartheta'} - \frac{f'}{f''} + 1 - 1$$

$$= -\frac{f'}{f''} = -\left(\frac{h'}{f''} - 1\right) *$$

IV. der Ort des Auges, hinter dem letzten Glase ist:

$$b'' = \frac{s''}{\vartheta'''} = \frac{\left(\frac{h'}{f'} - 1\right)s' - h'\vartheta'}{-\frac{s'}{f'} + \left(\frac{h'}{f'} - 1\right)\cdot\frac{s'}{f''} - \left(\frac{h'}{f''} - 1\right)\vartheta'} = \frac{\left(\frac{h'}{f'} - 1\right)s' - h'\vartheta'}{\left(\frac{f' + f''}{f'} - 1\right)\cdot\frac{s'}{f''} - \left(\frac{f' + f''}{f''} - 1\right)\vartheta' - \frac{s'}{f'}}$$

nähmlich:

$$b'' = \frac{\left(\frac{h'}{f'} - 1\right)s' - h'\vartheta'}{\frac{s'}{f'} - \frac{s'}{f'} - \left(\frac{f'}{f''} - 1\right)\vartheta'} = \frac{\left(\frac{h'}{f'} - 1\right)s' - h'\vartheta'}{\left(1 - \frac{h'}{f''}\right)\vartheta'}$$

oder wenn man bloss den von s' unabhängigen Theil nimmt:

$$b'' = \frac{h'\vartheta'}{\left(\frac{h'}{f''} - 1\right)\vartheta'} = \frac{h'}{\left(\frac{h'}{f''} - 1\right)} = \frac{(f' + f'')f''}{f'}$$

Da die nöthige Oeffnung des Oculares gleich:

$A' s'' = -h'\vartheta' + \left(\frac{h'}{f'} - 1\right)$ und wieder der von s' unabhängige Theil $= -h'\vartheta'$ ist; welches $= -(f' + f'')\vartheta'$ ist, so folgt daraus; für das halbe Gesichtsfeld:

$$\vartheta' = -\frac{A''}{f' + f''} = +\frac{A''}{f'' - f'}$$

Es ist daher allgemein; wenn für k nach der Reihe die Werthe 1, 2, 3 etc. gesetzt werden:

$$s^k = A^k s' + B^k \delta'$$
$$\delta^k = D^k s' + E^k \delta'$$

wo z.B. A, B, D, E; aus folgenden Gleichungen gefunden werden:

$$A^{k+1} = D^{k+1} h^k - A^k; \quad B^{k+1} = E^{k+1} h^k - E^k$$
$$D^{k+1} = \frac{A^k}{\delta^k} - D^k; \quad E^{k+1} = \frac{B^k}{\delta^k} - E^k$$

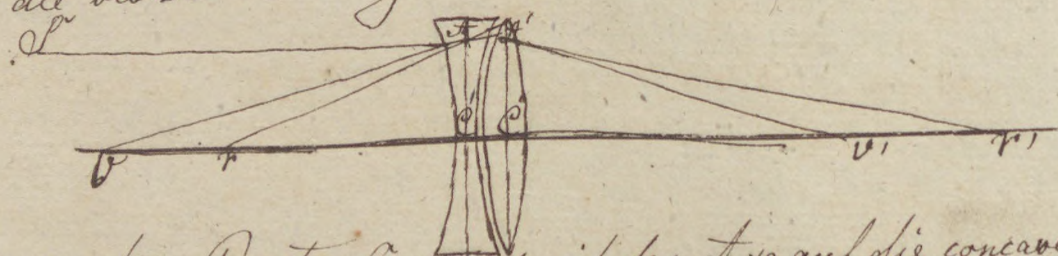
71 ## Theorie der Achromaten.

Gewöhnliche Fernröhre, mit einem Objectivglase, zeigen der bey jeder Brechung entstehenden Trennung der Lichtstrahls in seine verschiedenen Farben wegen, undeutlich, da jedes Object mit einem farbigen Saume umgeben scheint; weil die verschiedenartig gefärbten Strahlen nach der Brechung im Verhältnisse ihrer Entfernung von dem Mittelpuncte der Linse in dem Augenblicke, da sie auf die Linse auffallen – später oder früher vereinigt werden, und daher eigentlich sehr viele ~~B~~ und verschiedenfällig gefärbte Bilder, und an besonderen Orten von demselben Gegenstande entstehen.

Unter allen Strahlen werden die rothen am wenigsten, die violetten aber am meisten gebrochen, jene fallen daher am nächsten diese am weitesten vom Mittelpuncte der Linse auf dieselbe auf, so dass die übrigen Bilder alle zwischen den beyden von der gesagten Farbe entstanden sind. Bey der Brechung des Strahles durch convexe Linsen wird daher der rothen Strahlen nach der Brechung sich am letzten die violetten aber am ersten vereinigen, nähmlich das Bild der violetten Strahlen wird der Linse am nächsten, das der rothen aber am entferntesten stehen. Bey der Brechung durch concave Linsen wird aber das Gegentheil Statt haben, weil da die Strahlen nach der Brechung nicht con sondern divergiren, man wird daher, wenn man die Farbenzerstreuung aufheben will, statt einem einfachen ein doppeltes Objectiv machen müssen, das aus einer concaven und einer convexen Linse zusammengesetzt ist.

Da nun auch Dollond fand, daß nicht jede Glasart das Licht auf gleiche Weise breche, so wird man noch die beyden Linsen des doppelten Objectives aus zweyen verschiedenen Glasarten verferti-gen, und zwar aus solchen, dass die Farbenzerstreuung der ersten durch jene der zweyten aufgehoben werde, wozu ohnedem auch die ~~Verbindung~~ Gestalt der beyden verbundenen Gläser sehr viel beyträgt. Die Analyse gibt genau, wie die beyden Linsen des Objectives beschaffen seyn müssen um daß das Bild des Objectes völlig farbenlos sey.

Denn es sey C' eine concave, C aber eine convexe Glaslinse die erste von einer Glasart, für welche das Brechungsverhältniss für die nähe in der Mitte des Farbenbildes liegenden Strahlen $= n$, für die violleten wieder $= N$ ist; und die zweyte Linse von einer Glasart, für welche des Brechungsverhältniss für die mittleren Strahlen $= n'$ und für die violleten $= N'$ ist.



Der von dem Puncte S parallel mit der Axe auf die concave Linse auf-fallende Strahl SA, wird von ihr so gebrochen als ob sein mittlerer Strahl aus dem Puncte r, sein violleter aber aus dem Puncte v käme. Behaltet man nun die in No 69 angenommenen Bedeutungen so hat man:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right)$$ oder wenn man beyde Flächen zu einer Kugel gehörig nimmt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{r}$$

Sey nun R der Halbmesser der concaven Linse, so ist: $r = -R$, und $a = \infty$ daher auch:

$$\frac{1}{b} = -\frac{2(n-1)}{R}$$; für den mittleren Strahl nun ist:

$b = Cr$ und $n = n$, und für den violleten $b = Cv$ und $n = N$ daher auch

$$\frac{1}{Cr} = -\frac{2(n-1)}{R} \text{ und } \frac{1}{Cv} = -\frac{2(N-1)}{R}$$

Da nun aber die beyden Strahlen der mittlere und der violete di-vergent auf die convexe Linse auffallen, so ~~ist~~ werden sie der eine nach v der andere aber nach r gebrochen, und da für diesen Fall: $a = Cv$ und Cr, $b = C'v'$, und $C'r'$ und $r = R'$ ist, so gibt jene Gleichung:

$$\frac{1}{Cv} + \frac{1}{C'v'} = \frac{2(N'-1)}{R'} \text{ und } \frac{1}{Cr} + \frac{1}{C'r'} = \frac{2(n'-1)}{R'}$$

daher auch wenn man für $\frac{1}{Cv}$ und $\frac{1}{Cr}$ ihre Werthe setzt:

$$\frac{1}{C'v'} = \frac{2(N'-1)}{R'} + \frac{2(N-1)}{R} \text{ und } \frac{1}{C'r'} = \frac{2(n'-1)}{R'} + \frac{2(n-1)}{R}$$

Soll nun die Farbenzerstreuung oder v'r verschwinden so muss:

$\frac{1}{C'v'} = \frac{1}{C'r'}$ also auch:

$$\frac{2(N'-1)}{R'} + \frac{2(N-1)}{R} = \frac{2(n'-1)}{R'} + \frac{2(n-1)}{R}$$

seyn; woraus folgt:

$$\frac{2N'-2-2n'+2}{R'} = \frac{2n-2-2N+2}{R}$$

nähmlich:

$$\frac{N'-n'}{R'} = \frac{n-N}{R}$$

daher: $\frac{N'-n'}{n-N} = \frac{R'}{R}$ oder:

$$\frac{N'-n'}{N-n} = -\frac{R'}{R}$$

* diese grösser $N'-n'$; $N-n$, nennt man das Maass der Farbenzerstreuung, und diese Hauptgleichung sagt, dass wenn das Fernrohr achromatisch seyn soll, sich die Halbmesser der Objectivlinsen, wie die Maasse ihrer Farbenzerstreuungen verhalten müssen.

Vom Kreismicrometer

72 Vor allererst, muss man bemerken, dass wir, wenn wir irgend einen Stern beobachten dessen Parallelkreis der Aequator nicht ist, ~~nicht~~ ~~dass das Maass~~ der beobachte Winkel, nicht der Winkel seines Parallel-kreises ist, den man eigentlich beobachten sollte, und zwar darum, weil wir

selbst uns außer dem Mittelpuncte jenes Kreises befinden, das erste was man daher nach jeder Beobachtung zu thun hat ist, dass man den beobachteten Winkel auf jenen reducirt, der eigentlich hätte beobachtet werden sollen, und der in der Bahn des Sterns liegt, was auf folgende Art geschieht:

Sey PBA ein Quadrant der Himmels-Kugel, P der Pol, AB der Meridian, und O das Auge des Beobachters, also der Mittelpunct der scheinbaren Himmelskugel; ferner sey ab ein Stück des Parallel-Kreises eines Sternes dessen Declination $= \delta$ ist. Hat man nun beobachtet, dass dieser Stern den Bogen ab in der Zeit t zurückgelegt hat, so ist der Bogen selbst $= 15^t$, wenn man aber nun sagen wollte der Winkel boa sey darum auch $= 15^t$, da der Bogen ab diesen Winkel misst so würde man sehr irren, denn der Winkel den wir $= 15^t$ beobachtet haben ist nicht der Winkel aob, sondern der Winkel bOa, der also erst auf den Winkel aob reduzirt werden muss; ~~und~~ diess ist einerley damit, den Halbmesser Oa auf jenen oa zu bringen:

Es ist: $aOA = aA = \delta$ und $oaO = aOA$ also auch $= \delta$

ferner ist: $oa = Oa \cos\delta$ Dass heisst um den Halbmesser aus den wir sahen, auf jenen zu bringen der der wahre Halbmesser des Parallel-Kreises des Sterns ist, muss man die beobachtete Zeit mit dem Cosinus der Declination multiplicieren, so dass, wenn man z. B den Winkel $= 15^t$ fand dieser Winkel auf den wahren reduziert gleich $15^t \cos\delta$ ist.

Dieß gilt allgemein für jede Beobachtung, will man aber mit dem Kreismicrometer beobachten, so muß man nothwendiger Weise, zu- erst folgende Aufgabe lösen:

Den Halbmesser des Kreismicrometers zu bestimmen.

Dazu taugt 1.stens vorzüglich die Sonne. Sey M der Mittelpunct des Micrometers, S jener der Sonne, t die Zwischenzeit zwischen der ~~Berüh~~ äussern ~~...~~, ϑ die Zwischenzeit zwi- schen der inneren Berührung der Sonnenränder, r der Halbmesser der Sonne δ ihre Declination, d die Differenz zwischen den Declinationen des ~~...~~ Mittelpunctes des Micrometers, und des Mittel- punctes der Sonne, endlich R der zu suchende Halbmesser des Micro- meters ~~...~~ so ist in dem Dreyecke sSM:

$sM = d$, $MS = r + R$; $sS = \frac{1}{2}\,15\vartheta\cos\delta$ daher auch:

$$(r+R)^2 = d^2 + \left(\tfrac{1}{2}\,15\vartheta\cos\delta\right)^2$$ für die inneren Berührungen ist eben so:

$$(r-R)^2 = d^2 + \left(\tfrac{1}{2}\,15t\cos\delta\right)^2$$ daher auch:

$$d^2 = r^2 + 2rR + R^2 - \frac{1}{4}\left(15t\cos\delta\right)^2$$ und:

$$d^2 = r^2 - 2rR + R^2 - \frac{1}{4}\left(15\vartheta\cos\delta\right)^2$$ und also:

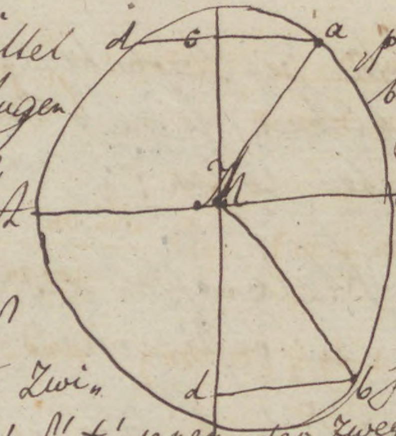
$$0 = 4rR - \frac{1}{4}\left(\left(15t\cos\delta\right)^2 - \left(15\vartheta\cos\delta\right)^2\right)$$ oder

$$R = \frac{1}{16r}\left(t^2\left(15\cos\delta\right)^2 - \vartheta^2\left(15\cos\delta\right)^2\right)$$ oder:

$$R = \cancel{\tfrac{}{16}} = \frac{1}{16}\left(15\cos\delta\right)^2\left(\frac{t^2-\vartheta^2}{r}\right)$$ oder endlich:

$$R = \left(\frac{15}{4}\cos\delta\right)^2 \cdot \frac{t^2-\vartheta^2}{r}$$

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch durch die Beobachtung zweyer Sterne von bekannter Rectascension und Declination sehr gut lösen, und zwar auf folgende Art:



Sey M der Mittelpunct des Micrometers a, b, zwey Fixsterne, im Augenblicke ihres Eintrittes in das Micrometers welche 2 Sterne man so wählen muss, dass der eine so weit A B als möglich ober, der andere aber eben so unter dem Mittelfaden A B durchgeht, Sey nun α, δ, t, die Rectascension, Declination und beobachtete Zwischenzeit der Sehne ad des ersten Sternes a und eben so α', δ', t' jenes des zweyten Sternes b ferner sey d die Differenz der Declinationen des Sternes a und des Centrums des Micrometers, und d' wieder dasselbe für den 2ten Stern b, so hat man ~~für~~ in den Dreyecken:

acM und Mbd: $Mc = d$, $ac = \frac{1}{2} t \cos\delta$ oder in Bogen $= \frac{1}{2} 15 t \cos\delta$ und

aM = Halbmesser des Micrometers = R und:

$Md = d'$ $db = \frac{1}{2} t' \cos\delta' = \frac{1}{2} 15 t' \cos\delta'$ und $Mb = R$ daher ist:

$$R^2 = \frac{1}{4}\cos^2\delta (15t)^2 + d^2 \text{ und } R^2 = \frac{1}{4}\cos^2\delta' (15t')^2 + d'^2$$

daher auch: $$2R^2 = \frac{1}{4}\left((15 t \cos\delta)^2 + (15 t' \cos\delta')^2\right) + d^2 + d'^2$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{8}\left\{(15 t \cos\delta)^2 + (15 t' \cos\delta')^2\right\} + \frac{1}{2}(d^2 + d'^2)}$$

Bequemer ist es aber so:

Setzt man Kürze halber $\frac{1}{2} 15 t \cos\delta = a$, und $\frac{1}{2} 15 t' \cos\delta' = a'$

ferner die Winkel: $aMc = m$, und $bMd = m'$ so ist:

$ac = a$, $bd = a'$ ‖ $aMc = m$, $bMd = m'$ | ferner: $a = R \sin m$, $a' = R \sin m'$ ‖ $d = R \cos m$, $d' = R \cos m'$ und da $d + d' = \delta - \delta'$

ist:
$$\left.\begin{aligned} \delta - \delta' &= R(\cos m + \cos m') \text{ und ferner:}\\ a + a' &= R(\sin m + \sin m') \text{ und}\\ a' - a &= R(\sin m' - \sin m)\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$
Daraus folgt:

$$\frac{a+a'}{\delta-\delta'} = \frac{\sin m + \sin m'}{\cos m + \cos m'} \quad\text{und:}$$

$$\frac{a'-a}{\delta-\delta'} = \frac{\sin m' - \sin m}{\cos m + \cos m'}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a+a'+a'-a}{\delta-\delta'} = \frac{\sin m + \sin m' + \sin m' - \sin m}{\cos m + \cos m'}$$

nähmlich: $\frac{2a'}{\delta-\delta'} = \frac{\sin m'}{\cos m + \cos m'}$ oder: $\frac{a'}{\delta-\delta'} =$

oder auch, ~~da~~:

$$\frac{\sin m' + \sin m}{\cos m' + \cos m} = tg\tfrac{1}{2}(m'+m) \text{ und } \frac{\sin m' - \sin m}{\cos m' + \cos m} = tg\tfrac{1}{2}(m'-m)$$

$$\frac{2a'}{\delta-\delta'} = tg\tfrac{1}{2}(m'+m) + tg\tfrac{1}{2}(m'-m) \text{ und:}$$

$$\frac{2a}{\delta-\delta'} = \frac{\sin m + \sin m'}{\cos m + \cos m'} - \frac{\sin m' - \sin m}{\cos m + \cos m'} = tg\tfrac{1}{2}(m'+m) - tg\tfrac{1}{2}(m'-m) \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}\left\{\left(tg\tfrac{1}{2}(m'+m) + tg\tfrac{1}{2}(m'-m)\right)(\delta-\delta')\right\} \\ a &= \tfrac{1}{2}\left\{\left(tg\tfrac{1}{2}(m'+m) - tg\tfrac{1}{2}(m'-m)\right)(\delta-\delta')\right\}\end{aligned}\right\} \text{ und: nähmlich:}$$

$$a = \frac{\delta-\delta' \sin(m'+m-m'+m)}{2\{\cos\tfrac{1}{2}(m'+m) \times \cos\tfrac{1}{2}(m'-m)\}} = \frac{(\delta-\delta')\sin m}{2\cos\tfrac{1}{2}(m'+m) \times \cos\tfrac{1}{2}(m'-m)}$$

$$\text{und } a' = \frac{(\delta-\delta')\sin m'}{2\cos\tfrac{1}{2}(m'+m)\cos\tfrac{1}{2}(m'-m)}$$

Nun ist: $R = \frac{a}{\sin m}$ oder $R = \frac{a'}{\sin m'}$ also:

$$R = \frac{\delta-\delta'}{2\cos\tfrac{1}{2}(m'+m)\cos\tfrac{1}{2}(m'-m)} \; *$$ oder es ist

auch:

$$R = \frac{a+a'}{\sin m + \sin m'} = \frac{a+a'}{2\sin\tfrac{1}{2}(m'+m)\cos\tfrac{1}{2}(m'-m)}$$ oder auch:

$$R = \frac{a'-a}{\sin m' - \sin m} = \frac{a'-a}{2\cos\tfrac{1}{2}(m'+m)\sin\tfrac{1}{2}(m'-m)}$$ oder endlich

wenn man: $\tfrac{1}{2}(m'+m) = n$ und $\tfrac{1}{2}(m'-m) = n'$ setzt:

$$R = \frac{\delta-\delta'}{2\cos n\cos n'} = \frac{a+a'}{2\sin n\cos n'} = \frac{a'-a}{2\cos n\sin n'}$$

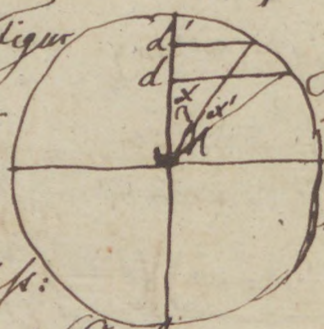
$$= \frac{\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos n\cos n'} = \frac{\tfrac{1}{2}(a+a')}{\sin n\cos n'} = \frac{\tfrac{1}{2}(a'-a)}{\cos n\sin n'} \; ***$$

Kennt man dann den Halbmesser des Kreismicrometers, so hat man nach oben:

$$\sin x = \frac{\frac{1}{2}15t\cos\delta}{r}\ ;\ \sin x' = \frac{\frac{1}{2}15t'\cos\delta'}{r}\ \text{und:}$$

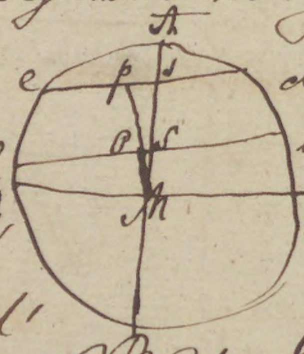
$$d = r\cos x\ ;\ d' = r\cos x'$$

Nun ist in der Figur gleich nach dem ersten Blicke $\delta' - \delta = d' - d$ ferner wenn der Eintritt des einen und des anderen Sternes durch E, E', ihre Austritte durch A, A' und ihre Rectascensionen mit $\alpha'\alpha$ bezeichnet werden, so ist:



$$\alpha' - \alpha = \tfrac{1}{2}(E' + A') - \tfrac{1}{2}(E + A)$$

Geht einer der beyden Sterne sehr nahe am Mittelpuncte durch das Micrometer so bestimmt man seine Declination lieber auf folgende Weise: Sey $t\ t'$ die Zeit der beyden Sehnen, ϑ, ϑ' die Zeit des ersten Sterns von seinem Eintritte bey E bis bis zum Lineale AB, und des zweyten E wieder bis dahin, so ist:



$sM = d$, $SM = d'$; $ps = \vartheta - \frac{1}{2}t$; $PS = \vartheta' - \frac{1}{2}t'$

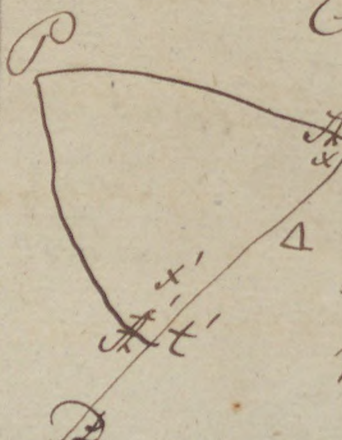
und in den Dreyecken PMs, PMS:

$$d' : d = \vartheta' - \tfrac{1}{2}t' : \vartheta - \tfrac{1}{2}t,\ \text{woraus folgt:}$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{\vartheta' - \frac{1}{2}t'}{\vartheta - \frac{1}{2}t}$$ wo man d aus $d = r\cos x$ findet.

73

Allgemeine Theorie über die Micrometer von Hrn. Fittel.



Sey AD ein unter irgend einem Winkel geneigter Faden, A, A' die zwey Puncte wo zwey Sterne zu den Sternzeiten t und t' den, in der auf den Brennpunct senkrechten Ebene liegenden Faden passieren, das Rohr während der Zwischenzeit $t' - t$

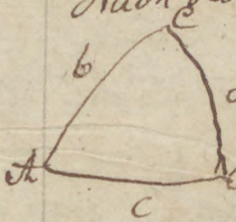
unbeweglich gelassen, ferner sey Δ der Winkel unter welchem die Distanz dieser zwey Puncte gesehen wird.

Sey nun P der nördliche Weltpol, α, δ, die Rectascension in Zeit, und die nördliche Declination des einen Sternes A, α', δ' aber die des anderen Sternes A', so ist:

$PA = 90^\circ - \delta$; $PA' = 90^\circ - \delta'$; $A'PA$ = Differenz der Stundenwinkel beyder Sterne $= \gamma' - \gamma$. Es ist aber: $\gamma' = 15(t' - \alpha')$ und $\gamma = 15(t - \alpha)$ also:

$A'PA = 15t' - 15\alpha' - 15t + 15\alpha = 15(t' - t - \alpha' + \alpha)$

Nach den von Gauss zuerst benützten Formeln ist in dem Dreyecke



$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C$$

Setzen wir nun: $a = 90^\circ - \delta'$, $b = 90^\circ - \delta$, $c = \Delta$ also: $A = x$, $B = x'$; $C = 15(t' - t - \alpha' + \alpha)$ ~~[illegible]~~ so ist in unserem Dreyecke:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x')}{\cos\frac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha)}\;;\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(x-x')}{\sin\frac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(x+x')}{\cos\frac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha)}\;;\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta'+\delta)}{\cos\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(x+x')}{\sin\frac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha)}$$

Die ganz genaue und unmittelbare Auflösung dieser Aufgabe kann nicht gefunden werden, unter den mittelbaren ~~[illegible]~~ ist aber folgende die bequemste:

Dividirt man die erste der vorliegenden Gleichungen durch die zweyte, so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-x') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}\operatorname{cotg}\frac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

Dividirt man die dritte durch die vierte, so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+x') = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

Dividirt man die dritte durch die erste; so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin\frac{1}{2}(x+x')}{\sin\frac{1}{2}(x-x')}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')$$ und wenn man die 4te durch

die zweyte dividdirt; so ist:

$$tg\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\cdot Cotg.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$

Dividdirt man nun nach der Reihe, die 1ste der obigen Gleichungen durch die dritte, die vierte durch die 2te ferner die 2te durch die 1ste und die 3te durch die 4te, so erhält man:

$$tg\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}\, tg\tfrac{1}{2}\Delta$$

$$tg\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = \frac{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\, tg\tfrac{1}{2}\Delta$$

$$tg.\tfrac{1}{2}15(t'-t-\alpha'+\alpha) = \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')}{Cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}\cdot Cotg\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = \frac{Cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')}{Sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}\, Cotg.\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')$$

Jetzt kann man sich Abkürzungen erlauben, erwägt man dass $\delta-\delta'$ und $(t'-t-\alpha'+\alpha)$ so wie Δ nur gering sind, so ist:

$$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta\ ;\quad (\delta-\delta') = \Delta\cdot\frac{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}$$

$$tg\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = \frac{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta$$

$$(t'-t)-(\alpha'-\alpha) = \frac{(\delta-\delta')\cdot Cotg\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{15\,Cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')} = \frac{206265}{Sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}\, Cotg.(\alpha+\alpha')$$

und

$$tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = \frac{\delta-\delta'}{15(t'-t-\alpha'-\alpha)\,Cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)}$$

$$tg\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') = \frac{206265''}{\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)\,Sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta)}$$

$$\Delta = \frac{(\delta-\delta')\,Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')} = \frac{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\cdot Cotg.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$

Seyen nun ab, a'b' die Parallelen die die Sterne während ihrer Bewegung beschreiben, und n die Neigung des Fadens gegen diese Parallelen, so ist:

$\alpha = 90-n$; $\alpha' = 90°+n$ | also: $\alpha+\alpha' = 180°$; $\alpha-\alpha' = -2n$ | $\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') = 90°$; $\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = -n$

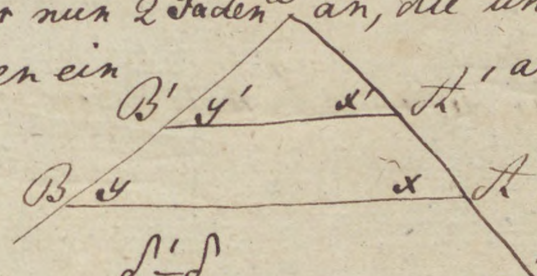
also:
$$\operatorname{tg} n = \frac{\delta'-\delta}{15(t'-t-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}$$

$$\Delta = \frac{\delta'-\delta}{\sin n}$$ also auch:

$$\delta'-\delta = \Delta \sin n$$ und:

$$(t'-t)-(\alpha'-\alpha) = \frac{\Delta \sin n}{15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\operatorname{tg} n} = \frac{\Delta \cos n}{15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}$$

Nehmen wir nun 2 Fäden an, die unter irgend einem beliebigen Winkel gegen einander geneigt seyen.



Für einen Faden hatten wir:

$$\operatorname{tg}. n = \frac{\delta'-\delta}{15(t'-t-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}$$ und daher ist eben so für den 2ten Faden:

$$\operatorname{tg} n' = \frac{\delta'-\delta}{15(T'-T-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}$$ ferner hatten wir für einen Faden:

$$\Delta \sin n = \delta'-\delta\,;\ \Delta \cos n = 15(t'-t-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$ und daher eben so für den zweyten:

$$\Delta' \sin n' = \delta'-\delta\,;\ \Delta' \cos n' = 15(T'-T-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$

Es ist daher:

$$\Delta \sin n = \Delta' \sin n'$$ und also:

$$\Delta' = \frac{\Delta \sin n}{\sin n'}$$ Ferner ist:

$$\Delta \cos n = 15(t'-t-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$ und $$\Delta \operatorname{cotg} n' \sin n = 15(T'-T-\alpha'+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$

also:

$$(1)\quad \Delta \sin n \operatorname{cotg} n' + \Delta \cos n = \frac{\Delta \sin(n+n')}{\sin n'} = 15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'+t-t')$$

$$(2)\quad \Delta \sin n \operatorname{cotg} n' - \Delta \cos n = \frac{\Delta \sin(n-n')}{\sin n'} = 15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'-t'+t+2\alpha'-2\alpha)$$

also: $\Delta =$

$$\Delta = (1)+(2) = 15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'+t'-t)\cdot\frac{\sin n'}{\sin(n+n')}$$ oder

$$\Delta = 15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'-t'+t+2(\alpha'-\alpha))\cdot\frac{\sin n'}{\sin(n-n')}$$

Ferner ist:

$$\delta'-\delta = 15 \cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'+t'-t)\frac{\sin n \cos n'}{\sin(n+n')}$$

$$\delta'-\delta = 15 \cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T'-t'+t+2(\alpha'-\alpha)).\frac{\sin n \sin n'}{\sin(n-n')}$$

$$\frac{(\delta'-\delta)\sin(n-n')}{15\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin n \sin n'} = (T-T'-t'+t+2(\alpha'-\alpha))$$

$$\alpha'-\alpha = \frac{(\delta'-\delta)}{30\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}.\frac{\sin(n-n')}{\sin n \sin n'} - \frac{1}{2}(T-T'-t'+t)$$

$$\alpha'-\alpha = \frac{1}{2}(T'-T+t'-t) - \frac{(\delta'-\delta)\sin(n-n')}{30\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin n \sin n'}$$

Für einen Cometen dessen asc. rect. & nördl. Decl. und beobachtete Durchgänge: α'', δ'', t'', T'' ist: hat man:

$$\delta''-\delta = 15\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'')(T-T''+t''-t)\frac{\sin n \cos n'}{\sin(n+n')}$$

$$\alpha''-\alpha = \frac{1}{2}(T''-T)-(t''-t) - \frac{(\delta''-\delta)\sin(n-n')}{30\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta'')\sin n' \sin n}$$

oder weiter geführt:

$$\alpha''-\alpha = \frac{1}{2}(T''-T)+\frac{1}{2}(t''-t)-\frac{1}{2}(T-T'')\frac{\sin(n-n')}{\sin(n+n')}-\frac{1}{2}(t''-t)\frac{\sin(n-n')}{\sin(n+n')}$$

$$= \frac{1}{2}(T''-T)\left(1+\frac{\sin(n-n')}{\sin(n+n')}\right)+\frac{1}{2}(t''-t)\left(1-\frac{\sin(n-n')}{\sin(n+n')}\right)$$

$$\alpha''-\alpha = \frac{(T''-T)\sin n \cos n'}{\sin(n+n')} + (t''-t).\frac{\sin n' \cos n}{\sin(n+n')}$$

Für $n=n'$ ist:

$$\alpha''-\alpha = \frac{1}{2}(T''-T+t''-t) \quad ; \quad \delta''-\delta = \frac{15}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')(T-T''+t''-t).\operatorname{tg} n$$

für $n+n' = 90°$ aber ist:

$$\alpha''-\alpha = (T''-T)\sin^2 n + (t''-t)\cos^2 n$$

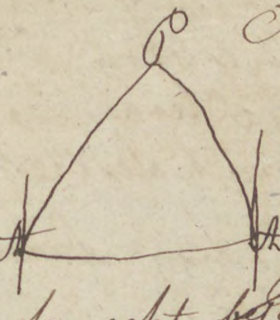
$$\delta''-\delta = \frac{15}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'')(T-T''+t''-t).\sin 2n$$

Für die Declinationen sind jene die besten Micrometer, bey welchen $\sin n = \cos n$ also: $n = 45°$ ist, wie es beym Burkhardtschen Micrometer der Fall ist.

Zur Beobachtung der Rectascensionen sind jene Micrometer die Besten bey denen $\sin n \cos n = 0$ also $n = n' = 90°$ ist, für alle aber muss $x+y = 90°$ seyn, für Burkhards Micrometer ist:

$$\frac{\sin x \sin y}{\sin(x+y)} = \frac{1}{2}$$ für's Bradleysche Netz aber dieselbe Grösse $= 1$

Allgemeine Theorie der Micrometer verkürzt.



~~Seyen A, A' die Orte eines Fadens, wo die beyden Sterne eines Fadens, P der Weltpol, also AA' das Stück des Parallelkreises des Sterns, welches er während er am Faden geht, beschreibt, und PA, PA' die nach A und A' gezogenen~~

Seyen A A' zwey Puncte eines Fadens, in welchen zwey Sterne ~~den~~ denselben passieren, P sey der Weltpol, also PA, PA' die Declinations Kreise der Sterne, ferner sey von dem Stern A die Rectascension $= \alpha$, Declination $= \delta$, und Zeit des Durchgangs durch den Faden $= t$, für den anderen seyen dieselben Grössen: α', δ', t'; ferner sey die Länge des Fadens zwischen den beyden Puncten A & A' $= \Delta$, so hat man im Dreyecke: PAA':

$AA' = \Delta$, $AP = 90^\circ - \delta$, $A'P = 90^\circ - \delta'$; und APA' = Differenz der Stundenwinkel: es ist aber Stundenw. d. * A $= 15t - 15\alpha$, und Stundenw. des Sternes A' $= 15t' - 15\alpha'$ also: $APA' = 15(t' - t - \alpha' + \alpha)$

und daher:

$$\cos\Delta = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos 15(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta' - 2\cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos(\delta'-\delta) - 2\cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = 1 - \cos(\delta'-\delta) + 2\cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

d. h.

$$= 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) + 2\cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin^2\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) + \cancel{2}\cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

Da man nun sehr nahe wird $\delta = \delta'$ nehmen können, so ist:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\delta\cos\delta'\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha) \text{ oder}$$

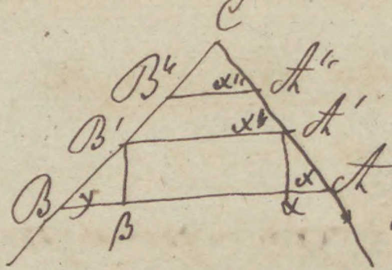
$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \left\{\tfrac{1}{2}\cos(\delta-\delta') + \tfrac{1}{2}\cos(\delta'+\delta)\right\}\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos 2\delta\right)\left(\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha)\right) \text{ nähmlich:}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\delta\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha) \text{ also endlich:}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\delta\sin^2\tfrac{15}{2}(t'-t-\alpha'+\alpha) \text{ oder:}$$

$$\Delta = 15(t'-t-\alpha'+\alpha)\cos\delta$$



Seyen nun AC und BC zwey unter irgend einem Winkel C zusammengefügte Fäden, und AB, $A'B'$, $A''B''$ die Sehnen, welche 3 Sterne deren Rectascensionen und Declinationen nach der Reihe:

$\alpha, \delta, \alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ und deren Durchgänge durch die Fäden AC, BC wieder nach der Reihe sind:

t, T, t', T', t'', T''

Ferner ist: $A'\alpha = B'\beta = \delta' - \delta$ und nach dem Vorhergehenden

$A\alpha = 15\,(t' - t - \alpha' + \alpha)\,\text{Cord}$

$B\beta = 15\,(T' - T - \alpha' + \alpha)\,\text{Cord}$ ferner seyen die Winkel der Sehnen: AB, $A'B'$, $A''B''$ mit dem Faden CA nach der Reihe gleich: x, x', x'', und die Winkel derselben Sehnen, mit dem Faden $BC = y, y', y''$; so ist:

$A'\alpha = A\alpha \, tg\, x$ und: $B'\beta = B\beta\, tg\, y$ oder:

$A'\alpha = 15\,\text{Cord}\,(t' - t - \alpha' + \alpha)\, tg\, x$ und: $B'\beta = 15\,\text{Cord}\,(T' - T - \alpha' + \alpha)\, tg\, y$.

d.h. $\delta' - \delta = 15\,\text{Cord}\,(t' - t - \alpha' + \alpha)\, tg\, x = 15\,\text{Cord}\,(T' - T - \alpha' + \alpha)\, tg\, y$ oder:

$\delta - \delta' = 15\,\text{Cord}\,(t - t' + \alpha' - \alpha)\, tg\, x = 15\,\text{Cord}\,(T - T' - \alpha + \alpha')\, tg\, y$

Daraus folgt: $tg\, x = \dfrac{\delta - \delta'}{15\,\text{Cord}\,(t - t' + \alpha' - \alpha)}$ und $tg\, y = \dfrac{\delta - \delta'}{15\,\text{Cord}\,(T - T' - \alpha + \alpha')}$

Um daher x, und y zu bestimmen, wählt man zwey Sterne von bekannter Declination, und berechnet sodann die gerade jetzt gefundenen Formeln.

Für den 3ten Stern, dessen Ort am Himmel noch unbestimmt ist, haben wir eben so:

$\delta'' - \delta = 15\,\text{Cord}\,(t'' - t)\, tg\, x - 15\,\text{Cord}\,(\alpha'' - \alpha)\, tg\, x$ und:

$\delta'' - \delta = 15\,\text{Cord}\,(T'' - T)\, tg\, y - 15\,\text{Cord}\,(\alpha'' - \alpha)\, tg\, y$ und:

$0 = \cancel{(t''\, tg\, x + (T - T'')\, tg\, y + (\alpha'' - \alpha)(tg\, y - tg\, x)}$

$(t'' - t)\, tg\, x - (\alpha'' - \alpha)\, tg\, x = (T'' - T)\, tg\, y - (\alpha'' - \alpha)\, tg\, y$

$(\alpha'' - \alpha)(tg\, x - tg\, y) = (t'' - t)\, tg\, x - (T'' - T)\, tg\, y;$

und daher $\alpha'' - \alpha = \dfrac{(t''-t)\,\mathrm{tg}\,x - (T''-T)\,\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}$

$$\alpha'' - \alpha = \frac{(t''-t)\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,y}{\mathrm{Sin}\,(x-y)} - \frac{(T''-T)\,\mathrm{Sin}\,y\,\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,(x-y)}$$

$$\delta - \delta'' = 15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(t-t'')\,\mathrm{tg}\,x + 15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(\alpha''-\alpha)\,\mathrm{tg}\,x$$

$$\delta - \delta'' = \cancel{15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(t-t'')\,\mathrm{tg}\,x + 15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\frac{(t''-t)\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,y - (T''-T)\,\mathrm{Sin}\,y\,\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,(x-y)\,\mathrm{tg}\,x}}$$

$$\delta - \delta'' = 15\,\mathrm{Cos}\,\delta\left((t-t'') + \frac{(t''-t)\,\mathrm{tg}\,x - (T''-T)\,\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}\right)\mathrm{tg}\,x$$

$$= 15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\frac{\left((t-t'')\,\mathrm{tg}\,x - (t-t'')\,\mathrm{tg}\,y + (t''-t)\,\mathrm{tg}\,x - (T''-T)\,\mathrm{tg}\,y\right)\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}$$

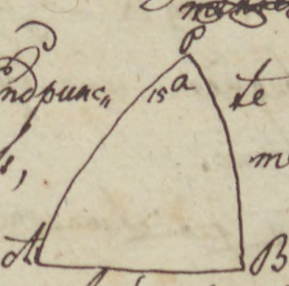
$$= \frac{15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(t''-t-T''+T)\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}$$

$$= \frac{15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(t''-t-T''+T)\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y}{\mathrm{Sin}\,(x-y)}$$ oder endlich:

$$\delta - \delta'' = \frac{15\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(t''-t-T''+T)\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,y}{\mathrm{Sin}\,(x-y)}$$

---

75 Über die Bestimmung der Fädenabstände bey aus mehreren Fäden bestehenden ~~aus einigen horizontalen und mehreren verticalen~~ Micrometern.



I Seyen AB die Endpuncte irgend eines Fadens dessen noch unbekannte Länge = f ist, man habe irgend einen Stern beobachtet, dass er in der Zeit a diese Fadenlänge zurückgelegt habe, sey nun P der Nordweltpol, und PA, PB zwey an die Endpuncte des Fadens gezogene Declinations Kreise, so hat man in dem Dreyecke PBA: APB = 15a, AP = BP = 90° − δ, und AB = gesucht f, nun ist: $\mathrm{Sin}\,f : \mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Sin}\,15a : 1$ also:

$\mathrm{Sin}\,f = \mathrm{Sin}\,15a\,\mathrm{Cos}\,\delta$ * und diess ist nun die Lehre,

chung woraus sich die Fadenlänge für jede Länge desselben, voll-
kommen genau bestimmen läßt. Die Gleichung zeigt, daß zur
Bestimmung der Fadenabstände, solche Sterne die vorzüglichsten
sind die dem Pole sehr nahe stehen, weil für sie δ sehr groß
also Cos δ sehr klein ist, und daher ein Fehler in dem beobach-
teten 15a, da er mit dem sehr kleinen Cos δ multiplicirt den
wenigsten Einfluß äußert.

Diese Gleichung kann man zur bequemern Berechnung auf
folgende Art verwandeln: Es ist:

$\mathrm{Sin}\, f = \mathrm{Sin}\, 15a\, \mathrm{Sin}\, (90^\circ - \delta)$ oder wenn wir $90^\circ - \delta = \Delta$ setzen:

(I) $\mathrm{Sin}\, f = \mathrm{Sin}\, 15a\, \mathrm{Sin}\, \Delta$, Da nun sowohl 15a, als auch Δ und f stets
sehr kleine Größen sind, so ist:

$$\log f + 4.6855749 - \tfrac{1}{3}\log.\sec f = \log 15 + \log a + 4.6855749 - \tfrac{1}{3}\log\sec 15a + \log \Delta + 4.6855749 - \tfrac{1}{3}\log.\sec.\Delta$$

Aus oben gesagtem Grunde kann man das Drittel der Secante
bey f und a sicher auslassen, und da 4.6855749 Constant ist, diese
Größe = C setzen, wodurch man erhält:

$$\log f + C = \log 15 + \log a + C + \log \Delta + C - \tfrac{1}{3}\log\sec\Delta \text{ nähm-}$$

lich: $\log f = \log 15a + C + \log \Delta - \tfrac{1}{3}\log.\sec\Delta.$ (II)

Diese Gleichung ist sehr bequem, und ist in allen Fällen brauch-
bar, wo f, a, sehr klein sind.

II ~~Hat man durch eine der 2 Gleichungen (I) (II) den Abstand der Fadens von dem a~~

II Durch eine der Gleichungen (I) (II) kann man die Abstände der Fäden
voneinander bestimmen, und zwar die Aequatorialabstände, nähmlich
die Abstände der Fäden, in Theilen eines größten Kreises

Hat man daher ein Micrometer das 7 Fäden hat, so kann man
durch eine der vorigen Gleichungen die Abstände aller Fäden von

-

dem mittleren oder 4ten bestimmen.

Heißt nun:

Der Äquatorialabstand des ersten Fadens vom 4ten . . t
" " " " " zweyten " " " " " . . t'
" " " " " dritten " " " " " . . t''
" " " " " fünften " " " " . . T''
" " " " " sechsten " " " " . . T'
" " " " " siebenten " " " " . . T

Die Zeit des Durchganges des Sterns durch den mittleren Faden $= \mathfrak{T}$, und die des Durchganges durch die übrigen Fäden, nach der Reihe: d, d', d'', D'', D', D so ist:

$$d = \mathfrak{T} + \frac{t}{\cos\delta}$$
$$d' = \mathfrak{T} + \frac{t'}{\cos\delta}$$
$$d'' = \mathfrak{T} + \frac{t''}{\cos\delta}$$
$$D'' = \mathfrak{T} - \frac{T''}{\cos\delta}$$
$$D' = \mathfrak{T} - \frac{T'}{\cos\delta}$$
$$D = \mathfrak{T} - \frac{T}{\cos\delta}$$
$$IV = \mathfrak{T}$$

wo δ die Declination des beobachteten Sternes ist, mit $\cos\delta$ muss der Äquatorialabstand darum dividdirt werden, weil wenn man den Bogen eines Parallelkreises auf einen Bogen eines größten Kreises bringen will, man den ersten mit $\cos\delta$ multiplicieren, und daher wenn man das Gegentheil zu thun hat, den Bogen des größten Kreises mit $\cos\delta$ dividdiren muss. Aus diesen Gleichungen folgt wenn alle 7 Fäden beobachtet wurden:

$$\mathfrak{T} + d + d' + d'' + D'' + D' + D = 7\mathfrak{T} + \left(\frac{t+t'+t''-T''-T'-T}{\cos\delta}\right)$$ und daraus wieder:

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{T} + d + d' + d'' + D'' + D' + D}{7} - \left(\frac{t+t'+t''-T''-T'-T}{7\cos\delta}\right)$$ wenn der erste fehlt, so ist:

$$d' + d'' + D'' + D' + D + \mathfrak{T}' = \frac{t'+t''-T''-T'-T}{\cos\delta} + 6\mathfrak{T}$$ also:

$$\mathfrak{T} = \frac{d' + d'' + \mathfrak{T}' + D'' + D' + D}{6} - \left(\frac{t'+t''-T''-T'-T}{6\cos\delta}\right)^{*}$$

wenn der erste und zweyte fehlt, so ist:

$$\mathfrak{T} = \frac{d'' + \mathfrak{T}' + D'' + D' + D}{5} - \left(\frac{t''-T''-T'-T}{5\cos\delta}\right)$$ u. s. w.

Reduction der Seitenfäden auf den mittleren für die Planeten.

Bey dieser Aufgabe, nähmlich die Seitenfäden die beobachtet wurden auf den mittleren zu bringen, bey Körpern, die ihren Ort am Himmel ändern, wählen wir den Mond als denjenigen Körper am Himmel nehmen, dessen Ort am alleveränderlichsten ist.

Sey P der Nordweltpol, Z das Zenith, δ die Declination des Mondes, und Ms das Stück seiner Bahn, das er, während er von s, nach M läuft beschreibt, in PZM sey der mittlere Faden, und in Zss' ein Seitenfaden, $M's' = 15\,F$, der Abstand dieser 2 Fäden, t der Winkel den beyde am Weltpole machen, x das Stück eines Parallelkreises zwischen M und s, ferner Z die wahre Zenithdistanz des Mondes und $h = \dots$, ferner $MM' = ss'$ der Unterschied seiner Declination, und $Zs' = z$ die scheinbare Zenithdistanz des Mondes, so ist:

$+ h = ZPs$

geocentr. und geodätischen

Im Dreyecke ZMs : $\sin z : 1 = \sin x : \sin t$ also: $\sin x = \sin t \sin z$

im Dreyecke ZM's' : $\sin z' : 1 = \sin 15\,F : \sin t$ und $\sin 15\,F = \sin t \sin z'$

und: $\dfrac{\sin x}{\sin 15\,F} = \dfrac{\sin z}{\sin z'}$. Es ist ferner:

$\sin x : \sin h = \cos \delta : 1$ aus dem Dreyecke: MPs und: } wo δ'' seine Declination in s' ist.

$\sin 15\,F : \sin h = \cos \delta'' : 1$ " " " M'Ps'

Daraus folgt:

$$\sin h = \frac{\sin x}{\cos \delta} = \frac{\sin 15\,F}{\cos \delta''} = \frac{\sin t \sin z}{\cos \delta} = \frac{\sin t \sin z'}{\cos \delta''}$$

$$= \frac{\sin 15\,F}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\sin 15\,F}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin z}{\sin (z + \Delta z)}$$ wenn $z' - z = \Delta z$ genannt wird; nähmlich:

$$\sin h = \frac{\sin 15\,F \cdot \sin z}{\cos \delta (\sin z \cos \Delta z + \cos z \sin \Delta z)}$$

d. h. $\quad \sin h = \dfrac{\sin 15 F}{\cos\delta\,(1 + \operatorname{tg}\Delta z \cot z)}$ (*) ~~da Δz sehr klein, daher sein Cosin nur sehr, und sein Sinus ... gesetzt werden darf~~

Nun hat man immer; da jede Beobachtung auf den Mittelpunct der Erde reduziert werden muss:

$$\text{Sin. Parallaxe} = \frac{\text{Halbm. d. Erde}}{\text{Entf. d. Mond.}}\cdot \sin z' = \frac{R}{D}\sin z' \text{ wo für } z' = 90^\circ$$

$\sin p = \dfrac{R}{D} = \sin \varpi$ der Horizontalparallaxe wird.

Nun wird:

$$p = \Delta z \text{ und } z' = z + p \text{ seyn, weil } p \text{ die Höhenparallaxe ist,}$$

und daher:

$$\sin\Delta z = \sin\varpi \sin(z + \Delta z) \text{ und: } \sin\Delta z = \sin\varpi \sin z \cos\Delta z + \sin\varpi \cos z \sin\Delta z$$

also: $\cancel{\operatorname{tg}\Delta z = \ldots}$

$$\operatorname{tg}\Delta z = \sin\varpi \sin z + \sin\varpi \cos z \operatorname{tg}\Delta z \text{ und daher:}$$

$$\operatorname{tg}\Delta z = \frac{\sin\varpi \sin z}{1 - \sin\varpi\cos z}$$ Substituirt man nun diesen Werth

von $\operatorname{tg}\Delta z$ in (*) so ist:

$$\sin h = \frac{\sin 15F}{\cos\delta\left(1 + \dfrac{\sin\varpi\cos z}{1 - \sin\varpi\cos z}\right)} = \cancel{\frac{\sin 15F}{\cos\delta}\cdot\frac{1 - \sin\varpi\cos z}{1 - \ldots\cos z}}$$

$$= \frac{\sin 15F}{\cos\delta}\cdot\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\sin\varpi\cos z}{1 - \sin\varpi\cos z}\right)} = \frac{\sin 15F}{\cos\delta}(1 - \sin\varpi\cos z)$$

Da h und F sehr klein sind, und zur Zeit der Culmination z immer $= \varphi - \delta$ ist, so ist für diesen Fall:

$$h = \frac{15F}{\cos\delta}\left(1 - \sin\varpi\cos(\varphi - \delta)\right)$$

Ist nun $\Delta\alpha$ die Änderung der Rectascension der Sonne in einem mittleren Sonnentage, so ist die Aenderung derselben x in einer ~~Minute~~ Secunde; das:

$$24^h \text{ mittl. Z} : \Delta\alpha = \frac{1''}{3600} : x \quad \cancel{\text{also}}\; x = \frac{\Delta\alpha}{3600.24} = \frac{\Delta\alpha}{24}$$

Nun verhält sich:

~~Mittlere Sonnentag : Sternzeit = 360° 59' 8".33 : 360°~~

~~also: Mittl. Sonnenz. = Sterntag × 360° 59' 8".33 / 360°~~

~~nämlich Mittlere Sonnenz: = Sternz × 360° 59' 8".33 / 360° = 360° × Δα / Sternzeit = 1.00273 / Sternz.~~

~~= 0.0027379 Δα / 24 = 0.04155 Δα~~

Die Aenderung der Rectascension des Mondes für eine Secunde Sternzeit ist also:

$$= \frac{\Delta\alpha \times 3600}{24 \times 3600} = \frac{0.0027379\,\Delta\alpha}{24}$$ in einem mittleren

Sonnentage da sich verhält,

~~Sternt.~~ mittl. S. Sonnent. $= 360^\circ : 360^\circ\, 59'\, 8''.33$

und daher der mittlere Sonnen Tag:

mittl. Sonnent. = Sterntag $\times\, 59'\, 8''.33$.

oben hatten wir:

Aenderung der Rectascension des ☾ in 1 Sec. mittl. Sonnenz. $= \frac{0.00279\,\Delta\alpha}{24}$ diess ist aber $= 0.04155\,\Delta\alpha$. für eine Secunde ist der Stundenwinkel des Mondes:

$$= 15'' - 0.04155\,\Delta\alpha$$

Nun verhält sich:

$$1 : 15 - 0.4155\,\Delta\alpha = x : h$$ also ist:

$$x = \frac{h}{15 - 0.4155\,\Delta\alpha}$$ und endlich:

$$z = \frac{\frac{15F}{\cos\delta}\left(1 - \sin\omega \cos(\varphi - \delta)\right)}{15 - 0.04155\,\Delta\alpha} = \frac{F}{\cos\delta}\left(\frac{1 - \sin\omega\cos(\varphi-\delta)}{1 - 0.00277\,\Delta\alpha}\right)$$

77

Ueber die Beschaffenheit und den Gebrauch der Nonien.

Da es bey allen sowohl geometrischen als astronomischen Messungen, vorzüglich auf die grösste Genauigkeit, also darauf ankömmt, das Maass des gemessenen Winkels oder der gemessenen Seite, bis auf den möglichst kleinsten Theil anzugeben; die unmittelbare Theilung der Messinstrumente in so viele Theile aber, als dazu erfordert würden, unmöglich ist, auch ausserdem zu anstrengend beym Gebrauche seyn würde, so hat man auf andere leichtere Mittel gedacht um denselben Zweck zu erreichen, und das einfachste, gewöhnlichste und genauste, ist hiezu der sogenannte Vernier oder Nonius.

Es sey z. B. eine Linie oder ein Bogen eines Instrumentes in r gleiche Theile getheilt, deren jeder $= a$ ist, eine andere der ersten ähnliche, mit ihr parallele Linie, oder derley Bogen sey in $r-1$ oder in $r+1$ Theile getheilt, deren jeder im ersten Falle $= b$ im Zweyten aber $= c$ ist, so heisst die erste Linie von r Theilen, oder der erste Bogen der Rand oder Limbus, und die zweyte gerade oder Kreislinie von $r-1$ oder $r+1$ Theilen, der Vernier oder Nonius, und zwar heisst diese Linie ein Nonius der ersten Ordnung wenn ~~sie~~ sie um einen Theil weniger enthält, als ein gleich langes Stück des Limbus kleinste Theile enthält, da sie hingegen ein Nonius der zweyten Ordnung heisst, wenn sie um einen kleinsten Theil des Limbus mehr enthält, als ein mit ihr gleich langes Stück desselben.

oder deutlicher: Bey einem Nonius der ersten Ordnung muss ein kleinster Theil desselben grösser, hingegen bey einem Nonius der zweyten Ordnung kleiner seyn, als ein kleinster Theil des Randes.

Wenn ein dem Nonius gleich grosses Stück des Randes in r hingegen ~~der~~ der Nonius in $r-1$ oder $r+1$ Theile getheilt ist, und ~~ein~~ ~~Theil~~ der r^{te} Theil des Randes $= a$, der $(r-1)^{ter}$ Theil des Nonius $= b$ der $(r+1)^{te}$ Theil des Nonius aber $= c$ ist, so ist:

für die Nonien der ersten Ordnung: $ar = b(r-1)$

" " " " Zweyten " " : $ar = c(r+1)$

Also:

Für die Nonien der ersten Ordnung: $b-a=\frac{ar}{r-1}-a=\frac{a}{r-1}$

" " " " " zweyten " " $a-c=a-\frac{ar}{r+1}=\frac{a}{r+1}$

und daher:

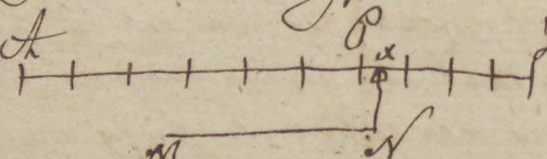
Für die Nonien der ersten Ordnung: $m(b-a)=\frac{ma}{r-1}$

" " " " zweyten " " $m(a-c)=\frac{ma}{r+1}$

Diese beyden Gleichungen enthalten die ganze Theorie des Nonius. Denn will ich einen Nonius ablesen, so werde ich zählen, der wie vielte Theilstrich des Nonius vom ersten der der Index heisst angefangen, mit einem Theilstriche des Randes zusammenfällt, und diese Zahl m, werd' ich mit dem Werthe ~~seines~~ kleinsten Theiles des Nonius multiplicieren um die Anzahl der Bruchtheile des Maasses, das der Limbus trägt, zu erfahren, die die gemessene Linie noch enthält.

Bey der Ablesung der Nonien kömmt aber sehr viel auf die Lage desselben gegen den Limbus an, und für beyde Arten von Nonien, sind zwey Fälle zu unterscheiden, und zwar:

Erster Fall. Wenn dem Index eine grössere Nummer des Randes entspricht, als dem anderen Ende des Nonius.



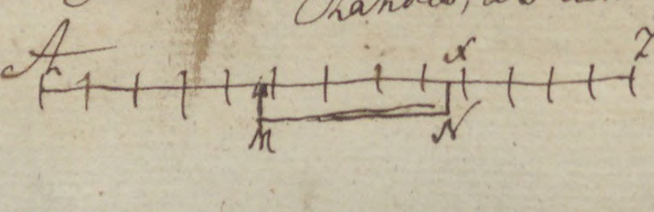
Sey AZ der Limbus, MN der Nonius und N der Index, man möchte gern das Maass der Linie Ax wissen.

Es ist: $Ax = AP + Px$ oder für $Px = y$: $Ax = AP + y$

Ist nun der Nonius der ersten Ordnung so ist: $y=\frac{ma}{r-1}$

Ist er aber der zweyten " " " ": $y=1-\frac{ma}{r+1}$

Zweyter Fall. Entspricht aber dem Index eine kleinere Zahl des Randes, als dem anderen Ende, so ist:



Für den Nonius der 1sten Ordnung: $y = 1 - \frac{ma}{r-1}$

" jenen " 2ten " " aber: $y = \frac{ma}{r+1}$

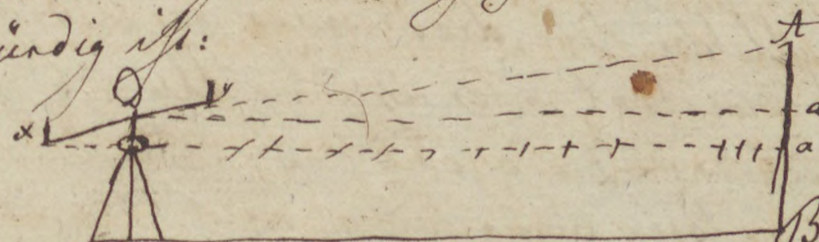
Nimmt man einen Nonius zur Hand, und bemerkt, dass der erste Theilstrich desselben vom Index an, vom nächsten Theilstriche des Randes um $\frac{a}{r-1}$ oder $\frac{a}{r+1}$ der 2te um $\frac{2a}{r-1}$ oder $\frac{2a}{r+1}$ der nte um $\frac{na}{n-1}$ oder $\frac{na}{n+1}$ absteht, wenn die beyden Endpuncte des Nonius genau zweyen Theilstrichen des Randes entsprechen, und dass, wenn ich z. B. den nten Theilstrich des Nonius, auf den ihm nächsten des Randes bringe, auch zugleich den ganzen Nonius $\frac{na}{r-1}$ oder $\frac{na}{r+1}$ &c bewegen muss, so wird man den Grund von den oben gegebenen Werthen von y gleich einsehen.

---

78 **Ueber die Libelle.**

Das Wesentlichste bey der Libelle ist, dass man wisse, welchem Bogen, ein Theilstrich der Libelle entspreche.

Dazu hat man verschiedene Methoden, unter welchen aber vorzüglich die Folgende ihrer grossen Einfachheit wegen, sehr empfehlenswürdig ist:

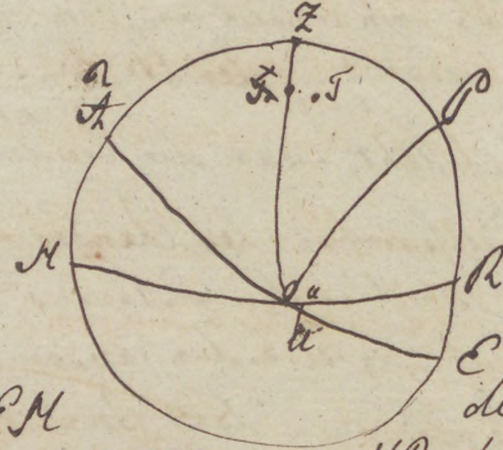


Sey AB irgend ein Gegenstand von bekannter Höhe, xy ein Diopter Lineal, auf das Lineal befestige man die Libelle visiere erst nach a, und sehe wie viel Theile das eine Ende der Libelle da anzeigt, dann visire man nach A, und sehe wieder die Lage desselben Endpunctes der Libelle an, da man die Linie Aa, ferner die Linie Da und den Winkel AaD, als einen Rechten kennt, so kann man daraus auch den Winkel ADa berechnen, und hat man diesen, so ist:

Werth eines Theilstriches der Libelle $= \frac{\text{Differenz der Lage des End-}}{\text{Winkel } ADa}$

Das Uebrige ueber die Libelle sehe man unter No 22.

Ueber die Bestimmung der Fehler beym Mittagsrohre.



Sey HZPEH die östliche Hälfte der Himmelskugel, O der Ostpunct, HR der Horizont, AE der Aequator, Z das Zenith, P der Nordpol, ferner U der Punct, wo der östliche Endpuncte des Rohres den Himmel trifft, und T wieder der Punct, wo die Collimations~~fehler~~ linie des Instrumentes die Himmelsfläche trifft, so hat man:

$\cos UT = \cos TP \cos UP + \cos TA \cos UA + \cos TO \cos UO$ und

$\cos UT = \cos TZ \cos UZ + \cos TH \cos UH + \cos TO \cos UO$

Die Drey Hauptfehler sind, die Neigung der Drehungsaxe gegen den Horizont oder die Linie $Uu = b$, dann der Collimationsfehler: $TZ = c$ und das Azimuth des Rohres $PZU = a$. In unserer Figur hat man:

$HZU = 90° + a$ aus unserer Annahme

$ZU = 90° + b$ eben so

$TU = 90° - c$ eben so

$AU = 90° + m$ hypothetisch bezeichnet

$PU = 90° + n$ eben so

$TP = 90° - \delta$ das Complement der Declination zu $90°$

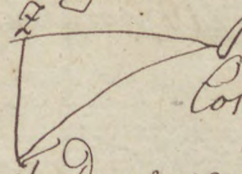
$APT = \gamma$ = dem Stundenwinkel des Rohres

$TZ = z$ = Zenithdistanz des beobachteten Sternes

$HZT = w$ = ~~des Azimuths~~

Wir wollen nun die Glieder aus welchen die oben aufgestellten Fundamentalgleichungen bestehen, näher betrachten und zu entwickeln suchen:

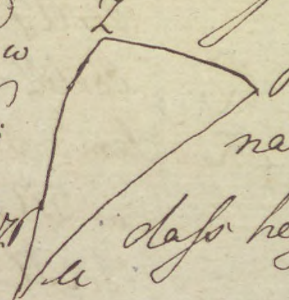
Das erste nähmlich $\mathrm{Cos}\, TP = \mathrm{Sin}\, \delta$, oder aus dem Dreyecke:



folgt: (siehe die Figur wegen Bedeutung der Buchstaben)

$$\mathrm{Cos}\, TP = \mathrm{Sin}\, \varphi\, \mathrm{Cos}\, z + \mathrm{Cos}\, \varphi\, \mathrm{Sin}\, z\, \mathrm{Cos}\, \omega$$

Das zweyte folgt aus dem Dreyecke:

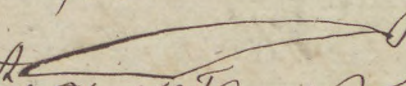


nähmlich:

es ist: $\mathrm{Cos}\, UP = \mathrm{Cos}\, ZU\, \mathrm{Cos}\, ZP + \mathrm{Sin}\, ZU\, \mathrm{Sin}\, ZP\, \mathrm{Cos}\, UZP$ dass heisst:

$$\mathrm{Cos}\, UP = -\mathrm{Sin}\, b\, \mathrm{Sin}\, \varphi + \mathrm{Cos}\, b\, \mathrm{Cos}\, \varphi\, \mathrm{Sin}\, a$$

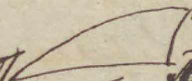
Aus dem Dreyecke:



folgt:

$\mathrm{Cos}\, AT = \mathrm{Cos}\, AP\, \mathrm{Cos}\, TP + \mathrm{Sin}\, AP\, \mathrm{Sin}\, TP\, \mathrm{Cos}\, APT$: dass heisst:

$\mathrm{Cos}\, AT = \mathrm{Cos}\, \delta\, \mathrm{Cos}\, \gamma$ und aus Dreyecke



wieder folgt:

$\mathrm{Cos}\, AT = \mathrm{Cos}\, TZ\, \mathrm{Cos}\, AZ + \mathrm{Sin}\, TZ\, \mathrm{Sin}\, AZ\, \mathrm{Cos}\, AZT$, dass heisst:

$$\mathrm{Cos}\, AT = \mathrm{Cos}\, z\, \mathrm{Cos}\, \varphi + \mathrm{Sin}\, z\, \mathrm{Sin}\, \varphi\, \mathrm{Cos}\, \omega$$

Aus dem Dreyecke: UAP

folgt:

$\mathrm{Cos}\, UA = \mathrm{Cos}\, AP\, \mathrm{Cos}\, UP + \mathrm{Sin}\, AP\, \mathrm{Sin}\, UP\, \mathrm{Cos}\, APU$ dass heisst:

$\mathrm{Cos}\, UA = -\mathrm{Cos}\, n\, \mathrm{Sin}\, m$ aus dem Dreyecke AZU aber folgt:

$\mathrm{Cos}\, UA = \mathrm{Cos}\, AZ\, \mathrm{Cos}\, UZ + \mathrm{Sin}\, AZ\, \mathrm{Sin}\, UZ\, \mathrm{Cos}\, AZU$ dass heisst:

$$\mathrm{Cos}\, UA = -\mathrm{Cos}\, \varphi\, \mathrm{Sin}\, b + \mathrm{Sin}\, \varphi\, \mathrm{Cos}\, b\, \mathrm{Sin}\, a$$

Aus dem Dreyecke: $\underline{TOP}$ folgt:

$\mathrm{Cos}\, TO = \mathrm{Cos}\, TP\, \mathrm{Cos}\, OP + \mathrm{Sin}\, TP\, \mathrm{Sin}\, OP\, \mathrm{Cos}\, TPO$ dass heisst:

$\mathrm{Cos}\, TO = \mathrm{Cos}\, \delta\, \mathrm{Sin}\, \gamma$; Aus dem Dreyecke: $\overline{TOZ}$ aber, folgt:

$\mathrm{Cos}\, TO = \mathrm{Cos}\, OZ\, \mathrm{Cos}\, TZ + \mathrm{Sin}\, OZ\, \mathrm{Sin}\, TZ\, \mathrm{Cos}\, OZT$ dass heisst:

$$\mathrm{Cos}\, TO = \mathrm{Sin}\, z\, \mathrm{Sin}\, \omega$$

Aus dem Dreyecke UOP folgt:

$\mathrm{Cos}\, UO = \mathrm{Cos}\, OP\, \mathrm{Cos}\, UP + \mathrm{Sin}\, OP\, \mathrm{Sin}\, UP\, \mathrm{Cos}\, OPU$ dass heisst:

$\mathrm{Cos}\, UO = \mathrm{Cos}\, n\, \mathrm{Cos}\, m$; aus dem Dreyecke OZU aber folgt:

$\mathrm{Cos}\, UO = \mathrm{Cos}\, OZ\, \mathrm{Cos}\, ZU + \mathrm{Sin}\, OZ\, \mathrm{Sin}\, ZU\, \mathrm{Cos}\, OZU$ nähmlich:

$$\mathrm{Cos}\, UO = \mathrm{Cos}\, b\, \mathrm{Cos}\, a$$

Aus dem Dreyecke TZP folgt:

$\cos TZ = \cos ZP \cos TP + \sin TZ \sin ZP \cos ZPT$ nähmlich:

$\cos TZ = \cos z = \sin\varphi \sin d + \cos\varphi \cos d \cos y$

Aus dem Dreyecke: UZP folgt:

$\cos UZ = \cos ZP \cos UP + \sin ZP \sin UP \cos UPZ$ nähmlich:

$\cos UZ = -\sin\varphi \sin n - \cos\varphi \cos n \cos y$

Aus dem Dreyecke HTP folgt:

$\cos TH = \cos HP \cos TP + \sin HP \sin TP \cos HPT$ oder

$\cos TH = -\sin\varphi \sin d + \cos\varphi \cos d \cos y$

Und aus dem Dreyecke: HTZ folgt:

$\cos TH = \cos HZ \cos TZ + \sin HZ \sin TZ \cos HZT$ daß heißt:

$\cos TH = \sin z \cos\omega$

Endlich folgt aus dem Dreyecke UHP:

$\cos UH = \cos HP \cos UP + \sin HP \sin UP \cos HPU$ daß heißt:

$\cos UH = +\cos\varphi \sin n - \sin\varphi \cos n \sin m$ aus dem Dreyecke UHZ aber folgt:

$\cos UH = \cos HZ \cos UZ + \sin HZ \sin UZ \cos HZU$ daß heißt:

$\cos UH = -\cos b \sin a$

Man hat also für die Glieder der obigen 2 Fundamentalgleichungen folgende Werthe:

$\cos TP = \sin d = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos\omega$

$\cos UP = -\sin n = -\sin\varphi \sin b - \cos\varphi \cos b \sin a$

$\cos TH = \cos d \cos y = \cos\varphi \cos z + \sin\varphi \sin z \cos\omega$

$\cos UH = -\cos n \sin m = -\cos\varphi \sin b - \sin\varphi \cos b \sin a$

$\cos TO = \sin z \sin\omega = \cos d \sin y$

$\cos UO = \cos b \cos a = \cos n \cos m$

$\cos TZ = \cos z = \sin d \sin\varphi + \cos d \cos\varphi \cos y$

$\cos UZ = -\sin b = -\sin\varphi \sin n - \cos\varphi \cos n \sin m$

$\cos TH = \sin z \cos\omega = -\cos\varphi \sin d + \sin\varphi \cos d \cos y$

$\cos UH = -\cos b \sin a = \cos\varphi \sin n - \sin\varphi \cos n \sin m$

Erwägt man nun daß alle die Größen: a, b, c, m, n, ω, y, sehr klein sind, und man daher für ihre Cosinusse die Einheit, für ihre Sinusse aber die Bogen selbst setzen kann, so erhält man:

$$\mathrm{Cos}\,TO = \mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Sin}(\varphi - z)$$
$$\mathrm{Cos}\,UO = -n = -b\,\mathrm{Sin}\,\varphi - a\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$\mathrm{Cos}\,TA = y\,\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,z + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,z = \mathrm{Cos}(\varphi - z)$$
$$\mathrm{Cos}\,UA = -m = -b\,\mathrm{Cos}\,\varphi - a\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$\mathrm{Cos}\,TO = \mathrm{Sin}\,z = y\,\mathrm{Cos}\,\delta$$
$$\mathrm{Cos}\,UO = c$$
$$\mathrm{Cos}\,TZ = \mathrm{Cos}\,z = \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Cos}(\varphi - \delta)$$
$$\mathrm{Cos}\,UZ = -b = -n\,\mathrm{Sin}\,\varphi - m\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$\mathrm{Cos}\,TH = \mathrm{Sin}\,z = -\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Sin}(\varphi - \delta)$$
$$\mathrm{Cos}\,UH = -a = n\,\mathrm{Cos}\,\varphi - m\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

Da nun $UT = 90° - c$ also $\mathrm{Cos}\,UT = \mathrm{Sin}\,c$ oder nahe $= c$ ist, so ist, wenn man für die Glieder der obigen Gleichungen ihre genäherten Werthe substituirt:

$$c = -n\,\mathrm{Sin}\,\delta - m\,\mathrm{Cos}\,\delta + y\,\mathrm{Cos}\,\delta = -b\,\mathrm{Cos}\,z - a\,\mathrm{Sin}\,z + y\,\mathrm{Cos}\,\delta$$ oder endlich:

$$c = -b\,\mathrm{Cos}\,z - a\,\mathrm{Sin}\,z + \omega\,\mathrm{Sin}\,z$$ Hieraus folgt:

$$\text{(I)}\quad y = \frac{c + n\,\mathrm{Sin}\,\delta + m\,\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Cos}\,\delta} = m + n\,\mathrm{tg}\,\delta + c\,\mathrm{Sec}\,\delta$$

$$\text{(II)}\quad y = \frac{c + a\,\mathrm{Sin}\,z + b\,\mathrm{Cos}\,z}{\mathrm{Cos}\,\delta} = \frac{c + a\,\mathrm{Sin}(\varphi - \delta) + b\,\mathrm{Cos}(\varphi - \delta)}{\mathrm{Cos}\,\delta}$$ und

$$\text{(III)}\quad \omega = \frac{c + b\,\mathrm{Cos}\,z + a\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,z} = a + b\,\mathrm{Cotg}\,z + c\,\mathrm{Cosec}\,z$$

Die Gleichung I heisst die Besselsche Gleichung, und ist wenn man die Grössen m, n und c kennt, sehr bequem, die zwey Letzten aber heissen die Tob. Mayerschen Gleichungen, von welchen die erste den Stundenwinkel des Sternes den man beobachtet, und die zweyte das Azimuth eines ins Gesichtsfeld des Rohres fallenden terrestrischen Objectes gibt.

Um γ zu finden haben wir also die Gleichungen:

$$\gamma = m + n\,tg\,\delta + c\,Sec\,\delta \text{ und: }$$

$$\gamma = a + b\,Cotg.\,z + c\,Cosec\,z$$

aber darinn sind die Grössen a, b, c, m, n, unbekannt, und es müssen daher erst diese bestimmt werden.

Vorerst bestimmt man b, und zwar durch die Libelle, man weiss aus der Theorie der Libelle, dass wenn O, W, das abgelesene Ost und Westende der Blase vor ~~und~~ ~~nach~~ O', W' nach der Umhängung der Libelle sind, die Neigung der nivellirten Linie in Theilen der Libelle ist:

$$b = \frac{(W'+W) - (O'+O)}{4}$$ Ist nun k der Werth eines Theiles der Libelle in Bogensecunden, so ist die Neigung in Bogensecunden:

$$b = \frac{k}{4}\left((W'+W) - (O'+O)\right) \text{ hingegen in Zeitsecunden: }$$

$$b = \frac{k}{60}\left((W'+W) - (O'+O)\right)$$

c oder der Collimationsfehler kann unmittelbar ~~auf~~ durch Umkehrung bestimmt werden.

Ist ~~der~~ ϑ der in der gewöhnlichen Lage des Instrumentes beobachtete Durchgang eines Sterns durch einen Faden, und ϑ' der beobachtete Durchgang desselben Sterns durch denselben Faden nach der Umkehrung, so ist der in der Zwischenzeit von dem Sterne durchlaufene Bogen seines Parallelkreises =

$$= 15(\vartheta' - \vartheta)\,Cos\,\delta \text{ und daher der Collimationsfehler}$$

$$c = \frac{15(\vartheta' - \vartheta)\,Cos\,\delta}{2} \text{ in Bogen oder } = \frac{(\vartheta' - \vartheta)\,Cos\,\delta}{2} \text{ in Zeit.}$$

Diese Formel ist aber nicht genau, da sie die Neigung des Rohres = 0 voraussetzt, wir wollen aber, und müssen auch auf die Neigung Rücksicht nehmen, und haben daher zu bestimmen, welchen Einfluss die Neigung auf die Collimation habe. Diess geschieht indem wir den Stundenwinkel der Neigung bestimmen, da wir um die Collimation zu bestimmen, genau wissen müssen, zu welcher Zeit der Stern den Faden passirte. Sey daher APB der Meridian,

ApB der Kreis den das Rohr wegen seiner Neigung beschreibt, und p ein Stern im Augenblicke seiner Passage durch das Rohr dessen Zenithdistanz z ist, so ist im Dreyecke: ApP:

$$\cos\delta : \cos z = \sin b : \sin\gamma \text{ und daher: } \sin\gamma = \frac{\sin b\cos z}{\cos\delta}$$

oder da b und γ stets klein sind: $\gamma = \frac{b\cos z}{\cos\delta}$ Wir wollen nun die Neigung für positiv annehmen, so wird γ negativ, oder man wird der Neigung wegen den Stern früher unterm Faden beobachtet haben, und die Durchgangszeit durch den Faden vor der Umkehrung wird daher seyn:

$$\vartheta - \frac{b\cos z}{15\cos\delta} \text{ und nach der Umkehrung: } \vartheta' - \frac{b'\cos z}{15\cos\delta}$$

und daher der Collimationsfehler in Bogen:

$$c = \frac{\left\{15(\vartheta'-\vartheta) - \frac{(b'+b)\cos z}{\cos\delta}\right\}\cos\delta}{2}$$

oder in Zeit, wo b, b' die Neigungen sind:

$$c = \frac{(\vartheta'-\vartheta)\cos\delta - (b'+b)\cos z}{2}$$

Um n zu bestimmen, wird man entweder 2 verschiedene Sterne oder aber die beyden Culminationen eines Circumpolarsterns beobachten, Die eine Beobachtung gibt:

$\gamma = m + n\,tg\delta + c\sec\delta$ und die andere:

$\gamma' = m + n\,tg\delta' + c\sec\delta'$ und daher ist:

$$\gamma' - \gamma = n(tg\delta' - tg\delta) + c(\sec\delta' - \sec\delta)$$

und daher:

$$n = \frac{\gamma' - \gamma}{\operatorname{tg}\delta' - \operatorname{tg}\delta} - \frac{c(\operatorname{Sec}\delta' - \operatorname{Sec}\delta)}{\operatorname{tg}\delta' - \operatorname{tg}\delta}$$

$$= \frac{(\gamma' - \gamma)\operatorname{Cos}\delta.\operatorname{Cos}\delta'}{\operatorname{Sin}(\delta' - \delta)} - \frac{c(\operatorname{Sec}\delta' - \operatorname{Sec}\delta)\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Cos}\delta'}{\operatorname{Sin}(\delta' - \delta)}$$

also für einen Circumpolarstern, wo $\delta' = 180^\circ - \delta$ ist:

$$\cancel{n = \frac{(\gamma' - \gamma)\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\delta'}{\operatorname{Sin}2\delta}}$$

$$n = \frac{\gamma' - \gamma}{-\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}(180^\circ - \delta)} - \frac{c(\operatorname{Sec}\delta + \operatorname{Sec}(180^\circ - \delta))}{\operatorname{tg}(180^\circ - \delta) - \operatorname{tg}\delta}$$

$$= -\frac{\gamma' - \gamma}{2\operatorname{tg}\delta} - \frac{2c\operatorname{Sec}\delta}{2\operatorname{tg}\delta}$$ nähmlich:

$$n = \frac{\gamma - \gamma'}{2\operatorname{tg}\delta} - \frac{c}{\operatorname{Sin}\delta} \quad *$$

Hat man dann n so folgt m gleich, denn man hat die Gleichungen:

$$m = a\operatorname{Sin}\varphi + b\operatorname{Cos}\varphi \quad \text{und}$$
$$n = b\operatorname{Sin}\varphi - a\operatorname{Cos}\varphi$$ aus der zweyten folgt

nun: $$a = \frac{b\operatorname{Sin}\varphi - n}{\operatorname{Cos}\varphi}$$ und diess in der ersten Gleichung substituirt, gibt:

$$m = \frac{b\operatorname{Sin}^2\varphi - n\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} + b\operatorname{Cos}\varphi = \frac{b\operatorname{Sin}^2\varphi - n\operatorname{Sin}\varphi + b\operatorname{Cos}^2\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

dass heisst: $$m = \frac{b - n\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} \quad **$$

Hat man dann m, n, und c, so hat man γ gleich durch die Besselsche Gleichung, und hat man γ so hat man die gesuchte Correction der Uhr augenblicklich. Denn es ist stets

γ = Rectascens. — Sternzeit; Ist also t die Uhrzeit eines Augenblickes, und x die Correction derselben gegen

Sternzeit, so ist:

$$y = \alpha - t - x \quad \text{also wenn } y \text{ bekannt ist:}$$

$$x = \alpha - t - y \; *$$

Dass y stets gleich $\alpha - t - x$ sey, erhellt aus folgender Figur:

MSNV ist der Aequator, MN der Meridian, V der Frühlingspunct und S irgend ein Stern, oder die Basis des Declinationskreises eines Sterns, so ist $MS = y$, $VS = \alpha$ und $VM = t + x$ also auch:

$$y = \alpha - t - x \; *$$

Diess wäre daher alles gut, und alle Grössen, b, c, n, m, a, wären durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt, wenn nicht in der Formel für n, auf welche dann die übrigen Bestimmungen sich stützen eine Grösse vorkäme, die noch nicht bestimmt ist, und dem Anscheine nach auch nicht bestimmt werden kann, ohne entweder a, und b oder m und n zu kennen, diese Grösse ist $y'' - y'$ oder die Differenz der Stundenwinkel, die sich aber wirklich sehr leicht aus dem täglichen Gange der Uhr bestimmen lässt, und zwar auf folgende Art:

Sey die Rectascension eines Sternes heute A, und Morgen A' und man habe diesen Stern heute zur Uhrzeit T, morgen aber zur Uhrzeit T' beobachtet, so ist ~~sind~~ in der Zwischenzeit: $24^h + A' - A$ Sternzeit und $24^h + T' - T$ Uhrzeit verflossen, sind nun t, und t' zwey andere Uhrzeiten und k, k' ihre noch unbekannte Correctionen gegen Sternzeit, so hat man:

$$24 + A' - A : 24 + T' - T = (t' - t) + (k' - k) : (t' - t)$$

woraus folgt:

$$(24+A'-A)(t'-t) = (24^h+T'-T)(t'-t) + (24^h+T'-T)(k'-k)$$

also: $$k'-k = \frac{(t'-t)(24^h+A'-A)}{24^h+T'-T} - (t'-t)$$

Nun hat man für jene beyden Zeiten t, und t':

$\gamma = \alpha - t - k$ und {man habe nähmlich zwey andere Sterne oder einen Circumpolarstern zweymahl zu den Zeiten t' und t beobachtet und wünschte die Differenz der Stundenwinkel wegen Bestimmung von n zu kennen.

$\gamma' = \alpha' - t' - k'$

Daraus folgt:

$\gamma'-\gamma = (\alpha'-\alpha) - (t'-t) - (k'-k)$ also wenn man für $(k'-k)$ seinen Werth substituirt:

$$\gamma'-\gamma = (\alpha'-\alpha) - (t'-t) - \frac{(t'-t)(24^h+A'-A)}{24^h+T'-T} + (t'-t)$$

oder endlich: $$\gamma'-\gamma = (\alpha'-\alpha) - \frac{(t'-t)(24^h+A'-A)}{24^h+T'-T}$$ für 2 Sterne, oder $$\gamma'-\gamma = 12^h - \frac{(t'-t)(24^h+A'-A)}{24^h+T'-T}$$ für einen in beyden Culminationen beobachteten Circumpolarstern.

Ohne also weder γ noch γ' weder k' noch k zu kennen, kann man ihre Differenz durch die jetzt gezeigte Weise dennoch finden; und es steht daher der Auflösung der Gleichungen welche a, b, m, n, c und γ geben, nichts mehr im Wege.

Der oben gegebene Werth von c läßt sich auch ~~durch~~ aus der Gleichung für γ durch blosse Elimination bestimmen, erinnert man sich der Bedeutung von γ so hat für ~~einen~~ denselben einen Stern ~~vor der~~

Umkehrung: $\gamma = \alpha - t - x = a\sin z\sec\delta + b\cos z\sec\delta + c\sec\delta$ und für ~~einen~~ denselben

$\gamma' = \alpha^* - t' - x^* = a\sin z\sec\delta + b'\cos z\sec\delta - c\sec\delta$ ~~Beobachtung~~ Stern nach der Um- kehrung

und daher:

$$x = \alpha - t - a\sin z\sec\delta - b\cos z\sec\delta - c\sec\delta \text{ und:}$$

$$x = \alpha - t' - a\sin z\sec\delta - b'\cos z\sec\delta + c\sec\delta$$

Das eine hat man vor, das andere nach der Umkehrung des Rohres für einen und denselben Stern.

Also: $0 = t' - t - (b'-b)\cos z \sec\delta' + 2c\sec\delta'$ also:

$$c = \frac{(t'-t)\cos\delta' - (b'-b)\cos z}{2} \; *$$

Den Collimationsfehler c kann man aber auch noch auf eine andere Weise bestimmen: Man hat nach dem Obigen:

$$n = \frac{\gamma' - \gamma}{tg\delta' - tg\delta} - \frac{c(\sec\delta' - \sec\delta)}{tg\delta' - tg\delta}$$ und für einen andern Stern:

$$n = \frac{\gamma'' - \gamma}{tg\delta'' - tg\delta} - \frac{c(\sec\delta'' - \sec\delta)}{tg\delta'' - tg\delta}$$ also:

$$0 = \frac{\gamma' - \gamma}{tg\delta' - tg\delta} - \frac{\gamma'' - \gamma}{tg\delta'' - tg\delta} - c\left(\frac{\sec\delta' - \sec\delta}{tg\delta' - tg\delta} - \frac{\sec\delta'' - \sec\delta}{tg\delta'' - tg\delta}\right)$$

nähmlich:

$$0 = \frac{(\gamma'-\gamma)(tg\delta''-tg\delta) - (\gamma''-\gamma)(tg\delta'-tg\delta)}{tg\delta' tg\delta'' - tg\delta' tg\delta'' - tg\delta tg\delta' + tg^2\delta} - c\left(\begin{array}{l}\sec\delta' tg\delta'' - \sec\delta' tg\delta'' \\ - \sec\delta' tg\delta + \sec\delta tg\delta \\ - \sec\delta'' tg\delta' - \sec\delta' tg\delta \\ - \sec\delta'' tg\delta + \sec\delta tg\delta\end{array}\right.$$

etc. etc.

oder
$$c = \frac{(\gamma'-\gamma)(tg\delta''-tg\delta) - (\gamma''-\gamma)(tg\delta'-tg\delta)}{(\sec\delta'-\sec\delta)(tg\delta''-tg\delta) - (\sec\delta''-\sec\delta)(tg\delta'-tg\delta)}$$

oder für zwey Circumpolarsterne, wo man hat:

$$n = \frac{\gamma'-\gamma}{2tg\delta} - \frac{c}{\sin\delta}$$ und $$n = \frac{\gamma''-\gamma'}{2tg\delta'} - \frac{c}{\sin\delta'}$$ und daher:

$$0 = \frac{\gamma'-\gamma}{2tg\delta} - \frac{\gamma''-\gamma'}{2tg\delta'} - \frac{c}{\sin\delta} + \frac{c}{\sin\delta'}$$ dass heisst:

$$c = \tfrac{1}{2}\left((\gamma'-\gamma)\cot\delta - (\gamma''-\gamma')\cot\delta'\right)(\sin\delta - \sin\delta') \; *$$

Das Azimuth a bestimmt man auch ausser seinem oben gegebenen Werthe auf folgende Art.

Es ist für einen Stern:

$\alpha - t - x = a \sin z \sec\delta - b \cos z \sec\delta - c \sec\delta$ und für einen anderen Stern

ist $\alpha' - t' - x = a \sin z' \sec\delta' - b \cos z' \sec\delta' - c \sec\delta'$ also auch:

$$o = (\alpha' - \alpha) - (t' - t) - a(\sin z' \sec\delta' - \sin z \sec\delta) - b(\cos z' \sec\delta' - \cos z \sec\delta)$$
$$- c(\sec\delta' - \sec\delta)$$

also:

$$a = \frac{(\alpha' - \alpha) - (t' - t) - b(\cos z' \sec\delta' - \cos z \sec\delta) - c(\sec\delta' - \sec\delta)}{\sin z' \sec\delta' - \sin z \sec\delta}$$

d. h. wenn man für z seinen Werth setzt:

$$a = \frac{(\alpha' - \alpha) - (t' - t) - b(\cos(\varphi - \delta') \sec\delta' - \cos(\varphi - \delta) \sec\delta) - c(\sec\delta' - \sec\delta)}{\sin(\varphi - \delta') \sec\delta' - \sin(\varphi - \delta) \sec\delta}$$

Für einen Circumpolarstern der in beyden Culminationen beobachtet wurde ist, $\alpha' = 12^h + \alpha$ und $\delta' = 180° - \delta$, also:

$$\alpha' - \alpha = 12^h$$
$$\cos(\varphi - \delta') = \cos(\varphi - 180° + \delta) = \cos(\varphi + \delta)$$
$$\sec\delta' = \sec(180° - \delta) = -\sec\delta$$
$$\sec\delta' - \sec\delta = -2\sec\delta$$
$$\sin(\varphi - 180° + \delta') \sec\delta' = -\sin(180° - (\varphi + \delta)) . -\sec\delta = \sin(\varphi + \delta)$$

daher ist:

$$a = \frac{12^h - (t' - t) - \{b \cos(\varphi + \delta) - b' \cos(\varphi - \delta) + 2c\} \sec\delta}{\dfrac{\sin(\varphi + \delta) - \sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}}$$

oder:

$$a = \frac{12^h - (t' - t) - \{b \cos(\varphi + \delta) - b' \cos(\varphi - \delta) + 2c\} \sec\delta}{2 \cos\varphi \operatorname{tg}\delta}$$

wo b' die Neigung der ~~Rohres~~ Achse bey der unteren Culmination ist.

Setzt man endlich, man habe durch die mechanischen Correctionen des Instrumentes, dasselbe von allen Fehlern befreyt, was man aber nur dann voraussetzen darf, wenn keine grosse Genauigkeit erfordert wird, so geht der letzte Ausdruck für das Azimuth in folgenden einfachen über:

Hat man 2 Sterne beobachtet so ist:

$$a = \frac{(\alpha' - \alpha) - (t' - t)}{\sin(\varphi - \delta')\sec\delta' - \sin(\varphi - \delta).\sec\delta}$$

Hat man aber beyde Culminationen eines Circumpolarsterns beobachtet, so ist:

$$a = \frac{12^h - (t' - t)}{2\cos\varphi \operatorname{tg}\delta}$$

Und hier ist nun alles was übers Mittagsrohr gesagt werden kann, völlig erschöpft.

80 Ueber den Multiplicationskreis.

Das erste und wesentlichste beym Multiplicationskreise ist, dass die Verticalsäule diess wirklich sey. Man wird diess durch die Libelle prüfen: Hat man daher in der einen Lage der Libelle das eine Ende der Blase $= N$ das andere $= S$, dann nach der Umkehrung der Axe aber das eine Ende $= N'$ das andere $= S'$ gefunden so ist; wenn noch m den Werth eines Intervalles der Libelle in Bogensecunden bezeichnet, die Neigung der Säule:

$= \frac{m}{4}\left((N' + N) - (S' + S)\right)$ oder wenn man immer nur ein Ende der Blase gelesen hätte:

So wäre die Neigung:

$$= \frac{m}{4}(N-S') \text{ oder } \frac{m}{4}(N'-S)$$

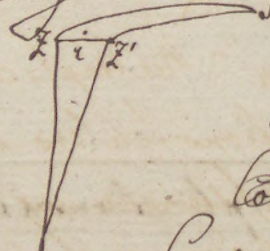
Nimmt man die Neigung dann für poſitiv an, wenn die Säule vom Zenith gegen Süden abweicht, ſo iſt, wenn noch z die wahre und z' die beobachtete Zenithdiſtanz bezeichnet:

$$z' = z^* \mp \frac{m}{4}\left\{(N'+N) - (S'+S)\right\}$$

$$= z^* \mp \frac{m}{4}(N-S') = z^* \mp \frac{m}{4}(N'-S)$$

Das obere Zeichen wenn man eine ſüdliche das untere aber wenn man eine nördliche Zenithdiſtanz beobachtet hat.

Das zweyte weſentliche Erforderniſs iſt, daſs die Ebene der beyden Verticalkreiſe mit der Verticalſäule parallel ſeyen. Wäre aber hier noch eine kleine Neigung n von i Secunden zurückgeblieben, ſo nimmt man darauf auf folgende Art Rückſicht:



Sey Z das wahre, Z' aber das Zenith des Verticalkreiſes, ſo iſt:

$$\cos z^* = \cos i \cos z' \text{ oder aber:}$$

$$\cancel{\cos z = \cos i\,(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2} i)}$$

$$\cos z = \cos z'(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2} i) = \cos z = \cos z' - \cos z \sin^2\tfrac{1}{2} i$$

d. h. $\cos z' - \cos z = 2\cos z' \sin^2\tfrac{1}{2} i$ nähmlich wenn man für $\cos z' - \cos z$ ſeinen Werth ſetzt, ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, ſo hat man:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(z^* - z') = \frac{2\cos z' \sin^2\tfrac{1}{2} i}{\sin\tfrac{1}{2}(z'+z)} \text{ d. h. } \sin\tfrac{1}{2}(z^* - z') = \frac{\cos z' \sin^2\tfrac{1}{2} i}{\sin\tfrac{1}{2}(z'+z)}$$

Da nun z' von z ſehr wenig verſchieden iſt, ſo wird man für $\sin\tfrac{1}{2}(z^* - z')$, $\tfrac{1}{2}(z^* - z')$; und für $\sin\tfrac{1}{2}(z'+z)$ $\sin z'$ ſetzen können, wodurch man erhält:

$\frac{1}{2}(z^{*}-z') = \mathrm{Cotg}\, z' \,\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} i$ oder da auch i sehr klein ist:

$\frac{1}{2}(z^{*}-z') = \mathrm{Cotg}\, z' \cdot \frac{1}{4} i^2 \,\mathrm{Sin}\, 1''$ oder:

$\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z' = \frac{1}{4} i^2 \,\mathrm{Sin}\, 1'' \,\mathrm{Cotg}\, z'$ dass heißt endlich:

$$z = z' + \frac{1}{2} i^2 \,\mathrm{Sin}\, 1'' \,\mathrm{Cotg}\, z'.$$

Das dritte Haupterforderniss endlich ist, dass auch die optische Axe des Fernrohres parallel sey, mit den beyden ~~Vertical~~ Vertikalkreisen, wäre aber hier noch eine Neigung von n'' geblieben, so wird diese Neigung auf dieselbe Weise berücksicht, wie die Neigung der ~~Verticalk~~ Verticalkreise gegen die Verticalaxe, nähmlich es ist:

$$z^{*} = z' + \frac{1}{2} n^2 \,\mathrm{Sin}\, 1'' \,\mathrm{Cotg.}\, z'$$

81 V

Vom einfachen Kreise.

Dieser hat alle Correctionen mit dem Multiplicationskreise gemein. Bey der Bestimmung des Collimationsfehlers eines solchen einfachen Kreises durch mehrere Beobachtungen des Polarsterns ist es nöthig, die Änderung der Zenithdistanz zu bestimmen, für die Zwischenzeit dt der Beobachtungen, und diese erhält man auf folgende Art:

Es ist: $\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta \,\mathrm{Cos}\, t$ also für Fixsterne wo man δ für die Zeit dt als unveränderlich annehmen kann, ist:

$-dz \,\mathrm{Sin}\, z = -\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta \,\mathrm{Sin}\, t\, dt$ also:

$dz = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta \,\mathrm{Sin}\, t}{\mathrm{Sin}\, z} . dt$ und für Planeten ist:

$-dz \,\mathrm{Sin}\, z = \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta\, d\delta - \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\delta \,\mathrm{Cos}\, t\, d\delta - \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta \,\mathrm{Sin}\, t\, dt$, also:

$$dz = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta \,\mathrm{Sin}\, t . dt + d\delta\,(\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\delta \,\mathrm{Cos}\, t - \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\delta)}{\mathrm{Sin}\, z}$$

82

Rectification des Aequatorials

Außer den Fehlern, die das Aequatorial mit allen Kreisen gemein hat, und die daher eben so wie jene berichtigt werden, kann es noch andere vier ~~Haupt~~ Hauptfehler haben, die ihm ~~und~~ seiner Natur nach eigenthümlich sind, und die man kennen muss, um die damit gemachten Beobachtungen von diesen Fehlern befreyen, und also brauchbar machen zu können.

Der erste Hauptfehler ist der Colimationsfehler des Declinationskreises den wir $\Delta\Pi$ nennen wollen.

Der zweyte ist der Colimationsfehler des Stundenkreises den wir $\Delta\gamma$ nennen wollen.

Der dritte Hauptfehler ist die Abweichung des Poles des Instrumentes vom wahren Weltpole, und diesen Fehler wollen wir x nennen.

Der vierte Hauptfehler ist die Abweichung der Ebene in welcher die Polar Axe des Instrumentes liegt, von dem Meridiane, und diesen Fehler wollen wir mit u bezeichnen.

Um nun die 4 Fehler zu bestimmen sey in folgender Figur:

P der Weltpol, Z das Zenith, π der Pol des Instrumentes; s und s' aber die Orte zweyer Sterne ferner seyen p, p' ihre wahren, π π' aber die abgelesenen ~~Stundenwinkel~~ Poldistanzen, und g, g' ihre wahren, γ, γ' aber die abgelesenen Stundenwinkel, so ist in unserer Figur:

$$P\Pi = \psi$$
$$ZP\Pi = l$$
$$Ps = p$$
$$Ps' = p'$$
$$\Pi s = \pi + \Delta\pi = \varpi$$
$$\Pi s' = \pi' + \Delta\pi = \varpi'$$

Ferner sey:

$$PSS' = m$$
$$PS'S = m'$$
$$\Pi SS' = \mu$$
$$\Pi S'S = \mu' \quad \text{und} \quad ss' = D$$
$$\Pi Ps = x$$
$$\Pi Ps' = x'$$
$$P\Pi s = y$$
$$P\Pi s' = y'$$

m, m', μ, μ'; und D sind Hülfsgrößen die aber vorerst bekannt seyn müssen, wenn man das was man eigentlich sucht, erhalten will.

Aus dem Dreyecke $DPss'$ folgt durch die Gaussischen Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(m+m')\cos\tfrac{1}{2}D = \cos\tfrac{1}{2}(p'-p)\cos\tfrac{1}{2}(g'-g)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(m-m')\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}(p'-p)\cos\tfrac{1}{2}(g'-g)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(m+m')\cos\tfrac{1}{2}D = \cos\tfrac{1}{2}(p'+p)\sin\tfrac{1}{2}(g'-g)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(m-m')\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}(p'+p)\sin\tfrac{1}{2}(g'-g)$$

und daher wenn man die erste durch die dritte, die zweyte durch durch die vierte, ferner die zweyte durch die erste, und die vierte durch die dritte dividirt, so ist:

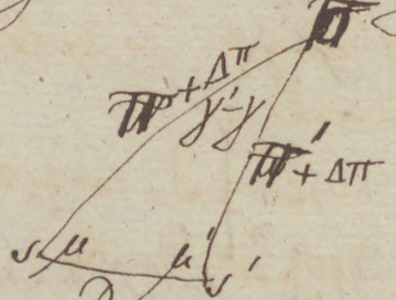
$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(m+m') = \frac{\mathrm{Cos}.\,\tfrac{1}{2}(p'-p)}{\mathrm{Cos}.\,\tfrac{1}{2}(p'+p)}\,\mathrm{Ctg}.\,\tfrac{1}{2}(g'-g)$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(m-m') = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(p'-p)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(p'+p)}\,\mathrm{Ctg}\,\tfrac{1}{2}(g'-g)$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}D = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(m+m')}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(m-m')}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(p'-p)$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(m+m')}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(m-m')}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(p'+p)$$

Nachdem wir nun D kennen, können wir auch μ und μ' bestimmen. Denn ebenfalls durch die Gaussischen Gleichungen folgt aus dem Dreyecke $\Pi s s'$



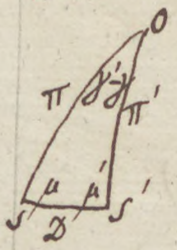
$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\mu+\mu')\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}D = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\mu-\mu')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}D = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\mu'+\mu)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}D = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\mu'-\mu)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}D = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$

Also wenn man die erste durch die dritte, und die zweyte durch die vierte dividirt, so ist:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\mu+\mu') = \frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)\cdot\mathrm{Ctg}\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)} \quad \text{und:}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\mu-\mu') = \frac{\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)}\cdot\mathrm{Ctg}.\,\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$

und diese zwey Formeln geben μ, und μ'; aber auf eine indirecte Weise, um sie auf directem Wege zu erhalten, wird man statt dem Pole des Instrumentes in jenem Dreyecke, den Nullpunct des Declinationskreises substituiren, wodurch man erhält:

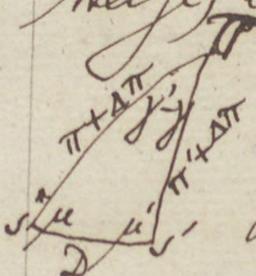


$$\sin\tfrac{1}{2}(\mu+\mu')\cos\tfrac{1}{2}D = \cos\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\mu-\mu')\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\mu')\cos\tfrac{1}{2}D = \cos\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\mu')\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$

Also wenn man die zweyte, durch die vierte, und die erste durch die dritte dividirt, so ist:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\mu-\mu') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\pi'-\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\pi'+\pi)}\cdot\mathrm{Ctg}.\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma) \text{ und:}$$
$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\mu+\mu') = \frac{\cos\frac{1}{2}(\pi'-\pi)}{\cos\frac{1}{2}(\pi'+\pi)}\cdot\mathrm{Ctg}.\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$

Kennt man so μ' und μ, so erhält man $\Delta\pi$ auf folgende Weise; es ist im Dreyecke:



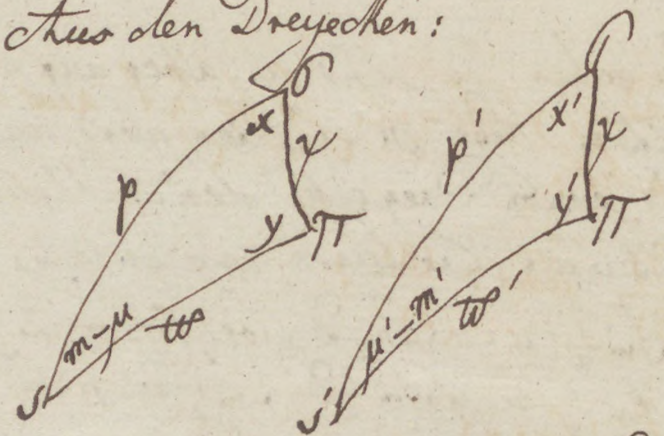
$$\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\mu')\cos\tfrac{1}{2}D = \cos\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\mu')\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$$

oder wenn man die zweyte durch die erste dividirt:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\mu-\mu')}{\cos\frac{1}{2}(\mu+\mu')}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}D$$

Hat man dann $\Delta\pi$ so kann man zur Bestimmung von ψ übergehen, um aber ψ zu haben, müssen früher die Hülfsgrössen x, y, x', y' bekannt seyn, welches sie auf folgende Art werden:

Aus den Dreyecken:



folgt:

$$(1)\quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y+x)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p-\varpi)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$(2)\quad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y+x)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p+\varpi)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$(3)\quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y-x)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p-\varpi)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$(4)\quad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y-x)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p+\varpi)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$(5)\quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y'+x')\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi')\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

$$(6)\quad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y'+x')\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

$$(7)\quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(y'-x')\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi')\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

$$(8)\quad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(y'-x')\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\psi = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

Macht man nun $\frac{(1)}{(2)}$; $\frac{(3)}{(4)}$; $\frac{(5)}{(6)}$ und $\frac{(7)}{(8)}$, so ist:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(y+x) = \frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p-\varpi)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p+\varpi)}\,\mathrm{Cotg}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(y-x) = \frac{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p-\varpi)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p+\varpi)}\cdot\mathrm{Cotg}\tfrac{1}{2}(m-\mu)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(y'+x') = \frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi')}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')}\,\mathrm{Cotg}.\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(y'-x') = \frac{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi')}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')}\cdot\mathrm{Cotg}\tfrac{1}{2}(\mu'-m')$$

Wenn man so x, y, und x', y' kennt; so folgt aus denselben Gleichungen, wenn man macht:

$$\frac{(3)}{(1)}\;;\;\frac{(4)}{(2)}\;;\;\frac{(7)}{(5)}\;\text{und:}\;\frac{(8)}{(6)}:$$

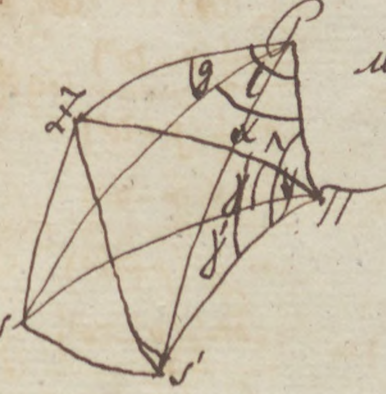
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(y+x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(y-x)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-\varpi)$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(y+x)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(y-x)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p+\varpi)$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(y'+x')}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(y'-x')}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi')$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(y'+x')}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(y'-x')}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')$$

Nun bleibt daher nur l und Λ noch zu bestimmen übrig, und zu diesem Zwecke nehmen wir die ursprüngliche Figur wieder vor;

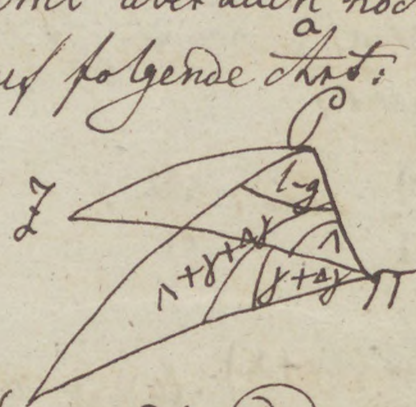


und man wird sich sogleich überzeugen, daß; man hat:

$$l = g + x = g' + x' \text{ und:}$$

$$\Lambda = y - \gamma = y' - \gamma'$$

Nun kömmt aber auch noch $\Delta\gamma$ zu bestimmen, und dieß geschieht auf folgende Art:



Es ist in dem Dreyecke $P\Pi s$:

$Ps = p$
$\Pi s = \pi + \Delta\pi$
$P\Pi = \psi$

und $sP\Pi = l - g$
$P\Pi s = \Lambda + \gamma + \Delta\gamma$
daher auch:

$$\cot g(\pi+\Delta\pi)\sin\psi - \cot g(l-g)\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \cos\psi\cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$
$$\cot g\, p\sin\psi - \cot g(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\sin(l-g) = \cos\psi\cos(l-g)$$

daraus folgt:

$$tg(l-g) = \frac{\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\cot g(\pi+\Delta\pi)\sin\psi - \cos\psi\cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

$$\cancel{tg\,p = \frac{\cot g(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\sin\psi}}$$

$$tg\,p = \frac{\sin\psi}{\cot g(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\sin(l-g) + \cos\psi\cos(l-g)}$$

Diese Gleichungen dienen dazu, um die wahre ~~Zenithdist~~ Poldistanz, und den wahren Stundenwinkel eines Sterns zu bestimmen, wenn man den Zustand des Instrumentes ~~kennt~~, und die Poldistanz π und den Stundenwinkel γ beobachtet hat.

Diese zwey Gleichungen sind aber für die Ausübung unbequem, und müssen daher erst logarithmisch gemacht werden. Setzen wir daher:

$$tg\,\theta = \frac{Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{Ctg(\pi+\Delta\pi)} \text{ also:}$$

$$Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = tg\,\theta\, Ctg(\pi+\Delta\pi) \text{ und:}$$

$$Ctg(\pi+\Delta\pi) = \frac{Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{tg\,\theta} \text{ so ist:}$$

$$tg(l-g) = \frac{Sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\frac{Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{tg\,\theta}\,Sin\,\psi + Cos\,\psi\, Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

oder:

$$\frac{tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\cdot tg\,\theta}{Sin\,\psi + Cos\,\psi\, tg\,\theta}$$

nähmlich:

$$tg(l-g) = \frac{Sin\,\theta\, tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{Sin\,\psi\, Cos\,\theta + Cos\,\psi\, Sin\,\theta}$$

nähmlich: =

$$tg(l-g) = \frac{Sin\,\theta\, tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{Sin(\psi+\theta)} \; *$$

Die zweyte Gleichung ist:

$$tg\,p = \frac{Sin\,\psi\, Sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\, Sin(l-g) + Cos\,\psi\, Cos(l-g)\cdot Sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

oder für $Cos(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$ seinen Werth gesetzt gibt:

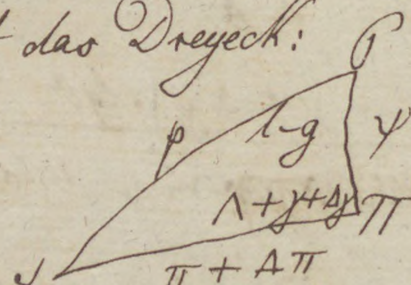
$$\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}(\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)}{\operatorname{tg}\theta \operatorname{Ctg}(\pi + \Delta\pi)\operatorname{Sin}(l-g) + \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}(l-g)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

woraus nach einigen Reductionen folgt:

$$\operatorname{Ctg} p = \operatorname{Cos}(l-g)\operatorname{Cotg}(\psi - \theta)$$

Um aber das Instrument zu corrigiren, muss man die verkehrte Aufgabe auflösen, und aus dem bekannten p und g, nachdem man durch die im Vorhergehenden entwickelten Formeln auch l, Λ, $\Delta\pi$ und ψ kennt, die unbekannten Grössen $\Delta\gamma$ ~~und zu~~ bestimmen, wobey man zugleich noch einen Ausdruck für $\Delta\pi$ erhält.

Man hat das Dreyeck:



und daraus die Gleichungen:

$$\operatorname{Ctg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Ctg}(l-g)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

$$\operatorname{Ctg} p \operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Ctg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\operatorname{Sin}(l-g) = \operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}(l-g)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\operatorname{Sin}(l-g)}{\operatorname{Ctg} p \operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}(l-g)}$$

und: $$\operatorname{tg}(\pi+\Delta\pi) = \frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) + \operatorname{Ctg}(l-g)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

oder wenn man um es logarithmisch zu machen, setzt:

$$\frac{\operatorname{Cos}(l-g)}{\operatorname{Ctg} p} = \operatorname{tg} t$$ oder:

$\operatorname{Cos}(l-g) = \operatorname{Cotg} p \cdot \operatorname{tg}\theta$ und $\operatorname{Cotg} p = \frac{\operatorname{Cos}(l-g)}{\operatorname{tg}\theta}$ so ist erstens:

$$\operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(l-g)}{\frac{\operatorname{Cotg} p \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Cos}(l-g)} - \operatorname{Cos}\psi}$$ oder:

$$\operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(l-g)}{\operatorname{Cotg}\theta \operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Cos}\psi}$$ nähmlich:

$$\operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(l-g) \cdot \operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\theta}$$ dass heisst:

$$\operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(l-g) \cdot \operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Sin}(\psi-\theta)} *$$

Und in der zweyten Gleichung, ist:

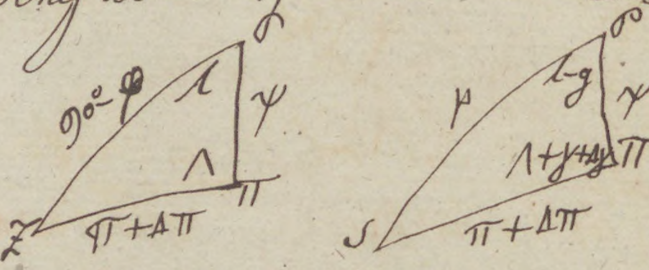
$$\operatorname{tg}(\pi+\Delta\pi) = \frac{\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sec}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Cotg}(l-g) \operatorname{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sec}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\operatorname{Cos}\psi + \frac{\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Sin}(\psi-\theta)}}$$

woraus nach einigen Reductionen folgt:

$$\operatorname{tg}(\pi+\Delta\pi) = \frac{\operatorname{tg}(\psi-\theta)}{\operatorname{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

Diess ist nun die genaue Auflösung unserer Aufgabe, wenn man aber voraussetzen darf, dass das Instrument schon nahe gut aufgestellt ist, und dass daher ψ sehr klein ist, so wird die Berechnung von g und π ~~eben~~ sehr erleichtert, indem man dann in dem Dreyecke $P\Pi Z$ sowohl als in dem Dreyecke $P\Pi s$ die Summe der beyden an $P\Pi$ anliegenden Winkeln mehr als 180 Grade betragend annehmen kann, da sie davon nur sehr wenig abweicht, man ist allgemein:



$$tg\left(\Lambda - (180° - l)\right) = \frac{tg\Lambda + tg l}{1 - tg\Lambda\, tg l} \text{ und:}$$

$$tg\left(\Lambda + \gamma + \Delta\gamma - (180° - (l-g))\right) = \frac{tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) + tg(180° - (l-g))}{1 - tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\cdot tg(180° - (l-g))}$$

wofür man da unter unserer Voraussetzung die Differenzen von Λ und $(180° - l)$ etc. nur gering seyn werden; setzen kann:

$$\left\{\Lambda - (180° - l)\right\} \sin 1'' = \frac{tg\Lambda + tg l}{1 - tg\Lambda\, tg l} \text{ und:}$$

$$\left\{\Lambda + \gamma + \Delta\gamma - (180° - (l-g)\right\} \sin 1'' = \frac{tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) + tg\left(180° - (l-g)\right)}{1 - tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\cdot tg\left(180° - (l-g)\right)}$$

Aus dem Dreyecke PZΠ folgt aber in unserer Voraussetzung:

$$\psi\, tg\varphi - cotg\Lambda \sin l = \cos l \text{ oder:}$$

$$tg\Lambda = \frac{\sin l}{\psi \sin 1''\, tg\varphi - \cos l} \text{ also:}$$

$$\frac{tg\Lambda + tg l}{1 - tg\Lambda\, tg l} = \frac{\frac{\sin l}{\psi \sin 1''\, tg\varphi - \cos l} + tg l}{1 - \frac{\sin l\, tg l}{\psi \sin 1''\, tg\varphi + \cos l}} \text{ das heisst:}$$

$$\cancel{= \frac{\mathrm{Sin}\, l + \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{tg}l\, \mathrm{Sin}1'' - \mathrm{Sin}\, l}{\mathrm{Cos}\, l\, \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}1'' + \mathrm{Cos}^2 l - \mathrm{Sin}^2 l} = \frac{+\psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{tg}l\, \mathrm{Sin}1''\, \mathrm{Cos}\, l}{\psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}1''}}$$

~~nähmlich:~~ $\cancel{\frac{\mathrm{tg}\Lambda + \mathrm{tg}\, l}{1 - \mathrm{tg}\Lambda\, \mathrm{tg}l} = \mp\, \mathrm{tg}l}$

$$= \frac{(\mathrm{Sin}\, l + \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{tg}l\, \mathrm{Sin}1'' - \mathrm{Sin}\, l)\, \mathrm{Cos}\, l}{\psi\, \mathrm{Cos}\, l\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}1'' - (\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{Sin}^2 l)} = \frac{+\psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l\, \mathrm{Sin}1''}{\psi\, \mathrm{Cos}\, l\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}1'' - 1}$$

$$= \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l\, \mathrm{Sin}1'' (1 - \psi\, \mathrm{Cos}\, l\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}1'')^{-1}$$

also wenn man die höheren als ersten Potenzen von $\psi\, \mathrm{Sin}1''$ vernachlässigt:

$$\frac{\mathrm{tg}\Lambda + \mathrm{tg}l}{1 - \mathrm{tg}\Lambda\, \mathrm{tg}l} = -\psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l\, \mathrm{Sin}1''$$

also:

$$\Lambda = 180° - l - \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l$$

auf dieselbe Weise erhält man:

$$\Lambda + \gamma + \Delta\gamma = 180° - l + g - \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l$$ ~~oder~~

$$\Lambda + \gamma + \Delta\gamma = 180° - l + \gamma + \Delta\gamma - \psi\, \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{Sin}\, l$$ wenn beyderseits g oder $\gamma + \Delta\gamma$ addirt wird:

Ferner ist nach dem Vorhergehenden; wenn wir ψ als sehr klein voraussetzen:

$$\mathrm{tg}(l-g) = \frac{\mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Sin}1''\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) - \mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

also der zweyte der obigen Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{tg}(l-g) + \mathrm{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{1 - \mathrm{tg}(l-g)\cdot \mathrm{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)} = \frac{\mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) + \mathrm{Sin}1''\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi)\, \mathrm{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) - \mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Sin}1''\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) - \mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) - \frac{\mathrm{Sin}^2(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}1''\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi)\cdot \mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) - 1} = \psi\, \mathrm{Sin}1''\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi)\cdot \mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\, \mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)^{-1} \times (\psi\, \mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) - 1)$$

oder wenn man die höheren als ersten Potenzen von $\psi \operatorname{Sin} 1''$ vernachlässigt; so ist endlich:

$$\frac{tg(l-g)+tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{1-tg(l-g)\cdot tg(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)} = -\psi \operatorname{Sin} 1'' \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

also auch:

$$\left\{\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-(180^\circ-(l-g))\right\}\operatorname{Sin} 1'' = -\psi \operatorname{Sin} 1'' \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

also auch:

$$\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-180^\circ+l-g = -\psi \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

woraus folgt:

$$g = \Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-180^\circ+\psi \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

Hieraus nun kann Λ eliminirt werden. Wir haben:

$\Lambda = 180^\circ - l - \psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l$ und daher:

$$g = 180^\circ - l - \psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l + \gamma + \Delta\gamma + l - 180^\circ + \psi \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+)$$

nähmlich:

$$g = \gamma+\Delta\gamma-\psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l + \psi \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)$$

Hier haben wir aber doch Λ noch im letzten Gliede, es muss aber auch dort eliminirt werden um den Ausdruck ganz einfach zu machen, es ist:

$\Lambda = 180^\circ - l - \psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l$ also auch:

$\Lambda+\gamma+\Delta\gamma = 180^\circ - l + \gamma + \Delta\gamma - \psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l$ und:

$$\operatorname{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \operatorname{Sin}(l-\gamma-\Delta\gamma+\psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l)$$

$$= \operatorname{Sin}(l-\gamma-\Delta\gamma) + \psi\, tg\varphi \operatorname{Sin} l \operatorname{Sin} 1'' \operatorname{Cos}(l-g-\Delta\gamma)$$

also wenn man wieder die höheren als ersten Potenzen von $\psi \operatorname{Sin} 1''$

vernachlässigt:

$$g = \gamma + \Delta\gamma - \psi\, tg\varphi\, Sin\, l + \psi\, tg(\pi + \Delta\pi)\, Sin\, (l - \gamma - \Delta\gamma) \ast\ast\ast$$

Und dieß ist die genäherte Formel für den wahren Stundenwinkel, woraus der genäherte Werth von dem Collimationsfehler des Stundenkreises folgt, nähmlich:

$$\Delta\gamma = g - \gamma + \psi\, tg\varphi\, Sin\, l - \psi\, tg\, (\pi + \Delta\pi)\, Sin\, (l - \gamma - \Delta\gamma)$$

Und nun wollen wir zur Bestimmung des genäherten Werthes von $\Delta\pi$ übergehen. Es ist:

$$tg\, (p - (\pi + \Delta\pi)) = \frac{tg p + tg(\pi + \Delta\pi)}{1 - tg p . tg(\pi + \Delta\pi)}$$

Ferner ist, wenn man die 2ten und höheren Potenzen von ψ vernachlässigt, nach dem Früheren:

$$tg p = \frac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)}{Cos\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)\, Sin\, (l - g) + Cos\, (l - g)\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)}$$

nähmlich: $tg p = \dfrac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)}{Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g)}$

also auch:

$$tg \left\{ p - (\pi + \Delta\pi) \right\} = \frac{\dfrac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)}{Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g)} + tg\, (\pi + \Delta\pi)}{1 - \dfrac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)\, tg\, (\pi + \Delta\pi)}{Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g)}}$$

dass heisst:

$$tg \left\{ p - (\pi + \Delta\pi) \right\} = \frac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma) + tg\, (\pi + \Delta\pi)\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g)}{Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g) - \psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma)\, tg\, (\pi + \Delta\pi)}$$

Nun ist auch:

$$tg\, (\pi + \Delta\pi) = \frac{\psi\, Sin\, 1''\, Sin\, (l - g)}{Sin\, (\Lambda + \gamma + \Delta\gamma + l - g)}$$

Und wenn man nun dieß in der Gleichung:

$tg \left\{ p - \pi - \Delta\pi \right) = etc$ substituirt, so ist:

$$tg(p-\pi-\Delta\pi) = \frac{\psi \sin 1'' \sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g) - \psi\sin 1''\sin(l-g)\sin(\Lambda+\gamma+}{\sin^2(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g)}$$

$$= \frac{\psi\sin 1''\{\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) - \sin(l-g)}{\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g)}$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$ also auch:

$$\frac{\psi\sin 1''\{\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) - \sin(l-g)\}}{\sin(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g)} = \psi\sin 1''.\frac{\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-l+g)}{\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g)}$$

und da nun den oben Gesagten zu Folge:

$\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma+l-g)$ nahe $= 90^\circ$ ist, so ist endlich:

$$tg(p-\pi-\Delta\pi) = \psi\sin 1''\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-l+g)$$

oder die Differenz $p-\pi-\Delta\pi$ nur gering seyn kann:

$$\{p-\pi-\Delta\pi)\sin 1'' = \psi\sin 1''\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-l+g)$$

oder:

$$p = \pi+\Delta\pi+\psi\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-l+g)$$ oder:

$$\Delta\pi = p-\pi-\psi\sin\frac{1}{2}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma-l+g)$$

Hieraus müssen wir aber noch Λ und g eliminieren. Wir haben

$$\Lambda = 180^\circ - l - \psi\, tg\varphi\sin l$$

$$g = \gamma+\Delta\gamma-\psi\, tg\varphi\sin l + \psi\cot g(\pi+\Delta\pi)\sin(\Lambda-\gamma-\Delta\gamma)$$

also:

$$\cancel{\Delta\pi = p-\pi+\Delta\pi)\psi\sin\frac{1}{2}\{180^\circ-l-\psi\, tg\varphi\sin l+\gamma+\Delta\gamma-l+\gamma+\Delta\gamma-\psi\, tg\varphi\sin l + \psi\cot g(\pi+\Delta\pi)\sin(l-\gamma-}$$

~~nämlich:~~

$$\cancel{tg(p-\pi-\Delta\pi) = \psi\sin\frac{1}{2}(180^\circ-2(l-\gamma+\Delta\gamma)-2\psi\, tg\varphi\sin l}$$

also:

$\gamma + \Delta\gamma = g + \psi\, tg\varphi \,\mathrm{Sin}\, l - \psi\, tg(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\lambda - \gamma + \Delta\gamma)$ also auch:

$$tg(p - \pi - \Delta\pi) = \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\left\{180^\circ - l - \psi\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l + g + \psi\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l - \psi\, tg(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma) - l + g\right\}$$

$$= \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\left\{180^\circ - 2(l-g) - \psi\, tg.(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)\right\}$$

$$= \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Cos}\left\{(l-g) - \tfrac{1}{2}\psi\, tg(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)\right\}$$

$= \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\{\mathrm{Cos}(l-g)\}$ da man das fernere als in $\frac{1}{2}\psi$ ~~Mult~~ multiplicirt schon vernachläßigen kann.

Da man aber ~~bereits~~ hat:

$g = \gamma + \Delta\gamma - \psi\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\, l + \psi\, tg(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\lambda - \gamma + \Delta\gamma)$ so ist auch:

$tg(p - \pi - \Delta\pi) = \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Sin}\{90^\circ - l + \gamma + \Delta\gamma - \psi\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l\}$ oder:

$$= \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Cos}\{(l - \gamma - \Delta\gamma) + \psi\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l\}$$

$$= \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Cos}(l - \gamma - \Delta\gamma).\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l$$

daher ist auch, da die Differenz $(p - \pi - \Delta\pi)$ nur sehr klein seyn kann:

$\{p - \pi - \Delta p)\,\mathrm{Sin}\,1'' = \psi\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Cos}(l - \gamma - \Delta\gamma)\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l$ oder:

$p - \pi - \Delta\pi = \psi\,\mathrm{Cos}(l - \gamma - \Delta\gamma)\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l$ woraus endlich folgt:

$\Delta\pi = p - \pi - \psi\,\mathrm{Cos}(l - \gamma - \Delta\gamma)\, tg\varphi\,\mathrm{Sin}\,l$ **

Das Instrument kann aber noch zwey Fehler haben, die bekannt seyn müssen, nähmlich die ~~[illegible] [illegible]~~ Axe des Instrumentes kann gegen den Declinationskreis eine Neigung i, ferner kann das Fernrohr ~~[illegible]~~ nähmlich die Colimationslinie des Fernrohres gegen den Declinationskreis auch eine Neigung λ haben

Der Einfluss dieser beyden Fehler in die beobachteten Polardistanzen, wird gerade so ~~[illegible]~~ bestimmt, wie bey anderen Kreisen der Ein fluss der Neigung i des Verticalkreises gegen die Verticalaxe und der Neigung n der Axe des Fernrohres gegen den Verticalkreis auf die beobachtete Zenithdistanz, nun weiss man, dass diese beyden Fehler aus der beobachteten Zenithdistanz auf folgende Weise eliminirt wird:

$$z^* = z' + \tfrac{1}{2} i^2 \cot g\, z' \sin 1'' \text{ und } z = z' + \tfrac{1}{2} n^2 \cot g\, z' \sin 1''$$

also ist für uns die Correction der beobachteten Poldistanz in ~~Beziehung auf~~ Beziehung auf diese Fehler:

$$= \tfrac{1}{2}\, ii \cot g(\pi + \Delta\pi) \sin 1'' - \tfrac{1}{2}\, kk \cot g(\pi + \Delta\pi) \sin 1''$$

$$= \tfrac{1}{2} \cot g(\pi + \Delta\pi) \sin 1'' (ii - kk)$$ oder da man sicher die zweyten Potenzen von i und k vernachlässigen darf:

Correction der beobachteten Poldistanz = 0

Der Einfluss der beyden Fehler auf den Stundenkreis aber wird gerade so erörtert wie beym Mittagsrohre die beyden Fehler n und c, denn n ist mit i und c mit k einerley, m aber ist $= \Delta\gamma$. Nun hat man beym Mittagsrohr:

$\gamma = m + n \tan g\,\delta + c \sec \delta$ also ist für unser Instrument die Correction des Stundenwinkels der beobachtet wurde in Beziehung auf die beyden Fehler i und k:

$$= i \cot g(\pi + \Delta\pi) + k \operatorname{cosec.} (\pi + \Delta\pi),$$ so dass wir also die genäherten Endausdrücke für p und q, in Bezug auf alle Fehler des Instrumentes folgender Massen haben:

$$p = \pi + \Delta\pi + \psi \cos(l - \gamma - \Delta\gamma)\ \mathrm{tg}\varphi \sin l$$

$$g = \gamma + \Delta\gamma - \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l + \psi \cot(\pi + \Delta\pi) \sin(l - \gamma - \Delta\gamma) + i \cot(\pi + \Delta\pi) + k\, \mathrm{cosec}(\pi + \Delta\pi)$$

Um nun i und k zu finden, sey:

$$A = g - \gamma - \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l - \psi \cot p \sin(l - \gamma - \Delta\gamma)$$
$$A' = g' - \gamma' - \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l - \psi \cot p' \sin(l - \gamma' - \Delta\gamma)$$
$$A'' = g'' - \gamma'' - \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l - \psi \cot p'' \sin(l - \gamma'' - \Delta\gamma)$$

Diese erhält man entweder aus der Beobachtung dreyer, oder aus der dreymahligen Beobachtung eines Sterns.

Nach diesen Voraussetzungen ist:

$A = \Delta\gamma + i \cot(\pi + \Delta\pi) + k\, \mathrm{cosec}(\pi + \Delta\pi)$ oder:

$A = \Delta\gamma + i \cot p + k\, \mathrm{cosec}\, p$ woraus folgt:

$$A' = \Delta\gamma + i \cot p' + k\, \mathrm{cosec}\, p' \qquad A' - A = i(\cot p' - \cot p) + k(\mathrm{cosec}\, p' - \mathrm{cosec}\, p)$$
$$A'' = \Delta\gamma + i \cot p'' + k\, \mathrm{cosec}\, p'' \qquad A'' - A' = i(\cot p'' - \cot p') + k(\mathrm{cosec}\, p'' - \mathrm{cosec}\, p')$$

aus welchen beyden Gleichungen man durch Elimination die gesuchten Fehler i und k bestimmen kann, man kann sie auch also schreiben:

Es ist:

$$A' - A = g' - \gamma' - \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l - \psi \cot p' \sin(l - g') - g + \gamma + \psi\, \mathrm{tg}\varphi \sin l + \psi \cot p \sin(l - g)$$
$$= (g' - g) - (\gamma' - \gamma) - \psi\left(\cot p' \sin(l - g') - \cot p \sin(l - g)\right)$$

und eben so:

$$A'' - A' = (g'' - g') - (\gamma'' - \gamma') - \psi\left(\cot p'' \sin(l - g'') - \cot p' \sin(l - g')\right)$$

also unsere Gleichungen sind:

$$(g' - g) - (\gamma' - \gamma) - \psi\left(\cot p' \sin(l - g') - \cot p \sin(l - g)\right) = i(\cot p' - \cot p) + k(\mathrm{cosec}\, p' - \mathrm{cosec}\, p)$$

und

$$(g'' - g') - (\gamma'' - \gamma') - \psi\left(\cot p'' \sin(l - g'') - \cot p' \sin(l - g')\right) = i(\cot p'' - \cot p') + k(\mathrm{cosec}\, p'' - \mathrm{cosec}\, p')$$

Durch die genäherten Ausdrücke für g ~~wird~~ ~~und~~ p lassen sich auch genäherte Ausdrücke für l, und ψ finden, die dann bequem sind, wenn man voraussetzen darf, dass das Instrument nahe gut aufgestellt ist.

Man hat für zwey Sterne:

$$g = \gamma + \Delta\gamma - \psi \,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l + \psi \,\mathrm{Cotg}(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma - \Delta\gamma)$$
$$g' = \gamma' + \Delta\gamma - \psi \,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l + \psi \,\mathrm{Cotg}(\pi' + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma' - \Delta\gamma)$$
$$p = \pi + \Delta\pi + \psi \,\mathrm{Cos}(l - \gamma - \Delta\gamma)\,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l$$
$$p' = \pi' + \Delta\pi + \psi \,\mathrm{Cos}(l - \gamma' - \Delta\gamma)\,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l$$

und daher:

$$g' - g = \gamma' - \gamma + \psi \left\{ \mathrm{Cotg}(\pi' + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma' - \Delta\gamma) - \mathrm{Cotg}(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma - \Delta\gamma) \right\}$$
$$p' - p = \pi' - \pi + \psi \,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l \left\{ \mathrm{Cos}(l - (\gamma' + \Delta\gamma)) - \mathrm{Cos}(l - (\gamma + \Delta\gamma)) \right\}$$

Nun sey:

$(g' - g) - (\gamma' - \gamma) = \mathfrak{G}$ und $(p' - p) - (\pi' - \pi) = \mathfrak{P}$ so ist:

$$\mathfrak{G} = \psi \left\{ \mathrm{Cotg}(\pi' + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma' - \Delta\gamma) - \mathrm{Cotg}(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l - \gamma - \Delta\gamma) \right\}$$ und

$$\mathfrak{P} = \psi \,\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{Sin}\, l \left\{ \mathrm{Cos}\, l \,\mathrm{Cos}(\gamma' + \Delta\gamma) + \mathrm{Sin}\, l \,\mathrm{Sin}(\gamma' + \Delta\gamma) - \mathrm{Cos}\, l \,\mathrm{Cos}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathrm{Sin}\, l \,\mathrm{Sin}(\gamma + \Delta\gamma) \right\}$$

nähmlich:

$$\mathfrak{G} = \psi \,\mathrm{Sin}\, l \left\{ \mathrm{Cotg}(\pi' + \Delta\pi)\,\mathrm{Cos}(\gamma' + \Delta\gamma) - \mathrm{Cotg}(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Cos}(\gamma + \Delta\gamma) \right\}$$
$$- \psi \,\mathrm{Cos}\, l \left\{ \mathrm{Cotg}(\pi' + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\gamma' + \Delta\gamma) - \mathrm{Cotg}(\pi + \Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(\gamma + \Delta\gamma) \right\}$$ und:

$$\mathfrak{P} = \psi \,\mathrm{Sin}^2 l \,\mathrm{tg}\varphi \left\{ \mathrm{Sin}(\gamma' + \Delta\gamma) - \mathrm{Sin}(\gamma + \Delta\gamma) \right\} + \psi \,\mathrm{Cos}\, l \,\mathrm{Sin}\, l \,\mathrm{tg}\varphi \left\{ \mathrm{Cos}(\gamma' + \Delta\gamma) - \mathrm{Cos}(\gamma + \Delta\gamma) \right\}$$

Sey nun:

$$\left\{\operatorname{tg}(\pi'+\Delta\pi)\cos(\gamma'+\Delta\gamma)-\operatorname{tg}(\pi+\Delta\pi)\cos(\gamma+\Delta\gamma)\right\}=W$$

$$\left\{\operatorname{tg}(\pi'+\Delta\pi)\sin(\gamma'+\Delta\gamma)-\operatorname{tg}(\pi+\Delta\pi)\sin(\gamma+\Delta\gamma)\right\}=X$$

$$\left\{\sin(\gamma'-\Delta\gamma)-\sin(\gamma+\Delta\gamma)\right\} - - - - - - = U$$

$$\left\{\cos(\gamma'-\Delta\gamma)-\cos(\gamma+\Delta\gamma)\right\} - - - - - - = V$$

So ist:

$$G= \psi\sin l.W-\psi\cos l X \text{ und:}$$

$$P= \psi\sin^2 l\operatorname{tg}\varphi U+\psi\cos l\sin l\operatorname{tg}\varphi.V \text{ und:}$$

$$\frac{P}{G}=\frac{\psi\sin^2 l\operatorname{tg}\varphi.U+\psi\cos l\sin l\operatorname{tg}\varphi.V}{\psi\sin l W-\psi\cos l.X}=\frac{\psi\operatorname{tg}l.\operatorname{tg}\varphi.U+\operatorname{tg}\varphi.W}{\psi\sec l.W-\psi\operatorname{cosec}l.X}$$

oder:

$$\frac{P}{G}=\frac{\psi\sin l\operatorname{tg}l\operatorname{tg}\varphi.U+\psi\sin l\operatorname{tg}\varphi.V}{\psi\operatorname{tg}l W-\psi X}=\frac{\sin l\operatorname{tg}l.\operatorname{tg}\varphi.U+\sin l\operatorname{tg}\varphi W}{\operatorname{tg}l W-X}$$

$$=\frac{\sin l\operatorname{tg}\varphi(W+U\operatorname{tg}l)}{\operatorname{tg}l W-X} \text{ also:}$$

$$P\operatorname{tg}l.W-PX=G\sin l\operatorname{tg}\varphi W+GU\sin l\operatorname{tg}l\operatorname{tg}\varphi$$

$$\operatorname{tg}l(PW-GU\sin l\operatorname{tg}\varphi)=GW\sin l\operatorname{tg}\varphi+PX$$

also: $$\operatorname{tg}l=\frac{GW\sin l\operatorname{tg}\varphi+PX}{PW-GU\sin l\operatorname{tg}\varphi}$$

Wenn man aber aus der Gleichung:

$$P=\psi\operatorname{tg}\varphi\sin l\left\{\cos(l-(\gamma'+\Delta\gamma))-\cos(l-(\gamma+\Delta\gamma))\right\}$$

$\psi\operatorname{tg}\varphi\sin l$ als eine constante Größe ganz weglässt, so erhält man:

$$\operatorname{tg} l = \frac{PX + GV}{PW - MG} \text{ nähmlich:}$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{P\{\operatorname{Cotg}(\pi'+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(g'+\Delta g) - \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Sin}(g+\Delta g)\} + G\{\operatorname{Cos}(g'+\Delta g) - \operatorname{Cos}(g+\Delta g)\}}{P\{\operatorname{Cotg}(\pi'+\Delta\pi)\operatorname{Cos}(g'+\Delta g) - \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi)\operatorname{Cos}(g+\Delta g)\} - G\{\operatorname{Sin}(g'+\Delta g) - \operatorname{Sin}(g+\Delta g)\}}$$

Für einen und denselben aber zweymahl beobachteten Stern nun, kann man setzen:

$\operatorname{Cotg}(\pi'+\Delta\pi) = \operatorname{Cotg}(\pi+\Delta\pi) = \operatorname{Cotg} p$ und für diesen Fall ist:

$$\operatorname{tg} l = \frac{P\operatorname{Cotg} p\{\operatorname{Sin}(g'+\Delta g) - \operatorname{Sin}(g+\Delta g)\} + G\{\operatorname{Cos}(g'+\Delta g) - \operatorname{Cos}(g+\Delta g)\}}{P\operatorname{Cotg} p\{\operatorname{Cos}(g'+\Delta g) - \operatorname{Cos}(g+\Delta g)\} - G\{\operatorname{Sin}(g'+\Delta g) - \operatorname{Sin}(g+\Delta g)\}}$$

$$= \frac{P\operatorname{Cotg} p\{\operatorname{Sin} g' - \operatorname{Sin} g\} + G\{\operatorname{Cos} g' - \operatorname{Cos} g\}}{P\operatorname{Cotg}.p\{\operatorname{Cos} g' - \operatorname{Cos} g\} - G\{\operatorname{Sin} g' - \operatorname{Sin} g\}}$$

$$= \frac{\frac{P}{G}.\operatorname{Cotg} p + \frac{\operatorname{Cos} g' - \operatorname{Cos} g}{\operatorname{Sin} g' - \operatorname{Sin} g}}{\frac{P}{G}\operatorname{Cotg} p.\frac{\operatorname{Cos} g' - \operatorname{Cos} g}{\operatorname{Sin} g' - \operatorname{Sin} g} - 1} = \frac{\frac{P}{G}\operatorname{Cotg} p - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)}{-\frac{P}{G}\operatorname{Cotg} p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g) - 1}$$

Nun ist:
$$\operatorname{tg}\{l - \tfrac{1}{2}(g'+g)\} = \frac{\operatorname{tg} l - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)}{1 + \operatorname{tg} l \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)}$$ oder für $\operatorname{tg} l$ seinen Werth gesetzt, gibt:

$$\cancel{\operatorname{tg}\{l - \tfrac{1}{2}(g'+g)\} = \frac{P}{G}\operatorname{Cotg} p - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g) + \frac{P}{G}}$$

Erstens: $$\operatorname{tg} l - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g) = \frac{-\frac{P}{G}\operatorname{Cotg} p + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)}{1 + \frac{P}{G}\operatorname{Cotg}.p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)$$

Zweytens:

$$1+\operatorname{tg} l\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g+g')=\frac{1+\frac{P}{g}\cdot\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(g'+g)+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(g'+g)}{1+\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(g'+g)}$$

Es ist auch:

$$\operatorname{tg} l-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(g'+g)=\frac{-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\cdot\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(g'+g)}{1+\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(g'+g)}$$ also:

$$\operatorname{tg}\left\{l-\tfrac{1}{2}(g'+g)\right\}=\frac{-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(g'+g)}{1-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(g'+g)+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(g'+g)}$$

$$=\frac{-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(g'+g)}{\sec^2\frac{1}{2}(g'+g)-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(g'+g)}$$

$$=\frac{-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\cos^2\frac{1}{2}(g'+g)-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\sin^2\frac{1}{2}(g'+g)}{1-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p\sin\frac{1}{2}(g'+g)\cos\frac{1}{2}(g'+g)}$$

$$=\frac{-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p}{1-\frac{P}{2g}\operatorname{Ctg}p\sin(g'+g)}=$$

oder endlich; wenn man sich erlaubt, $\frac{P}{2g}\operatorname{Ctg}p\sin(g'+g)$ gegen 1 zu vernachlässigen:

$$\operatorname{tg}\left\{l-\tfrac{1}{2}(g'+g)\right\}=-\frac{P}{g}\operatorname{Ctg}p$$

$$=-\frac{(p'-p)-(\pi'-\pi)}{(g'-g)-(\gamma'-\gamma)}\operatorname{Ctg}.p=\frac{(\pi'-\pi)-(p'-p)}{(\gamma'-\gamma)-(g'-g)}\operatorname{Ctg}p$$

Ferner ist nach dem Vorhergehenden:

$$P = \psi \,\mathrm{Sin}\, l \left\{ \mathrm{Sin}\, g' - \mathrm{Sin}\, g \right\} + \psi \,\mathrm{Cos}\, l \left\{ \mathrm{Cos}\, g' - \mathrm{Cos}\, g \right\}$$ oder:

$$P = \psi \,\mathrm{Sin}\, l \,.\, 2 \,\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}(g+g') \,.\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'-g) + \psi \,\mathrm{Cos}\, l \,2 .\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'+g) \,.\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g-g')$$

$$= \psi \,\mathrm{Sin}\, l \,.\, 2 \,\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}(g+g')\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'-g) - \psi \,\mathrm{Cos}\, l \,.\, 2 \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'+g)\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'-g)$$

also auch:

$$P = \psi \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'-g) \left\{ 2 \,\mathrm{Sin}\, l \,\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}(g+g') - 2 \,\mathrm{Cos}\, l \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'+g) \right\}$$

$$= 2\psi \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'-g)\, \mathrm{Sin}\left(l - \tfrac{1}{2}(g+g')\right)$$ woraus endlich folgt:

$$\psi = \frac{P}{2 \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}(g'+g) \,.\, \mathrm{Sin}\left(l - \tfrac{1}{2}(g+g')\right)} \quad **$$

Zur Correction und Reduction der Beobachtungen am Aequatoriale hat man also folgende Formeln.

Erstens. Ganz scharfe Methode:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}(l-g) &= \frac{\mathrm{Sin}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Cotg.}(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}\,\psi - \mathrm{Cos}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)\,\mathrm{Cos}\,\psi} \\
\mathrm{tg}\, p &= \frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Ctg}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)\,\mathrm{Sin}(l-g) + \mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}(l-g)} \\
\text{oder für: }\ \mathrm{tg}\,\theta &= \frac{\mathrm{Cos}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi)} \\
\mathrm{tg}(l-g) &= \frac{\mathrm{Sin}\,\theta\ \mathrm{tg}(\lambda+\gamma+\Delta\gamma)}{\mathrm{Sin}(\psi-\theta)} \\
\mathrm{Ctg}\, p &= \mathrm{Cos}(l-g)\,\mathrm{Ctg.}(\psi-\theta)
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})$$

Ferner: $$\mathrm{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\mathrm{Sin}(l-g)}{\mathrm{Ctg}\,p\,\mathrm{Sin}\,\psi - \mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}(l-g)}$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\Delta\pi) = \frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Ctg}(l-g)\,\mathrm{Sin}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) + \mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)}$$

oder für: $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\mathrm{Cos}(l-g)}{\mathrm{Ctg}\,p}$ ist:

$$\mathrm{tg}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma) = \frac{\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{tg}(l-g)}{\mathrm{Sin}(\psi-\theta)}$$

$$\mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) = \mathrm{Cos}(\Lambda+\gamma+\Delta\gamma)\,\mathrm{Ctg}(\psi-\theta)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(y+x)}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(y-x)}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(p-\varpi) = \frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(y+x)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(y-x)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(p+\varpi)$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(y'+x')}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(y'-x')}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(p'-\varpi') = \frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(y'+x')}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(y'-x')}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(p'+\varpi')$$

$$l = g+x = g'+x'$$

$\Lambda = y-\gamma = y'-\gamma'$ und noch:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\pi'+\pi+2\Delta\pi) = \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\mathfrak{D}}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(\mu'+\mu)}\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu')$$

Zweytens genäherte Methode:

$$\mathrm{tg}\{l-\tfrac{1}{2}(g'+g)\} = -\frac{(p'-p)-(\pi'-\pi)}{(g'-g)-(\gamma'-\gamma)}.\,\mathrm{Ctg}\,p$$

$$\psi = \frac{(p'-p)-(\pi'-\pi)}{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(g'-g)\,\mathrm{Sin}\{l-\frac{1}{2}(g'+g)\}}$$

$$\Delta\pi = p-\pi-\psi\,\mathrm{Cos}(l-\gamma-\Delta\gamma)$$

$$\Delta\gamma = g-\gamma+\psi\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,l - \psi\,\mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi)\,\mathrm{Sin}(l-\gamma-\Delta\gamma)$$
$$- i\,\mathrm{Ctg}(\pi+\Delta\pi) - k\,\mathrm{Cosec}(\pi+\Delta\pi)$$

i und k wird aus den zwey Gleichungen bestimmt:

$$(g'-g)-(\gamma'-\gamma)-\psi\{\text{Ctg}\,p'\,\text{Sin}(l-g')-\text{Ctg}\,p\,\text{Sin}(l-g)\}=i(\text{Ctg}\,p'-\text{Cotg}\,p)+k(\text{Cosec.}\,p'-\text{Cosec.}\,p)$$

$$(g''-g')-(\gamma''-\gamma')-\psi\{\text{Ctg}\,p''\,\text{Sin}(l-g'')-\text{Ctg}\,p'\,\text{Sin}(l-g')\}=i(\text{Ctg}\,p''-\text{Ctg}\,p')+k(\text{Cosec.}\,p''-\text{Cosec.}\,p')$$

Endlich ist noch sehr wichtig zu wissen, dass der Quadrant in welchem $(l-\frac{1}{2}(g'+g))$ genommen werden muss, dadurch bestimmt wird, dass ψ stets positiv seyn muss, da er wirklicher Abstand zweyer Puncte ist.

83

Bestimmung der Zeit mit einem Höhenkreise.

Man beobachte damit die Zenithdistanz eines Sternes. Sey nun diese beobachtete Zenithdistanz, nachdem sie von der Refraction, und überhaupt von allen Fehlern des Instrumentes befreyt wurde $=z$, ferner sey φ die Polhöhe, δ und s, die Declination und der Stundenwinkel des Sterns bey der Beobachtung, so hat man bekannter Weise:

$$\text{Cos}\,z=\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\delta+\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,s$$

Daraus nun kann man den Stundenwinkel finden. Es ist:

$$\text{Cos}\,s=\frac{\text{Cos}\,z-\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\delta}{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta}$$

oder:

$$2\,\text{Sin}^2\tfrac{1}{2}s=\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta-\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\delta+\text{Cos}\,z}{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta}$$ d. h.:

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{\text{Cos}(\varphi+\delta)+\text{Cos}\,z}{2\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)\cdot\cos(\varphi+\delta-z)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

oder aber:

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}s = \frac{\cos z - \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta}{\cos\varphi\cos\delta} = \frac{\cos z + \cos(\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta} \text{ also:}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}s = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\cdot\cos(z-\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \ast$$

Durch diese Formel wird man den Stundenwinkel dann bestimmen, wenn er nahe an 90 oder 270 Graden ist.
Kennt man dann den Stundenwinkel so ist die Sternzeit der Beobachtung:

$$\vartheta = \alpha - \frac{s}{15} \quad \text{und Fehler der Uhr} = \vartheta - \text{Uhrzeit.}$$

---

84. Bestimmung der Zeit aus correspondirenden Höhenbeobachtungen.

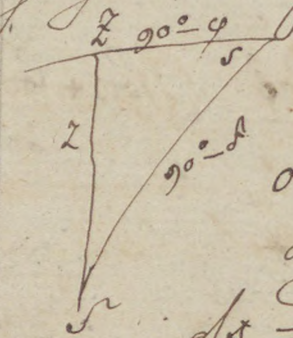
Die Beobachtung correspondirender Höhen, ist ein sehr einfaches und vorzügliches Mittel zur Bestimmung der Zeit. Ändert sich die Declination des Gestirnes das man beobachtete gar nicht, oder so wenig, dass seine Bewegung nichts in Betracht gezogen werden kann, und hat man die erste Höhe zur Zeit t die andere aber zur Zeit t' beobachtet, so ist die Zeit der Culmination dieses Gestirns:

$$T = \tfrac{1}{2}(t'+t)$$ und ist dann α seine Rectascension, so ist die Correction x der Uhr:

$$x = \alpha - T$$

Ist aber die Declination des Gestirns veränderlich, so muss auf die Veränderung derselben in der Zwischenzeit Rücksicht genommen werden, und zwar auf folgende Weise:
Es sey P der Weltpol, Z das Zenith und s irgend ein Stern, dessen Declination δ und dessen Stundenwinkel s und dessen Zenithdistanz

Z ist, während die Polhöhe des Beobachtungsortes φ seyn soll, so ist:



$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$; differenzieren wir diese Grösse in Bezug auf δ und s, so ist:

$$0 = \sin\varphi \cos\delta\, d\delta - \cos\varphi \cos s \sin\delta\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin s\, ds$$

also:

$$ds = d\delta \left\{ \frac{\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos s}{\cos\varphi \cos\delta \sin s} \right\}$$

$$= d\delta \left\{ \frac{tg\,\varphi}{\sin s} - tg\,\delta\, Ctg.\, s \right\}$$

Nehmen wir nun an, dass sich die Declination des beobachteten Gestirnes seit der ersten Beobachtung positiv geändert habe, so wird da das Gestirn höher steigt, also einen längeren Weg zu durchlaufen hat, auch später die der ersten östlichen Höhe correspondierende westliche Höhe erreichen, so dass daher der wirklich beobachtete Zeitpunct t' oder 2ten correspondirenden Höhe gegen jenen der bey unveränderter Declination statt gefunden hätte, zu gross ist, so dass also die eigentliche Zeit der Culmination des beobachteten Gestirns seyn wird:

$$T = \frac{1}{2}(t'+t) - \frac{1}{2}dt \quad \text{nun ist:}$$

$$dt = \frac{d\delta}{15}\left\{ \frac{tg\,\varphi}{\sin s} - tg\,\delta\, Ctg\, s \right\}$$ oder da man für die Declinationen auch die Poldistanzen nehmen kann, und $d\delta$ nichts anders als der Unterschied der Poldistanzen des Sterns bey beyden Beobachtungen ist, so ist auch:

$$\frac{1}{2}dt = \frac{(p-p')}{30}\left\{ \frac{tg\,\varphi}{\sin s} - Ctg\,p\, Ctg.\, s \right\}$$

und daher die Zeit der Culmination des Sternes:

$$T = \frac{1}{2}(t'+t) - \frac{p-p'}{30}\left\{\frac{tg\varphi}{Sin\, s} - Ctg\, p\; Ctg\, s\right\}$$ und daher:

Correction der Uhr:

$$x = \alpha - \frac{1}{2}(t'+t) + \frac{p-p'}{30}\left\{\frac{tg\varphi}{Sin\, s} - Ctg\, p\; Ctg\, s\right\} **$$

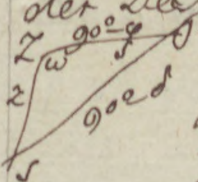
Sehr gut zu dieser Methode der Zeitbestimmung ~~[illegible]~~ eignet sich die Sonne weil das Mittel der beobachteten correspondirenden Höhen zugleich der wahre Mittag des Ortes ist.

Die Formel ist aber noch genauer, wenn man statt $Ctg\, p$, $Ctg\, \frac{(p+p')}{2}$ oder das Mittel beyder Poldistanzen nimmt ~~ist~~, wodurch man erhält:

$$x = \alpha - \frac{1}{2}(t'+t) + \frac{p-p'}{30}\left\{\frac{tg\varphi}{Sin\, s} - Ctg\, \tfrac{1}{2}(p'+p)\; Ctg\, s\right\}$$

85 Bestimmung der Zeit aus beobachteten Verschwindungen der Sterne hinter terrestrischen Objecten.

Hier handelt sich nicht darum, und ich bin nicht willens, die Art wie man aus der beobachteten Verschwindung die Correction der Uhr finden kann, zu erklären; sondern darum, wenn sich der Ort des Sterns nach mehreren Jahren allmählig geändert, also auch seine Verschwindung sich zu einer anderen Zeit ereignet, wie man auf diese Veränderung Rücksicht nehmen und aus der vor mehreren Jahren beobachteten Verschwindung desselben die Zeit seiner Verschwindung zu irgend einer Zeit angeben kann. Zu diesem Zwecke müssen wir also die Änderung des Stundenwinkels des Sterns in so fern sie mit der Änderung der Declination zusammenhängt erforschen.



Wir haben in dem wohlbekannten Dreyecke zwischen Zenith Pol und Stern, zwischen den vier Stücken, ω, ~~90°-~~φ, s und δ folgende Gleichung:

$$tg\delta\, Cos\varphi - Ctg\omega\, Sin\, s = Cos\, s\, Sin\varphi \quad \text{also:}$$

$$\frac{d\delta\, Cos\varphi}{Cos^2\delta} - Ctg\omega\, Cos\, s\, ds = -Sin\, s\, Sin\varphi\, ds$$

oder: $ds\{\sin s \sin\varphi + \cos s \,tg\,\omega\} = \dfrac{d\delta \cos\varphi}{\cos^2\delta}$

daß heißt:

$$ds\{\cos s \,tg\,\omega - \sin s \sin\varphi\} = \frac{d\delta \cos\varphi}{\cos^2\delta}$$

also:

$$ds = \frac{\delta' - \delta.\cos\varphi}{\cos^2\delta\,(\cos s \,tg\,\omega - \sin s \sin\varphi)}$$

Will man aber das Azimuth nicht in der Gleichung haben, so dividire man die ursprüngliche Gleichung mit sin. s, so erhält man:

$\dfrac{tg\,\delta \cos\varphi}{\sin s} - tg\,\omega = tg\,s \sin\varphi$. Differenziert man nun diese Gleichung so ist:

$$-\frac{tg\,\delta \cos\varphi \cos s\, ds}{\sin^2 s} + \frac{\sin s.\, d\delta.\cos\varphi}{\frac{\cos^2\delta}{\sin^2 s}} = -\frac{ds \sin\varphi}{\sin^2 s}$$

also: $ds\{\sin\varphi + \cos\varphi \,tg\,\delta \cos s\} = \dfrac{d\delta.\sin s \cos\varphi}{\cos^2\delta}$

nähmlich: $ds\{\cos\varphi \,tg\,\delta \cos s - \sin\varphi\}.\cos^2\delta = + d\delta \sin s \cos\varphi$

oder:

$$ds\{\cos\varphi \sin\delta \cos s + \sin\varphi \cos\delta\}\cos\delta = - d\delta \sin s \cos\varphi$$

oder endlich: $ds = \dfrac{-(\delta' - \delta).\sin s}{\cos\delta\,(tg\,\varphi \cos\delta - \sin\delta \cos s)}$; und wenn nun

t die früher beobachtete Verschwindung t' aber die erst kommende, α' und α aber die Rectascensionen der Sterner in jenen beyden Epochen sind, so ist:

$$t' = t + (\alpha' - \alpha) + \frac{(\delta - \delta')\sin s}{15\cos\delta\,(tg\,\varphi \cos\delta - \sin\delta \cos s)} \;**$$

86 Bestimmung der Polhöhe aus einer beobachteten Zenithdistanz eines Sterns.

Man hat bekanntlich:

$$\operatorname{Cos} z = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos} s, \text{ oder } \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cotg}\delta \operatorname{Cos} s = \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Sin}\delta}$$

Nun sey $\operatorname{Cotg}\delta \operatorname{Cos} s = \operatorname{tg} x$; so ist:

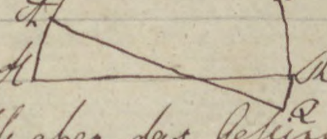
$$\operatorname{Cosec}\delta \operatorname{Cos} z = \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{tg} x \text{ oder:}$$

$$\operatorname{Cosec}\delta \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} z = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} x \quad \text{dass heisst:}$$

$$\operatorname{Sin}(\varphi + x) = \frac{\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} z}{\operatorname{Sin}\delta} \; **$$

87 Bestimmung der Polhöhe aus im Meridian beobachteten Zenithdistanzen

Diess ist die beste Methode zur Polhöhen = Bestimmung, und der Meridian überhaupt der günstigste Ort zu diesen Bestimmungen.



Denn ist das Gestirn auf der Südseite des Zeniths in s, so ist:

$$\varphi = z + \delta$$

Ist aber das Gestirn auf der Nordseite des Zeniths aber in der oberen Culmination in s', so ist:

$$\varphi = \delta - z$$

Ist endlich das Gestirn auf der Nordseite des Zeniths in der unteren Culmination in s'', so ist:

$$\varphi = (180^\circ - \delta) + z$$

Hier aber sowohl als auch in No. 86 wird vorausgesetzt, dass z die wahre Zenithdistanz sey, also muss die beobachtete von allen Fehlern des Instrumentes sowohl als auch von der Refraction & Parallaxe befreyt werden.

88 Bestimmung der Polhöhe durch beobachtete Zenithdistanzen in dem Falle der Unbekanntschaft mit dem Collimationsfehler des Kreises.

Für diesen Fall beobachte man die Zenithdistanzen zweyer Sterne, deren einer auf der Nordseite der andere auf der ~~Zenith~~ Südseite des Zeniths liegt, zur Zeit ihrer Culminationen, heißt dann c der noch unbekannte Collimationsfehler des Instrumentes, so gibt der nördliche Stern:

$$\varphi = \delta - z - c \quad \text{und der südliche:}$$
$$\varphi' = \delta' + z' + c \quad \text{also gesuchte Polhöhe:}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) = \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) + \tfrac{1}{2}(z' - z) \quad \text{und der Collimationsfeh-}$$

ler:
$$c = \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + \tfrac{1}{2}(z - z')$$

Um sich von der Refraction so viel möglich unabhängig zu machen, wird man trachten beyde Sterne in so viel thunlich gleichen Höhen zu beobachten, weil man sodann nicht mehr die Refractionen selbst, sondern bloss ihre Differenzen zu berücksichtigen hat.

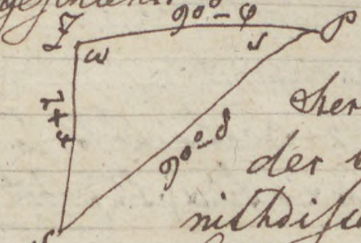
89 Wäre der Collimationsfehler des Instrumentes nicht aber die Declinationen der beyden Gestirne die man beobachtet hat, bekannt, so kann man die unbekannten Declinationen nebst der Polhöhe auf folgende Art finden:
Statt zweyen Sterne beobachte man einen Circumpolarstern in seinen beyden Culminationen, so hat man, wenn c dasselbe bezeichnet wie früher:

$$z = \delta - \varphi - c \quad \text{und:} \quad \text{oder da } c \text{ bekannt vorausgesetzt wird:}$$
$$z' = 180^\circ - \delta - \varphi - c$$
$$z = \delta - \varphi \qquad \text{also auch:}$$
$$z' = 180^\circ - \delta - \varphi$$

$$\varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(z + z') \quad \text{und:}$$
$$\delta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(z' - z)$$

90 Da man sich durch das Umkehren des Kreises von dem Collimationsfehler, und durch die Beobachtung eines Circumpolarsterns in beyden Culminationen von der Kenntniss der Declination unabhängig ma-

chen kann, so ist es zur genauen Bestimmung der Polhöhe am Besten, beydes zu verbinden, und einen Circumpolarstern in beyden Culminationen bey gewöhnlicher und umgekehrter Lage des Instrumentes zu beobachten. Will man aber beyde Beobachtung einer Culmination in einem Tage machen, so muss entweder eine, oder es müssen beyde Beobachtungen ausser dem Meridiane gemacht worden seyn, und es wird daher nothwendig, diese ausser dem Meridiane gemessenen Zenithdistanzen, auf die Meridianzenithdistanz zu reducieren, was auf folgende Weise ~~geschieht~~ geschieht.



Sey z die Meridianzenithdistanz des beobachteten Sterns, x aber die Reduction ~~desselben auf die M~~ der beobachteten Zenithdistanz ~~auf~~ auf die Meridianzenithdistanz, so ist:

$$\mathrm{Cos}(z+x) = \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\delta + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Cos}\,s$$

Da man nun stets so nahe am Meridian beobachten wird, dass x immer sehr klein seyn wird, so ist:

$$\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\delta + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Cos}\,s$$ oder:

$$\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\delta + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}s)$$ dass heisst:

$$\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\delta + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta - 2\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}s$$
$$= \mathrm{Cos}(\varphi-\delta) - 2\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}s$$ oder weil s in diesem Falle nicht anders als sehr klein seyn kann:

$$\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Cos}(\varphi-\delta) - \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,.\,\frac{15^2}{2}t^2.\,\mathrm{Sin}^2 1''$$ wenn man $s = 15t$ setzt; da nun $z = \delta - \varphi$ ist, so ist auch:

$$\mathrm{Cos}(\delta-\varphi) - x\,\mathrm{Sin}(\delta-\varphi)\,\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Cos}(\delta-\varphi) - \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,.\,\frac{225}{2}\,.\,t^2\,\mathrm{Sin}^2 1''$$

also auch:

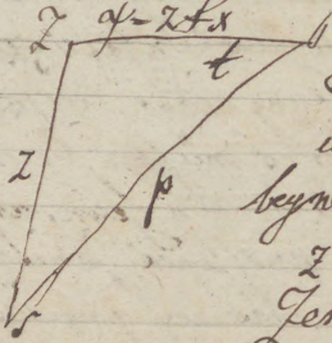
$$x = 112.5\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,t^2.\,\mathrm{Sin}\,1''}{\mathrm{Sin}(\delta-\varphi)}$$ da nun die mittägliche Zenithdistanz stets gleich ist: Beob. Z.D. = Z − x so ist:

für ~~Rc~~ Circumpolarsterne in der obern Culm. $z = Z - 112''.5\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,.\,\mathrm{Sin}\,1''\,t^2}{\mathrm{Sin}(\delta-\varphi)}$

für " " " " in der untern Culm. $z = Z + 112''.5\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Sin}\,1''\,t^2}{\mathrm{Sin}(\delta+\varphi)}$

und für Sterne südlich vom Zenith endlich: $z = Z + 112''.5\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\delta\,.\,t^2.\,\mathrm{Sin}\,1''}{\mathrm{Sin}(\varphi-\delta)}$

9t Aus der Beobachtung des Polarsterns in einem beliebigen Puncte seines Parallelkreises, ~~Zeit~~ die Polhöhe zu finden.



Sey in der Figur, P der Weltpol, Z das Zenith und s der Polarstern, ferner sey φ die schon beynahe bekannte Aequatorhöhe, p die Poldistanz z die Zenithdistanz und x die Correction der Zenithdistanz auf die Aequatorshöhe, so ist:

$$\cos z = \cos(z+x)\cos p + \sin(z+x)\sin p.\cos t \quad \text{oder:}$$

$$1 = \frac{\cos(z+x)}{\cos z}\cos p + \frac{\sin(z+x)}{\cos z}.\sin p\cos t$$

wenn man nun $\cos(z+x)$ und $\sin(z+x)$ entwickelt, so ist:

$$1 = (\cos x - tg z \sin x)\cos p + \{tg z \cos x + \sin x)\cdot\sin p\cos t$$

dass heisst:

$$1 = \cos x\cos p - \sin x\cos p\, tg x + \sin x\sin p\cos t + \sin p\cos x\cos t\, tg z$$

oder:

$$1 = \cos x\{\cos p + \sin p\cos t\, tg.z\} + \sin x\{\sin p\cos t - \cos p\, tg x\}$$

Sey nun Kürze halber:

$$\cos p + \sin p\cos t.tg z = M \text{ und } \sin p\cos t - \cos p\, tg x = N; \text{ so ist:}$$

$$1 = M\cos x + N\sin x \quad \text{oder:}$$

$$1 = M\sqrt{1-\sin^2 x} + N\sin x \quad \text{oder:}$$

$$1 - N\sin x = M\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(1 - N\sin x)^2 = M^2(1-\sin^2 x) \quad \text{oder:}$$

$$1 - 2N\sin x + N^2\sin^2 x = M^2 - M^2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x(N^2+M^2) - 2N\sin x = M^2 - 1$$

$$\sin^2 x - \frac{2N}{N^2+M^2}\sin x = \frac{M^2-1}{N^2+M^2}$$

oder wenn man die Gleichung auflösst:

$$\sin^2 x - \frac{2N}{N^2+M^2} + \frac{N^2}{(N^2+M^2)^2} = \frac{M^2-1}{N^2+M^2} + \frac{N^2}{(N^2+M^2)^2}$$

$$\text{oder}\left\{\sin x - \frac{N}{N^2+M^2} = \sqrt{\frac{M^2-1}{N^2+M^2} + \frac{N^2}{(N^2+M^2)^2}}\right.$$

oder:

$$\sin x = \frac{N}{N^2+M^2} \pm \sqrt{\frac{M^2-1}{N^2+M^2} + \frac{N^2}{(N^2+M^2)^2}}$$

oder wenn man die Größe unter dem Zeichen auf gleiche Benennung bringt:

$$\sin x = \frac{N}{M^2+N^2} \pm \sqrt{\frac{(M^2-1)(M^2+N^2)+N^2}{(M^2+N^2)^2}} \text{ oder:}$$

$$\sin x = \frac{N}{M^2+N^2} \pm \sqrt{\frac{M^4-M^2+N^2M^2-N^2+N^2}{(M^2+N^2)^2}} \text{ daß heißt:}$$

$$\sin x = \frac{N}{M^2+N^2} \pm \sqrt{\frac{M^2(M^2+N^2-1)}{(M^2+N^2)^2}} \text{ oder endlich:}$$

$$\sin x = \frac{N}{M^2+N^2} \pm \frac{M\sqrt{M^2+N^2-1}}{M^2+N^2} = \frac{N \pm M\sqrt{M^2+N^2-1}}{M^2+N^2}$$

Vernachläßigt man die höheren als 3ten Potenzen von p da p in unserem Falle nur klein ist, so ist:

$$M = \left(1-\tfrac{1}{2}p^2\right) + \left(p-\frac{p^3}{6}\right)\cos t \cdot \operatorname{tg} z$$

$$N = \left(p-\frac{p^3}{6}\right)\cos t - \left(1-\frac{p^2}{2}\right)\operatorname{tg} z$$

$$M^2 = \left(1-\frac{p^2}{2}\right)^2 + \left(p-\frac{p^3}{6}\right)^2\cos^2 t\, \operatorname{tg}^2 z + 2\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}p^2\right)\left(p-\tfrac{1}{6}p^3\right)\cos t\, \operatorname{tg} z$$

$$N^2 = \left(p-\frac{p^3}{6}\right)^2\cos^2 t + \left(1-\frac{p^2}{2}\right)^2\operatorname{tg}^2 z - 2\left(p-\frac{p^3}{6}\right)\cos t\left(1-\frac{p^2}{2}\right)\operatorname{tg} z$$

$$M^2+N^2 = \left(1-\tfrac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(p-\tfrac{1}{6}p^3\right)^2\cos^2 t\,\operatorname{tg}^2 z + \left(p-\tfrac{1}{6}p^3\right)^2\cos^2 t + \left(1-\tfrac{1}{2}p^2\right)^2\operatorname{tg}^2 z$$

$$= 1-p^2+p^2\cos^2 t\,\operatorname{tg}^2 z + p^2\cos^2 t + (1-p^2)\operatorname{tg}^2 z$$
$$= (1-p^2)(1+\operatorname{tg}^2 z) + p\cos^2 t(1+\operatorname{tg}^2 z)$$
$$= (1+\operatorname{tg}^2 z)(1-p^2+p\cos^2 t) \text{ oder endlich:}$$

$$M^2+N^2 = \frac{1+p\cos^2 t-p^2}{\cos^2 z} = \frac{1-p^2\sin^2 t}{\cos^2 z}$$

und:

$$\frac{1}{M^2+N^2} = \cos^2 z\left\{1+p^2\sin^2 t\right\}$$

ferner ist:

$$M^2+N^2-1 = \frac{1-p^2\sin^2 t}{\cos^2 z} - 1 = \frac{1-p^2\sin^2 t-\cos^2 z}{\cos^2 z}$$

oder: $$M^2+N^2-1 = \frac{\sin^2 z - p^2\sin^2 t}{\cos^2 z} = \left(1-\frac{p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right)\cdot tg^2 z$$

also: $$\sqrt{M^2+N^2-1} = tgz\left\{1-\frac{p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= tgz\left\{1-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right\}$$ weil hier p schon so klein ist, dass alle höheren als zweyten Potenzen dieser Grösse, füglich vernachlässigt werden können.

ferner ist:
$$\frac{\sqrt{M^2+N^2-1}}{M^2+N^2} = tgz\left(1-\frac{p^2\sin^2 t}{2\sin^2 z}\right)\cdot\cos^2 z\left(1+p^2\sin^2 t\right)$$
$$= \sin z\cos z\left\{1-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}+p^2\sin^2 t\right\}$$

und:
$$\frac{M\sqrt{M^2+N^2-1}}{M^2+N^2} = \sin z\cos z\left\{1+p^2\sin^2 t-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right\}\left\{(1-\tfrac{1}{2}p^2)+(p-\tfrac{1}{6}p^3)\cos t\, tgz\right\}$$
$$= \sin z\cos z\left\{1+p^2\sin^2 t-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right\}\left\{1-\tfrac{1}{2}p^2\right\}$$
$$+\sin^2 z\left\{1+p^2\sin^2 t-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}\right\}\left\{p-\tfrac{1}{6}p^3\right\}\cos t$$
$$= \sin z\cos z\left\{1+p^2\sin^2 t-\frac{\frac{1}{2}p^2\sin^2 t}{\sin^2 z}-\tfrac{1}{2}p^2\right\}$$
$$+\sin^2 z\left\{p\cos t+p^3\sin^2 t\cos t-\frac{\frac{1}{2}p^3\cos t\sin^2 t}{\sin^2 z}-\tfrac{1}{6}p^3\cos t\right\}$$
$$= \sin z\cos z+p^2\sin^2 t\sin z\cos z-\tfrac{1}{2}p^2\sin^2 t\, tgz-\tfrac{1}{2}p^2\sin z\cos z$$
$$+p\sin^2 z\cos t+p^3\sin^2 t\cos t\sin^2 z-\tfrac{1}{2}p^3\cos t\sin^2 t-\tfrac{1}{6}p^3\cos t\sin^2 z$$

endlich ist:
$$\frac{N}{M^2+N^2} = \left\{(p-\tfrac{1}{6}p^3)\cos t-(1-\tfrac{1}{2}p^2)\, tgz\right\}\cos^2 z\left\{1+p^2\sin^2 t\right\}$$
$$= (p-\tfrac{1}{6}p^3)\cos t\cos^2 z(1+p^2\sin^2 t)-(1-\tfrac{1}{2}p^2)\, tgz\cos^2 z(1+p^2\sin^2 t)$$
$$= \cos^2 z\cos t\left(p+p^3\sin^2 t-\tfrac{1}{6}p^3\right)-\sin z\cos z\left(1+p^2\sin^2 t-\tfrac{1}{2}p^2\right)$$

oder endlich:

$$\frac{N}{M^2+N^2} = p\cos t\cos^2 z + p^3\sin^2 t\cos t\cos^2 z - \frac{1}{6}p^3\cos t\cos^2 z - \sin z\cos z$$

[redacted] $p^2\sin^2 t\sin z\cos z + \frac{1}{2}p^2\sin z\cos z$

Daher ist auch:

$$\frac{N + M\sqrt{M^2+N^2-1}}{M^2+N^2} = p\cos t\cos^2 z + p^3\sin^2 t\cos t\cos^2 z - \frac{1}{6}p^3\cos t\cos^2 z - \sin z\cos z$$
$$- p^2\sin^2 t\sin z\cos z + \frac{1}{2}p^2\sin z\cos z + \sin z\cos z$$
$$+ p^2\sin^2 t\sin z\cos z - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z - \frac{1}{2}p^2\sin z\cos z$$
$$+ p\sin^2 z\cos t + p^3\sin^2 t\cos t\sin^2 z - \frac{1}{2}p^3\cos t\sin^2 t$$
$$- \frac{1}{6}p^3\cos t\sin^2 z$$

$$= p\cos t + p^3\sin^2 t\cos t - \frac{1}{6}p^3\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z$$
$$- \frac{1}{2}p^3\cos t\sin^2 t$$

nähmlich:

$\operatorname{Sin} x = p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z - \frac{1}{6}p^3\cos t$ [redacted] $\frac{1}{2}p^3\sin^2 t\cos t + p^3\sin^2 t\cos t$

$= p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg}.z$ [redacted] $\frac{1}{2}p^3\sin^2 t\cos t - \frac{1}{6}p^3\cos t + p^3\sin^2 t\cos t$

Nun ist:

$x = \operatorname{Sin} x + \frac{1}{6}\operatorname{Sin}^3 x + \text{etc},$ das übrige wird seiner Kleinheit wegen vernachlässigt; daher ist auch:

$x = p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z$ [redacted] $\frac{1}{2}p^3\sin^2 t\cos t - \frac{1}{6}p^3\cos t + \frac{p^3\cos^3 t}{6}$ [redacted] $+ p^3\sin^2 t\cos t$

$= p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z$ [redacted] $\frac{1}{2}p^3\sin^2 t\cos t - \frac{1}{6}p^3\cos t\left\{1 + \cos^2 t\right\} + p^3\sin^2 t\cos t$

$= p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z$ [redacted] $\frac{1}{2}p^3\sin^2 t\cos t - \frac{1}{6}p^3\cos t\sin^2 t + p^3\sin^2 t\cos t$

$= p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z + p^3\sin^2 t\cos t\left(1\right.$ [redacted] $\left.\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$

oder endlich:

$x = p\cos t - \frac{1}{2}p^2\sin^2 t\operatorname{tg} z + \frac{1}{3}p^3\sin^2 t\cos t$ dieses ist in Theilen des Halbmessers, also in Secunden, ist:

$$x = p\,\mathrm{Cos}\,t - \tfrac{1}{2}p^2\,\mathrm{Sin}\,t\,\mathrm{Cotg}\,z + \tfrac{1}{3}p^3\,\mathrm{Sin}^2 t\,\mathrm{Cos}\,t\,\mathrm{Sin}^2 1''$$

Ist nun:

$$\mathrm{Sin}\,1'' \times \tfrac{1}{2}p^2\,\mathrm{Sin}\,t\,\mathrm{Cotg}\,z = A \text{ und } \tfrac{1}{3}p^3\,\mathrm{Sin}^2 t\,\mathrm{Cos}\,t\,\mathrm{Sin}^2 1'' = B$$

So ist:

$$x = p\,\mathrm{Cos}\,t - A\,\mathrm{Cotg}\,z + B$$

Ist nun z die von allen Fehlern des Instrumentes und von der Refraction befreyte Zenithdistanz und ψ die gesuchte ~~Aequatorhöhe~~ ~~Polhöhe~~ Aequatorhöhe so ist:

$$\psi = z + p\,\mathrm{Cos}\,t - A\,\mathrm{Cotg}\,z + B$$

Oder wenn man:

$$A\,\mathrm{Cotg}\,z + B = C \text{ setzt, so ist:}$$

$$\psi = z + p\,\mathrm{Cos}\,t - C \text{ und}$$

$$\varphi = 90° - \psi \text{ ist die gesuchte Polhöhe}$$

---

92 Aus zwey Beobachtungen zweyer Sterne Zeit und Polhöhe zu finden.

Von dieser Aufgabe sind 3 Auflösungen bekannt, eine geometrische, und eine analytische, welche beyde direct aber in der Ausübung etwas unbequem sind, und endlich eine in der Praxis sehr bequeme indirecte Methode. Wir wollen hier alle 3 Auflösungen zeigen; obgleich Littrow nur die letzte in seine populare Astronomie aufgenommen hat.

1. Geometrische Auflösung

Seyen α, α' die scheinbaren Rectascensionen, p, p' die Poldistanzen und Z, Z' die beobachteten von Refraction befreyten Zenithdistanzen, ferner in der Figur Z das Zenith, P der Pol des Aequators und a, β, die Orte beyder Sterne

I. Man stelle sich vor, dass zur Zeit als man die erste Beobachtung machte, nämlich die Zenithdistanz des ersten Sterns mass, dieser in a der andere aber in b gestanden sey, und dass während der Zwischenzeit t beyder Beobachtungen der zweyte Stern ~~[illegible]~~ von b nach β gegangen sey, so ist bekannt:

$bP\beta = t$; $aPb = \alpha'-\alpha$ also auch: $\beta Pa = t+\alpha'-\alpha$

$Pa = p$ und $P\beta = p'$

also kann man aus dem Dreyeke βPa die Seite $a\beta = x$ und einen der anliegenden Winkel $P\beta a = y$ z. B. finden.

Es ist nähmlich:

$\cos x = \cos p \cos p' + \sin p \sin p' \cos(t+\alpha'-\alpha)$ also: auch:

$\frac{\cos x}{\cos p} = \cos p' + tg\, p \sin p' \cos(t+\alpha'-\alpha)$ setzt man dann:

$tg\, p \cos(t+\alpha'-\alpha) = tg\, m$ so ist:

$\frac{\cos x \cancel{\cos m}}{\cos p} = \frac{\cos p' \cos m + \sin p' \sin m}{\cos m}$ also endlich:

$\cos x = \frac{\cos p \cos(p'-m)}{\cos m}$ * *

Hat man so x, so ist: ~~[illegible]~~

$\cos p = \cos x \cos p' + \sin x \sin p' \cos y$ oder:

$\cos p = \cos x \cos p' + \sin x \sin p' - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} y \sin x \sin p'$ oder:

$\cos p = \cos x \cos p' + \sin x \sin p'\, 2\cos^2 \tfrac{1}{2} y - \sin x \sin p'$ also auch:

$2\sin^2 \tfrac{1}{2} y = \frac{\cos(x-p') - \cos p}{\sin x \sin p'}$ oder:

$2\cos^2 \tfrac{1}{2} y = \frac{\cos p - \cos(x+p')}{\sin x \sin p'}$ nähmlich; man kann y aus einer von den zwey Gleichungen:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(x-p'+p)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(p-x+p')}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}p'}}$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(p+x+p')\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(x+p-p')}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}p'}}$$

Nun kennt man in dem Dreyecke $Z\alpha\beta$ alle Drey Seiten, denn es ist:

$Z\alpha = z$; $Z\beta = z'$ und $\alpha\beta = x$ folglich kann man auch den Winkel: $Z\beta\alpha = n$ bestimmen.

Es ist:

$\operatorname{Cos}z = \operatorname{Cos}z'\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}z'\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}n$ woraus man auf dieselbe Weise wie früher findet:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}n = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(x-z'+z)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(z-x+z')}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}z'}} \text{ und}$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}n = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(z+x+z')\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(x+z-z')}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}z'}}$$

Kennt man dann so n so ist in dem Dreyecke $P\beta Z$ auch der Winkel $P\beta Z$ bekannt, da dieser Winkel:

$P\beta Z = y - n$ ist.

Kennt man diesen Winkel, so ist, da man in dem Dreyecke $PZ\beta$ Zwey Seiten und einen Winkel kennt, die dritte Seite oder die gesuchte Polhöhe augenblicklich bekannt, es ist nähmlich:

$$\operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Cos}z'\operatorname{Cos}p' + \operatorname{Sin}z'\operatorname{Sin}p'\operatorname{Cos}(y-n) \text{ oder:}$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}p'} = \operatorname{Cos}z' + \operatorname{Sin}z'\operatorname{tg}p'\operatorname{Cos}(y-n)$$

oder wenn man: $\operatorname{tg}p'\operatorname{Cos}(y-n) = \operatorname{tg}.d$ setzt:

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}d}{\operatorname{Cos}p'} = \frac{\operatorname{Cos}z'\operatorname{Cos}d + \operatorname{Sin}z'\operatorname{Sin}d}{} \text{ oder endlich:}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}p'\operatorname{Cos}(z'-d)}{\operatorname{Cos}d} \times$$

Und da man nun alle 3 Seiten kennt, so kann man nun auch die Zeit der Beobachtung oder den Winkel $ZP\beta$ oder: ZPa finden.

Es ist nähmlich: I Aus ZPa; nach der früheren Weise:

$$\sin\tfrac{1}{2}s = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}s = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

Und aus dem Dreyecke: $PZ\beta$, ist auf dieselbe Weise:

$$\sin\tfrac{1}{2}s' = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z'-\varphi+\delta')\sin\frac{1}{2}(z'+\varphi-\delta')}{\cos\varphi\cos\delta'}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}s' = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta'+z')\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta'-z')}{\cos\varphi\cos\delta'}}$$

wo s, und s' die Stundenwinkel, und $\frac{s}{15}$; $\frac{s'}{15}$ die Sternzeiten der Beobachtungen sind.

93 ## Analytische Auflösung der Aufgabe.

Sind γ, γ' die in Bogen verwandelten Zeiten der Beobachtungen also: $\gamma - \alpha = t$ und $\gamma' - \alpha' = t - \vartheta$ die Stundenwinkel, wo $\vartheta = (\alpha - \alpha') - (\gamma' - \gamma)$ bekannt ist, da $\gamma' - \gamma$ die in Grade verwandelte Differenz der Uhrzeiten oder was bey der Differenz gleich gilt, der Unterschied der Sternzeiten beyder Beobachtungen ist.

Bezeichnet φ die Polhöhe, so hat man:

$\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t$ und: - - - - - - (1)

$\sin h' = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\varphi\cos(t-\vartheta)$ - - - - - - - (2)

Es ist aber:

$$(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t)^2 + (\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2 t$$

daher auch die Gleichung (1) da:

$$(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2 t - (\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)^2$$

und

$\sin^2 h = 1 - \cos^2 h$ ist, so wird:

$$0 = (\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)^2 + \cos^2\varphi\sin^2 t - \cos^2 h$$

oder: $$0 = \frac{(\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)^2}{\cos^2 h} + \frac{\cos^2\varphi\sin^2 t}{\cos^2 h} - 1$$

oder wenn man: $\frac{(\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)^2}{\cos^2 h} = \cos^2 c$ setzt:

$$\cos^2\varphi\sin^2 t = \cos^2 h\sin^2 c \text{ oder:}$$

$$\cos\varphi\sin t = \cos h\sin c$$

oder wenn man in der vorletzten Gleichung für $\cos\varphi$ oder für $\sin\varphi$ ihre Werthe:

$$\sin\varphi = \frac{\sin h - \cos\delta\cos\varphi\cos t}{\sin\delta}\,;\quad \cos\varphi = \frac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos t}$$

substituirt; so ist:

$$\cos c = \frac{\cos\delta\sin\varphi}{\cos h} - \frac{\sin\delta\sin h\cos t + \sin^2\delta\sin\varphi\cos t}{\cos h\cos t\cos\delta}$$

$$\cos c = \frac{\cos^2\delta\cos h\cos t\sin\varphi - \sin\delta\cos h\sin h\cos t + \sin^2\delta\sin\varphi\cos h\cos t}{\cos^2 h\cos t\cos\delta}$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos h\cos t(\cos^2\delta + \sin^2\delta) - \sin\delta\cos h\sin h\cos t}{\cos^2 h\cos t\cos\delta}$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos h\cos t - \sin\delta\cos h\sin h\cos t}{\cos^2 h\cos t\cos\delta}$$

also auch:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta\cos h\sin h\cos t + \cos^2 h\cos t\cos\delta\cos c}{\cos h\cos t}$$

$$= \sin\delta\sin h + \cos h\cos\delta\cos c$$

oder:

$$\cos c = \frac{\cos\delta\sin h - \cos^2\delta\cos\varphi\cos t}{\sin\delta\cos h} - \frac{\sin\delta\cos\varphi\cos t}{\cos h}$$

$$= \frac{\cos\delta\sin h\cos h - \cos^2\delta\cos\varphi\cos t\cos h - \sin^2\delta\cos\varphi\cos t\cos h}{\sin\delta\cos^2 h}$$

oder:

$$\operatorname{Cos} c = \frac{-\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos} h + \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos} h}{\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}^2 h} \quad \text{also auch:}$$

$$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} h - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} c$$

Ferner gibt die Gleichung (2):

$\operatorname{Sin} h' = \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos}\vartheta + \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t \operatorname{Sin}\vartheta$; oder wenn man für:

$\operatorname{Sin}\varphi$; $\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t$; $\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t$; ihre Werthe aus dem Vorhergehenden setzt:

$$\operatorname{Sin} h' = \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin} h + \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos}\vartheta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} c \operatorname{Cos}\vartheta$$
$$+ \operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\vartheta$$

also:

$$\operatorname{Sin} h' - \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\vartheta = \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} c (\operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\vartheta)$$
$$+ \operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\vartheta$$

oder:

$$\operatorname{Sin} h' - \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\vartheta = \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos} h (\operatorname{Cos} c \operatorname{Ctg} a + \operatorname{Sin} c)$$

wenn man nähmlich:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\vartheta}{\operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\vartheta} \quad \text{setzt.} \quad (3)$$

Setzt man nun $(a - c) = b$ so ist:

$$\operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c = \frac{\operatorname{Cos} c \operatorname{Ctg} a + \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} a} \quad \text{also auch:}$$

oder:

$$\operatorname{Cos} b = \frac{\operatorname{Sin} a \{\operatorname{Sin} h' - \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\vartheta\}}{\operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos} h} \quad (4)$$

Kennt man so aus (3) und (4) a und b, so kennt man auch c, und dann t aus

$$\frac{\operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} t} \{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} h - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} c\} = \operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} c, \text{ nähmlich:}$$

aus:

$$tg.\,t = \frac{Cos\,h\,Sin\,c}{Cos\,d\,Sin\,h - Sin\,d\,Cos\,h\,Cos\,c} \qquad (5)$$

und dann φ aus:

$$\frac{tg\varphi}{Cos\,t} = \frac{Sin\,d\,Sin\,h + Cos\,d\,Cos\,h\,Cos\,c}{Cos\,d\,Sin\,h - Sin\,d\,Cos\,h\,Cos\,c}$$

nähmlich:

$$tg\varphi = \frac{Cos\,t}{Cos\,d\,Sin\,h - Sin\,d\,Cos\,h\,Cos\,c}\left(Sin\,d\,Sin\,h + Cos\,d\,Cos\,h\,Cos\,c\right)$$

oder nach der Gleichung (5)

$$tg\varphi = \frac{Sin\,t}{Cos\,h\,Sin\,c}\left\{Sin\,d\,Sin\,h + Cos\,d\,Cos\,h\,Cos\,c\right\} \text{ --- } (6)$$

und diese 6 Gleichungen enthalten die ~~[illegible]~~ vollkommene Auflösung unserer Aufgabe, welche zwar schon bequemer als die geometrische, aber doch in der Ausübung noch umständlich ist.

Noch ist zu bemerken, dass Sin t mit Sin (a − b) einerley Zeichen haben, und dass: Sin a, Sin b dieselben oder entgegengesetzte Zeichen haben muss, nachdem der Verticalkreis des ersten Stern's dem des zweyten, rechts oder links liegt.

---

94 III Indirecte Auflösung.

Diese ist sehr bequem, und wird dadurch möglich, dass beynahe in den meisten Fällen die zu suchende Polhöhe, schon beyläufig bekannt ist.

Sey also für den ersten der beobachteten Sterne α die Rectascension, δ die Declination oder p die Poldistanz ~~[illegible]~~ z die beobachtete von der Refraction und dem Colimationsfehler des Instrumentes befreyte Zenithdistanz und T die noch unbekannte Sternzeit der Beobachtung so wie s der Stundenwinkel dieses Sterns bey der Beobachtung. Für den zweyten Stern seyen diese Grössen: α', p', z', T', s'

so ist:

$s = T - \alpha$ also: $T' - T = (s' - s) + (\alpha' - \alpha)$

$s' = T' - \alpha'$

Ist nun die schon nahe bekannte Aequatorhöhe des Beobachtungsortes ψ, so ist:

$\cos z = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos s$ also:

$$\cos s = \frac{\cos z - \cos\psi \cos p}{\sin\psi \sin p}$$ daß heißt:

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} s = \frac{\cancel{\cos}\ \sin\psi \sin p - \cos\psi \cos p + \cos z}{\sin\psi \sin p} = \frac{-\cos(\psi + p) + \cos z}{\sin\psi \sin p}$$

also: $$\cos \tfrac{1}{2} s = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z + \psi + p) \sin\frac{1}{2}(\psi + p - z)}{\sin\psi \sin p}}$$ und eben so:

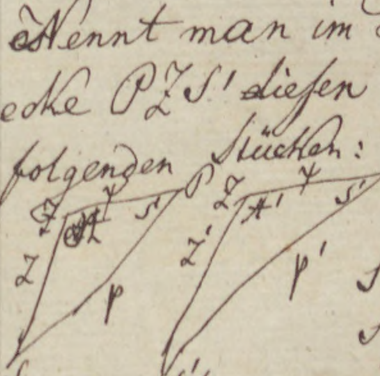
$$\cos \tfrac{1}{2} s' = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z' + \psi + p') \sin\frac{1}{2}(\psi + p' - z')}{\sin\psi \sin p'}}$$

Ist nun ψ nicht sehr fehlerhaft, so ist:

$s = T - \alpha$ und

$s' = T' - \alpha'$ ist aber ψ fehlerhaft gewählt, so ist: $T = s + \alpha + ds$, $T' = s' + \alpha' + ds'$

und es kömmt daher nur auf die Bestimmung von ds und ds' an, Nennt man im Dreyecke ZPS, den Winkel $PZS = A$ und im Dreyecke PZS' diesen Winkel $= A'$ so ist zwischen den 5 aufeinander folgenden Stücken: z, A, ψ, s, p und z', A', ψ, s', p' folgende Verbindung vorhanden:



$\sin z \cos A = \sin\psi \cos p - \cos\psi \cos s \sin p$ und

$\sin z' \cos A' = \sin\psi \cos p' - \cos\psi \cos s' \sin p'$

ferner ist, wenn man die Gleichungen:

$\cos z = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos s$ und

$\cos z' = \cos\psi \cos p' + \sin\psi \sin p' \cos s'$ in Beziehung auf:

ψ und s differenzirt, ~~so ist~~:

$$0 = -\sin\psi \cos p\, d\psi + \cos\psi \sin p \cos s\, d\psi - \sin\psi \sin p \sin s\, ds$$

also auch:

$$-d\psi\{\sin\psi \cos p - \cos\psi \sin p \cos s\} = -\sin\psi \sin p \sin s . ds$$

und eben so:

$$d\psi\{\sin\psi \cos p' - \cos\psi \sin p' \cos s'\} = -\sin\psi \sin p' \sin s' . ds'$$

oder wenn man auf das Frühere Rücksicht nimmt, so ist:

$d\psi \sin z \cos A = -ds . \sin\psi \sin p \sin s$ und:

$d\psi \sin z' \cos A' = -ds' . \sin\psi \sin p' \sin s'$

oder: $$ds = -\frac{d\psi \sin z \cos A}{\sin\psi \sin p \sin s} \text{ und } ds' = -\frac{d\psi \sin z' \cos A'}{\sin\psi \sin p' \sin s'}$$

Um A und A' zu finden hat man aber:

$\sin z : \sin s = \sin p : \sin A$ also:

$$\sin A = \frac{\sin s . \sin p}{\sin z} \text{ und eben so: } \sin A' = \frac{\sin s' \sin p'}{\sin z'}$$

also auch:

$$ds = -\frac{\sin s \sin p}{\sin A} . \frac{\cos A}{\sin\psi \sin p \sin s} . d\psi = -\frac{\cot A}{\sin\psi} . d\psi$$

und eben so:

$$ds' = -\frac{\sin s' \sin p'}{\sin A'} . \frac{\cos A'}{\sin\psi \sin p' \sin s'} d\psi = -\frac{\cot A'}{\sin\psi} . d\psi$$

Setzt man nun:

$$B = \frac{\cot A}{\sin\psi} \text{ und } B' = \frac{\cot A'}{\sin\psi}, \text{ so ist:}$$

$ds = -B d\psi$
$ds' = -B' d\psi$ also auch: $T = s + \alpha - B d\psi$
$T' = s' + \alpha' - B' d\psi$ also auch:

$$T' - T = (s' - s) + (\alpha' - \alpha) + d\psi (B' - B)$$

oder: $$-d\psi (B' - B) = (T' - T) - (s' - s) - (\alpha' - \alpha)$$

oder $$d\psi = \frac{(T' - T) - (s' - s) - (\alpha' - \alpha)}{B - B'}$$

oder aber:

$$d\psi = \frac{(s'-s) + (\alpha'-\alpha) - (T'-T)}{B'-B}$$ und dann ist:

Gesuchte wahre Aequatorshöhe:

$$\Psi = \psi + d\psi$$

und corrigirte Sternzeit der Beobachtung:

$$T = s + \alpha - B d\psi$$
$$T' = s' + \alpha' - B' d\psi$$

---

95 Bestimmung der Zeit und Polhöhe aus ~~den~~ zwey ~~mahligen~~ beobachteten Zenithdistanzen eines und desselben Sterns.

Ist p die Polardistanz des beobachteten Sternes, ψ die schon nahe bekannte Aequatorshöhe des Beobachtungsortes, z die erste und z' die zweyte gemessene Zenithdistanz; ferner s der Stundenwinkel der ersten und s' jener der zweyten Beobachtung, so ist:

$$\cos z = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos s$$ und:

$$\cos z' = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos s'$$

also auch:

$$\cos z - \cos z' = \sin\psi \sin p \{\cos s - \cos s'\}$$ oder eben so:

$$\cos s - \cos s' = \frac{\cos z - \cos z'}{\sin\psi \sin p}$$ nähmlich:

$$\sin \tfrac{1}{2}(s+s') \sin \tfrac{1}{2}(s'-s) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(z+z') . \sin \tfrac{1}{2}(z'-z)}{\sin\psi \sin p}$$

Liegen nun beyde Zenithdistanzen auf derselben Seite des Zeniths, so ist: $\frac{1}{2}(s'-s)$, liegen sie aber aber auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths, so ist $\frac{1}{2}(s'+s)$ bekannt, da die Differenzen, der Sternzeiten oder Stundenwinkel stets bekannt, sind. man kann daher durch die gegebene Formel, jederzeit die Stundenwinkel s und s' oder die Sternzeiten der Beobachtung bestimmen, und kennt man diese, so ist:

$$\cos z = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos s \text{ oder:}$$

$$\frac{\cos z}{\cos p} = \cos\psi + \sin\psi \,\mathrm{tg}\, p \cos s$$

Setzt man nun: $\mathrm{tg}\, p \cos s = \mathrm{tg}\, x$, so findet man ψ aus:

$$\cos(\psi - x) = \frac{\cos z \cos x}{\cos p}$$ und die gesuchte Polhöhe φ ist: $\varphi = 90^\circ - \psi$ **

96 Aus 3 zu drey verschiedenen Uhrzeiten, und in der Nähe der Culmination beobachteten Höhen eines Gestirns Zeit und Breite zu bestimmen.

Es seyen die 3 gemessenen Höhen;

gleich: H und die Uhrzeiten der Beobachtungen.

$H + h$

$H + h'$

gleich: T

$T + t$

$T + t'$

ferner sey die unbekannte Höhe des Gestirnes im Meridiane $= H + x$ und die ebenfalls unbekannte Culminationszeit $= T + \vartheta$; so haben wir bloss x und ϑ zu bestimmen.

Da sich in der Nähe des Meridians die Höhen, wie die Quadrate der Stundenwinkel ändern, so ist:

$x = A\vartheta^2$ und:

$x - h = A(\vartheta - t)^2$ wo A eine constante Grösse, und zwar ist: A:

Auf der Südseite des Zeniths: Nordseite obere Culmination

$= 225 . \sin 1'' . \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$ $\quad = 225 . \sin 1'' . \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)}$

und auf der Nordseite des Zeniths untere Culminat.

$$= - 225 . \sin 1'' . \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$$

wo φ die Polhöhe und δ die Declin. der Gestirns bezeichnet, und wo für südliche Declinationen δ negativ wird.

Nun ist aus dem Obigen:

$x - h = A\vartheta^2 - 2At\vartheta + At^2$ oder: $\quad h = 2At\vartheta - At^2$

$x - h = x \quad - 2At\vartheta + At^2$ dass heisst:

oder: $\vartheta = \frac{h + At^2}{2At}$ dass heisst, wenn $At^2 = K$ gesetzt

wird: $\vartheta = \frac{h + K}{2At}$ oder: $\vartheta^2 = \frac{(h+K)^2}{4A^2t^2}$. Diess in der

Gleichung: $x = A\vartheta^2$ substituirt gibt:

$$x = \frac{(h+K)^2}{4A\vartheta^2} = \frac{(h+K)^2}{4K} \;** \;(\mathrm{I})$$

Und diese Gleichung (I) gibt ohne alle frühere Kenntniss der Uhr die Grösse x also auch die Meridianhöhe $H + x$ und daraus die Polhöhe φ; aber um A zu finden, muss doch die Polhöhe schon früher wenigstens annähernd bekannt seyn.

Um sich von dieser vorläufigen Kenntniss der Polhöhe unabhängig zu machen, wird man statt zweyen alle drey Beobachtung gen brauchen; dann hat man:

$$x = A\vartheta^2$$
$$x - h = A(\vartheta - t)^2 = A\vartheta^2 - 2At\vartheta + At^2$$
$$x - h' = A(\vartheta - t')^2 = A\vartheta^2 - 2At'\vartheta + At'^2$$

also aus den beyden letzten Gleichungen:

$$h = 2At\vartheta - At^2$$
$$h' = 2At'\vartheta - At'^2 \quad \text{also:} \quad \frac{h'}{h} = \frac{2At'\vartheta - At'^2}{2At\vartheta - At^2}$$

oder: $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{2t'\vartheta - t'^2}{2t\vartheta - t^2}$ und: $2At\vartheta = h + At^2$
$2At'\vartheta = h' + At'^2$

also: $\dfrac{t'}{t} = \dfrac{h' + At'^2}{h + At^2}$ also auch:

$$2h't\vartheta - h't^2 = 2ht'\vartheta - ht'^2$$
$$ht' + At't^2 = h't + Att'^2$$

Sey nun: $ht' = M'$, & $h't = M$; so ist:

$$2M\vartheta - Mt = 2M'\vartheta - M't'$$
$$M' + At't^2 = M + Att'^2$$

also folgt aus der ersten Gleichung:

$2\vartheta(M' - M) = -Mt + M't'$ und aus der zweyten:

$A(tt'^2 - t't^2) = M' - M$ also auch:

$$\vartheta = \frac{M't' - Mt}{2(M' - M)} \quad \text{und}$$

$$A = \frac{M' - M}{tt'^2 - t't^2}$$ diese zwey Werthe in

der Gleichung: $x = A\vartheta^2$ substituirt,

geben:

$$x = \left\{\frac{M'-M}{tt'^2 - t't^2}\right\}\left\{\frac{(Mt'-Mt)^2}{4(M'-M)^2}\right\}$$

$$= \frac{(Mt'-Mt)^2}{4(M'-M).tt'(t'-t)}\ *$$

Und diese Gleichung gibt x also auch die Meridianhöhe des Gestirnes, und daraus die Polhöhe durch drey ~~in~~ der Nähe des Meridians gemessene Höhen eines Sternes, und zwar ohne eine vorläufige Kenntniss der Zeit, oder der Polhöhe vorauszusetzen.

Wenn zwey der beobachteten drey Höhen einander gleich sind, so wird diese Gleichung sehr vereinfacht, sey z.B. ~~[illegible]~~ die erste gleich der zweyten, so ist: $h = 0$; also auch $M' = 0$ und:

$$x = \frac{M^2t^2}{-4M.tt'(t'-t)} = \frac{Mt}{4t'(t-t')} = \frac{h't^2}{4t'(t-t')}$$

Ist die erste Höhe gleich der dritten, so ist: h' also auch: $M = 0$, und:

$$x = \frac{M'^2t'^2}{4M'tt'(t'-t)} = \frac{M't'}{4t(t'-t)} = \frac{t'^2h}{4t(t'-t)}$$

Sind endlich die beyden letzten Höhen gleich; so ist: $h = h'$ also $M = ht$ und $M' = ht'$ also auch:

$$x = \frac{(ht'^2 - ht^2)^2}{4h(t'-t).tt'(t'-t)} \text{ also auch: } x = \frac{h\{(t'+t)(t'-t)\}^2}{4(t'-t)^2.tt'}$$

dass heisst endlich:

$$x = \frac{h(t'+t)^2}{4tt'}$$

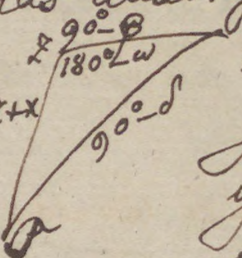
Dieselben Beobachtungen geben auch eine erste genäherte Correction der Uhr, da sie annähernd die Culminationszeit

$T+\vartheta$ des Sterns geben, scharf können sie sie als nahe am Meridian gemacht nicht geben, man hat nähmlich:

Für 2 Sterne: $\vartheta = \sqrt{\frac{x}{A}}$ und für 3: $x = \frac{Mt'-Mt}{2(M'-M)}$

97 **Bestimmung der Polhöhe aus der ~~[illegible]~~ Beobachtung bloßer Differenzen der Azimuthe und Höhen eines Gestirns**

Diese Aufgabe ist ganz dieselbe mit der vorigen, nur kömmt zu erweisen dass ~~der~~ Höhe ~~[illegible]~~ in der Nähe des Meridians eben so sich ändert nähmlich wie das Quadrat des Azimuthes, wie früher ~~[illegible]~~ erwiesen wurde, dass sie sich wie das Quadrat des Stundenwinkels ändre.



Sey in dem Dreyecke PZS ZS = z + x = der mittägigen Zenithdistanz mehr der kleinen Änderung x, so ist:

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos(z+x) - \cos\varphi\sin(z+x)\cos\omega$$

$$\cancel{\text{also: } \sin\delta = \sin\varphi\cos(\varphi-\delta) - \sin\varphi\sin(\varphi-\delta)\,x\sin 1'' - \sin(\varphi-\delta)\cos\varphi + x\sin 1''\cos\varphi\cos(\varphi-\delta)\cos\omega}$$

$$\cancel{\text{und: } x\sin 1''\left(\cos\varphi\cos(\varphi-\delta)\cos\omega - \sin\varphi\sin(\varphi-\delta)\right) = \sin\delta - \sin\varphi\cos(\varphi-\delta) + \cos\varphi\sin(\varphi-\delta) = \sin\delta - \sin(\varphi+\varphi+\delta) = 0}$$

also:

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z\cos x - \sin\varphi\sin z\sin x - \cos\varphi\sin z\cos x\cos\omega - \cos\varphi\cos z\sin x\cos\omega$$

da nun x nur klein seyn darf, so wird man:

$\cos x = 1$ und $\sin x = x\sin 1''$, und da ferner auch ω nur klein seyn kann, wenn x klein ist; so wird einmahl $\cos\omega = 1$ und einmahl $\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\omega = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 1''\,\omega^2$ setzen dürfen, wodurch man erhält:

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - x\sin 1''\sin\varphi\sin z - \cos\varphi\sin z + \cos\varphi\sin z\, 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - x\sin 1''\cos\varphi\cos z$$

oder:

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z + \cos\varphi\sin z\, 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - x\sin 1''\left\{\cos\varphi\cos z + \sin\varphi\sin z\right\}$$

dass heisst:

$\text{Sin}\,\delta = \text{Sin}(\varphi - z) + \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,z \cdot \frac{1}{2}\text{Sin}^2 1'' \cdot \omega^2 - x\,\text{Sin}\,1''\{\text{Cos}(\varphi - z)\}$

Da nun $z = \varphi - \delta$ ist, so ist:

$$x = \text{Sin}\,\delta - \text{Sin}\,\delta + \frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}(\varphi - \delta) \cdot \text{Sin}^2 1'' \cdot \omega^2}{2\,\text{Sin}\,1''\,\text{Cos}\,\delta}$$

oder $x = \frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}(\varphi - \delta) \cdot \omega^2}{2\,\text{Cos}\,\delta} \cdot \text{Sin}\,1''$ in Zeitsecunden und auf der Südseite des Zeniths.

Auf der Nordseite des Zeniths obere Culmination ist:

$$x = \frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(\delta - \varphi) \cdot \omega^2}{2\,\text{Cos}\,\delta}\,\text{Sin}\,1''$$

und für untere Culminationen ist:

$$x = -\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(\delta - \varphi) \cdot \omega^2}{2\,\text{Cos}\,\delta}\,\text{Sin}\,1''$$ oder in Bogen:

auf der Südseite, obere Culmination Nordseite, untere Culmination:

$$x = 112''\!.5\,\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(\varphi - \delta)\,\omega^2}{\text{Cos}\,\delta}\,\text{Sin}\,1''; \quad 112''\!.5\,\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(\delta - \varphi)\,\omega^2}{\text{Cos}\,\delta}\,\text{Sin}\,1''; \quad -112''\!.5\,\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(\delta - \varphi)\,\text{Sin}\,1''}{\text{Cos}\,\delta}$$

Sind nun, zu den ~~Zeiten~~ Höhen:

M	die Azimuthe $\mathfrak{A}$ abgelesen worden, und sind die mittäg.
$M+h$	$\mathfrak{A}+a$ ~~höhe~~ Höhe und das Azimuth.
$M+h'$	$\mathfrak{A}+a'$
$M+x$	$\mathfrak{A}+\alpha$

so ist wenn man in den eben gefundenen 3 Gleichungen die Coefficienten von $\omega^2 = A$ und ω selbst $= \alpha$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\alpha^2 \\ x - h &= A(\alpha - a)^2 \\ x - h' &= A(\alpha - a')^2 \end{aligned}\right\}$$

Nimmt man ~~[illegible]~~ nur zwey Gleichungen oder Beobachtungen, und setzt $k = Aa^2$, so ist:

$$x = \frac{(h+k)^2}{4k}$$

Kennt man so x, so ist die gesuchte Polhöhe $\varphi = M + x - \delta$

und zwar ohne alle Kenntniß der Lage des Meridians, und des Mittags.

Will man sich aber auch noch von der vorläufigen Kenntniß der Polhöhe und Declination unabhängig machen so brauche man alle drey Beobachtungen, wodurch man erhält:

$$x = \frac{(H'a' - Ha)^2}{4aa'(a'-a).(H'-H)}$$ wo $H = ah'$ und $H' = a'h$ ist.

Sind die beyden ersten Höhen gleich, so ist:

$h = o$; also:
$$x = \frac{a^2 h'}{4a'(a-a')}$$

Ist die erste der dritten Höhe gleich, so ist $h' = o$, also:
$$x = \frac{a'^2 . h}{4a(a'-a)}$$

und ist endlich die zweyte der dritten Höhe gleich, so ist:

$h = h'$ also:
$$x = \frac{(a+a')^2 . h}{4aa'}$$

Diese Gleichungen werden sämmtlich so abgeleitet, wie die ihnen ganz ähnlichen in No. 96.

---

98 Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes aus beobachteten Differenzen der Rectascension des Mondes und eines Sterns.

Sey t die beobachtete Differenz der Culminationen des Mondes und des Sterns am ersten und t' am zweyten Orte ferner a die stündliche Änderung der AR des Mondes so ist die Änderung der Rectascension in der Zeit $t'-t$; ~~[illegible]~~ $= \frac{3600(t'-t)}{a}$ und die gesuchte Längendifferenz:

$$x = \frac{3600(t'-t)}{a} - (t'-t)$$

Längenbestimmung aus gemessenen Distanzen des Mondes von der Sonne oder anderen Fixsterne.

99

Da die Conaisance de tems und der Nauticalalmanach diese Distanzen des Mondes von der Sonne und den vorzüglichsten Fixsternen schon für jeden Tag von drey zu drey Stunden {Pariser oder Londner Zeit} voraus berechnet enthalten, so darf man nur wenn man eine solche Distanz beobachtet hat, aus den Ephemeriden die Zeit suchen, wann dieselbe Distanz in London oder Paris gesehen wird, um die Länge unmittelbar zu erhalten.

Aber diese Distanzen sind in den Ephemeriden für den Mittelpunct der Erde berechnet worden, und können daher nicht unmittelbar mit den beobachteten Distanzen verglichen werden, um diese Vergleichung möglich zu machen, muss man erst die geodätische Distanz D auf die geocentrische Δ bringen, und beyde können vorzüglich wegen der grossen Parallaxe

des ☾ & der Refraction, ~~und~~ sehr von einander verschieden seyn.

Um die Höhenparallaxe P p und die Refraction R r, des Mondes und des 2ten Gestirnes zu haben ~~braucht~~ braucht man ihre Höhen H und h, man wird daher vor und nach der gemessenen Distanz die Höhen beyder Gestirne beobachten und daraus die Höhen derselben im Augenblicke der gemessenen Distanz D durch eine einfache Proportion bestimmen. Sind dann Π π die Horizontalparallaxen des Mondes und des zweyten Sternes und B, und b die Höhen des Mondes und des Gestirnes (bey beyden die Höhen des obern Randes); ferner M und m die aus den Ephemeriden gefundenen Horizontalhalbmesser beyder Gestirne, so ist:

$$P = \Pi \cos B \quad ; \text{ wegen ihrer Höhe vergrößerte } N = M + M \sin \Pi \sin B \sin 1''$$

$$p = \pi \cos b \quad ; \text{ Halbmesser der Gestirne: } n = m + m \sin \pi \sin b \sin 1''$$

Dann hat man für die scheinbare Höhe des Mittelpunctes:

$$H' = B - N$$

$$h' = b - n$$

und wenn man für diese Höhen die Refraction sucht, die wahren Höhen des Mittelpunctes:

$$H = H' - \text{Refract.} + P \text{ und}$$

$$h = h' - \text{Refract.} + p$$

Jetzt nach diesen Vorarbeiten haben wir nunmehr unser Problem zu lösen, und aus der geodätischen Distanz D des Mondes und eines Sternes (wir wollen hier die Sonne nehmen) ihre geocentrische Δ bestimmen.

Sey in dieser Figur ABCD der Horizont, ☉ und ☾ die Orte der Sonne und des Mondes in ihren Parallelkreisen. Ferner sey:

$☾Z = 90° - H'$; $Z☉ = 90° - h'$ und $☾☉ = D$, so wie $☉Z☾ = \omega$, so ist:

$$\cancel{\cos D = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos\omega} \text{ ~~oder~~ } \cancel{\cos\omega = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega} \text{ ~~gesetzt:~~}$$

$$\cancel{\cos D = \cos(H'-h') - 2\cos H' \cos h' \sin^2\tfrac{1}{2}\omega} \text{ ~~oder~~ } \cancel{\cos\omega = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - 1} \text{ ~~gesetzt:~~}$$

$$\cancel{\cos D = 2\cos H' \cos h' + \cos [illegible]}$$

wen H, h die wahren, und h', H' die scheinbaren Höhen sind, ferner Δ die geocentrische und D die geodätische Distanz beyder Sterne bezeichnet:

$$\cos\Delta = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos\omega \text{ und:}$$
$$\cos D = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos\omega$$

woraus folgt:

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos D - \sin H' \sin h'}{\cos H' \cos h'}$$

und: $$2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - 1 = \frac{\cos D - \sin H' \sin h'}{\cos H' \cos h'}$$

oder: $$\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos(H'+h') - \cos D}{2\cos H' \cos h'}$$

und: $$\cos^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos D + \cos(H'+h')}{2\cos H' \cos h'}$$

oder: $$\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\sin\tfrac{1}{2}(D-H'-h')}{\cos H' \cos h'}$$

und: $$\cos^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D) . \cos\tfrac{1}{2}(D+H'+h')}{\cos H' \cos h'}$$

ferner ist; $\cos\omega$ nach der Ordnung $= 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - 1$ und gleich: $\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - \sin^2\tfrac{1}{2}\omega$ gesetzt:

$$\cos\Delta = \cos(H-h) - 2\cos H\cos h\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \quad (1)$$
$$\cos\Delta = 2\cos H\cos h\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - \cos(H-h) \quad (2)$$
$$\cos\Delta = \sin H\sin h + \cos H\cos h\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - \cos H\cos h.\sin^2\tfrac{1}{2}\omega$$ oder sin. sin; cos. cos; entwickelt:
$$\cos\Delta = \tfrac{1}{2}\cos(H-h) - \tfrac{1}{2}\cos(H+h) + \tfrac{1}{2}\cos(H-h)\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\cos(H+h)\cos^2\tfrac{1}{2}\omega$$
$$- \tfrac{1}{2}\cos(H-h)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\cos(H+h)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(H-h)\{1+\cos\omega\} - \tfrac{1}{2}\cos(H+h)(1-\cos\omega)$$ oder:
$$\cos\Delta = \cos(H-h)\cos^2\tfrac{1}{2}\omega - \cos(H+h)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \quad (3)$$
Aus der Gleichung 2 folgt, wenn man für $\cos^2\tfrac{1}{2}\omega$ seinen Werth setzt:
$$\cos\Delta = \frac{2\cos H\cos h}{\cos H'\cos h'}\left\{\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D).\cos\tfrac{1}{2}(D+H'+h')\right\} - \cos(H-h)$$
oder wenn wir $\frac{\cos H\cos h}{\cos H'\cos h'} = m$, und $\cos\Delta = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta - 1$
setzen:
$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = 2m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D).\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D) - \cos(H-h) + 1$$ also:
$$\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin^2\tfrac{1}{2}(H+h) + m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\times\cos(H'+h'-D)$$
und:
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = 1 + \cos(H-h) - 2m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D) \quad (II)$$
d. h.
$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(H-h) - m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D)$$
nähmlich:
$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(H-h)\left\{1 - \frac{m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(H-h)}\right\}$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin^2\tfrac{1}{2}(H-h)\left\{1 + \frac{m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D)}{\sin^2\tfrac{1}{2}(H-h)}\right\}$$
Setzt man nun um die Gleichungen logarithmisch zu machen:
$$\{m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D)\}\sec^2\tfrac{1}{2}(H-h) = \sin^2 A$$ und:
$$\{m\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'-D)\}\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}(H-h) = \sin^2 B,$$ so ist:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(H-h)\left\{1-\sin^2 A\right\}$$ und:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin^2\tfrac{1}{2}(H-h)\left\{1+tg^2 B\right\}$$

oder endlich:

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\Delta &= \cos\tfrac{1}{2}(H-h)\cos A\\ \cos\tfrac{1}{2}\Delta &= \sin\tfrac{1}{2}(H-h)\cdot\frac{1}{\cos B}\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

II Auf dieselbe Weise folgt aus der Gleichung (1) wenn man daraus die Werthe von $\sin^2\frac{1}{2}\delta$ und $\cos^2\frac{1}{2}\delta$ sucht, und dann:

$$\left\{m\sin\tfrac{1}{2}(D+H'-h')\sin\tfrac{1}{2}(D-H'+h')\right\}\sec^2\tfrac{1}{2}(H-h) = \sin^2 C$$

und $$\left\{m\sin\tfrac{1}{2}(D+H'-h')\sin\tfrac{1}{2}(D-H'+h')\right\}\mathrm{cosec}^2\tfrac{1}{2}(H-h) = tg^2 D$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}\Delta &= \cos\tfrac{1}{2}(H-h)\cdot\cos C\\ \sin\tfrac{1}{2}\Delta &= \sin\tfrac{1}{2}(H-h)\cdot\frac{1}{\cos D}\end{aligned}\right\}(\mathrm{II})$$

III Die Gleichung (1) gibt aber auch:

$$\cos\Delta = \cos(H-h) - 2m\sin\tfrac{1}{2}(D+H'-h')\sin\tfrac{1}{2}(D-H'+h')$$
$$= \cos(H-h) - m\left\{\cos(H'-h') - \cos D\right\}$$

Setzt man nun:

$$\tfrac{1}{2}m = \cos E$$ so ist:

$$\cos\Delta = \cos(H-h) - 2\cos E\left\{\cos(H'-h') - \cos D\right\}$$
$$= \cos(H-h) - 2\cos E\cos(H'-h') - 2\cos E\cos D$$

oder wenn man die Producte der Cosinusse entwickelt:

$$\cos\Delta = \cos(H-h) - \cos(E-H'+h') - \cos(E+H'-h') - \cos(E-D) - \cos(E+D)$$

$$1-\cos\Delta = 1 - \left\{\cos(H-h)+\cos(E-H'+h')+\cos(E+H'-h')+\cos(E-D)+\cos(E+D)\right\}$$

nähmlich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sinvers.}\,\Delta = \text{Sinvers}\,(H-h) - \text{Sinvers}\,(E-H'+h') - \text{Sinvers}\,(E+H'-h') \\ \qquad - \text{Sinvers}\,(E-D) - \text{Sinvers.}\,(E+d)\end{array}\right\}\ \text{III}$$

und diese Gleichung ist für Seefahrer die vorzüglichste, da sie wenn man eine eigene Sinusversustafel hat, aus blossen Subtractionen besteht.

100

Längenbestimmung aus der Beobachtung des Anfanges und Endes scheinbarer Finsternisse, als der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.

Sey T die Ortszeit des beobachteten Ein oder Austrittes des Mondrandes bey Sonnenfinsternissen oder des Sternes bey Sternbedeckungen. Für die hypothetische Zeit: $T-t$ wo t die nahe bekannte Länge des Beobachtungsortes ist, suche man aus den Tafeln:
Die scheinbare Rectascension und Declination, ferner den scheinbaren Halbmesser des Mondes, a, d, m. und für das Gestirn dieselben Grössen α, δ, μ. oder wenn man Längen und Breiten nimmt: ☾, b, m. und ☉, β, μ
Nun sey f die scheinbare relative Bewegung beyder Körper in einer Secunde in Beziehung auf die Rectascension, und g dasselbe in Beziehung auf die Declination, oder:

$$f = \frac{\text{stündl. scheinb. Änd. v. } a - \text{stündl. scheinb. Änd. v. } \alpha}{3600} \quad \text{und:}$$

$$g = \frac{\text{stündl. scheinb. Änd. v. } d - \text{stündl. scheinb. Änd. v. } \delta}{3600}$$

Ist nun zur Zeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss der Mond in ☾ und das zweyte Gestirn in s, so ist:
$\text{☾}s = m \pm \mu$; $\text{☾}x = d-\delta$, und: $xs = (a-\alpha)\cos\delta$ also auch:

$$(m\pm\mu)^2 = (d-\delta)^2 + (a-\alpha)^2\cos^2\delta.$$

Diess findet aber nur dann Statt, wenn man t und die tabellarischen Orte der beyden Gestirne richtig angenommen werden. Sey daher dt der Fehler von t, ~~und ... die Fehler der tabella-~~ ~~rischen Orte der Gestirne ...~~ in Secunden ausgedrückt, so ist das verbesserte $t = t + dt$ und man hätte die tabellarischen Orte der beyden Gestirne eigentlich für die Zeit: $T - t - dt$ suchen sollen. Für diese Zeit aber ist: Die Dif- ~~...~~ ferenz der scheinbaren Rectascensionen:

$$= a - \alpha - f.dt$$ und der Declinationen:

$$= d - \delta - g.dt,$$ so dass man also hat:

$$(\mu \pm m)^2 = (d - \delta - g\,dt)^2 + (a - \alpha - f\,dt)^2 \cdot \cos^2\delta;$$ oder wenn man $\mu \pm m = R$ setzt:

$$R^2 = (d - \delta - g\,dt)^2 + (a - \alpha - f\,dt)^2 \cos^2\delta$$

$$= (d-\delta)^2 - 2g(d-\delta)dt + g^2dt^2 + (a-\alpha)^2\cos^2\delta - 2(a-\alpha)f\,dt\cos^2\delta + f^2dt^2\cos^2\delta$$

Setzt man nun $(d-\delta)^2 + (a-\alpha)^2\cos^2\delta = \Delta^2$, so ist:

$$R^2 = \Delta^2 - 2g\,dt(d-\delta) - 2(a-\alpha)f\,dt\cos^2\delta + g^2dt^2 + f^2dt^2\cos^2\delta$$

Vernachlässigt man jetzt die höheren als ersten Potenzen der Grösse dt, da diese fast stets, nur sehr klein seyn wird, so ist:

$$R^2 = \Delta^2 - 2dt\{g(d-\delta) + (a-\alpha)\cdot f\cos^2\delta\}$$

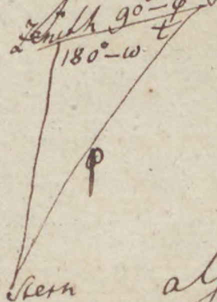
Da ~~Man~~ auch: $(d-\delta)^2 + (a-\alpha)^2\cos^2\delta = \Delta^2\sin^2\omega + \Delta^2\cos^2\omega$ also auch: $d - \delta = \Delta\sin\omega$ und: $(a-\alpha)\cos\delta = \Delta\cos\omega$ ist, so ist auch:

$$R^2 = \Delta^2 - 2dt\,\Delta\{g\sin\omega + f\cos\omega\cos\delta\}$$ also auch:

$$dt = \frac{\Delta^2 - R^2}{2\Delta(f\cos\omega\cos\delta + g\sin\omega)}$$

101 Bestimmung des Azimuthes eines Gegenstandes aus der Beobachtung des Polarsternes in irgend einem Puncte seines Parallelkreises.

Sey φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, p die Poldistanz des Sterns bey der Beobachtung, t der Stundenwinkel eben damahls, ferner ω das Azimuth des Sterns auch bey der Beobachtung, so wird man erst, die Richtung der Mittagslinie suchen müssen, was auf folgende Art geschieht:



Es ist:

$$+\operatorname{Ctg} p \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Ctg} \omega \operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} t \text{ also:}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{Sin.} t}{\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} t - \operatorname{Ctg} p \operatorname{Cos} \varphi} = \frac{\operatorname{Sin} t \operatorname{tg} p}{+\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{tg} p \operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} \varphi}$$

also auch:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\operatorname{Sin} t \operatorname{tg} p}{\operatorname{Cos} \varphi} \left\{ \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} p \operatorname{Cos} t} \right\}$$

Nun ist: $\operatorname{tg} p = p + \frac{1}{3} p^3 + \frac{2}{15} p^5 + \text{etc.}$ oder wenn man da hier p nur klein seyn kann, die höhern als ~~ersten~~ zweyten Potenzen von p vernachlässigt:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} \left\{ \frac{1}{1 - p \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Cos} t} \right\} = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} (1 + p \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Cos} t)$$

$$= -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} - \frac{p^2 \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} \text{ nähmlich:}$$

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} - \frac{p^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} 2t}{2 \operatorname{Cos} \varphi} \text{ nähmlich;}$$

$$\omega = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} - \frac{p^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} 2t}{2 \operatorname{Cos} \varphi}$$ in Theilen des Halbmessers, und zwar darum, da:

$$\omega = \operatorname{tg} \omega + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \omega + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \omega \text{ etc. ist.}$$

Also ist auch in ~~Theilen~~ Secunden:

$$\omega \operatorname{Sin} 1'' = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Sin} 1'' - \frac{p^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} 2t}{2 \operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Sin}^2 1'' \text{ oder:}$$

$$\omega = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} - \frac{p^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} 2t}{2 \operatorname{Cos} \varphi} . \operatorname{Sin.} 1''$$

Sey ~~t~~ der ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Stundenwinkel zu welchem das Azimuth ω gehört, so gehören zu den Stundenwinkeln:

$t+\vartheta$ die Azimuthe: $\omega + \partial\omega$

$t+\vartheta'$ $\omega + \partial'\omega$

$t+\vartheta''$ $\omega + \partial''\omega$

wo man $d\omega$, $d'\omega$, $d''\omega$, nach Taylors Theorem entwickelt, es ist nähmlich:

$$\partial\omega = \vartheta . \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\vartheta^2 . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{3.2}\vartheta^3 . \frac{d^3\omega}{dt^3} + \text{etc.}$$

$$\partial'\omega = \vartheta' . \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\vartheta'^2 . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{2.3} . \vartheta'^3 . \frac{d^3\omega}{dt^3} + \text{etc.}$$

$$\partial''\omega = \vartheta'' . \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\vartheta''^2 . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{2.3} . \vartheta''^3 \frac{d^3\omega}{dt^3} + \text{etc.}$$

Ist n die Anzahl der Beobachtungen, so ist des Azimuthes das zu dem Mittel aller Zeiten: + die Correction

$$\frac{t+\vartheta+t+\vartheta'+t+\vartheta''+\text{etc}}{n}$$ gehört, gleich:

$$\Delta\omega = \left(\frac{\vartheta+\vartheta'+\vartheta''+\text{etc}}{n}\right) . \frac{d\omega}{dt} + \left\{\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc.}}{2n}\right\} . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \text{etc}$$

Nimmt man nun aber auch für t ~~den~~ Stundenwinkel der für die Mitte der Beobachtungen gehört, so ist:

$\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta''' + \text{etc} = 0$; und daher wenn man die ~~übrig~~ höheren als zweyten Potenzen von $d\omega$ vernachläßigt:

$$\Delta\omega = \left\{\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc}}{2n}\right\} . \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Also auch das Azimuth A das für die ~~Mittel aller~~ Zeit

$t+\vartheta$ oder für den ~~Meridianwinkel~~ ~~t~~ gehört:

$$A = \omega + \Delta\omega = \omega + \frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc}}{n}\right\} . \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Nun ist:

$$\omega = -\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos}\varphi} - \frac{p^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Sin} 2t}{2\operatorname{Cos}\varphi} \operatorname{Sin} 1'' \text{ also:}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{p \operatorname{Cos} t}{\operatorname{Cos}\varphi} - \frac{p^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Cos} 2t}{\operatorname{Cos}\varphi} \operatorname{Sin} 1'' \text{ ferner:}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos}\varphi} + \frac{2p^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Sin} 2t}{\operatorname{Cos}\varphi} \operatorname{Sin} 1''$$

Sey nun: $\frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc}}{n}\right\} = \sum \frac{1}{2}\vartheta^2$; nähmlich da

$$\frac{1}{2}\vartheta^2 = 2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin 1''}$$ ist:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc.}}{n}\right\} = \Sigma\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin 1''}$$

oder endlich:

$$\frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2+\text{etc.}}{2n} = \frac{\Sigma\, 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin 1''.\, n} = m$$ also ist endlich, das gesuchte Azimuth des Sterns:

$$\mathfrak{A} = \omega + m\,\Delta\omega$$

Ist daher A das arithmetische Mittel aller Zahlen des Azimuthal Kreises und T das Mittel aller Uhrzeiten, so suche man mit der Differenz ϑ jeder einzelnen Uhrzeit vom Mittel die Grösse:

$$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sin 1''}$$ und nenne m das Mittel aller dieser Werthe. Dann verwandle man die Zeit T durch die bekannte Correction der Uhr in Sternzeit, so ist der Stundenwinkel für die Zeit der Mitte der Beobachtungen:

$$t = \text{Sternzeit} - \text{scheinb. Rectascension}$$

Dann suche man ω und $\Delta\omega$ aus den Gleichungen:

$$\omega = -\frac{p\sin t}{\cos\varphi} - \frac{p\,tg\varphi\sin 2t}{2\cos\varphi}.\sin 1''$$ und:

$$\Delta\omega = \frac{p\sin t}{\cos\varphi} + \frac{2p^2 tg\varphi \sin 2t}{\cos\varphi}.\sin 1''$$

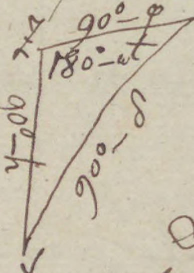
Dann ist das Azimuth des Sterns zur Zeit T:

$$\mathfrak{A} = \omega + m\,\Delta\omega$$

Hat man dann auch vor oder nach diesen Beobachtungen, auf den Gegenstand dessen Azimuth bestimmt werden soll, visirt, und hätte da der Azimuthalkreis des Theodoliten die Zahl B gezeigt, so ist das gesuchte Azimuth dieses Gegenstandes:

gleich: $\mathfrak{A} - (A - B)$

Bestimmung des Azimuthes irgend eines Gegenstandes aus der mit einem Sextanten gemessenen Distanz desselben von der Sonne in irgend einem Augenblicke.



Zuerst erhält man, wenn φ die Polhöhe, ferner δ die Declination und t der Stundenwinkel der Sonne im Augenblicke der gemessenen Distanz ist, die Höhe der Sonne h, durch folgende Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

oder wenn man $\cot\delta \cos t = \operatorname{tg} x$ setzt:

$$\sin h = \sin\varphi + \operatorname{tg} x \cos\varphi$$ nähmlich:

$$\frac{\sin h}{\sin\delta} = \frac{\sin(\varphi + x)}{\cos x}; \text{ oder } \frac{\sin\delta}{\cos x} \sin(\varphi + x) = \sin h$$

oder auch, wenn man $\cot\varphi \cos t = \operatorname{tg} x$ setzt:

$$\frac{\sin h}{\sin\varphi} = \sin\delta + \operatorname{tg} x \cos\delta = \frac{\sin(\delta + x)}{\cos x} = \frac{\sin\varphi}{\cos x} \sin(\delta + x)$$

Dann erhält man das Azimuth ω aus den Gleichungen:

$\sin t : \sin\omega = \cos h : \cos\delta$ oder:

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h} \text{ oder aber:}$$

$$\cancel{\operatorname{tg} h \cos\varphi - \cot t \sin\omega = \sin\varphi \cos\ldots}$$

$$\operatorname{tg}\delta \cos\varphi + \cot\omega \sin t = \cos t \sin\varphi \text{ daher auch:}$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin t}{\sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t} \cos\varphi}$$

Setzt man nun: $\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t} = \operatorname{tg} m$, so ist:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi - \operatorname{tg} m \cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg} t \cdot \cos m}{\sin(\varphi - m)}$$

und endlich aus dem Ausdrucke für $\sin\omega$ auch noch:

$$\cos h = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin\omega}$$

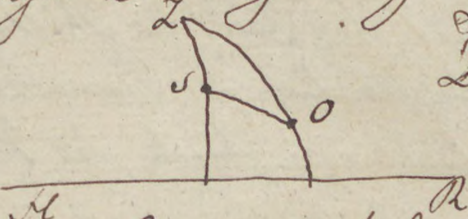
Hat man nun so die wahre Höhe der Sonne h

berechnet, so ist die scheinbare Höhe:

$$h' = h + \text{Refract.} - \text{Höhenparallaxe}$$

wo man die Refraction für die anfangs gesuchte, genäherte Größe h' nicht für h suchen muss.

Ist nun h'' die beobachtete Höhe des terrestrischen Objectes, so wie Δ die beobachtete Distanz der Sonne vom Objecte, so findet man die auf den Horizont reduzierte Distanz Δ' dieser beyden Körper; auf folgende Art.



Sey HR der Horizont, und Z das Zenith das Zenith, so ist in dem Dreyecke Zso:

$$Zs = 90^\circ - h'\,;\; Zo = 90^\circ - h''\,;\; so = \Delta \text{ und}$$
$$sZo = \Delta' \text{ also auch:}$$

$$\cos\Delta = \sin h' \sin h'' + \cos h' \cos h'' \cos\Delta'$$
$$= \sin h' \sin h'' + \cos h' \cos h'' - 2\cos h' \cos h'' \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta'$$
$$= \cos(h'-h'') - 2\cos h' \cos h'' \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta' \quad \text{oder:} \quad (1)$$
$$\cos\Delta = \sin h' \sin h'' - \cos h' \cos h'' + 2\cos h' \cos h'' \cos^2 \tfrac{1}{2}\Delta'$$
$$= 2\cos h' \cos h'' \cos^2 \tfrac{1}{2}\Delta' - \cos(h'+h'') \; --- \; (2)$$

also auch; aus (1)

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\cos(h'-h'') - \cos\Delta}{2\cos h' \cos h''} \quad \text{und aus (2)}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\cos\Delta + \cos(h'+h'')}{2\cos h' \cos h''} \quad \text{nähmlich:}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h'+h''+\Delta)\,\sin \tfrac{1}{2}(\Delta-h'+h'')}{\cos h' \cos h''} \quad \text{und}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\Delta+h+h'')\,\cos \tfrac{1}{2}(\Delta-h'-h'')}{\cos h' \cos h''}$$

Steht das terrestrische Object unter dem Horizonte, so ist h'' negativ, und ist $\tfrac{1}{2}\Delta$ nahe an 90° so wird man die letztere Formel wählen, um genaue Resultate zu erhalten, und hat man dann Δ' so ist das gesuchte Azimuth des irrdischen Objectes gleich:

$\omega \pm \Delta'$ + wenn die Sonne nach der Culmination
− aber wenn sie vor der Culmination beobachtet wurde.

103 Die Richtung der Mittagslinie mit dem Sextanten zu bestimmen.

Man errichte in der ~~...~~ vorläufig nur ohngefähr bekannten Richtung dieser Linie einige Signale, und beobachte jeden Vor und Nachmittag bey jedem dieser Signale einige Distanzen desselben von der Sonne, so gibt das Mittel aus jeden zwey gleichen Distanzen der Sonne von einem und demselben Signale, wovon eine Vormittag die andere nach Mittag beobachtet wurde, die Zeit des Mittages die aber wegen der Aenderung der Declination der Sonne eben so, wie die correspondirenden Höhenbeobachtungen, durch die Formel:

$$\frac{p'-p}{30}\left\{\frac{tg\,\varphi}{\sin s} - \cot g\, s.\ tg\, \frac{p'-p}{2}\right\}$$ corrigirt werden muss.

Eben so beobachte man auch an jedem dieser Tage einige correspondirende Höhen der Sonne, so erhält man ebenfalls die verbesserte Zeit des Mittages. Nun kann die aus den Distanzen gefundene verbesserte Zeit des Mittages nur dann mit jener aus den correspondirenden Höhen gefundenen übereinstimmen, wenn die Signale im Meridiane stehen, und man wird daher auch, aus den gegebenen Differenzen der aus den correspondirenden Höhen gefundenen und der aus den gemessenen Distanzen der Sonne von den Signalen folgenden Zeit des Mittages, die zu suchenden Abweichungen der Signale vom Meridiane ableiten können – da man die Entfernungen der Signale von einander unmittelbar messen kann.

Sey daher d die Distanz des ersten Signales vom zweyten, ~~in der auf den Meridian senkrechten Richtung~~, ferner T der aus correspondirenden Höhen gefundene wahre Mittag, ferner T' der Mittag des ersten, und T'' der Mittag des zweyten Signales, so hat man, wenn x die Entfernung des ersten und y jene des 2ten Signales vom Meridiane ist, folgende Proportionen:

$$T-T' : T'-T'' = x : d$$ und:

$$T-T'' : T'-T'' = y : d$$ nähmlich:

$$x = d.\frac{T-T'}{T'-T''} \quad ; \quad y = d.\frac{T-T''}{T'-T''}$$

wobey vorausgesetzt wird dass die Signale östlich vom Meridiane stehen, und dass das erste Signal westlicher als das zweyte steht, wäre diess nicht der Fall, so wäre:

$$x = d.\frac{T'-T}{T''-T'} \quad ; \quad y = d.\frac{T''-T}{T''-T'}$$

104 Bestimmung der Schiefe der Ekliptick.

Um diese ~~Zeit~~ zu erhalten, beobachte man um die Zeit des Sommer und ~~oder~~ Wintersolstitiums, sowohl vor als nach demselben die mittägige Zenithdistanz der Sonne. Sey dann h die mittägige Höhe derselben zur Zeit des Sommer und h' dieselbe Grösse zur Zeit des Wintersolstitiums, ferner φ die bekannte Polhöhe des Beobachtungsortes und δ die grösste Declination derselben, so ist:

$$h = 90° - \varphi + \delta$$ und:

$$h' = 90° - \varphi - \delta$$ alsoauch:

Die halbe Summe:

$$\frac{h'+h}{2} = 90° - \varphi = \text{der Äquatorshöhe.}$$

Und die halbe Differenz:

$$\frac{h-h'}{2} = \delta = e = \text{Schiefe der Ecliptick.}$$

Da aber das Solstitium selten so nahe am Mittage fällt, dass man die nächste Mittagshöhe zugleich für die Solstitialhöhe nehmen könnte, so muss diese Mittagshöhe erst auf die Solstitialhöhe reducirt werden.

Ist δ die beobachtete Declination und α die dazu gehörige ~~Ze~~ Rectascension der Sonne, ferner e die Schiefe der Ekliptick; so hat man die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{tg} e$$

und aus dieser Gleichung kann unsere Reduction genommen werden. Diese Gleichung hat ganz die Form einer Nepper, schen, deren Gestalt ganz allgemein ist:

$$\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}x = a\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}y$$

Für alle Gleichungen dieser Form hat man wenn $b = \frac{a-1}{a+1}$ ist:

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}y + b\operatorname{Sin}y + \tfrac{1}{2}b^2\operatorname{Sin}2y + \tfrac{1}{3}b^3\operatorname{Sin}3y + \text{etc.}$$

In unserem Falle ist:

$$\tfrac{1}{2}x = \delta,\ \tfrac{1}{2}y = e\ ;\ a = \operatorname{Sin}\alpha\ ;\ \text{also } b = -\frac{1-\operatorname{Sin}\alpha}{1+\operatorname{Sin}\alpha} = -\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(90^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}$$

Substituirt man nun in der un, endlichen Reihe die Werthe die x, y, b in unserem Falle haben, indem man noch:

$\operatorname{tg}.\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \vartheta$ setzt, so ist:

$$\delta = e - \vartheta^2\operatorname{Sin}2e + \tfrac{1}{2}\vartheta^4\operatorname{Sin}4e - \tfrac{1}{3}\vartheta^6\operatorname{Sin}6e + \text{etc.}$$

also auch:

$$e - \delta = \vartheta^2\operatorname{Sin}2e - \tfrac{1}{2}\vartheta^4\operatorname{Sin}4e + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\operatorname{Sin}6e - \tfrac{1}{4}\vartheta^8\operatorname{Sin}8e + \text{etc.}$$

oder auch da:

$$\operatorname{tg}e = \operatorname{tg}\delta\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}\ ;\ \text{also auch:}$$

$$b = \frac{\frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}-1}{\frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}+1} = \frac{1-\operatorname{Sin}\alpha}{1+\operatorname{Sin}\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \vartheta^2 \text{ ist:}$$

~~$e = \vartheta^2\operatorname{Sin}2\delta$~~

$$e = \delta + \vartheta^2\operatorname{Sin}2\delta + \tfrac{1}{2}\vartheta^4\operatorname{Sin}4\delta + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\operatorname{Sin}6\delta + \tfrac{1}{4}\vartheta^8\operatorname{Sin}8\delta + \text{etc.}$$

also:

$$e - \delta = \vartheta^2\operatorname{Sin}^2 2\delta + \tfrac{1}{2}\vartheta^4\operatorname{Sin}4\delta + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\operatorname{Sin}6\delta + \tfrac{1}{4}\vartheta^8\operatorname{Sin}8\delta$$

Setzt man dieses $\varepsilon - \delta' = dz$, so hat man die wahre Schiefe der Ekliptik zur Zeit des Sommersolstitiums:

$$\varepsilon' = \varphi - Z + dz$$ und zur Zeit des Wintersolstitiums:

$$\varepsilon' = Z + dz - \varphi,$$

Dadurch erhält man so viele Werthe von ε' als Beobachtungstage sind, nimmt man daher das Mittel aus allen diesen, so erhält man sehr genaue Resultate.

Die scheinbare Schiefe ist:

$$\varepsilon'' = \varepsilon' - 8''.98 \cos \Omega .$$

---

105 Ueber die Finsternisse.

Diese ~~[illegible]~~ Theorie zerfällt durch ihre Natur in zwey Theile, in die Theorie der wahren, und in jene der scheinbaren Finsternisse.

I. Wahre Finsternisse.

Wahre Finsternisse sind die Mondfinsternisse. Ihre Vorausbestimmung ist leichter als jene der scheinbaren Finsternisse, da sie von allen Orten aus welchen der Mond ueberhaupt sichtbar ist, zu gleicher Zeit gesehen werden.

Um den Vortrag abzukürzen, werden wir zuerst angemesse Bezeichnungen festsetzen, die wir durch die ganze Abhandlung beybehalten werden.

Sey also für den verfinsterten Körper oder den Mond:

a, d, die wahre Rectascension und Declination

r, p, m, seine Entfernung von der Erde, (nähmlich seines Mittelpunctes) die Horizontalparallaxe des Aequators, und sein scheinbarer Halbmesser.

Für die Sonne seyen dieselben Grössen, gleich: α, δ, ϱ, π, μ

Die stündlichen Veränderungen dieser Grössen, sollen durch:

da, dd, dα, dδ ausgedrückt werden.

Endlich sey φ die Polhöhe und s der Stundenwinkel der Sonne für den Beobachtungsort.

Fig (A)

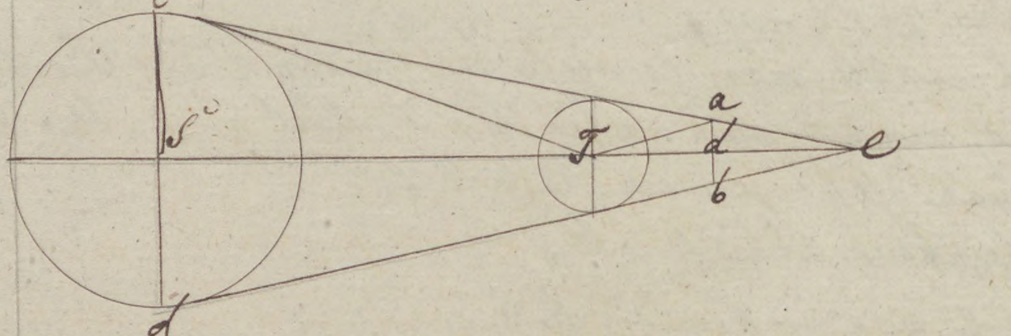
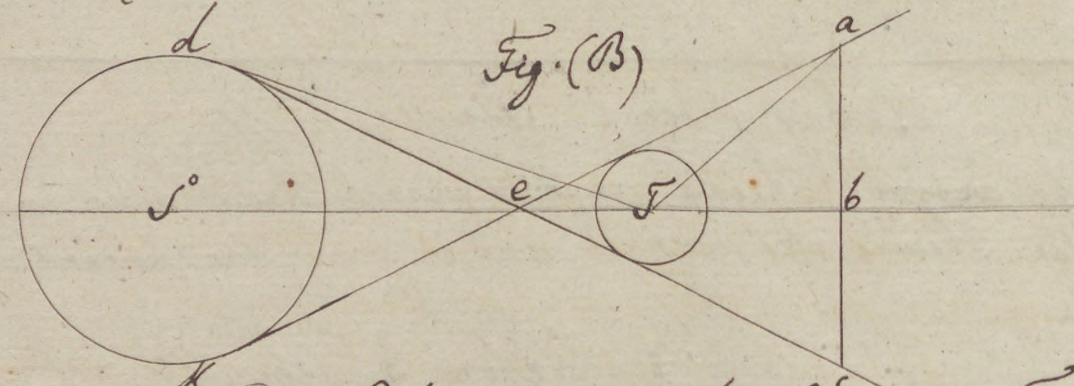


Fig. (B)



Sey in S der Mittelpunct der Sonne, in T ~~oder~~ der Mittelpunct der Erde, und in d der Mittelpunct des Mondes, so ist cde Fig (A) der volle, und ace Fig (B) der Halbschatten der Erde.

Denkt man sich an dem Orte wo der Schatten den Mond trifft einen senkrechten ~~Eben~~ Durchschnitt, auf den Schatten und durch den Mittelpunct des Mondes geführt, so ist aTd ~~Fig (A)~~ der scheinbare Halbmesser dieser Durchschnittsebene für den vollen, und aTb Fig (B) für den Halbschatten. Diese zwey Winkel aTd = P und aTb = P' müssen vorerst bestimmt werden.

aTd wird aus Fig (A) bestimmt. Man kennt da die Winkel:

caT = p, cTS = ~~ft~~, und Tce = π.

Es ist aber: ~~caT =~~

$caT = aTd + aeT$ und:

$cTS = Tce + Tec$ Nun ist aber: $aeT = Tec$ also:

$caT - cTS = aTd - Tce$. Daraus folgt:

$aTd = caT + Tce - cTS$ nähmlich:

$$P = p + \pi - \mu$$

Den Winkel aTb = dem scheinbaren Halbmesser des Halbschattens, bestimmt man aus der Figur: (B)

Man kennt da; die Winkel: $Tae = p$; $STd = \mu$, und: $Tdc = \pi$

Nun ist: $aTb = aeT + Tae$ Nun ist: $Tea = Sek = Sed$

folglich: $aTb = Sed + Tae$ Ferner ist: $Sed = edT + dTe$ also:

auch: $aTb = edT + dTe + Tae$ oder endlich:

$$P' = \pi + \mu + p$$

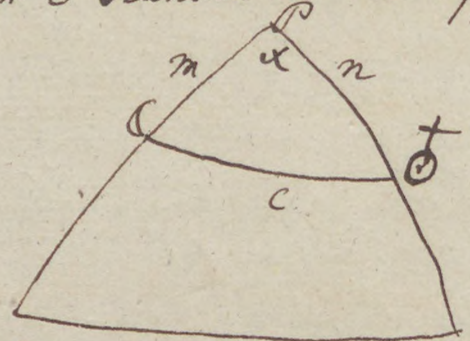
Wenn C des verfinsterten, L des leuchtenden und O des dunklen Schatten werfenden Körpers Ort sind, so hat man stets:

$\overset{\circ}{C} + \overset{\circ}{L}O = O\overset{\circ}{C} \pm O\overset{\circ}{L}$ + für den vollen und − für den Halbschatten. Diess ist ein technischer und sehr willkommener Kunstgriff in der Praxis und heisst soviel:

Der ~~Schatten~~ Schattenwerfende Körper gesehen aus dem verfinsterten, mehr dem Schattenwerfenden Körper gesehen aus dem leuchtenden, ist gleich dem verfinsterten Körper gesehen aus dem Schatten werfenden, mehr oder weniger dem leuchtenden Körper gesehen aus dem dunklen. ~~Da~~

Diese einfache Combination der vier Buchstaben leistet in der Praxis grossen Nutzen, indem sie dem Gedächtnisse zu Hülfe kömmt, und auf eine sehr einfache Weise, bey der ausübenden Rechnung das in Erinnerung bringt, was genaue Theorien streng erwiesen haben.

Zur Zeit der Opposition des Mondes nun seyen a, d seine ~~schein~~, wahre Rectascension und Declination, ferner α, δ jene der Sonne. Nun sey aber t Stunden vor der Opposition



der Mond in ☾ und der Erdschatten in ♁ (siehe die Figur) um den Bogen ☾♁ $= c$ von einander entfernt. ~~Sind~~
Man hat daher in dem ~~[illegible]~~ sphärischen Dreyecke P☾♁ folgende Gleichung:

$$\text{Cos}\,☾♁ = \text{Cos}\,P☾\,\text{Cos}\,P♁ + \text{Sin}\,P☾\,\text{Sin}\,P♁\,\text{Cos}\,☾P♁$$

Nun ist wenn man auf die eingeführten Bezeichnungen sich erinnert:

$$☾♁ = c$$
$$P☾ = 90° - (d - t\,dd)$$
$$P♁ = 90° - (\delta - t\,d\delta)$$
$$☾P♁ = (a - t\,da) - (\alpha - t\,d\alpha) = (a-\alpha) - t(da - d\alpha)$$

Substituirt man nun für die hier bestimmten Grössen ihre Werthe in der obigen Gleichung, so hat man:

$$\text{Cos}\,c = \text{Sin}(d - t\,dd)\,\text{Sin}(\delta - t\,d\delta) + \text{Cos}(d - t\,dd)\,\text{Cos}(\delta - t\,d\delta)\,\text{Cos}\{(a-\alpha) - t(dd - d\delta)\}$$

Oder da $\text{Cos}\,b = 1 - 2\,\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} b$ ist:

$$\text{Cos}\,c = \text{Sin}(d - t\,dd)\,\text{Sin}(\delta - t\,d\delta) + \text{Cos}(d - t\,dd)\,\text{Cos}(\delta - t\,d\delta) - 2\,\text{Cos}(d - t\,dd)\,\text{Cos}(\delta - t\,d\delta) \times \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\{(a-\alpha) - t(dd - d\delta)\}$$

nähmlich:

$$\text{Cos}\,c = \text{Cos}\{(d-\delta) - t(dd - d\delta)\} - 2\,\text{Cos}(d - t\,dd)\,\text{Cos}(\delta - t\,d\delta)\,\text{Sin}^2 \left\{\frac{(a-\alpha) - t(dd - d\delta)}{2}\right\}$$

oder ~~für~~ $\text{Cos}\,c = 1 - 2\,\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} c$ gesetzt, gibt:

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}c = \cos\{(d-\delta)-t(dd-d\delta)\} - 2\cos(d-tdd)\cos(\delta+d\delta)\sin^2\left\{\frac{(a-\alpha)-t(da-d\alpha)}{2}\right\}$$

Nun wollen wir alle Glieder dieser Gleichung zu entwickeln suchen:

Statt: $1-2\sin^2\frac{1}{2}c$ kann man da diese Grösse nur klein seyn kann, statt dem Sinus den Bogen setzen, wodurch man erhält:

$$\cos c = 1-\tfrac{1}{2}c^2$$

Ferner ist:

$$\cos\{(d-\delta)-t(dd-d\delta)\} = \cos(d-\delta)\cos t(dd-d\delta) + \sin(d-\delta)\sin t(dd-d\delta)$$
$$= \left(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(d-\delta)\right)\{1-2\sin^2 t(dd-d\delta)\} + \sin(d-\delta)\sin t(dd-d\delta)$$

Da nun $(d-\delta)^2$ sowohl auch $(dd-d\delta)^2$ nur gering seyn können, so ist es hier erlaubt, für die Sinusse die Bogen zu setzen, wodurch man erhält:

$$\cos\{(d-\delta)-t(dd-d\delta)\} = \left\{1-\tfrac{1}{2}(d-\delta)^2\right\}\left\{1-\tfrac{1}{2}t^2(dd-d\delta)^2\right\} + (d-\delta)t(dd-d\delta)$$

Weiter ist:

$$\cos(d-tdd) = \cos d\cos tdd + \sin d\sin tdd$$
$$= \cos d(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}tdd) + \sin d\sin tdd$$ oder aus angeführter

Ursache: $$= \cos d(1-\tfrac{1}{2}t^2dd^2) + tdd\sin d$$
$$= \cos d - \tfrac{1}{2}t^2\cos d\, dd^2 + t\sin d\, dd$$

Ferner:

$$\cos(\delta-td\delta) = \cos\delta - \tfrac{1}{2}t^2\cos\delta\, d\delta^2 + t\sin\delta\, d\delta$$ auf eben dieselbe Art.

also auch:

$$\cos(d-tdd)\cos(\delta-td\delta) = \cos d\cos\delta - \tfrac{1}{2}t^2\cos d\cos\delta\, dd^2 + t\sin d\cos\delta\, dd$$
$$- \tfrac{1}{2}t^2\cos d\cos\delta\, d\delta^2 + \tfrac{1}{2}t^4\cos d\cos\delta\, dd^2 d\delta^2 - \tfrac{1}{2}t^3\sin d\cos\delta\,.\,d\delta^2.\,dd$$
$$+ t\cos d\sin\delta\, d\delta - \tfrac{1}{2}t^3\cos d\sin\delta\, d\delta\, dd^2$$
$$+ t^2\sin d\sin\delta\, dd.\,d\delta$$

Die Grössen c, tdd, $td\delta$, $a-\alpha$, $t(da-d\alpha)$ sind aber so klein, da man t kurz vor der Opposition wählt, dass ~~die~~ höheren als zweyten Potenzen derselben bereits ohne Fehler unberücksichtigt bleiben können, wodurch man erhält:

$$\mathrm{Cos}(d-t\,dd)\,\mathrm{Cos}(\delta-t\,d\delta)=\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta-\tfrac{1}{2}t^2dd^2\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta+t\,dd\,\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta$$
$$-\tfrac{1}{2}t^2d\delta^2\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta+t\,d\delta\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,d$$

Endlich ist:

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\{(a-\alpha)-t(da-d\alpha)\}=\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}t(da-d\alpha)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}t(da-d\alpha)\times\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)$$
$$=\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}t(da-d\alpha)\cdot\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a)$$
$$=\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}t(da-d\alpha)=\tfrac{1}{4}t^2(da-d\alpha)^2$$

also endlich das letzte Glied:

$$2\,\mathrm{Cos}(d-t\,dd)\,\mathrm{Cos}(\delta-t\,d\delta)\,.\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\{(a-\alpha)-t(da-d\alpha)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,t^2(da-d\alpha)^2$$

wenn man daher alle diese Werthe für die entsprechenden Größen in der entsprechenden Gleichung substituirt, so ist:

$$1-\tfrac{1}{2}c^2=\{1-\tfrac{1}{2}(d-\delta)^2\}\{1-\tfrac{1}{2}t^2(dd-d\delta)^2\}+t(d-\delta)(dd-d\delta)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,t^2(da-d\alpha)^2$$
$$=1-\tfrac{1}{2}(d-\delta)^2-\tfrac{1}{2}t^2(dd-d\delta)^2+t(d-\delta)(dd-d\delta)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,t^2(da-d\alpha)^2$$

nähmlich:

$$\tfrac{1}{2}c^2=\tfrac{1}{2}(d-\delta)^2+\tfrac{1}{2}t^2(dd-d\delta)^2-t(d-\delta)(dd-d\delta)+\tfrac{1}{2}t^2\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(da-d\alpha)^2$$

oder:

$$c^2=(d-\delta)^2+t^2(dd-d\delta)^2-2t(d-\delta)(dd-d\delta)+t^2\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(da-d\alpha)^2$$
$$=\{(d-\delta)-t(dd-d\delta)\}^2+t^2\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(da-d\alpha)^2$$

Nun ist:

$$\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta=\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}(d-\delta)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}(d+\delta)$$ also auch:

$$\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,t^2(da-d\alpha)^2=t^2(da-d\alpha)^2\{\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}(d+\delta)+\tfrac{1}{2}\}$$ weil $d-\delta$ nur eine kleine Größe, also sein Cosinus nahe $=1$ seyn wird.

Also ist auch:

$$\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\delta\,t^2(da-d\alpha)^2=\tfrac{1}{2}t^2(da-d\alpha)^2\{1+\mathrm{Cos}(d+\delta)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}t^2(da-d\alpha)^2\,2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(d+\delta)$$
$$=t^2(da-d\alpha)^2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(d+\delta)$$ daher auch:

$$c^2 = \left\{(d-\delta) - t(dd-d\delta)\right\}^2 + t^2(da-d\alpha)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(d+\delta)$$

Dieß ist unser Ausdruck, um ihn einfacher zu machen, ~~setze~~ nehme man folgende Hülfsgrössen auf, man setze:

$$tgn = \frac{dd-d\delta}{(da-d\alpha)\cos\frac{1}{2}(d+\delta)}$$

$$e = (d-\delta).\cos n \quad \text{und}$$

$$h = \frac{\sin n}{dd-d\delta} = \frac{\cos n}{(da-d\alpha)\cos\frac{1}{2}(d+\delta)} = \frac{1}{\sqrt{(da-d\alpha)^2\cos^2\frac{1}{2}(d+\delta)+(dd-d\delta)^2}}$$

So hat man:

$$d-\delta = \frac{e}{\cos n}$$

$$dd-d\delta = \frac{\sin n}{h} \quad \text{und:}$$

$$(da-d\alpha).\cos\tfrac{1}{2}(d+\delta) = \frac{dd-d\delta}{tgn} = \frac{\cos n}{h}$$

Substituirt man daher diese Werthe in unserem Ausdrucke, so ist:

$$c^2 = \left\{\frac{e}{\cos n} - t\frac{\sin n}{h}\right\}^2 + \frac{t^2\cos^2 n}{h^2} \quad \text{oder:}$$

$$c^2 = \frac{e^2}{\cos^2 n} - \frac{2et.tgn}{h} + \frac{t^2\sin^2 n}{h^2} + \frac{t^2\cos^2 n}{h^2}$$

$$= \frac{e^2}{\cos^2 n} - \frac{2et.tgn}{h} + \frac{t^2}{h^2} \quad \text{oder:}$$

$$h^2c^2 = \frac{e^2h^2}{\cos^2 n} - 2eht.tgn + t^2 \quad \text{daß heißt:}$$

$$t^2 - 2ehtgn.t = h^2\left(c^2 - \frac{e^2}{\cos^2 n}\right) \quad \text{oder:}$$

$$(t-ehtgn)^2 = h^2\left(c^2 - \frac{e^2}{\cos^2 n} + e^2tg^2n\right) = h^2\left(c^2 - \frac{e^2}{\cos^2 n}(1-\sin^2 n)\right)$$

$$= h^2(c^2-e^2) \quad \text{oder ~~aber~~:}$$

$$t - ehtgn = \pm h\sqrt{c^2-e^2} \quad \text{oder endlich:}$$

$$t = ehtgn \pm h\sqrt{c^2-e^2}$$

Die Zeit, welcher die dem Abstande c entsprechende Phase entspricht, ist:

(X) .... $T - t = T - e\,h\,tg\,n \mp h\sqrt{c^2 - e^2}$ und zwar für den Anfang der Phase ist:

$$T - t = T - e\,h\,tg\,n - h\sqrt{c^2 - e^2}$$ und für das Ende

derselben: $T - t = T - e\,h\,tg\,n + h\sqrt{c^2 - e^2}$ also für die Mitte derselben, gleich dem Mittel zwischen Anfang und Ende gleich:

$$T - t = T - e\,h\,tg\,n$$ oder für e seinen Werth

gesetzt: $T - t = T - (d - \delta) . h . \mathrm{Sin}\, n$

Setzt man: $\frac{e}{c} = \mathrm{Cos}\,\omega$ also: $e = c\,\mathrm{Cos}\,\omega$ in der Gleichung (X), so ist:

$$T - t = T - e\,h\,tg\,n \mp h\sqrt{c^2 - c^2 \mathrm{Cos}^2 \omega}$$
$$= T - e\,h\,tg\,n \mp hc\sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 \omega}$$
$$= T - e\,h\,tg\,n \mp hc\,\mathrm{Sin}\,\omega$$
$$= T - e\,h\,tg\,n \mp he\,tg\,\omega$$ wenn man $\sqrt{c^2 - e^2} = e^2 tg^2 \omega$ setzt.

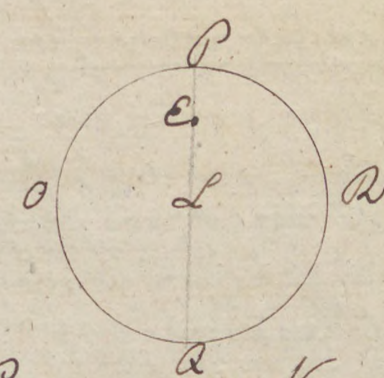
Diese Gleichung gibt die Zeit: des Anfanges und Endes einer partiellen Finsterniss für $c = P + m$

" " " " " totalen " " " $c = P - m$

" " " " " einer k zölligen " " " " $c = \left(P - \frac{K}{6}\right) m$

Man pflegt nähmlich den ganzen scheinbaren Durchmesser des Mondes in 12 Theile die man Zolle nennt, zu theilen, und dann die Grösse der Finsterniss in solchen ~~Finsternissen~~ Zollen anzugeben. Um die Distanz des Mittelpunctes des Schattens von jenem des Mondes bey einer k zölligen Finsterniss zu bestimmen, sey PQR der Körper, und L der Mittelpunct des Mondes, so wie C jener des Erdschattens

so ist:



$$2m : 12 = P + m - c : K \quad \text{also:}$$
$$2mK = 12(P + m - c) \quad \text{oder:}$$
$$mK = 6(P + m - c) \quad \text{daß heißt:}$$
$$mK = 6P + 6m - 6c \quad \text{nähmlich:}$$
$$6c = 6(P + m) - mK \quad \text{oder:}$$
$$c = P + m - \tfrac{1}{6} mK \quad \text{daß heißt endlich:}$$
$$c = P + m\left(1 - \tfrac{1}{6}K\right)$$

~~Für~~ Also ist für den vollen Schatten:

Für eine partiale Finsterniß: $c = p + \pi - \mu + m$
" " totale " " " : $c = p + \pi - \mu - m$
" " Kzöllige " " " : $c = p + \pi - \mu - m\left(1 - \tfrac{1}{6}K\right)$

Um mehr Uebereinstimmung unter den Beobachtungen zu erhalten, pflegt man die Größe P um ihren 60ten Theil zu vermehren, so daß man also für den vollen Schatten hat:

Für eine partiale Finsterniß: $c = \frac{61}{60}(p + \pi - \mu) + m$
" " totale " " " : $c = \frac{61}{60}(p + \pi - \mu) - m$
" " ~~Kzöllige~~ " " " : $c = \frac{61}{60}(p + \pi - \mu) - m\left(1 - \tfrac{1}{6}K\right)$

Und für den Halbschatten:

Für eine partiale Finsterniß: $c = \frac{61}{60}(p + \pi + \mu) + m$
" " totale " " " : $c = \frac{61}{60}(p + \pi + \mu) - m$
" " Kzöllige " " " : $c = \frac{61}{60}(p + \pi + \mu) - m\left(1 - \tfrac{1}{6}K\right)$

II) Allgemeine Sonnenfinsternisse.

Wenn man blos sucht, wann eine scheinbare Finsterniss für die Erde überhaupt anfängt und endet, ohne diese Thatsachen für bestimmte Orte derselben zu berechnen, so ist hier derselbe Fall, wie bey wahren Finsternissen, und es werden auch in diesem Falle, die in der vorigen Abhandlung entwickelten Ausdrücke gelten, nur nach einer kleinen Veränderung.

Behalten n, e, h, die ihnen in der vorigen Abhandlung beygelegten Werthe, nähmlich n die Neigung der relativen Mondsbahn und e die kürzeste Distanz, so ist.

Die Zeit der Mitte der Finsterniss: $t = T \mp eh\,tg\,n$.

Und die Zeit welche der dem Abstande c entsprechenden Phase zukömmt ist:

$$T-t = T - eh\,tg\,n \mp h\sqrt{c^2-e^2}$$

Diese Gleichung gibt den Anfang und das Ende:

Einer partialen Finsterniss für $c = P + \mu$

" totalen " " " " $c = P \pm (m-\mu)$

" ringförmigen " " " " $c = P \pm (m-\mu)$

" centralen " " " " $c = p - \pi$

Denn nach unserer mechanischen Regel haben wir:

$CO + LO = OC + OL$ für den vollen Schatten

und $CO + LO = OC - OL$ für den Halbschatten

nähmlich nach unseren Bezeichnungen:

$m + p' = P + \mu'$ also:

$m + p' = P' - \mu'$

$P = m - \mu' + p'$ und

$P' = m + \mu' + p'$

μ' ist der aus dem Monde gesehene scheinbare Halbmesser der Sonne, und p' wieder ist die Horizontalparallaxe des Mondes gesehen aus der Sonne.

Es ist aber; wenn: m' den wahren Halbmesser des Mon-des bezeichnet; und ϱ wieder die Entfernung der Erde von der Sonne heisst:

$$p' = \frac{m'}{\varrho - r} \;;\; \pi = \frac{R}{\varrho} \;;\; \frac{p'}{\pi} = \frac{\varrho m'}{(\varrho - r) R}, \cancel{p'}$$

$$p' = \pi \cdot \frac{m'}{R} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r}$$

Ferner ist:

$$p = \frac{R}{r} \;;\; m = \frac{m'}{r} \text{ daher: } \frac{p}{m} = \frac{R}{m'} \text{ und:}$$

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{R}$$

Nun ist:

$$p' = \pi \cdot \frac{m'}{R} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} = \pi \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} \text{ es ist ferner:}$$

$$\pi = \frac{R}{\varrho} \;;\; p = \frac{R}{r} \;;\; \varrho = \frac{R}{\pi} \;;\; r = \frac{R}{p}$$

Also auch:

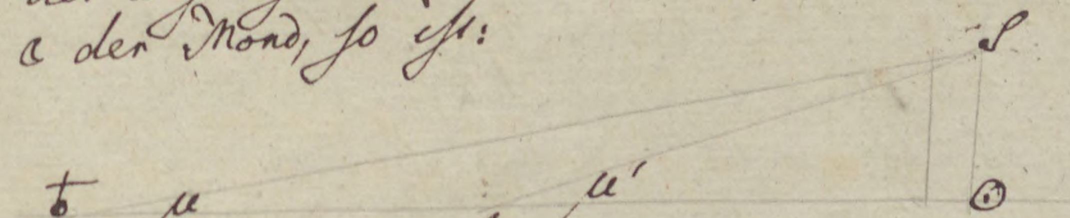
$$p' = \pi \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{\frac{R}{\pi}}{\frac{R}{\pi} - \frac{R}{p}} = \pi \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{p}}$$

$$= \frac{m}{p} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{p}} = \frac{m}{p} \cdot \frac{p\pi}{p - \pi} \text{ oder end-}$$

lich:

$$p' = \frac{m\pi}{p - \pi}$$

Nun sey in ♁ die Erde, in ⊙ der Mittelpunct, und in S der äusserste Punct der Oberfläche der Sonne, endlich in ☾ der Mond, so ist:



$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{S\odot}{♁\odot} = \frac{S\odot}{\varrho} \text{ dass heisst da } \mu \text{ nur klein ist: } \mu = \frac{S\odot}{\varrho}$$

ferner ist:

$$\mathrm{tg}\,\mu' = \frac{S\odot}{☾\odot} = \frac{S\odot}{\varrho - r} \text{ dass heisst } - - - - - \mu' = \frac{S\odot}{\varrho - r}$$

Also:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\varrho}{\varrho - r} = \frac{\frac{R}{\pi}}{\frac{R}{\pi} - \frac{R}{p}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-\pi}$$

daß heißt:

$$\mu' = \mu \cdot \frac{p}{p-\pi}$$

Folglich:

$$P = m + m \cdot \frac{\pi}{p-\pi} - \mu \cdot \frac{p}{p-\pi}$$

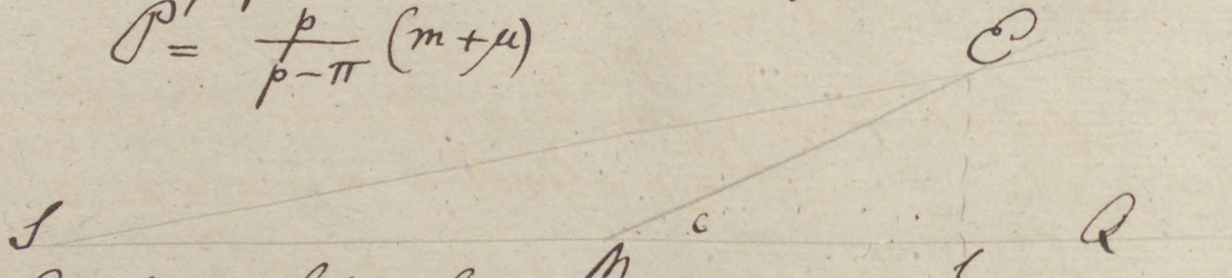
$$= m\left(1 + \frac{\pi}{p-\pi}\right) - \mu \cdot \frac{p}{p-\pi}$$

$$= m\left(\frac{p+\pi-\pi}{p-\pi}\right) - \mu \cdot \frac{p}{p-\pi} = m\frac{p}{p-\pi} - \mu \cdot \frac{p}{p-\pi}$$

Daß heißt endlich:

$$P = \frac{p}{p-\pi}(m-\mu)$$ Und eben so hat man:

$$P' = \frac{p}{p-\pi}(m+\mu)$$



Nun sey in S die Sonne, in M der Mond und in E die Erde. Es ist:

$$EMQ = ESM + MES$$

Es ist aber, wenn man aus E die senkrechte El auf SQ herabläßt:

$$El = EM \sin EMQ = ES \sin ESM$$ daß heißt:

$$r \sin. c = \varrho \sin(E\cancel{SM})$$

Es ist aber nach:

$$EMQ = SEM + MES:$$

$$c = E + S$$ ~~und da man hat.~~

$\cancel{ESM = 180° \; 180 + c - E}$ oder: $S = c - E$ so ist auch:

$$r \sin c = \varrho \sin(c - E)$$ oder:

$\frac{R}{p}\sin c = \frac{R}{\pi}\sin(c-E)$ und weil sowohl c als $c-E$ sehr klein sind:

$$\frac{Rc}{p} = \frac{R(c-E)}{\pi}$$ nähmlich: $c\pi = p(c-E)$

dass heisst:

$$c\pi = pc - pE$$ oder:

$$E = c\cdot\frac{p-\pi}{p}$$

Für den Anfang und das Ende der partiellen Finsterniss ist:

$$E = c\cdot\frac{p-\pi}{p} = (P+p)\cdot\frac{p-\pi}{p} = \frac{P(p-\pi)}{p} + p - \pi$$

$$= (m+\mu) + p - \pi$$

Für den Anfang und das Ende der centralen: ist: $c = p$ also:

$$E = p - \pi.$$

Für den Anfang und das Ende der Totalen ist: $c = P+p$, also:

$$E = (P+p)\frac{p-\pi}{p} = m-\mu + p-\pi$$

Für den Anfang und das Ende der Ringförmigen endlich ist:

$$c = P+p \text{ also } E = m-\mu+p-\pi$$

Ist in C der Mittelpunct der Sonne und im a der Mittelpunct des Mondes, so findet man für den Anfang und das Ende einer k zölligen Verfinsterung die Distanz Ca ~~der~~ der Mittelpuncte auf folgende Art:

Es ist nach der Construction:

$ag = gf$ und es ist auch:

$bg = bg$ also:

$ab = gf$ ferner ist:

$ad = dg$ also:

$$bd = af = Cf - Ca = m+\mu+p-\pi-E^{\circ}$$

dass heisst: $k = \frac{6}{\mu}(m+\mu+p-\pi-E)$

$$\frac{\mu K}{6} - m - \mu - p + \pi = -E^{0}$$

$$E = \mu\left(1 - \frac{K}{6}\right) + m + p - \pi \quad *$$

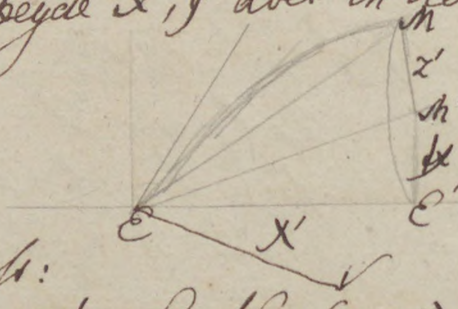
III Scheinbare Finsternisse

für irgend einen gegebenen Ort der Erde.

Da man bey der Untersuchung, wie eine Sonnenfinsterniss oder eine Sternbedeckung vom Monde an einem gegebenen Orte der Erde erscheint, auf die Parallaxe Rücksicht nehmen muss, so müssen wir hier vorerst einige Betrachtungen vorausschicken, um die Aufgabe auflösen zu können.

I. Es werde der Mittelpunct des Mondes gegen jenen der Erde durch drey rechtwinkelige Coordinaten bestimmt, x, y, z, von denen x die Mittelpuncte der Sonne und der Erde verbinden, und y dem Aequator parallel seyn soll.

Um diese Coordinaten zu bestimmen, bestimme man die Lage des Mittelpunctes des Mondes, gegen jenen der Erde erst durch drey andere senkrechte Coordinaten x', y', z', von denen x' in der Durchschnittslinie des Declinationskreises des Mondes mit dem Aequator, beyde x', y' aber in der Ebene des Aequators liegen,



So ist:

$$x' = r \cos d \cos(a - \alpha)$$
$$y' = r \cos d \sin(a - \alpha)$$
$$z' = r \sin d$$

Denkt man sich nun durch die Axe der x' eine andere Ebene welche gegen den Aequator unter dem Winkel δ = Decl. der ☉ geneigt ist, so werden die Coordinaten, welche die Lage des Mondes gegen die Erde in Beziehung auf jene Ebene bestimmen, dieselben mit den Coordinaten x, y, z seyn.

Es ist ~~ist~~ aber nach unserer allgemeinen Regel, wenn man zwey verschiedene unter irgend einem Winkel gegen einander geneigte Coordinatensysteme hat, z. B. in unserem Falle:

$$x = x'\cos X'X + y'\cos X'Y + z'\cos X'Z$$
$$y = x'\cos Y'X + y'\cos Y'Y + z'\cos Y'Z$$
$$z = x'\cos Z'X + y'\cos Z'Y + z'\cos Z'Z$$

Es ist aber (wenn man die No. nachschlägt wo dieser Gegenstand allgemein behandelt wird); ~~und~~ $\varphi = \psi = 90°$, ferner $\theta = \delta$ setzt:

$$\cos X'X = \cos\delta \;;\; \cos X'Y = 0 \;;\; \cos X'Z = -\sin\delta$$
$$\cos Y'X = 0 \;;\; \cos Y'Y = 1 \;;\; \cos Y'Z = +0 \quad \text{also auch:}$$
$$\cos Z'X = \sin\delta \;;\; \cos Z'Y = 0 \;;\; \cos Z'Z = \cos\delta$$

$$x^{*} = x'\cos\delta + z\sin\delta \qquad = x'\cos\delta + z\sin\delta$$
$$y = y' \qquad = y'$$
$$z = -x'\sin\delta + z'\cos\delta \qquad = z'\cos\delta - x'\sin\delta$$

Daher auch, wenn man für x', y', z' ~~ihre~~ bekannten Werthe setzt:

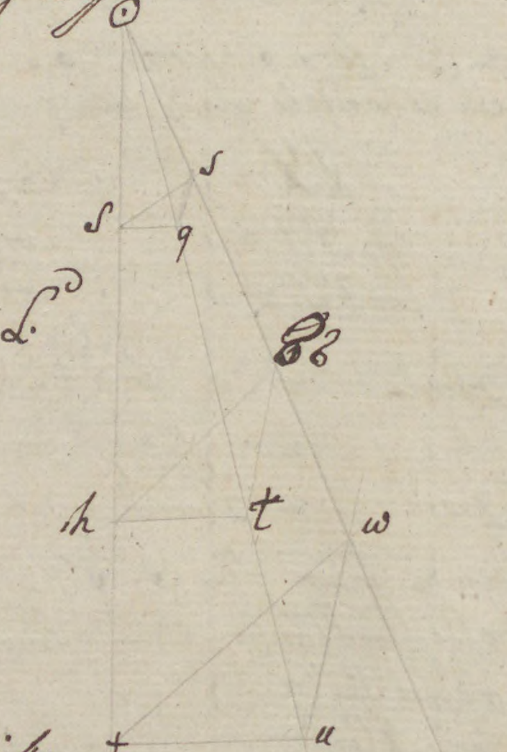
$$x = r\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha) - r\sin d\sin\delta$$
$$y = r\cos d\sin(a-\alpha)$$
$$z = r\sin d\cos\delta - r\cos d\sin\delta\cos(a-\alpha) \quad \text{nähmlich:}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\{\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha) + \sin d\sin\delta\} \\ y &= r\cos d\sin(a-\alpha) \\ z &= r\{\sin d\cos\delta - \cos d\sin\delta\cos(a-\alpha)\} \end{aligned}\right\} \;---\; (2)$$

Auf ähnliche Weise wird man nun auch die Lage des Beobachters gegen ~~den~~ Mittelpunct der Erde durch solche Coordinaten wie ~~X, Y, Z~~ x, y, z bestimmen, ist dann φ die Polhöhe und s gleich Rectasc. d. Zeniths $-\alpha$ = dem Stundenwinkel, so ist in den Gleichungen (2): $x, y, z = X, Y, Z$. $r = R$, $d = \varphi$; $\delta = \delta$; a = Rectasc. des Zenithes also auch:

$$X = R(\cos\varphi\cos\delta\cos s + \sin\varphi\sin\delta)$$
$$Y = R\cos\varphi\sin s$$
$$Z = R(\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos s)$$

(II) Wir wollen nun durch den Mittelpunct des Mondes eine Ebene legen, die senkrecht auf der Axe der X und parallel mit der Axe der y laufen soll. Den Punct dieser Ebene in welchem sich der Mond befindet, wollen wir mit L, jenen wo die Linie der x diese Ebene trifft mit S, endlich den, in welchem die vom Beobachter zur Sonne gezogene Linie die Ebene trifft, mit s bezeichnen



In dieser Figur ist: $\hbar$

$Sq = v$; $ht = Y$; $\hbar S = x$; $\hbar\odot = \rho$

$sq = \zeta$; $tb = Z$; $\hbar h = X$;

Nun hat man ~~zwischen~~ in den Dreyecken Ssq und bht ferner: $\odot Sq$ und $\odot ht$, folgende Proportionen:

$Sq : ht = \odot S : \odot h$ und $qs : tb = \odot S : \odot h$ dass heisst:

$v : Y = (\rho - x) : (\rho - X)$; $\zeta : Z = (\rho - x) : (\rho - X)$

dass heisst:

$$\frac{v}{Y} = \frac{\rho - x}{\rho - X} \; ; \; \frac{\zeta}{Z} = \frac{\rho - x}{\rho - X}$$

Es ist also:

$$v = \left(\frac{\rho - x}{\rho - X}\right) \cdot Y \quad \text{und} \quad \zeta = \left(\frac{\rho - x}{\rho - X}\right) \cdot Z$$

Es ist aber: $\rho = \dfrac{R}{\sin\pi}$ also auch:

$$v = \frac{\left(\frac{R}{\sin\pi} - x\right)}{\left(\frac{R}{\sin\pi} - X\right)}\cdot Y \text{ und } \zeta = \frac{\left(\frac{R}{\sin\pi} - x\right)}{\left(\frac{R}{\sin\pi} - X\right)}\cdot Z$$

Nun ist aber: $r = \frac{R}{\sin p}$ oder: $R = r\sin p$, also auch:

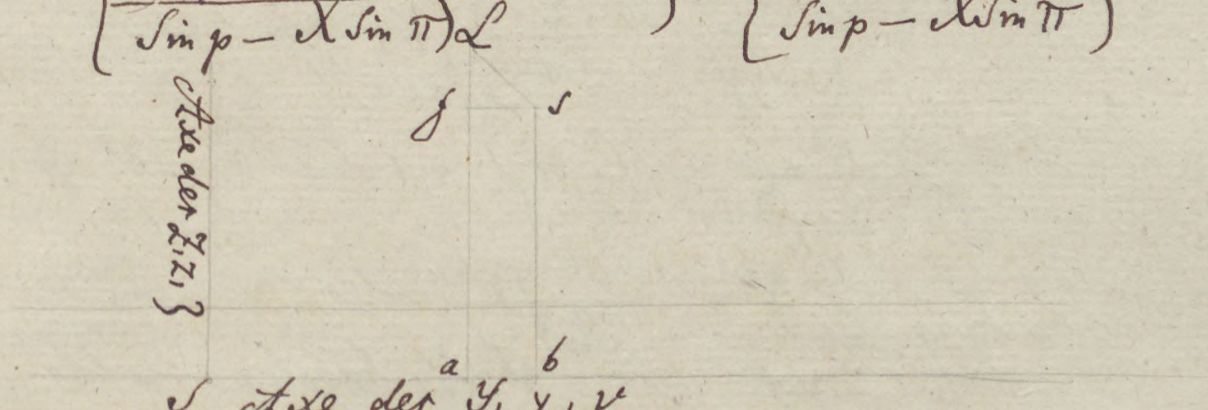
$$v = \frac{\left(\frac{r\sin p}{\sin\pi} - x\right)}{\left(\frac{R\sin p}{\sin\pi} - X\right)}\cdot Y = \frac{(r\sin p - x\sin\pi)Y}{(r\sin p - X\sin\pi)}$$

und eben so hat man:

$$\zeta = \frac{(r\sin p - x\sin\pi)}{(r\sin p - X\sin\pi)}\cdot Z$$

Nimmt man nun aber die Entfernung des Mondes von der Erde zur Einheit an, so ist $r = 1$ und:

$$v = \left\{\frac{\sin p - x\sin\pi}{\sin p - X\sin\pi}\right\} Y \text{ und } \zeta = \left\{\frac{\sin p - x\sin\pi}{\sin p - X\sin\pi}\right\}\cdot Z$$



Es ist in dem Dreyecke $L\delta s$:

$Ls^2 = \delta L^2 + \delta s^2$ wenn man daher $Ls = \Delta$ setzt: $\Delta^2 = (Z - \zeta)^2 + (V - y)^2$

den es ist:

$Sa = Y$; $La = z$; $Ls = \Delta$

$Sb = V$ $bs = \zeta$

Wir haben also:

$\Delta^2 = (z - \zeta)^2 + (v - y)^2$ dass heisst:

$$\Delta^2 = (z-\zeta)(z-\zeta) + (v-y)(v-y) \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\Delta^2}{z-\zeta} = (z-\zeta) + \frac{(v-y)(v-y)}{z-\zeta} \quad \text{oder wenn man:}$$

$$\frac{v-y}{z-\zeta} = tg\,\psi \quad \text{setzt; so ist:}$$

$$\frac{\Delta^2}{z-\zeta} = (z-\zeta) + tg\,\psi\,(v-y) \quad \text{oder auch:}$$

$$\frac{\Delta^2}{(z-\zeta)^2} = 1 + tg^2\psi = sec^2\psi \quad \text{oder:}$$

$$\Delta^2 = \frac{(z-\zeta)^2}{cos^2\psi} \quad \text{oder endlich:} \quad \Delta = \frac{z-\zeta}{cos\,\psi}$$

Es ist aber auch aus:

$$\Delta^2 = (z-\zeta)^2 + (v-y)^2 \;:$$

$$\frac{\Delta^2}{(v-y)^2} = \frac{(z-\zeta)}{(v-y)^2} + 1 \quad \text{dass heisst:}$$

$$\frac{\Delta^2}{(v-y)^2} = ctg^2\psi + 1 = cosec^2\psi \quad \text{also:}$$

$$\Delta^2 = \frac{(v-y)^2}{sin^2\psi} \quad \text{oder:} \quad \Delta = \frac{v-y}{sin\,\psi}$$

So dass man ~~daher~~ ~~hat~~ für Δ die beyden Werthe hat:

$$\Delta = \frac{z-\zeta}{cos\,\psi} = \frac{v-y}{sin\,\psi} \quad \text{......} \quad (I^*)$$

Da man die Zeit des Anfanges und Endes der Finsterniss immer schon beynahe kennt, so wird man die Grössen: $a-\alpha$; $d-\delta$ als sehr klein annehmen können, und da p und π ebenfalls nur klein sind, so wird man damit ~~die~~ ganzen Gleichungen ändern können: Man hat:

$$x = r\{sin\,d\,sin\,\delta + cos\,d\,cos\,\delta\,cos(a-\alpha)\}$$
$$y = r\,cos\,\delta\,sin(a-\alpha)$$
$$z = r\{sin\,d\,cos\,\delta - cos\,d\,sin\,\delta\,cos(a-\alpha)\}$$

oder statt $cos(a-\alpha)$ $1 - sin^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)$ gesetzt, gibt:

$$x = r\left\{\cos(d-\delta) - 2\cos d\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\right\} = r\left\{1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(d-\delta) - 2\cos d\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\right\}$$

$$y = r\cos d\sin(a-\alpha) = r\cos d\sin(a-\alpha)$$

$$z = r\left\{\sin(d-\delta) + 2\cos d\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\right\} = r\left\{(d-\delta) + 2\cos d\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\right\}$$

oder endlich, wenn man auf das früher gesagte Rücksicht nimmt, und $r = 1$ setzt

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}(d-\delta)^2 - \tfrac{1}{2}(a-\alpha)\cos d\cos\delta$$

$$y = (a-\alpha)\cos d$$

$$z = d - \delta + \tfrac{1}{2}(a-\alpha)^2\cos d\sin\delta$$

oder da man unter oben gesagten Umständen auch d für δ und δ für d setzen kann:

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}(d-\delta)^2 - \tfrac{1}{2}(a-\alpha)\cos^2\delta$$

$$y = (a-\alpha)\cos d$$

$$z = (d-\delta) + \tfrac{1}{4}(a-\alpha)^2\sin 2\delta$$

Ferner ist:

$$v = \frac{pY - \pi x Y}{p - \pi X} = \frac{Y\left(p - \pi\left(1 - \tfrac{1}{2}(d-\delta)^2 - \tfrac{1}{2}(a-\alpha)\cos^2\delta\right)\right)}{p - \pi\left\{R\sin\varphi\cos\delta - R\cos\varphi\sin\delta\cos s\right\}}$$

$$v = (p-\pi)\cdot\frac{Y}{p}$$

Denn im ~~Nenner~~ Zähler bleiben die übrigen Glieder darum aus, da sie als an sich selbst schon sehr klein, auch noch überdiess in die sehr kleine Grösse π multiplicirt sind. Das zweyte Glied des Nenners aber bleibt darum aus, da es mit R, dass da man $r = 1$ gesetzt hat, nur sehr gering ist, ferner mit der sehr kleinen Grösse π multiplicirt ist.

Eben so erhält man:

$$\zeta = (p-\pi)\cdot\frac{Z}{p}$$

Setzt man nun wie oben $tg\,\psi = \frac{Y-v}{Z-\zeta}$ nähmlich:

$$tg\,\psi = \frac{(a-\alpha)\cos\delta - (p-\pi)\cdot\frac{Y}{p}}{(d-\delta) + \frac{1}{4}(a-\alpha)^2\sin 2d - (p-\pi)\cdot\frac{Z}{p}}$$

So ist:

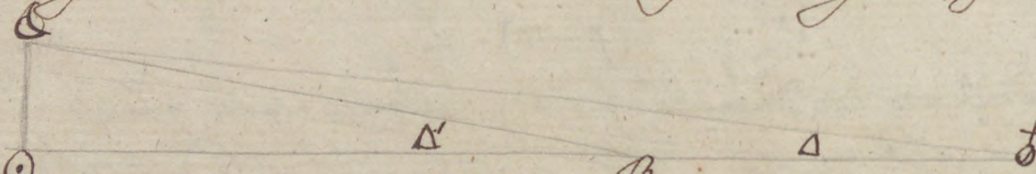
$$\text{(II)}\quad \Delta = \frac{(a-\alpha)\cos\delta - \left(\frac{p-\Pi}{p}\right)Y}{\sin\psi} = \frac{(d-\delta)+\frac{1}{4}(a-\alpha)^2\sin 2d - \left(\frac{p-\Pi}{p}\right)Z}{\sin\psi}$$

Diese Gleichung macht es möglich, mehrere Aufgaben aufzulösen, unter welchen folgende die merkwürdigsten sind.

I Für eine gegebene Zeit, suche man die scheinbare Distanz der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes.

Die geocentrische Distanz der beyden Mittelpuncte ist ~~da~~ durch die Gleichungen (II) unmittelbar gegeben, wenn a, α, die Rect, ascensionen, und d, δ, die Declinationen, ferner, p, π die Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne sind.

Um nun aber die scheinbare Distanz Δ' aus der wahren Δ zu erhalten, bemerke man, dass die Linie welche die Mittelpuncte des Mondes und der Sonne verbindet, oder die Distanz Δ nahe senkrecht auf der Gesichtslinie des Beobachters steht, und dass man daher wird in unserer Figur, setzen können:



~~Es ist~~ ☾⊙ = ⊙B tg.Δ' = ⊙♁ tgΔ

Ferner ist nach der Bedingung, nach welcher die Coordinaten x, y, z construirt wurden:

⊙♁ = x und ♁B = X also: ⊙B = ⊙♁ − ♁B = $x - X$

und daher:

$(x-X)\,\mathrm{tg}\,\Delta' = x\,\mathrm{tg}\,\Delta$ oder da ☾⊙ = ☾♁ Sin Δ ~~f~~ ☾♁ aber = einer Einheit genommen ist:

$(x-X)\,\mathrm{tg}\,\Delta' = \mathrm{tg}\,\Delta$ und daher:

$\mathrm{tg}\,\Delta' = \frac{\mathrm{tg}\,\Delta}{(x-X)}$ oder ~~da man~~ wenn man diese Aufgabe dann anwendet wenn Δ, Δ' nur klein sind, nähmlich sehr nahe an die Zeit der Finsterniss, oder zur Zeit der Finsterniss selbst:

$\Delta' = \frac{\Delta}{x-X} = \frac{\Delta}{1-X}$ wenn man in dem letztgefundenen Werthe von x, die übrigen Glieder vernachlässigt

(II). Es sey die scheinbare Entfernung Δ' der beyden Mittelpuncte gegeben, man suche die Zeit, für welche diese Distanz Statt hat. Gewöhnlich ist diese Zeit, ~~die Zeit~~ des Anfangs und das Ende der partialen oder totalen Finsterniss, also:

Im ersteren Falle: $\Delta' =$ scheinbaren Halb. d. ☾ + scheinb. Halb. d. ☉

" 2ten " ": $\Delta' =$ scheinb. Halbm. d. ☾ — scheinb. Halb. d. ☉

dass heisst: ~~im ersten Falle~~

$\Delta' = m$ gesehen aus der Dist. $x - X$ $\pm$ μ gesehen aus derselben Distanz, da aber die Sonne so weit von uns entfernt ist, das ihr scheinbarer Durchmesser fast einerley ist, ob er aus dem Mittel oder einem Puncte der Oberfläche der Erde gesehen wird, so ist; unter dieser Voraussetzung:

$$\Delta' = \frac{m}{x - X^*} \pm \mu, \text{ nähmlich:}$$

$$\frac{\Delta}{x - X^*} = \frac{m}{x - X} \pm \mu; \text{ oder:}$$

$$\Delta = m \pm \mu(x - X) \text{ und sehr nahe:}$$

$$\Delta = m \pm \mu(1 - X)$$

Setzt man nun jetzt in den Gleichungen (I) oder (II):

$\Delta = m \pm \mu(1 - X)$ so erhält man aus zwey willkührlich angenommenen Zeiten leicht diejenige, welche der Bedingungsgleichung: $\Delta = m \pm \mu(1 - X)$ genug thut.

(III) Sey d, δ die Declination des Mondes und der Sonne, ~~ferner~~ für die Zeit t der der wahren Conjunction in Rectascension. Man suche die Distanz Δ' für die Zeit $t + t'$ (wo t' in Theilen der Stunde gegeben ist). Um diese Distanz Δ' zu finden, darf man nur in der Gleichung (II):

$t'(da - d\alpha)$ und $t'(Md - d\delta)$ für $a - \alpha$ und $d - \delta$ substituiren.

(IV) Aus der Zeit $t + t''$ der scheinbaren Conjunction und aus der Differenz D der scheinbaren Declinationen zu dieser Zeit suche man die Neigung σ der scheinbaren Bahn des Mondes gegen den Aequator die kürzeste Distanz e und die Zeit der Mitte der Finsterniss, nebst ihrer Grösse zu finden.

Die allgemeinen Gleichungen für die Parallaxe sind:

$$r'\cos b'\sin(a'-N) = r\cos b\sin(a-N) - R\cos B\sin(A-N)$$
$$r'\cos b'\cos(a'-N) = r\cos b\cos(a-N) - R\cos B\cos(A-N)$$
$$r'\sin b' \quad = r\sin b \quad - R\sin B$$

Setzt man $N = a$, so ~~ist~~ gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$r'\cos b'\sin(a'-a) = -R\cos B\sin(A-a)$$
$$r'\cos b'\cos(a'-a) = r\cos b - R\cos B\cos(A-a)$$
$$r'\sin b' = r\sin b - R\sin B$$

das heisst:

$$tg(a'-a) = -\frac{R\cos B\sin(A-a)}{r\cos b - R\cos B\cos(A-a)}$$
$$= -\frac{\frac{R}{r}\sec b\cos B\sin(A-a)}{1-\frac{R}{r}\sec b\cos B\cos(A-a)}$$

Ist nun von der Sonne die Rede, so ist:

$$tg(\alpha'-\alpha) = \frac{-\frac{R}{r}\sec\delta\cos\varphi\sin(\text{Sternz.}-\alpha)}{1-\frac{R}{r}\sec\delta\cos\varphi\cos(\text{Sternz.}-\alpha)}$$

$$= 1+\frac{R}{\varsigma}\sec\delta\cos\varphi\sin(\text{Sternz}-\alpha)$$

und wenn vom Monde die Rede ist, eben so:

$$tg(a'-a) = 1+\frac{R}{r}\sec d\cos\varphi\sin(\text{Sternz.}-a)$$

oder da $\alpha'-\alpha$, und $a'-a$, in unserem Falle nur kleine Grössen sind:

$$\alpha'-\alpha = 1+\frac{R}{\varsigma}\sec\delta\cos\varphi\sin s \text{ und}$$
$$a'-a = 1+\frac{R}{r}\sec d\cos\varphi\sin s$$ (wenn s der Stundenwinkel ist) oder endlich:

$$\alpha'-\alpha = 1+\pi\sec\delta\cos\varphi\sin s \text{ und}$$
$$a'-a = 1+p\sec d\cos\varphi\sin s$$

Eben so findet man nach einigen Reductionen für die Declination:

$$\delta'-\delta = \pi\{\cos\varphi\sin\delta\cos s - \sin\varphi\cos\delta\} \text{ für die Sonne, und}$$
$$d'-d = p\{\cos\varphi\sin d\cos s - \sin\varphi\cos d\} \text{ für den Mond}$$

Aus unseren gefundenen Gleichungen für $a'-a$, $\alpha'-\alpha$, $\delta'-\delta$, $d'-d$ folgt aber:

$$\alpha' - \alpha' = a - \alpha + p\left\{\frac{\cos\varphi\sin s}{\cos d}\right\} - \pi\left\{\frac{\cos\varphi\sin s}{\cos\delta}\right\}$$ und:

$$d' - \delta' = d - \delta' + p\{\cos\varphi\sin d\cos s - \sin\varphi\cos d\} - \pi\{\cos\varphi\sin\delta\cos s - \sin\varphi\cos\delta\}$$

~~dass heisst wenn man die Parallaxe der Sonne ganz ausser Acht lässt: cos d = cos δ setzt:~~

$$\cancel{\alpha' - \alpha' = \pm\cos\varphi.\sin s\left\{\frac{p-\pi}{\cos\delta}\right\}}$$ ~~und:~~

$$\cancel{d' - \delta' = \{\cos\varphi\sin d\cos s - \sin\varphi\cos d\}\{p-\pi\}}$$

dass heisst:

Parallaxe der Rectascension: $Y = \frac{p\cos\delta\cos\varphi\sin s - \pi\cos d\cos\varphi\sin s}{\cos d\cos\delta}$

oder wenn man $\cos d = \cos\delta$ setzt:

ganz ausser Acht lässt: $Y = \cos\varphi\sin s\cos d(p-\pi)$ oder wenn man π ~~klein seyn kann~~:

$$Y = p\cos\varphi\cos d\sin s \text{ und}$$

$$Z = -p\{\sin\varphi\cos d - \cos\varphi\sin d\cos s\}$$

also ihre Aenderungen:

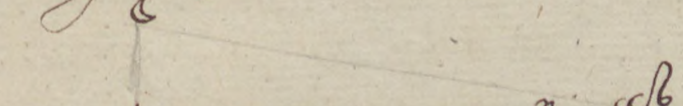
$$dY = p\,ds.\cos\varphi\cos d\cos s \text{ und:}$$

$$dZ = p\,ds.\cos\varphi\sin d\sin s$$

Daraus folgt die scheinbare stündliche Bewegung in Rectascension:

$f = (da - d\alpha)\cos\delta - dY$ und jene der Declination:

$g = (dd - d\delta) - dZ$



Sey nun in C der Mond, CB seine relative Bahn, BA aber der Aequator, ferner BA = f und CA = g, so ist, da man für die kurze Zeit als sowohl BA, als CA für gerade Linien nehmen kann:

$g = f\,tg\,n$ also gesuchtes n aus: $tg\,n = \frac{g}{f}$

und die kürzeste Distanz, wenn in A die Sonne ist:

$c = D.\cancel{\sin}\cos BCA = D.\cos n$

Die stündliche scheinbare Bewegung in der relativen Bahn selbst, ist gleich: CB, und diess ist auf zweyerley Art gegeben, es ist: CB aus

$BC = \sqrt{f^2+g^2}$ und aus $CB = \frac{f}{\cos n}$ gegeben:

Die eigentliche Mitte der Finsterniss wird dann statt haben, wenn die wahre Conjunction der Sonne und des Mondes statt hat, wenn aber die wahre Conjunction statt hat, werden wir ~~schon~~ noch eine Distanz der beyden Mittelpuncte wahrnehmen, und das Stück der Bahn ☾☉ zwischen der scheinbaren Conjunction und der Mitte der Finsterniss, oder ☾☉ ist auf folgende Art gegeben: Es ist:

$$☾☉ = ☉a \cos a☉☾ = D \sin n$$ und dieses Stück wird in $\frac{D \sin n . \cos n}{f}$ Stunden zurückgelegt, sodass also die Zeit der Mitte der Finsterniss ~~statt haben wird~~; zur Zeit:

$$t + t'' + \frac{D}{f} \sin n \cos n$$

Und die Grösse derselben in Zollen: (wo ein Zoll $= \frac{\mu}{6}$ ist.)

$$= \frac{6}{\mu}\left(\mu + \frac{r - g \cos n}{1 - x}\right)$$ Siehe hierüber pag No

Jetzt hätten wir alle hieher gehörigen Aufgaben gelöset, da sie aber etwas schwer zu verstehen, auch bey der Ausübung unsere bisherige Auflösung nicht bequem genug, so folgt hier noch eine andere Methode die ganz frey von jenen Nachtheilen, und dennoch völlig genau ist.

Da man die Zeit des Anfanges und Endes der Finsterniss immer schon beynahe kennt, so sey T die genäherte Zeit des Anfanges und $T_,$ jene des Endes der Finsterniss.

Für diese Zeit T suche man:

$a; d; p; m$ für den wahren Ort des Mondes, und:

$\alpha; \delta; \pi; \mu.$ für " " " " der Sonne

Und eben so für die Zeit $T_,$ dieselben Grössen:

$a_, ; d_, ; m_, ; p_, ;$

$\alpha_, ; \delta_, ; \mu_, ; \pi_, ;$

Für diese beyden Zeiten suche man die von der Parallaxe afficirten oder scheinbaren Orte:

$$\left.\begin{array}{cccc} a'; & d' & m' & p' \\ a_, & d_, & m_, & p_, \end{array}\right\} \text{für den Mond}$$

und:

$$\left.\begin{array}{cccc} \alpha' & \delta' & \mu' & \pi' \\ \alpha_, & \delta_, & \mu_, & \pi_, \end{array}\right\} \text{für die Sonne}$$

Nun werden die Unterschiede der scheinbaren Rectascensionen der Sonne und des Mondes seyn:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Zur Zeit } T: = (a'-\alpha')\cos\delta' \text{ diess wollen wir } = A \\ \text{und zur Zeit } T_,: = (a_,-\alpha_,)\cos\delta_, \text{ und diess } - - = A' \end{array}\right\} \text{setzen.}$$

Und die Unterschiede der Declinationen $D, D_,$ werden seyn:

Zur Zeit T: $D = d'-\delta'$

und zur Zeit $T_,$: $D_, = d_,-\delta_,$

Daraus folgt die relative stündliche Bewegung in Rectascension ~~Rectasc Veränderung~~

$$f = \frac{(A_, - A)\cos\delta}{T_, - T}$$

und in Declination:

$$g = \frac{D_, - D}{T_, - T}$$

Es sey nun die verbesserte Zeit des Anfanges: $T+t$ und
" " " " Endes: $T'+t_,$

so findet man t, & t' wie man leicht einsieht, aus den Gleichungen:

$$(m'\pm\mu')^2 = (A+ft)^2 + (D+gt)^2$$
$$(m_,\pm\mu_,)^2 = (A_,+ft_,)^2 + (D_,+gt_,)^2$$

Jede dieser 2 Gleichungen gibt einen doppelten Werth von t und $t_,$, von welchen man eigentlich den kleineren nehmen soll, da nach unserer Voraussetzung die Zeiten T und $T_,$ schon nahe richtig sind.

Wenn es wie gewöhnlich nicht um grosse Genauigkeit zu thun ist, so genügt eine der beyden Gleichungen zu unserem Zwecke, und dann gibt einer der beyden Werthe von t dem Anfange der andere aber dem Ende an. Von den doppelten Zeichen des ersten Gliedes, aber gehört das obere für die äussern und das untere für die innern Berührungen.

Diese Gleichungen lassen sich auch auf die Ekliptick anwenden, wenn man für a', α' die Längen nimmt, und statt d die Breite des Mondes nimmt δ' aber $= 0$ setzt. Endlich kann man da π nur klein ist, bey der Sonne ohne Nachtheil statt der scheinbaren Grössen die wahren nehmen. Übrigens müssen die Grössen ~~A, A'~~ A, A', D, m, μ, in gleichen Maassen, die Grössen T, $-T$, aber, so wie t, t, in Stunden in ihren Theilen gegeben seyn.

Endlich wollen wir jene quadratische Gleichung noch auflösen, es ist:

$$(m \pm \mu)^2 = (A + ft)^2 + (D + gt)^2$$ nähmlich:

$$(m \pm \mu)^2 = A^2 + 2Aft + f^2t^2 + D^2 + 2gDt + g^2t^2$$

nähmlich:

$$t^2(f^2 + g^2) + t\{2Af + 2gD\} = (m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2$$ nähmlich:

$$t^2 + \frac{2t(Af + gD)}{f^2 + g^2} = \frac{(m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2}{f^2 + g^2}$$

dass heisst:

$$t^2 + \frac{2t(Af + gD)}{f^2 + g^2} + \frac{(Af + gD)^2}{(f^2 + g^2)^2} = \frac{(m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2}{f^2 + g^2} + \frac{(Af - gD)^2}{(f^2 + g^2)^2}$$

oder es

$$t + \frac{Af + gD}{f^2 + g^2} = \pm\sqrt{\frac{(m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2}{f^2 + g^2} + \frac{(Af - gD)^2}{(f^2 + g^2)^2}}$$

Setzt man nun: so ist:

$$(m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2 = \rho^2$$

$$t + \frac{Af + gD}{f^2 + g^2} = \pm\sqrt{\frac{\rho^2}{f^2 + g^2} + \frac{(Af - gD)^2}{(f^2 + g^2)^2}}$$ oder da g immer nur klein ist, also g^2 schon füglich ausgelassen werden kann:

$$t + \frac{Af + gD}{f^2} = \pm\sqrt{\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{(Af - gD)^2}{(f^2 + g^2)^2}}$$

$$t + \frac{A}{f} + \frac{gD}{f^2} = \pm\sqrt{\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{A^2f^2 + g^2D^2 - 2ADfg}{f^4 + 2f^2g^2 + g^4}}$$ dass heisst:

wenn man: $\frac{g}{f} = \operatorname{tg} x$ setzt:

$$t + \frac{A}{f} + \frac{\operatorname{tg} x\, D}{f} = \pm\sqrt{\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{A^2f^2 - 2ADfg}{f^4}}$$ dass heisst:

$$t + \frac{A\,Cos\,x + D\,Sin\,x}{f\,Cos\,x} = \pm\sqrt{\frac{P^2}{f^2} + \frac{A^2}{f^2} - \frac{2A\,D\,g}{f^3}}$$

$$t + \frac{A\,Cos\,x + D\,Sin\,x}{f\,Cos\,x} = \pm\frac{1}{f}\sqrt{\left\{P^2 + A^2 - \frac{2A\,D\,g}{f}\right\}}$$

Setzt man jetzt:

$$A\,Cos\,x + D\,Sin\,x = Q, \text{ so ist:}$$

$$t = \pm\frac{1}{f}\sqrt{P^2 + A^2 - \frac{2A\,D\,g}{f}} - \frac{Q}{f\,Cos\,x}$$

$$t = \pm\frac{1}{f}\left\{P + \frac{1}{2}P^2\left\{A^2 - \frac{2A\,D\,g}{f}\right)^{\frac{1}{2}} + etc - \frac{Q}{f\,Cos\,x}\right. \quad **$$

Oder aber auch anders, man hat:

$$(m \pm \mu)^2 = A^2 + 2ftA + f^2t^2 + D^2 + 2gtD + g^2t^2$$

oder:

$$t^2(f^2 + g^2) + 2t(Af + Dg) = (m \pm \mu)^2 - A^2 - B^2$$

oder wenn man sich erinnert was $tg\,x$, P^2 und Q bedeutet:

$$t^2(f^2+g^2) + 2t(Af + Dg) = P^2 \text{ Es ist aber: } g = f\,tg\,x \text{ also:}$$

$$t^2(f^2 + f^2 tg^2 x) + 2t(Af + Df\,tg\,x) = P^2$$

$$= t^2 f^2 Sec^2 x + 2ft(A + D\,tg\,x) = P^2 = t^2 f^2 Sec^2 t + \frac{2ft}{Cos\,x}Q.$$

also: $t^2 f^2 + 2ftQ\,Cos\,x = P^2 Cos^2 x$ oder:

$$t^2 + \frac{2tQ\,Cos\,x}{f} = \frac{P^2 Cos^2 x}{f^2} \text{ dass heisst:}$$

$$t^2 + \frac{2tQ\,Cos\,x}{f} + \frac{Q^2 Cos^2 x}{f^2} = \frac{P^2 Cos^2 x}{f^2} + \frac{Q^2 Cos^2 x}{f^2}$$

dass heisst:

$$t + \frac{Q\,Cos\,x}{f} = \pm\sqrt{\frac{Cos^2 x}{f^2}(P^2 + Q^2)}$$

nähmlich: $t + \frac{Q\,Cos\,x}{f} = \pm\frac{Cos\,x}{f}\sqrt{P^2 + Q^2}$. Setzt man nun $\frac{P}{Q} = tg\,y$

also: $Q = \frac{P}{tg\,y}$ so ist:

$$t + \frac{Q\,Cos\,x}{f} = \pm\frac{Cos\,x}{f}\sqrt{P^2(1 + tg^2 y)}$$

nähmlich:

$$t + \frac{Q\cos x}{f} = \frac{\pm P\cos x}{f\sin y} \quad \text{dass heisst: } Q = \frac{P}{tg\,y}$$

$$t + \frac{P\cos x}{f\,tg\,y} = \pm\frac{P\cos x}{f\sin y}$$

$$t = \pm\frac{P}{f}\cos x\left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\cos y}{\sin y}\right) = \pm\frac{P}{f}\cos x\left(\frac{1-\cos y}{\sin y}\right) \; *$$

oder endlich noch auf andere Art, wenn wir im Ausdrucke:

$$t^2(f^2+g^2) + 2t(Af+Dg) = P^2 \;;\; f \text{ eliminiren:}$$

$$t^2\left(\frac{g^2}{tg^2 x} + g^2\right) + 2t\left(\frac{Ag}{tg\,x} + Dg\right) = P^2 \quad \text{nähmlich:}$$

$$t^2 g^2(1 + \cot g^2 x) + 2tg(D + A\cot g\,x) = P^2 \quad \text{nähmlich:}$$

$$t^2 g^2 \operatorname{cosec}^2 x + 2tg\operatorname{cosec} x\,Q = P^2 \quad \text{oder:} \quad t^2g^2 + \frac{2tgQ}{\operatorname{cosec} x} = P^2\sin^2 x$$

nähmlich:

$$t^2 + \frac{2t.Q.\sin x}{g} = \frac{P^2\sin^2 x}{g^2} \quad \text{nähmlich:} \quad \left(t + \frac{Q\sin x}{g}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{g^2}(P^2+Q^2)$$

oder:

$$t + \frac{Q\sin x}{g} = \pm\frac{\sin x}{g}\sqrt{(P^2+Q^2)} \quad \text{oder wenn man } Q = P\cot g\,y \text{ setzt:}$$

$$t + \frac{P\cot g\,y\sin x}{g} = \pm\frac{\sin x}{g}\sqrt{P^2 + P^2\cot g^2 y} = \pm\frac{P\sin x}{g\sin y}$$

also:

$$t = \pm\frac{P\sin x}{g}\left(\frac{1}{\sin y} - \cot g\,y\right) = \pm\frac{P}{g}\sin x\left(\frac{1-\cos y}{\sin y}\right)$$

oder endlich:

$$t = \pm\frac{P}{g}\sin x.\,tg\tfrac{1}{2}y \; * * *$$

für einen Werth g von t hat man also:

$$t = \frac{P}{g}\sin x\,tg\tfrac{1}{2}y$$ und für den anderen wo die tg. negativ werden muss:

$$t = \frac{P}{g}\sin x.\,tg(90° + \tfrac{1}{2}y)$$

Jetzt haben wir noch die Grösse der Finsterniss, und den Ort der Be-
rung zu suchen.

Die Zeit zwischen Anfang und Ende ist:

$(T_{,}+t_{,})-(T_{*}+t_{*})$ und da die stündliche relative Bewegung in der Bahn $=\sqrt{f^2+g^2}$ ist, so durchlauft der Mittelpunct des Mondes während der Dauer der Finsterniss, das Stück seiner relativen Bahn:

$$=\{(T_{,}+t_{,})-(T+t)\}\sqrt{f^2+g^2}$$

Die Hälfte dieses Stückes bildet mit der Entfernung $m+\mu$ und dem aus der Sonne, auf die relative Bahn gezogenen Lothe R ein rechtwinkliges Dreyeck, in welchem man hat:

$$R^2=(m+\mu)^2-\left\{\tfrac{1}{2}\{(T_{,}+t_{,})-(T+t)\}\sqrt{f^2+g^2}\right\}^2 \text{ oder:}$$

$$R^2=(m+\mu)^2-\frac{1}{4}\{(T_{,}+t_{,})-(T+t)\}^2(f^2+g^2)$$

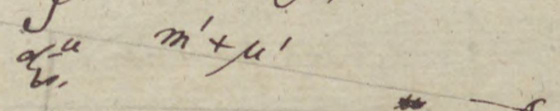
Hat man so R, so ist das verfinsterte Stück der Sonne $=$

$= m+\mu-R$ also in Zollen wo $\frac{\mu}{6}=1$ Zoll ist:

Grösse der Finsterniss: $=\frac{6}{\mu}(m+\mu-R)$

Ist nun v der Winkel des Declinationskreises mit dem Scheitelkreise, oder die Variation, so ist nach einer Fundamentalregel:

$$tg\,v=\frac{\sin s}{tg\,\varphi\cos\delta-\sin\delta\cos s}$$



Ist u der Winkel des Declinationskreises mit der Linie, welche die scheinbaren Mittelpuncte beyder Gestirne verbindet, ferner $\delta'-\delta$, die Differenz der scheinb. Decl. zur Zeit des Anf. und End. der Finst. ferner in unserer Figur in S die Sonne in ☾ der Mond und SK der Declinationskreis, so ist:

$$d'-\delta'=(m'+\mu')\cos u \text{ also ist } u \text{ gegeben, aus:}$$

$$\cos u=\frac{d'-\delta'}{m'+\mu'}$$

also ist der Winkel des Scheitelkreises mit der Linie welche die scheinbaren Mittelpuncte verbindet, gleich:

$u-v$ und der Berührungspunct, ist östlich oder westlich vom Scheitelkreise je nachdem $u-v$ negativ oder positiv ist.

Die bisher vorgetragenen Methoden, sind ganz genau, wenn man das Stück der Bahn zwischen Anfang und Ende für eine gerade Linie nehmen kann. Sie sind aber unbequem da man den scheinbaren Ort des Mondes doppelt berechnen muss. Da es hier meistens nur darum zu thun ist, bey Zeiten die Aufmerksamkeit des Beobachters zu erregen, so hat für die practische Rechnung folgende genäherte Methode den grössten Werth.

Die Parallaxe der Ascension ist $-Y$ und jene der Declination $= -Z$ also ist für die Zeit wo s der Stundenwinkel der Sonne seyn soll:

Die Diff. der scheinb. $AR = a - \alpha - (p-\pi)\frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s}{\operatorname{Cos}\delta}$ und

Die Diff. der " " $\text{Decl.} = d - \delta - (p-\pi)\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} s\}$

Differenzirt man diese Ausdrücke, und bemerkt, dass wenn die Sonne keine Bewegung in Rectascension hätte, wie man es in den 2ten Theilen der Gleichungen, da sie in die sehr kleine Grösse $(p-\pi)$ multiplicirt sind, annehmen kann, also:

$$\operatorname{Sin} ds = 9.41300$$

so wird man, die Änderung erhalten:

der Rectascension $= ~~da~~ - d\alpha - 0.2588.(p-\pi)\frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} s}{\operatorname{Cos}\delta}$ und der Declination aus:

$$dd - d\delta - 0.2588\,(p-\pi)\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin} s$$

Denn:

Differenzieren wir jene zwey Gleichungen, so haben wir:

Stündl. Veränd. der scheinb. Rectasc. $= da - d\alpha - ds\,(p-\pi).\frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} s}{\operatorname{Cos}\delta}$

" " " " $\text{Decln.} = dd - d\delta - ds\,(p-\pi)\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin} s$

Nun ist für 1 Stunde: $ds = 15^0$ und $\operatorname{Sin} ds = 9.41300$, es ist aber:

$$ds = \operatorname{Sin} ds + \frac{1}{6}\operatorname{Sin}^3 ds + \frac{3}{4}\operatorname{Sin}^5 ds + \frac{15}{336}\operatorname{Sin}^7 ds$$ nahmlich:

$$ds = 0.2588 + 0.0029 + 0.0000 \ldots =$$

nähmlich:

$ds = 0.2617$ genauer als Littrow es hat, da er alle übrigen Glieder ausser dem ersten vernachlässigt.

Setzt man nun:

$$a-\alpha-(p-\pi)\cos\varphi\sin s = A$$
$$d-\delta-(p-\pi)\{\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos s\} = D$$
$$da-d\alpha-(p-\pi)0.2617\cos\varphi\sin s \;-\;-\;= f$$
$$dd-d\delta-0.2617(p-\pi)\cos\varphi\sin\delta\sin s = g$$

und ist die verbesserte Zeit des Anfanges oder Endes der Finsterniß $= T \pm t$, so erhält man diese Correction t aus der Gleichung: $(m' \pm \mu)^2 = (A+ft)^2+(D+gt)^2$ was man sehr leicht einsieht, und wo $m' = \frac{m}{1-x}$ ist.

Im ersten Theile jener Gleichung, gehört das obere Zeichen für die äußern, das untere aber für die inneren Berührungen. Substituirt man dem Aequator die Ekliptik, so wird man, statt α, a, die Längen, und statt β, b, Breiten setzen, wo aber $\beta = 0$ ist.

III, Weg des Mondschattens bey Sonnenfinsternissen.

Um den Weg des Mondschattens bey Sonnenfinsternissen zu bestimmen, müssen wir die Ausdrücke (S. 141) wieder vornehmen; wenn wir die dort angeführten Bezeichnungen beybehalten, so haben wir dort:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\{\sin d\sin\delta+\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha)\} \\ y &= r\cos d\sin(a-\alpha) \\ z &= r\{\sin d\cos\delta-\cos d\sin\delta\cos(a-\alpha)\} \end{aligned}\right\}$$

Früher hatten wir $r=1$ gesetzt, setzen wir aber nun $r\sin 1'' = 1$ so ist:

$$x = \frac{\sin d\sin\delta+\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha)}{\sin 1''}$$

$$y = \frac{\cos d\sin(a-\alpha)}{\sin 1''}$$

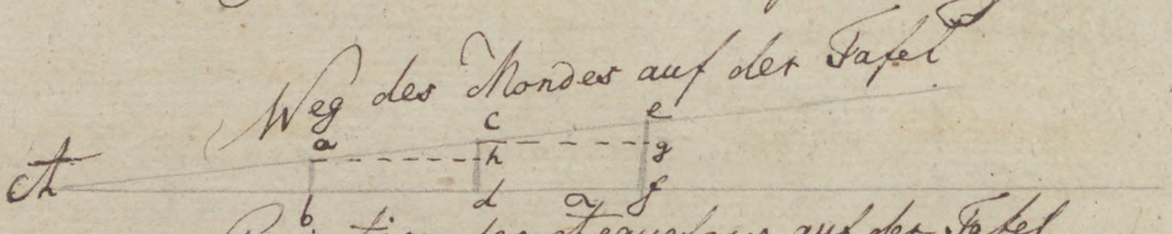
$$z = \frac{\sin d\cos\delta-\cos d\sin\delta\cos(a-\alpha)}{\sin 1''}$$

Nun ist $\sin p = \frac{R}{r}$ oder da $r = \frac{1}{\sin 1''}$ ist: $\sin p = R\sin 1''$ oder $R = \frac{\sin p}{\sin 1''} = p$; also auch:

$$x = p\{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s\}$$
$$y = p\{\cos\varphi \sin s\}$$
$$z = p\{\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos s\}$$

Durch diese Coordinaten ist die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde bestimmt.

II Da man von den Coordinaten x, y, z, nur die beyden Letzteren y, z braucht, so setzt man voraus, dass man für ~~[illegible]~~ die ganze Dauer der Finsternisse, etwa von Stunde zu Stunde z. B. Pariser Zeit, die Werthe der Coordinaten y, z, berechnet*, und eine Tafel eintrage.



III Nimmt man nun ~~Seite 122 (II)~~ für die ganze Dauer der Finsterniss jene Linie, welche der Mond auf unserer Projectionstafel Seite 122 No. (II) beschreibt, für eine gerade Linie, so ist es leicht, da wir in (II) ~~[illegible]~~ die Coordinaten dieser Linie für verschiedene Puncte schon besitzen, auch die Lage dieser Linie gegen die Projection des Aequators auf jener Tafel anzugeben.

Nehmen wir nun unsere Figur vor, soll b der Anfangspunct der Abscissen, und der Winkel $eAf = n$ seyn.

Nun sey $ab = p'$, so ist: $cd = z$; $ef = z'$; $ah = y$; $bf = y'$; zieht man nun cg parallel zu der Abscissenlinie Af, so ist:

$cg = y' - y$; $eg = z' - z$ und $ecg = aAb = n$; nun ist ist:

$$eg = cg\,tg\,n \text{; nähmlich: } tg\,n = \frac{eg}{cg} \text{; oder endlich:}$$

$$tg\,n = \frac{z' - z}{y' - y}$$

Zieht man nun auch ah zu Af parallel, so ist: $ab = cd - ch$

oder $ab = z - ch$; es ist aber $\frac{ch}{ah} = tg\,n$; nähmlich:

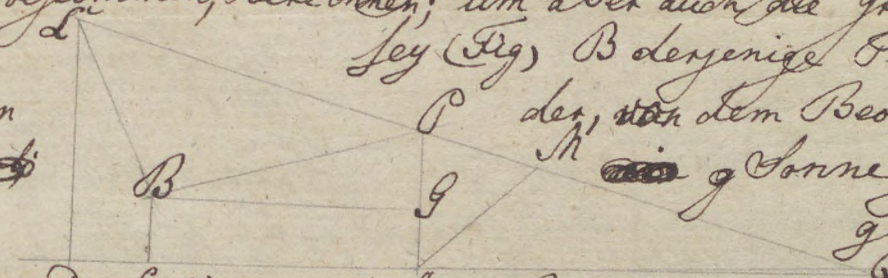
$ch = ah\,tg\,n = y\,tg\,n$; also auch:

$$p' = z - y\,tg\,n$$

Jetzt sind wir schon im Stande die hierher gehörigen Aufgaben zu lösen.

I) Man suche den Ort der Oberfläche der Erde dessen Polhöhe φ und Ortszeit t gegeben ist, und der für die Zeit eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes sieht.

Da φ und s bekannt ist, und δ wenigstens in der ersten Näherung als constant angenommen werden kann, so kann man auch aus I die Coordinaten X, Y, Z, welche die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde bestimmen, berechnen; um aber auch die Grössen y, z zu finden, sey (Fig) B derjenige Punct der Tafel, wo diese von der, von dem Beobachter nach der Sonne gehenden Gesichtslinie getroffen wird, und



$BP = q$ das Loth von diesem Puncte auf die Bahn des Mondes, ferner ist: AD die Projection des Aequators mit der Tafel — A, Mittelpunct der Tafel, — L derjenige Punct der Tafel, wo diese von der, vom Beobachter zu dem Monde gehenden Gesichtslinie getroffen wird, endlich $BL = \Delta$ wird als in Theilen des aus A mit dem Halbmesser $= p$ beschriebenen Kreises ausgedrückt gedacht.

Nun ist also:

$$AC = Y;\ CB = Z;\ BL = \Delta;\ AP = p';\ AD = y;\ DL = z$$

Nun hat man: $BPG = LQD = n$. und: $PGB = PBG + GPB$

also: $BP \sin PGB = BP \sin(PBG + GPB)$ oder:

$$BG = BP \sin PBG \cos GPB + BP \cos PBG \sin GPB$$

es ist aber: $BP \sin PBG = PG$ und $BP \cos PBG = BG$, also auch:

$$BP = PG \cos GPB + BG \sin BPG$$ oder aber:

$$q = PG \cos n + BG \sin n$$

Nun ist: $PG = PA - AG = p' - Z$ und: $BG = CA = Y$, also:

$$q = (p' - Z) \cos n + Y \sin n \ *$$

In dem bey P rechtwinkligen Dreyecke BPL ist:

$BP = BL \sin BLP$ oder wenn man $BLP = h$ setzt:

$$q = \Delta \operatorname{Sin} h \text{ oder : } \operatorname{Sin} h = \frac{q}{\Delta}$$

Ferner ist: $y = AD = AC + DC = BG + CD = Y + CD$

$$= Y + LB \operatorname{Sin} DLB = Y + \Delta \operatorname{Sin}(DLC - BLC)$$

$$= Y + \Delta \operatorname{Sin}(90^\circ - n - h) = Y + \Delta \operatorname{Cos}(n+h) *$$

Und: $z = DL = Z + BL \operatorname{Cos}(90^\circ - n - h) = Z + \Delta \operatorname{Sin}(n+h) *$

wo h immer aus:

$$\operatorname{Sin} h = \frac{(p - Z)\operatorname{Cos} n + Y \operatorname{Sin} n}{\Delta}$$ bestimmt wird.

So wird man immer zwey Werthe für y, und z erhalten, da h einen doppelten Werth hat, ist Sin h positiv, so ist h im ersten oder zweyten Quadranten, wenn Δ ab oder zunimt, ist hingegen Sin. h negativ so ist h im dritten oder vierten Quadranten, wenn Δ ab oder zunimmt. Hat man dann so die Coordinaten y, z, gefunden, so vergleiche man sie mit jenen, die wir schon voraus berechnet haben, wodurch man die Pariser Zeit erhält, und da ~~..~~ die Ortszeit v gegeben ist, so erhält man auch die Länge daher, da φ bekannt ist die gesuchte Lage des Ortes auf der Erdoberfläche.

(III) Den Ort der Erde finden, dessen Polhöhe gegeben ist, der zu einer gegebenen Ortszeit v, eine größte Phase, dass heißt, eine kleinste Distanz der Mittelpuncte sieht.

Aus dem Früheren folgt, dass Δ dann am kleinsten ist, wenn $h = 90^\circ$ ist, setzt man daher:

$$\Delta = (p' - Z)\operatorname{Cos} n + Y \operatorname{Sin}.n \text{ ; so ist:}$$

~~[illegible]~~

$$y = Y + \Delta \operatorname{Cos}(n + 90^\circ) = Y - \Delta \operatorname{Sin} n$$

$$z = Z + \Delta \operatorname{Sin}(90^\circ + n) = Z + \Delta \operatorname{Cos}.n$$

4. Bisher haben wir die Polhöhe des Ortes stets als gegeben vorausgesetzt, die natürlichste Stellung der Aufgabe aber ist folgende.

Für eine gegebene Pariser Zeit suche man den Ort der Erde, welcher irgend eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte als grösste Phase sieht. Da die Pariserzeit gegeben ist, so kennt man auch y, und z, also sind die Coordinaten des Beobachtungsortes:

$$Y = y + \Delta \operatorname{Sin} n$$
$$Z = z - \Delta \operatorname{Cos} n$$

dasso heisst nach Seite:

$$p \cos\varphi \operatorname{Sin} s = \frac{\operatorname{Cos} d \operatorname{Sin}(a-\alpha)}{\operatorname{Sin} 1''} + \Delta \operatorname{Sin} n$$

$$p\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s\} = \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} d' - \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} d' \operatorname{Cos}(a-\alpha)}{\operatorname{Sin} 1''} - \Delta \operatorname{Cos} n$$

daraus folgt:

$$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s = \frac{\operatorname{Cos} d \operatorname{Sin}(a-\alpha)}{p \operatorname{Sin} 1''} + \frac{\Delta \operatorname{Sin} n}{p}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s = \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} d' - \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} d' \operatorname{Cos}(a-\alpha)}{p \operatorname{Sin} 1''} - \frac{\Delta \operatorname{Cos} n}{p}$$

oder da $a-\alpha$ nur sehr klein seyn kann:

$$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s = \operatorname{Cos} d \frac{(a-\alpha)}{p} + \frac{\Delta \operatorname{Sin} n}{p} \quad \text{und:}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s = \frac{\operatorname{Sin}(d-d')}{p \operatorname{Sin} 1''} + \frac{2 \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} d' \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(a-\alpha)}{p \operatorname{Sin} 1''} - \frac{\Delta \operatorname{Cos} n}{p}$$

oder da auch $(d-d')$ nur klein ist, und man $\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(a-\alpha)$ seiner Kleinheit wegen gar vernachlässigt werden kann:

$$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s = \left(\frac{a-\alpha}{p}\right) \operatorname{Cos} d + \frac{\Delta \operatorname{Sin} n}{p}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s = \frac{d-d'}{p} - \frac{\Delta \operatorname{Cos} n}{p}$$

Setzt man der Kürze wegen:

$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s = Y''$ und: $\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s = Z''$ So folgt hieraus: $\operatorname{Sin} s = \frac{Y''}{\operatorname{Cos}\varphi}$ und: $\operatorname{Cos} s = \sqrt{1 - \frac{Y''Y''}{\operatorname{Cos}^2\varphi}}$

Substituirt man diesen Werth von $\cos s$ in der 2ten Gleichung

So ist:

$$Z'' = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\sqrt{1-\frac{y''y''}{\cos^2\varphi}}$$ oder:

$$Z''-\sin\varphi\cos\delta = -\cos\varphi\sin\delta\sqrt{1-\frac{y''y''}{\cos^2\varphi}}$$ oder um das Wurzelzeichen wegzubringen:

$$Z''Z''+\sin^2\varphi\cos^2\delta - 2Z''\sin\varphi\cos\delta = +\cos\varphi^2\sin\delta^2 - y''y''\sin^2\delta$$
$$= \sin^2\delta - \sin^2\delta\sin^2\varphi - y''y''\sin^2\delta$$

nähmlich:

$$\sin^2\varphi\{\cos^2\delta+\sin^2\delta\} - 2Z''\sin\varphi\cos\delta = \sin^2\delta - y''y''\sin^2\delta - Z''Z''$$ nähmlich:

$$\sin^2\varphi - 2Z''\sin\varphi\cos\delta = \sin^2\delta - y''y''\sin^2\delta - Z''Z''$$ also auch:

$$\sin^2\varphi - 2Z''\sin\varphi\cos\delta + Z''Z''\cos^2\delta = \sin^2\delta - y''y''\sin^2\delta - Z''Z'' + Z''Z''\cos^2\delta$$

oder:

$$(\sin\varphi - Z''\cos\delta)^2 = \sin^2\delta - y''y''\sin^2\delta - Z''Z''\sin^2\delta$$ oder:

$$\sin\varphi = Z''\cos\delta \pm \sqrt{\sin^2\delta - y''y''\sin^2\delta - Z''Z''\sin\delta}$$
$$= Z''\cos\delta \pm \sin\delta\sqrt{1-y''y''-Z''Z''}$$ woraus man φ findet,

und ist φ bekannt, so erhält man s aus:

$$\cos s = \frac{y''y''}{\cos^2\varphi}$$ *

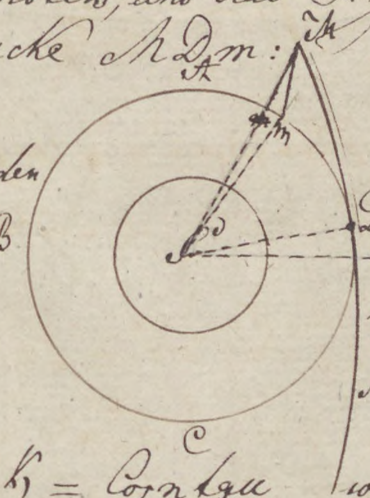
106 Berechnung der Planetenbeobachtungen

Aus den Tafeln hat man das Argument der Breite, die Neigung der Bahn, und die Länge des aufsteigenden Knotens jedes Planeten zu jeder gegebenen Zeit; und daraus findet man die heliocentrische Länge und Breite, oder den Ort des Planeten auf folgende Art.

Es sey in S die Sonne, ABCD die Ebene der Ekliptick, ☊ der aufsteigende Knoten, So die Linie der Nachtgleichen und M☊N ein Stück der Planetenbahn, so wie n die Neigung dieser Bahn. Sey der Planet in M, so wird der Breitenkreis des Planeten die Ekliptik in dem Puncte m treffen, und wenn dann ein für allemahl die Buchstaben:

$l, b, k, u,$ die heliocentrische Länge und Breite, ferner die Länge aufsteigenden Knotens, und das Argument der Breite bezeichnet, so ist, in dem Dreyecke MDm:

$Mm = b$; $MDm = n$
$MD = l - k$; $MmD = 90°$
$DM = u$;



Nun hat zwischen den ~~Stücken~~ vier aufeinander folgenden Stücken:

$\cot u \sin(l-k) - \cot 90° \sin n = \cos n \cos(l-k)$

dass heisst:

$\sin(l-k) = \cos n \cos(l-k) \operatorname{tg} u$

oder:

$\operatorname{tg}(l-k) = \cos n \operatorname{tg} u$ woraus man die heliocentrische Länge finden kann.

Ferner ist in demselben Ausdrucke:

$\sin b : \sin n = \sin u : 1$ oder:

$\sin b = \sin n \sin u$; woraus man die heliocentrische Breite findet. Um aber den beobachteten Ort mit dem berechneten heliocentrischen zu vergleichen, muss dieser erst auf den geocentrischen gebracht werden, wozu man die Seite ( ) No ( ) entwickelten Ausdrücke braucht, wo man die Buchstaben in der dort festgesetzten Bedeutung nimmt:

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - N) = r\cos b \cos(l - N) - R\cos(L - N)$$
$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - N) = r\cos b \sin(l - N) - R\sin(L - N)$$
$$\rho \sin\beta = r \sin b$$

Da N ganz willkührlich ist, so wollen wir $N = \frac{1}{2}(L + l)$ setzen, dann ist:

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)) = r\cos b \cos(l - \tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}L) - R\cos(L - \tfrac{1}{2}L - \tfrac{1}{2}l)$$
$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)) = r\cos b \sin(l - \tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}L) - R\sin(L - \tfrac{1}{2}L - \tfrac{1}{2}l)$$

die zweyte durch die erste dividirt, gibt:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)) = \frac{r\cos b \sin\frac{1}{2}(l-L) + R\sin\frac{1}{2}(l-L)}{r\cos b \cos\frac{1}{2}(l-L) - R\cos\frac{1}{2}(l-L)}$$ nähmlich:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)) = \frac{r\cos b + R}{r\cos b - R} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l-L)$$

Um auch für β den passenden Ausdruck zu finden, werden wir erst ρ bestimmen

$\rho \cos\beta \sin(\lambda - N) = r\cos b \sin(l - N) - R\sin(L - N)$ oder für $N = \frac{1}{2}(L+l)$

$\rho\cos\beta\sin(\lambda - \frac{1}{2}(L+l)) = r\cos b\sin(l-\frac{1}{2}(l+L)) - R\sin(L - \frac{1}{2}(L+l))$

also:
$$\rho = \frac{r\cos b \sin\frac{1}{2}(l-L) - R\sin\frac{1}{2}(L-l)}{\cos\beta\sin(\lambda-\frac{1}{2}(l+L))}$$

oder:
$$\rho = \frac{\sin\frac{1}{2}(l+L)}{\cos\beta\sin(\lambda-\frac{1}{2}(l+L))}\cdot(r\cos b - R)$$

Man hat also:

$\rho\cos\beta\sin(\lambda-\frac{1}{2}(l+L)) = \sin\frac{1}{2}(l+L)(r\cos b - R)$ und nach dem Früheren:

$\rho\sin\beta = r\sin b$

also auch, wenn man die 2te durch die erste dividirt:

$$\frac{tg\beta}{\sin(\lambda-\frac{1}{2}(l+L))} = \frac{r\sin b}{\sin\frac{1}{2}(l+L)(r\cos b - R)}$$ nämlich: $$tg\beta = \frac{r\sin b\sin(\lambda-\frac{1}{2}(L+l))}{\sin\frac{1}{2}(l+L)(r\cos b-R)}$$

oder wenn man den Werth v ρ beachtet:

$$tg\beta = \frac{r\sin b}{\;}$$ der gesuchte Ausdruck.

Diese Längen werden vom mittleren, bloss von der Praecession afficirten Frühlingspuncte gezählt, um aber die wahren Längen zu erhalten, muss man aber auch noch auf die Nutation und Aberration Rücksicht nehmen, und so hat man dann, wenn $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ die tägliche Änderung der Länge und Breite ausgedrückt bezeichnet, für die wahren (von Aberration, Nutation, und Praecession afficirten) Längen und Breiten:

$\lambda' = \lambda - 16''.8 \sin \text{☊☾} - 0.00576\rho\Delta\lambda$
$\beta' = \beta - 0.00576\rho\Delta\beta$
wo natürlich, wenn λ und β abnimmt, auch $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ negativ ist.

Nun hätte man also den tabellarischen Ort des Planeten, oder dessen geocentrische Länge und Breite, wie sie aus den Elementen folgt, um aber diesen tabellarischen mit dem beobachteten Orte des Planeten zu vergleichen, stehen noch folgende 2 Hindernisse entgegen:

1stens kann man bloss Rectascensionen und Declinationen, keineswegs aber Längen und Breiten unmittelbar beobachten, um daher den tabellarischen und beobachteten Ort mit einander vergleichen zu können, muss entweder die ~~...~~ berechnete Länge und Breite in Rectascension und Declination, oder aber die beobachtete Rectascension und Declination in Länge und Breite verwandelt werden, welch' Letzteres am vortheilhaftesten ist.

<u>2tens.</u> Sind die beobachteten AR. und Decl. ausser den Störungen, welche wir schon beym tabellarischen Orte berücksichtigt haben, auch noch der Wirkung der Parallaxen unterworfen, welche wir noch wegschaffen müssen; ehe wir beyde Orte miteinander vergleichen.

Zu diesem Zwecke bemerke man, dass man für die Parallaxe der Länge und Breite allgemein hat:

$$\lambda - \lambda' = P \sin(\lambda - L) \qquad \beta^* - \beta' = Q \sin(\beta - \varepsilon)$$

Die folgenden Glieder können ihrer Kleinheit wegen, füglich vernachlässigt werden.

Die Hülfsgrössen sind:

$$P = \frac{\sin\pi \cos B}{\cos\beta} \qquad Q = \frac{\sin\pi \sin B}{\sin\varepsilon}$$

ε aber ist aus: $tg\,\varepsilon = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\cos(L - \frac{1}{2}(\lambda' + \lambda))}$ gegeben.

Ist nun α, δ, die beobachtete, α', δ', aber die wahre AR. und Decl. des Planeten, ϑ die Sternzeit der Beobachtung, und φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, so findet man durch obige Ausdrücke die Parallaxe der Rectascension und Declination ~~...~~ wenn man statt der Ekliptick den Aequator zum Grunde legt, man hat dann:

$$\lambda = \alpha \qquad \beta = \delta \qquad L = \text{AR. des Zeniths} = \vartheta \qquad \pi = \text{Horizontalparall. des Planeten}$$
$$\lambda' = \alpha' \qquad \beta' = \delta' \qquad B = \text{Br. der Zen.} = \varphi \qquad \varepsilon \text{ hypoth.} = \psi$$

also auch:

$$P = \frac{\sin\pi \cos\varphi}{\cos\delta}\,; \quad Q = \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\sin\psi}\,; \quad tg\,\psi = \frac{tg\,\varphi}{\cos(\alpha - \vartheta)}$$

daher für die Parallaxe der Rectascension und Declination:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\sin\pi \cos\varphi}{\cos\delta} \sin(\alpha - \vartheta) \text{ oder nahe} = \pi . \frac{\cos\varphi \sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\delta}$$

$$\delta - \delta' = \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\sin\psi} \sin(\delta - \psi) \text{ oder nahe} = \pi . \frac{\sin\varphi \sin(\delta - \psi)}{\sin\psi}$$

und wenn, wie es meistens geschieht, die Beobachtung im Meridian gemacht wird, wo: $\vartheta = \alpha$ ist; so ist:

$$\alpha' = \alpha^* \text{ und}$$
$$\delta' = \delta + \pi \sin(\varphi - \delta)$$

Um aber auch noch diese wahre Rectascension und Declination auf Länge und Breite zu reduzieren, braucht man die wahre Schiefe der Ekliptick für die Zeit der Beobachtung, die mittlere Schiefe ist für die Zeit T:

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,57''.0 - 0''.521\,(T - 1800)$$

und die Änderung der Schiefe der Ekliptick durch die Nutation ist: $+ 9''.0 \, \mathrm{Cos}\, \Omega\,☾$ also wahre Schiefe für die gegebene Zeit T:

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,57''.0 - 0''.521\,(T - 1800) + 9''.0\,\mathrm{Cos}\,\Omega\,☾$$

und mit dieser Schiefe der Ekliptick findet man aus der beobachteten Rectascension und Declination, die gleichsam ebenfalls beobachtete Länge und Breite, durch die Ausdrücke:

$$\mathrm{tg}\,\lambda'' = \mathrm{tg}\,\alpha' \frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon + x)}{\mathrm{Sin}\, x} \;;\; \mathrm{tg}\,\beta'' = \mathrm{Sin}\,\delta' \frac{\mathrm{Cos}(\varepsilon + x)}{\mathrm{Cos}\, x}$$

wo x aus $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{Sin}\,\alpha'\,\mathrm{Cotg}\,\delta'$ gefunden wird.

Und diese so erhaltene Länge und Breite mit der tabellarischen verglichen, gibt endlich für die Fehler der Tafel:

in Länge: $d\lambda = \lambda'' - \lambda'$

in Breite: $d\beta = \beta'' - \beta'$

II) Bey den neuen Planeten, deren Elemente noch grosser Verbesserungen bedürfen, pflegt man die Werthe von u und v unmittelbar aus den Elementen zu berechnen, was folgender Massen geschieht: Zuerst sucht man für die Zeit der Beobachtung die mittlere Länge des Planeten und zieht diese von der Länge p des Perihelium ab, um die mittlere Anomalie m desselben zu erhalten. Ist dann ε die Excentricität seiner Bahn, ω die excentrische und v die wahre Anomalie seiner Bahn, so findet man ω und v aus den Gleichungen:

$$m = \omega - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Sin}\,1''}\,\mathrm{Sin}\,\omega \;;\; \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega$$

siehe Seite (91)

No (33) Ist dann a die halbe grosse Axe der Planetenbahn, und ~~K~~ die Länge des aufsteigenden Knotens, so ist der Radius vector des Planeten:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\,\mathrm{Cos}\,v} \;;$$

Und das Argument der Breite:

$$u = v + p - K \;;$$

und nachdem man diese Grössen

hat, findet man l, b, λ, β, und ρ gerade so wie früher.

III) Bestimmung der geocentrischen Länge und Breite eines Cometen unter der Voraussetzung einer parabolischen Bahn.

Vorerst wollen wir die Gleichung der Ellipse und Parabel aufstellen, um sich zu überzeugen, dass wirklich sehr excentrische Ellipsen in der Nähe ihres Scheitels für Parabeln genommen werden können.

Wenn a und b die grosse und kleine Halbaxe bezeichnen, und man einen ihrer Scheitel für den Anfangspunct der Abscissen nimmt, so ist die Gleichung der Ellipse für den Fall allgemein:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

Sey also in unserem Falle a, $a\varepsilon$, und q die halbe grosse Axe, Excentricität und Entfernung des Brennpunctes vom Scheitel (hier das Perihelium), und zählt man die ~~Ellipsen~~ Ordinaten ebenfalls vom Scheitel der Ellipse, so ist:

$$y^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{a^2(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{a^2}(2ax - x^2) = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)(2ax - x^2)$$

Es ist aber $q = a(1-\varepsilon)$ also $(1-\varepsilon) = \frac{q}{a}$ ~~ist~~ folglich:

$$y^2 = \frac{q}{a}(1+\varepsilon)(2ax - x^2) = \frac{q}{a}(1+\varepsilon)\,x\left(2 - \frac{x^2}{a}\right) \; ***$$

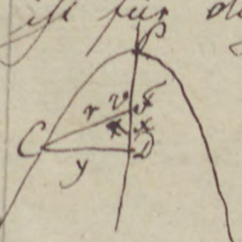
Die Gleichung der Parabel aber, wenn auch hier q den Abstand des Brennpunctes vom Scheitel bezeichnet, für ähnliche Ordinaten ist:

$y^2 = 4qx$ wo $4q$ der Parameter der Parabel ist.

Zählt man aber die Abscissen auf der Axe der Parabel, statt vom Scheitel vom Brennpuncte, so ist ihre Gleichung für diesen Fall:

$$y^2 = 4q(x+q)$$

Für unseren Fall nun ist die Parabel die Cometenbahn, der Brennpunct die Sonne, der Scheitel das Perihelium, und q die Entfernung des Periheliums von ~~Scheitel~~ der Sonne, wenn wir nun hier: den Radiusvector des Cometen $= r$, und die wahre Anomalie oder den Winkel des r mit $q = v$ setzen, so ist für diesen Fall: $x = -r\cos v$ und $y = r\sin v$ also auch:



$$r^2\sin^2 v = 4q(-r\cos v + q) \text{ nähmlich:}$$

$$r^2\sin^2 v = 4q^2 - 4qr\cos v \text{ ~~oder~~:}$$

$$r^2 + \frac{4qr\cos v}{\sin^2 v} = \frac{4q^2}{\sin^2 v}\text{; d.h. } r^2 + \frac{4qr\cos v}{\sin^2 v} + \frac{4q^2\cos^2 v}{\sin^4 v} = \frac{4q^2}{\sin^2 v} + \frac{4q^2\cos^2 v}{\sin^4 v}$$

oder:

$$\left(r + \frac{2q\cos v}{\sin^2 v}\right)^2 = \frac{4q^2}{\sin^2 v}\left(1 + \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}\right) = \frac{4q^2}{\sin^4 v}$$ dass heisst:

$$r + \frac{2q\cos v}{\sin^2 v} = \pm\frac{2q}{\sin^2 v} \quad \text{oder: } r = -\frac{2q\cos v}{\sin^2 v} \pm \frac{2q}{\sin^2 v}$$

Hier wird man, da r positiv seyn muss, und $2q\cos v$ sicher kleiner ist, als $2q$, das obere Zeichen behalten wodurch man erhält:

$$r = \frac{2q}{\sin^2 v} - \frac{2q\cos v}{\sin^2 v} = \frac{2q(1-\cos v)}{\sin^2 v} = \frac{4q\sin^2\frac{1}{2}v}{4\sin^2\frac{1}{2}v\cos^2\frac{1}{2}v}$$

oder endlich:

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v} \quad **$$

In diesem Ausdrucke ist aber v noch unbekannt, und muss daher erst bestimmt werden. Zu dem Ende bemerke man, dass wenn $\frac{1}{2}f$ die Fläche des Parabolischen Sectors zwischen P und C, dv aber die Änderung der wahren Anomalie seit dem Durchgange des Planeten durch das Perihelium bezeichnet, $\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}\int r^2 dv$ ist.

Substituirt man nun statt r^2 seinen Werth, so erhält man:

$$\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}\int\frac{q^2 dv}{\cos^4\frac{1}{2}v} = \frac{1}{2}\int\frac{q^2}{\cos^2\frac{1}{2}v}\cdot\frac{dv}{\cos^2\frac{1}{2}v} = \frac{1}{2}\int q^2\left(1+tg^2\tfrac{1}{2}v\right)\cdot 2d\,tg\tfrac{1}{2}v \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{2}f = q^2\left(tg\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{1}{2}v\right)$$

Es ist aber nach den unmittelbar aus den ersten Grundsätzen der Bewegung abgeleiteten Ausdrücken: $\int r^2 dv = Bt$ und da ferner $\frac{B^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}$ gleich der Kraft der Sonne in der Entfernung r ist, und da μ^2 wieder die Intensität dieser Kraft in der Entfernung $= 1$ oder $\frac{B^2}{p} = \mu^2$ gesetzt wird, so ist auch: $\frac{B^2}{pr^2} = \frac{\mu^2}{r^2}$ oder $B = \mu\sqrt{p}$ daher ist auch, wenn man statt $\frac{1}{2}f$ seinen Werth $\frac{1}{2}\mu t\sqrt{p}$ setzt; der in unserem Falle $= \frac{1}{2}\mu t\sqrt{2q}$ ist; so hat man:

$$\frac{1}{2}\mu t\sqrt{2q} = q^2\left(tg\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{1}{2}v\right) = \tfrac{1}{2}\mu t\, 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = q^2\left(tg\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{1}{2}v\right) \text{ und hieraus:}$$

$$t = \frac{2q^2}{2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mu}\left(tg\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{1}{2}v\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot q^{\frac{3}{2}}}{\mu}\left(tg\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{1}{2}v\right)$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}}{3\mu}\left(3tg\tfrac{1}{2}v + tg^3\tfrac{1}{2}v\right)$$ oder wenn man wie Littrow es in seiner populären Astronomie thut, den constanten Factor dieser Gleichung $\frac{\sqrt{2}}{3\mu} = \mu$ setzt, so erhält man die wahre Anomalie aus der Gleichung:

$$t = \mu q^{\frac{3}{2}}\left(3tg\tfrac{1}{2}v + tg^3\tfrac{1}{2}v\right)$$ worin ausser der Anomalie alles beckannt ist.

Wenn man dann aus dieser Gleichung den Werth von v bestimmt hat, so erhält man das Argument der Breite u sogleich, indem u ~~gleich~~ ist:

$u = v + p - k$ {Siehe über die Bedeutung der Buchstaben die No

und kennt man dann so r, v und u, so bestimmt man daraus l, b, λ, β, gerade so wie früher.

(IV.) Bey beobachteten Oppositionen, kömmt es darauf an, zu wissen um wie viel jedes Element der Tafel geändert werden müsse, um die Differenz zwischen dem beobachteten und tabellarischen Orte des Planeten aufzuheben. Dieß erhält man auf folgende Weiße, nach S . No. 2 :

$tg(l-k) = \cos n \, tg u$ oder: $\sin(l-k) = \cos(l-k) \cos n \, tg u$ und

$\sin \beta = \sin n \sin u$ ~~diff~~ die erste Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$\sin l \cos k - \cos l \sin k = \cos l \cos k \cos n \, tg u + \sin l \sin k \cos n \, tg u$$

Differenziert man nun diese Gleichung unter der Voraussetzung dass alle Grössen veränderlich sind, so ist:

$$\cos l \cos k \, dl - \sin l \sin k \, dk + \sin l \sin k \, dl - \cos l \cos k \, dk = \begin{cases} - \cos l \sin k \cos n \, tg u \, dk \\ - \sin l \cos k \cos n \, tg u \, dl \\ - \cos l \cos k \sin n \, tg u \, dn \\ + \frac{du}{\cos^2 u} \cos l \cos k \cos n \\ + \cos l \sin k \cos n \, tg u \, dl \\ + \sin l \cos k \cos n \, tg u \, dk \\ - \sin l \sin k \sin n \, tg u \, dn \\ + \frac{du}{\cos^2 u} \sin l \sin k \cos n \end{cases}$$

Daß heißt:

$$dl \{\cos l \cos k + \sin l \sin k + \sin l \cos k \cos n \, tg u - \cos l \sin k \cos n \, tg u\}$$
$$= dk \{\sin l \sin k + \cos l \cos k + \cos l \sin k \cos n \, tg u - \sin l \cos k \cos n \, tg u\}$$
$$- dn \{\cos l \cos k \sin n \, tg u + \sin l \sin k \sin n \, tg u\} + \frac{du}{\cos^2 u} \{\cos l \cos k \cos n + \sin l \sin k \cos n\}$$

daß heißt:

$$dl \{\cos(l-k) + \cos n \, tg u \sin(l-k)\} = dk \{\cos(l-k) + \cos n \, tg u \sin(l-k)\} - dn \sin n \, tg u \cos(l-k) + \frac{du}{\cos^2 u} \cos n \cos(l-k)$$

oder

$$dl = dk - dn \left\{ \frac{\sin n \cos(l-k) \, tg u}{\cos(l-k) + \sin(l-k) \cos n \, tg u} \right\} + du \frac{\cos n}{\cos^2 u} \left\{ \frac{\cos(l-k)}{\cos(l-k) + \sin(l-k) \cos n \, tg u} \right\}$$

nähmlich:

$$\cancel{dl = dk - dn} \left\{ \frac{\sin n \, tg u}{1 + tg(l-k) \cos n \, tg u} \right\} + du \frac{\cos n}{\cos^2 u} \left\{ \frac{1}{1 + tg(l-k) \cos n \, tg u} \right\}$$

daher: $$dl = dK - dn\left\{\frac{\sin n\, tg u}{1+tg(l-K)\cos n\, tg u}\right\} + du\left\{\frac{\cos n}{\cos^2 u + tg(l-K)\cos n \sin u \cos u}\right\}$$

oder für unseren Zweck besser:

$$dl = dK - dn\left\{\frac{\cos(l-K)\, tg n}{\frac{\cos(l-K)}{\cos n\, tg u} + \sin(l-K)}\right\} + du\left\{\frac{\cos(l-K)\cos n}{\cos^2 u\cos(l-K) + \sin(l-K)\cos n\, tg u \cos^2 u}\right\}$$

oder da nun: $tg(l-K) = \cos n\, tg u$ ist; so ist auch

$$dl = dK - dn\left\{\frac{\cos(l-K)\,tg(l-K)\,tg n}{\cos(l-K)+\sin(l-K)\,tg(l-K)}\right\} + du.\frac{\cos n}{\cos^2 u}\left\{\frac{\cos(l-K)}{\cos(l-K)+\sin(l-K)\cos n\, tg u}\right\}$$

$$= dK - dn\left\{\frac{\sin(l-K)\,tg n\cos(l-K)}{\cos^2(l-K)+\sin^2(l-K)}\right\} + du.\frac{\cos n}{\cos^2 u}\left\{\frac{\cos(l-K)}{\cos(l-K)+\sin(l-K)\,tg(l-K)}\right\}$$

$$= dK - dn\left\{\sin(l-K)\cos(l-K)\,tg n\right\} + du\frac{\cos n}{\cos^2 u}\left\{\cos^2(l-K)\right\}$$

$$= dK - dn\left\{\sin(l-K)\cos(l-K)\,tg n\right\} + \frac{du\cos n}{\cos^2 u}\left\{\frac{\cos(l-K)}{\cos(l-K)\left\{1+\cos^2 n\, tg^2 u\right\}}\right\}$$

da $\sin(l-K) = \cos(l-K)\cos n\, tg u$ ist.

daraus folgt:

$$dl = dK - dn\sin(l-K)\cos(l-K)\,tg n + du.\frac{\cos n}{\cos^2 u}\left\{\frac{1}{1+\cos^2 n\, tg^2 u}\right\}$$

oder:

$$dl = dK - dn\sin(l-K)\cos(l-K)\,tg n + du\frac{\cos n}{\cos^2 u}\left\{\frac{1}{1+tg^2(l-K)}\right\}$$

$$= dK - dn\sin(l-K)\cos(l-K)\,tg n + \frac{du\cos n}{\cos^2 u\sec^2(l-K)}$$

und da man hat: $tg n \sin(l-K) = tg b$ also:

$$\frac{\sin b}{tg b} = \cos b = \frac{\sin n \sin u}{tg n \sin(l-K)} = \frac{\cos n\sin u}{\sin(l-K)} = \frac{\cos n \sin u}{\cos n\, tg u\cos(l-K)} = \frac{\cos u}{\cos(l-K)}$$

also auch: $\frac{\cos^2(l-K)}{\cos^2 u} = \cos^2 b$ ist, so ist:

$$dl = dK - dn\cos(l-K)\,tg b + du\cos n\sec^2 b$$

Ferner hat man aus:

$\sin b = \sin n \sin u$:

$\cos b\, db = \cos n \sin u\, dn + \cos u \sin n\, du$ also:

$db = \dfrac{\cos n \sin u\, dn + \cos u \sin n\, du}{\cos b}$ oder wegen $\dfrac{1}{\cos b} = \dfrac{\cos(l-k)}{\cos u}$:

$db = \dfrac{(\cos n \sin u\, dn + \cos u \sin n\, du)\cos(l-k)}{\cos u}$ oder:

$= \cos n\, tg\, u\, dn \cos(l-k) + \sin n \cos(l-k)\, du$ oder: $tg\, u \cos n \cos(l-k) =$ gleich $\sin(l-k)$ ist:

$db = dn \sin(l-k) + du \sin n \cos(l-k)$; so dass man also hat:

$dl = dk - dn \cos(l-k)\, tg\, b + du \dfrac{\cos n}{\cos^2 b}$

$db = dn \sin(l-k) + du \sin n \cos(l-k)$

Bezeichnet man nun aber durch: a, $a\varepsilon$, π die halbe grosse Axe, die Excentricität und die Länge des Perihelium, und nennt t die Anzahl der Tage, die seit der Epoche zu welcher die mittlere Länge L gehört verflossen sind, und f endlich die mittlere tägliche Bewegung, so ist:

$u = v + \pi - k$ und:

$m = L' + tf - \pi$

Aber es ist:

$$\left.\begin{array}{l} dv = \alpha\, dm + \beta\, d\varepsilon \\ \text{wo:} \\ \alpha = \dfrac{a^2}{r^2}\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{ und} \\ \beta = \dfrac{(2+\varepsilon\cos v)\sin v}{1-\varepsilon^2} \end{array}\right\} \text{Siehe } N^o$$

Nun ist aus der obigen Gleichung:

$du = dv + d\pi - dk$ nähmlich:

$du = \alpha(dL' + t\,df - d\pi) + \beta\, d\varepsilon + d\pi - dk$

Ist nun $\dfrac{\cos n}{\cos^2 b} = A$, so ist:

$dl = dk - dn \cos(l-k)\, tg\, b + \{\alpha(dL' + t\,df - d\pi) + \beta\, d\varepsilon + d\pi - dk\} A$

$= dk(1-A) - dn \cos(l-k)\, tg\, b + A\{\alpha(dL' + t\,df) - \alpha\, d\pi + d\pi(1-A) + \beta\, d\varepsilon\}$

und: ~~[illegible]~~:

$$db = dn \,\mathrm{Sin}(l-K) + \{\alpha(dL + t\,d\psi - d\pi) + \beta\, d\varepsilon + d\pi - dK\}\,\mathrm{Sin}\, n \cos(l-K)$$

Es ist aber:

$$\mathrm{Sin}\, n \cos(l-K) = \frac{\mathrm{Sin}\, b\, \mathrm{Sin}(l-K)}{\mathrm{Sin}\, u \cos n\, \mathrm{tg}\, u} = \frac{\mathrm{Sin}\, b\, \mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, n\, \mathrm{Sin}\, u\, \mathrm{tg}\, u \cos n}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^2 b \cos u}{\mathrm{Sin}\, n\, \mathrm{Sin}^2 u} = \frac{\mathrm{Sin}^2 b\, \mathrm{cotg}\, u}{\mathrm{Sin}\, n\, \mathrm{Sin}\, u} = \frac{\mathrm{Sin}\, 2b}{\mathrm{Sin}\, n\, \mathrm{Sin}\, u\, \mathrm{tg}\, u}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^2 b \cos n}{\mathrm{tg}(l-K)\, \mathrm{Sin}\, u\, \mathrm{Sin}\, n} = \frac{\mathrm{Sin}^2 b\, \mathrm{cotg}\, n\, \mathrm{cotg}(l-K)}{\mathrm{Sin}\, u}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^2 b\, \cancel{\mathrm{tg}\, b}\, \mathrm{cotg}(l-K)\, \mathrm{Sin}(l-K)}{\mathrm{Sin}\, u\, \mathrm{tg}\, b} = \frac{\mathrm{Sin}\, b \cos b\, \mathrm{cotg}(l-K)\, \mathrm{Sin}(l-K)}{\mathrm{Sin}\, u}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\, b \cos b\, \mathrm{cotg}(l-K) \cos(l-K) \cos n\, \mathrm{tg}\, u}{\mathrm{Sin}\, u}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\, b \cos b\, \mathrm{cotg}(l-K) \cos(l-K) \cos n}{\cos u} = \frac{\mathrm{Sin}\, b \cos b\, \mathrm{cotg}(l-K) \cos n}{\cos b}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\, 2b\, \mathrm{cotg}(l-K) \cos n}{\cos b}$$ oder da $A = \frac{\cos n}{\cos b}$ ist,

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\, 2b\, \mathrm{cotg}(l-K) . A$$ und wenn man nun:

$\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\, 2b\, \mathrm{cotg}(l-K) = B$ setzt; so ist: $\mathrm{Sin}\, n \cos(l-K) = AB$, und daher:

$$db = dn\, \mathrm{Sin}(l-K) + \alpha(dL + t\,d\psi - d\pi) AB + \beta\, d\varepsilon\, AB + d\pi\, AB - dK\, AB$$

$$= AB\{\alpha\, dL + \alpha t\, d\psi + (1-\alpha)\, d\pi + \beta\, d\varepsilon\} - AB . dK + dn\, \mathrm{Sin}(l-K)$$

und wenn man der grösseren Genauigkeit wegen statt β da es ~~in~~ in gesetzt einer trigonometrischen Function gegeben ist, $\frac{\beta}{\mathrm{Sin}\, 1''}$ setzt, so hat man die ~~Änderungen~~ Differenzen der Längen und Breiten durch folgende Ausdrücke gegeben, wo A, B, β, ε etc. die obige Bedeutung haben:

$$dl = A\left\{\alpha\, dL' + \alpha t\, d\psi + (1-\alpha)\, d\pi + \frac{\beta\, d\varepsilon}{\mathrm{Sin}\, 1''}\right\} + (1-A)\, dK - \mathrm{tg}\, b \cos(l-K) . dn$$

$$db = AB\left\{\alpha\, dL' + \alpha t\, d\psi + (1-\alpha)\, d\pi + \frac{\beta\, d\varepsilon}{\mathrm{Sin}\, 1''}\right\} - AB . dK + \mathrm{Sin}(l-K) . dn$$

Für die Sonne für welche $b = 0$ ist, gehen diese zwey Gleichungen da auch $n = 0$ ist, in folgende einfache über: Es ist: $A = \frac{\cos o}{\cos o} = 1$

Also:

$$dl = \alpha\, dL' + (1-\alpha)\, d\pi + \frac{\beta\, d\varepsilon}{\sin 1''} + \alpha\, \delta\, df \; *$$

Jede beobachtete Opposition gibt nun ~~[illegible]~~ diese zwey Gleichungen, hat man daher 3 Oppositionen beobachtet so hat man 6 Gleichungen, aus welchen man dann die 6 unbekannten Grössen $d\pi$, dk, dn, L', $d\varepsilon$, df durch gewöhnliche Elimination bestimmen kann.

De Xerxes, Thermopilákat elfoglalván, azonnal Athen város~~hoz~~ ment, s azt minden védelem nélkül, megölvén a papokat, mellyeket a várban talált, hamuvá égette. Minek hirére, ~~mivel a megrettent hajó~~ a hajó-had megrettenvén, midőn ott maradni nem merészelnének, és sokan sürgették: hogy haza menvén magukat bástyák által védelmeznék. Themistocles egyedül állott ellene, ~~mert együtt maradva~~ azt állitván, miszerint együtt maradva szembe szállhatnak az ellenséggel, szétoszolva pedig mind-nyájan elvesznének, s ugyanazt Euribiadesnek a spartaiak király-lyának is megerősíté.

$$ZAS = ASO + AOF$$
$$Z'FS = FSB + FBS$$
$$ZAS + \cancel{Z'FS} = A\cancel{F}O + A\cancel{O}F + FSB + FOBS$$
$$\cancel{ZAS}$$
$$AOB = ZAS - Z'BS - FSB$$

$$\frac{\begin{array}{r}450\\180\end{array}}{630}$$

$$\frac{\begin{array}{l}3\ f.\ 3\\1\ \ \ \ \ \ \ 5\end{array}}{4\ f.\ 5}$$

Miután ~~a törvényhozás a honpolgárait azon~~ e hon polgárai a törvényhozás által azon tiszteletteljes föladattal bízattak meg, a rendet s belbékét föntartani, a személyes s vagyonbátorságot biztosítani, s bárminémü áttalmas törekvések ellen erős sánczot, ledönthetlen védfalat képezni, ennélfogva minden böcsületes, minden értelmes embernek szent kötelessége, e fontos föladatban részesülni, ~~[illegible]~~

$$y = b\,C\,tg\varphi' \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

$$y = b\,\mathfrak{T}\,tg\varphi \qquad a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$$

$$b\,C\,tg\varphi' = b\,\mathfrak{T}\,tg\varphi \qquad b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

$$\cancel{x}\,tg\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\cancel{x}\,tg\varphi$$

$$tg\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\varphi$$

$$a^2\,tg\varphi' = b^2\,tg\varphi$$

$$a^2\,tg\varphi' = a^2(1-\varepsilon^2)\,tg\varphi$$

$$a : a' = aC : a'M$$

$$a : a' = r : r\,Cos\varphi$$

$$a' = a\,Cos\varphi$$

Ueber das Aequatorial.

die Erforderniße, welche bey einem guten und ~~für~~ zu Beobachtungen brauchbaren Aequatoriale vorhanden seyn müssen, sind außer denjenigen, für deren Daseyn bereits der Künstler sorgt, folgende sechs:

Erstens. Muß der Declinationskreis mit der Rotationsaxe,

Zweytens die optische Axe des Fernrohrs mit der Ebene des Declinationskreises parallel seyn.

Drittens Sollen die Nonien des Stundenkreises genau dem wahren Ost und Westpunkte.

Viertens die Nonien des Declinationskreises eben so genau den beyden Weltpolen entsprechen.

Fünftens die Axe des Instrumentes genau in der Ebene des Meridians liegen, und endlich: ~~Sechs~~

Sechstens die Rotationsaxe des Instrumentes der Erdaxe genau parallel seyn.

§.

Keine dieser Forderungen ist bey irgend einem Instrumente vollkommen entsprochen, immer bleiben kleine Fehler übrig, die man durch Rechnung berücksichtigen muß, will man genaue und die Zwecke der Wissenschaft fördernde Resultate erlangen.

Diese Berücksichtigung wird beim wirklichen Gebrauche des Instrumentes mittelst folgender Formeln geschehen. Doch wollen wir voraus die Bedeutung aller jener Größen angeben, deren wir in den folgenden Formeln bedürfen:

Es heißt also:

ς, ρ durch die Refraction geänderte Stundenwinkel und Poldistanz eines Sterns in der ersten Beobachtung.

ς', ρ' dasselbe für denselben Stern in einer zweyten Beobachtg.

δ, π Abgelesener Stundenwinkel und abgelesene Poldistanz des Sterns in der ersten Beobachtung

δ', π' dasselbe für denselben Stern in der zweyten Beobachtg.

$\Delta\delta$ der Collimationsfehler des Rundenkreises.

$\Delta\pi$ der Collimationsfehler des Declinationskreises.

φ der Fehler <u>fünf</u> d. h. die Abweichung der Rotationsaxe von der Ebene des Meridians;

λ der Fehler <u>sechs</u>, nämlich die Abweichung des Instrumentalpols vom wahren Weltpole.

μ der Fehler <u>eins</u>, nämlich die Neigung des Declinationskreises gegen die Rotationsaxe

ν die Neigung der optischen Axe des Fernrohrs gegen den Declinationskreis

z die Zenithdistanz des Sterns. —

(I) <u>Zu allererst kann man den Fehler ν bestimmen.</u>

Man wählt dazu einen dem Aequator <u>sehr nahen Stern</u>, und beobachtet ihn in der Nähe des Meridians zu beyden Seiten desselben.

Man hat dann:

$$\nu = \frac{(t-\delta)-(t'-\delta')}{2} \sin p.$$

Hier sind t, t' die Uhrzeiten der Beobachtung. <u>Ist der Stern sehr nahe beym ~~Meridiane~~ Aequator</u>, so kann dieser Ausdruck <u>ganz einfach</u>, <u>ohne Rücksicht</u> auf Refraction, Fehler der Uhr, und Reduction auf den Meridian gebraucht werden.

(II) <u>Kann man zur Bestimmung von μ übergehen.</u>

Dazu wählt man einen Stern <u>nahe am Pole</u> (entweder α oder δ Ursae minoris), und läßt ihn zweymahl und zwar schnell nach einander mit entgegengesetzten Lagen des Declinationskreises durchgehen. Dann ist:

$$m = \frac{(t-t')-(\delta-\delta')}{2}$$ wo t und t' wieder die Uhrzeiten der Beobachtungen sind. Und ferner:

$$\mu = \frac{m \sin p - v}{\cos p} \cdot *$$

III) Jetzt kann man die Größen λ und φ bestimmen.

Dazu beobachte man den Polarstern oder auch einen andern dem Pole nahen Stern zweymahl so, dass zwischen beyden Beobachtungen ein Intervall von mehreren Stunden liege.

Dann ist:

$$\mathrm{tg}\left\{\varphi - \tfrac{1}{2}(\varsigma' - \varsigma)\right\} = -\frac{\Pi \operatorname{Cotg} p}{\Sigma} \quad \text{und}$$

$$\lambda = \frac{\tfrac{1}{2}\Pi}{\sin\left\{\varphi - \tfrac{1}{2}(\varsigma' + \varsigma)\right\} \sin\tfrac{1}{2}(\varsigma' - \varsigma)} = -\frac{\tfrac{1}{2}\Sigma}{\cos\left\{\varphi - \tfrac{1}{2}(\varsigma' + \varsigma)\right\} \sin\tfrac{1}{2}(\varsigma' - \varsigma)}$$

wo $\Sigma = (\varsigma' - \varsigma) - (\sigma' - \sigma) - (n' - n)$; $\Pi = (p' - p) - (\pi' - \pi)$

$n = \mu \operatorname{Cotg} p + v \operatorname{Cosec} p$; $n' = \mu \operatorname{Cotg} p' + v \operatorname{Cosec} p'$ ~~ist~~.

IV. Jetzt können auch die Fehler $\Delta\sigma$ und $\Delta\pi$ gefunden werden. Dazu hat man die Formeln:

$$\Delta\sigma = \varsigma - \left\{\text{gelesenes } \sigma + \lambda \sin(\varphi - \varsigma) \operatorname{Cotg} p\right\} - \mu \operatorname{Cotg} p - v \operatorname{Cosec} p.$$

$$\Delta\pi = p - \left\{\text{gelesenes } \pi + \lambda \cos(\varphi - \varsigma)\right\}.$$

Man kann aber auch $\Delta\sigma$ und $\Delta\pi$ auf andere Weise finden, und zwar auf folgende Art:

1) für $\Delta\sigma$. Man wähle einen Stern sehr nahe an dem Aequator oder beobachte einen andern Stern sehr nahe in den Stundenwinkeln $\pm 90°$, so ist dann:

$$\Delta\sigma = \frac{(t' - t) - (\sigma' - \sigma)}{2}$$

2) für $\Delta\pi$. Man beobachte einen dem Pole nahen

in den Stundenwinkeln $360° - \zeta$ und ζ so, daß $\Delta\pi$ sein Zeichen nicht ändern, so ist:

$$\Delta\pi = \frac{(p+p') - (\pi+\pi')}{2} - \lambda \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\zeta$$

Ist also ζ nahe an $90°$ oder $270°$ so ist:

$$\Delta\pi = \frac{1}{2}\left\{(p+p') - (\pi+\pi')\right\}. -$$

Oder man beobachtet denselben Stern zweymahl unmittelbar nacheinander mit umgewandtem Declinationskreise, so hat man $\Delta\pi = \frac{1}{2}(\pi' - \pi)$. —

V) Um auch die Refraction, welche an die scheinbaren Orte des Sterns aus den Tafeln ζ, p, ζ', p' angebracht werden muss, zu finden, hat man folgende Formeln:

Ist r die der Zenithdistanz z entsprechende Refraction und:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{Cos}\zeta \operatorname{Cot} \text{Polhöhe},$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{Sin}\psi \operatorname{tg}\zeta}{\operatorname{Sin}(p-\psi)}, \text{ so ist:}$$

$$\operatorname{Sin} z = \frac{\operatorname{Sin}\zeta \operatorname{Cos} \text{Polhöhe}}{\operatorname{Sin}\omega} \text{ und man hat:}$$

scheinbar. Stundenwinkel: $=$ wahren Stundenwinkel $- \frac{r \operatorname{Sin}\omega}{\operatorname{Sin} p}$

schein. Poldistanz: $=$ wahr. Poldist. $- r \operatorname{Cos}\omega$.

ω ist im 2ten und 4. Quadranten von ζ negativ.

Ist der Stern nicht zu nahe am Horizonte, so thun es folgende Formeln:

Scheinb. Stundenw. $=$ wahr. Stundenw. $- \frac{57'' \operatorname{tg}\zeta \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos}(p-\psi)}$

Scheinb. Pold. $=$ wahr. Pold. $- 57'' \operatorname{tg}(p-\psi)$

VI. Hat man so alle Fehler gefunden, so erhält man den Ort der Sterne aus den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \delta + \Delta\delta + \lambda \sin(\varphi - \zeta)\, \mathrm{Ctg}\, p + \mu\, \mathrm{Ctg}\, p + \nu\, \mathrm{Cosec}\, p \\ p &= \Pi + \Delta\Pi + \lambda \cos(\varphi - \zeta) \end{aligned}\right\} . \text{— —}$$