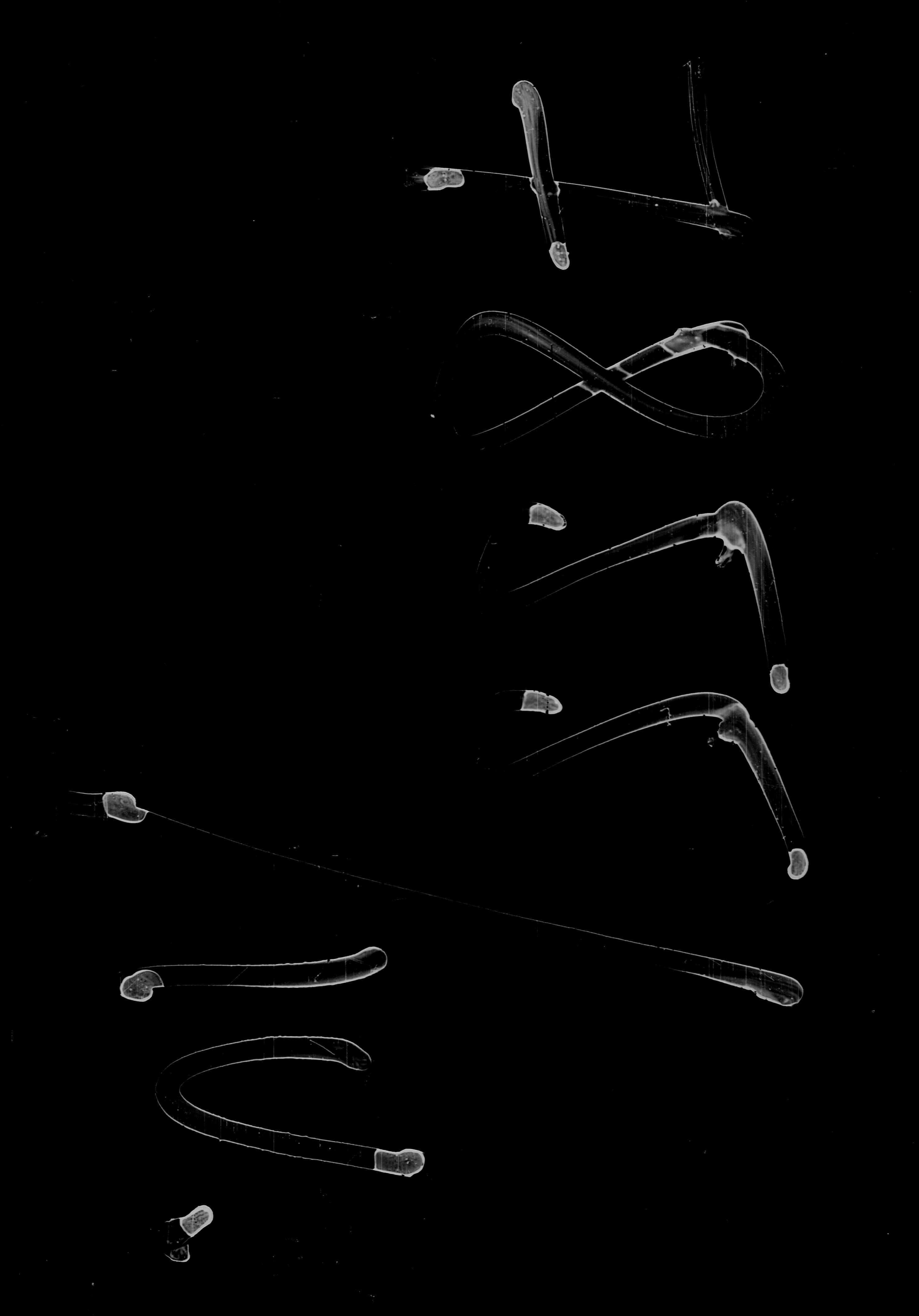


Ex Libris Stephani Székelly fecit.

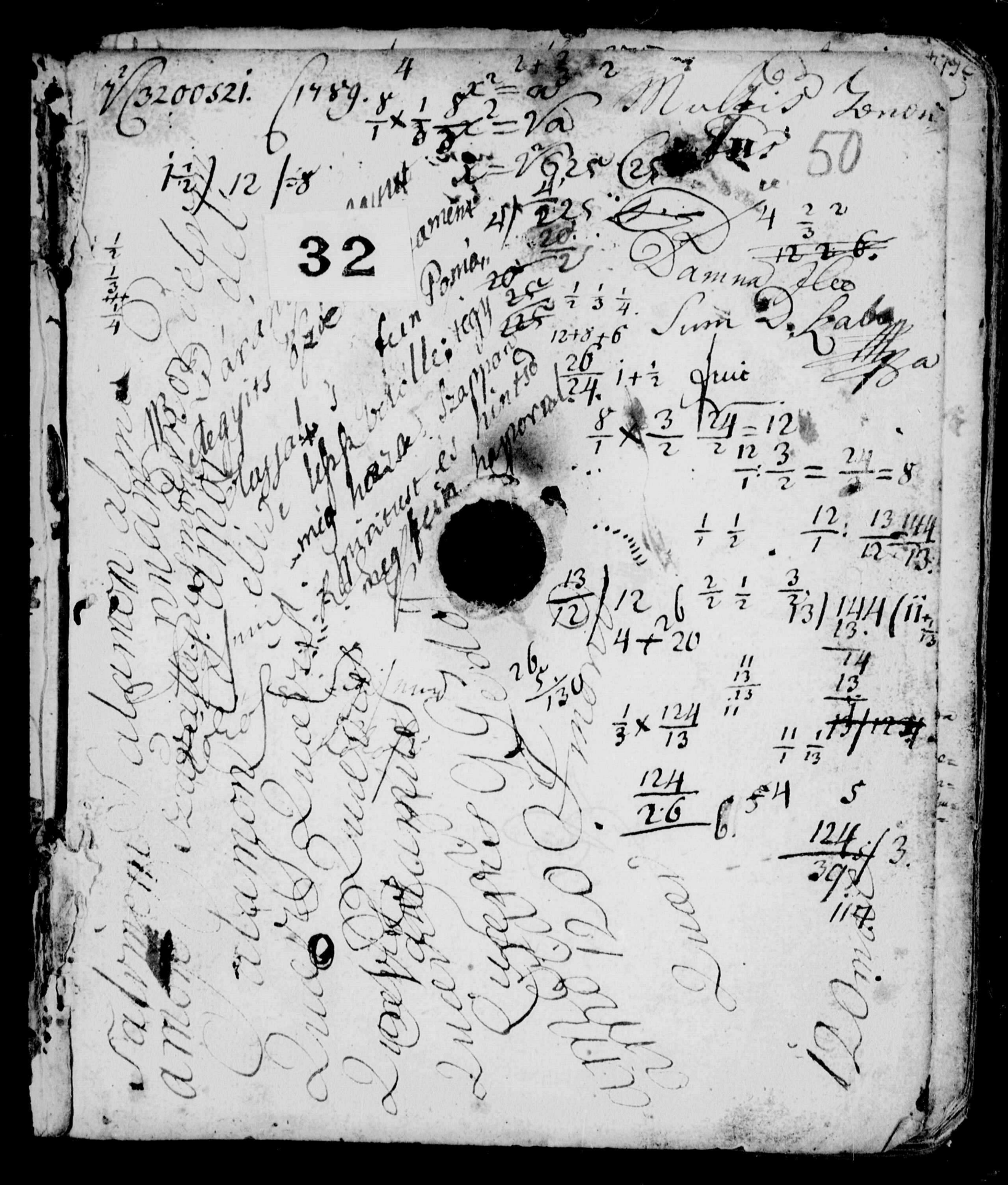
Sigismundi Kolossi die 1 Sept.

Nord Cl. Coroliensis

Besnard Hülönchen

Nr. 375.

PRAELECTIONES MATHEMATICAE
IN UNIV. MATHESIM
- 1784 - SZEKELLY



Deotomania
Deoldria

~~Samuelis Sala~~ sed jam mado a prima Septembris Ao 1796 usus ~~primo~~ ~~ultimum~~ Sigismundi Bilyk

Nro 2.

Nro 1



Taar Miklas von Creges universum

Simeny Eld

Pictas

Maurer Eld Nro 3.

Pictas Politica

Ker 375.

Deo Juvante. Tora Jura!

PRÆLECTIONES MATHEMATICÆ.

Prolego-mena in Universam Mathesim

In quibus (a) Conspectus Matheseos Universæ ut et (b) Mathematicæ Commentatio (c) Ordinis item, quem Nobis in tradenda Mathesi observandum proponimus expositio, unà cum (d) Monitis nonnullis Tyronum Matheseos, ad rectum hujus studium præparantibus breviter comprehensa habentur.

+ Methodi +

(a) Ordo quem in Mathesi struendâ sequimur.

(d) Monita quædam Tyronem Matheseos ad rectum hujus studium præparantia.

V. II. 6. 56. VI. 9

2. Prolegomena in Vsam Mathesim.

Quid est Mathesis? R. Est Scientia Quantitatis.

§ 1. (:a:) Mathesim si capita quis primaria spectamus, Quantitatis v. Quantorum Scientia commode definiemus.

§ 2. Schol. 1mum Origine Graecam Matheseos vocem esse, non est quod prolixe ostendamus, siquidem Philologo potius et Grammatico, quam Philosopho Mathematico datum est, ex quibusnam vocibus Derivatae voces sunt inspirandae.

§ 3. Schol. 2dum. Neque vero unam eandemque semper significandi potestatem, Matheseos vocabulum in Scholis habuisse sapientum exploratum omnibus est, qui non sunt in rei literariae Hist. Hostes. Nunc ut Natura vi sua (:a:) Disciplinam invertere, Nunc (:b:) Disciplinas Fundamentales a propaedeumaticas, seu Artes literales. Nunc denique ne omnia memoremus (:c:) De Quantitate ejusque affectionibus, ac Mensuratione Doctrinam, certitudinis quippe, atque evidentia Gloria in primis nobilem, adeoque Iuvenibus studiosis, quasi partem Sapientiae Pedentricam, sive Institutoriam pro excitandis, atque ad sublimiora studia praeparandis ipsorum Ingeniis, primo omnium loco apud v. Graecos trahi solitam Mathesis significat.

§ 4. Schol. 3tum Scientiae vero vocabulum, sensu excellentioriqe maximique proprio zi (§ 1.) adzibemus, dum per illud: Cognitionem rei per suas causas v. quod proinde est Habitus

Habitus

Prolegomena in Ursam Matheseim. 3

ta est Principiis certis et immotis demonstrandi, seu per legitimam consequentiam inferendi promptitudinem (: quae Philosophi habitus N:) denotamus.

Scientia est promptitudo deserta ex certis et indubitatis Principiis demonstrandi.

§. 5. Quantum sive Quantitas N. quod e pluribus compositum quod concipi (: quarum respectu in vocatur Totum, et quidquid augmenti aut detrimenti capax est.

Quid Quantitas?

§. 6. Schol. ex gr. Numeri, Pondera, et Velocitates, cum angeli et minimi possunt Quantitates sunt.

Quia et talia quae extra Intellectum ita existit praeter intellectum

§. 7. Objectum igitur Matheseos est Quantitas seu res quantae, qua tales (§§. 1. 5. 2.

Objectum Matheseos concipi

§. 8. Corol. Matheseos. Quae omnes et omnino illae scientiae censeri possunt, quorum Objectum Quantitas est.

§. 9. Schol. Quantitates omnes respectu habito ad partes ipsas, constituentes in Discretas et Continuas recte dispescantur, v. conjunctae invicem (: ut in Baculo propriam :) v. citra connexionem continuae n. modo (: ut in Acervo Arenae :) existunt, et Tertium inveniri nequit.

Quantitas Discreta Continua.

§. 10. Quantitas Discreta est, quae constat partibus contiguis, sed inter se partitis. Continua autem cujus partes Unitae, atque invicem connexae existunt.

illa Multitudo haec Magnitudo seu Extensum.

Haec Divisio est respectu nexus inter partes.

§. 11. Schol 1. Quantitas Discreta Multitudo, Continua vero Magnitudo seu Extensum vocabulis nempe sibi propriis a Mathematicis appellatur, atque illa quidem Numeris

exprimi

et primum, Haec vero Lineis, superficiebus, et solidis ab-
iisque designari consuevit.

§. 12. Schol. 2. Tamen si nulla, nisi Physica
in rebus materialibus, et artificiosis adjuncta, relutique
immensa quantitas in rerum Ursine existit, v. exi-
stere pen. Mathematici tamen Quantitatem non in
ipsis modo Corporibus singularibus conspicuam seu ob-
viam, sed mente quoque seu cogitatione, abiisque abstra-
ctam spectare soliti, atque priori pridem modo specta-
ri solitam Concretam seu Mixtam, alias applica-
tam. Posteriori vero modo spectatam Quantitatem
abstractam seu Puram denominantes Geminam Ma-
theseos speciem constituerunt Puram videlicet et Mi-
xtam seu Applicatam.

Math. Pura. §. 13. Mathesis Pura (quam nonnulli
simpliciter Mathesim appellant:) Est Scientia quan-
ti ab omni Materia abstracti. +

Mixta seu Applicata. + ~~§. 14.~~ Mixta vero seu Applicata Quan-
titatis Concretae in eatenus quatenus in hac v. illa Materia
existit spectatae, Scientiam denotat.

§. 14. Coroll. Unde disciplinas Mathe-
seos applicatae Mathesi Pura niti, neque proinde il-
lam nisi habita praevia, quae cognitione intelligi
ritque tractare promum est concludere.

§. 15. Utraque autem Mathesis Pura
scilicet, et applicata, plurimas sane easque per Objecto-
rum seu rerum circa quas versantur, discrimine varias
res comprehendit Doctrinas, ut adeo hodie to-
tius

Proleg in Universam Mathes. 5.

totius Matheseos Cursus plerumque sequentibus ab-
solvatur.

1º Arithmetica de Numeris
2do Geometria de Extensione
3º Trigonometria de Triangulis
4º Algebra de Quantitatibus quibus-
vis Indeterminatis.
5º Statica de Aequilibrio.
6º Mechanica de Potentiis.
7º Hydrostatica de Gravitatione in
Fluidis.
8º Aërometria de Aeris Dimensione
9º Hydraulica de Fluidorum Motu.
10º Optica de Visu per Radios Rectos.
11º Cathoptrica de Visu per Radios
reflexos.
12º Dioptrica de Visu per Radios refractos.
13º Perspectiva de Objectorum ab oculo
in Certa Distantia et altitudine exi-
stentium Delineationem
14º Astronomia de Visu quoque Phae-
nomenis.
15º Geometria de Terrae Dimensione.
16º Chronologia de Cursu Temporum.
17º Gnononica de Horologiis Solaribus
18º Pyrotechnia de ignibus festivis atque
Bellicis, deque Instrumentis eo pertinentibus.

19no

19º Architectura Militari, Mumentis cui adjungitur.

20º Artilleria de Tormentis et ignibus Bellicis.

21º Architectura Civili et Aedificiis.

16. §. Coroll. Ex his itaque quatuor Priores Arithmeticam Trigonometriam Geometriam et Algebram, ad Puram MATHESIM referri debere, reliquas quas enumeravimus Systhematis Mathemati Partes, omnes ad Mathesim applicatam pertinere, vel ex sola (§§. 13. 15.) collatione patescit.

Praeter enumeratas partes huc pertinent Sectione Conicae &c.

§. 17. Scholl. 1. Praeter enumeratas (§. 9.) Matheseos Partes, Sectiones ne Conicae una cum Curiarum et Serierum nonnullarum Proprietatibus atque Palmariis jubendam, Analysis Sublimioribus Artificiis a Philosophis potissimum Recentioribus detectis, eo minimum ad Mathesim Puram referri possunt et debent.

§. 18. Scholl. 2. Partium quoque Matheseos Applicatae, ut minimum quem nos (§. 15.) recensuimus, a Sagatioribus Mathematicis ac Physicis amplificari subinde posse, hoc minus dubitare licet, quo magis luculenta sunt, quae in Scriptis Sequiorum Mathematicorum passim deprehenduntur, accessionis hujus Sequimini talia sunt: Acustica seu Phenologia

Pyro.

Pyrometria Scientia Naturalis atque id genus novae aliae, velut Matheseos applicatae partes.

§. 19. Schol. 3. Non solum plerique veterum, apud quos Doctrinas quasvis, multis Divisionibus ornare (: ne vicam onerare :) moris erat; sed et inter recentiores Philosophos, praeter eam, quam Nos (§. §. 13. 15.) dedimus, varii varias adeo sibi elegerunt Matheseos, Ejusque partium Divisiones, ut facilius esse Aeti=opem levare, quam easque omnes recensere. Proinde, caeteris omissis, eos ut memorabimus, qui Arithmetica et Geometria Ursas Mathematicorum Disciplinas contemplamur, easque quibus Trigonometriae, Sectionum Conicarum, Staticae Mechanicae Opticae et Astronomiae &c. Nomine obtrusae, in Zil aliud esse contendunt, nisi illarum Arithmeticae puta et Geometriae ad peculiaria objecta applicationem ad Motus nempe Astrorum ad Quasvis Affectiones, ad Leges Impactus et Aequilibrii, ad Proprietates Sectionum Conicarum et Triangulorum Affectiones.

Ipsam vero Algebram Arithmeticae et Geometricae Doctrinas calculi Literalis, seu Ursalis subsidio investigandi artem constituunt, qui tamen demumque Zisque similes alii amicissime si rem ipsam, non autem ejusque Divisionem spectaveris nobiscum conveniunt, id quod v. ex dictis Tactenus, uberius autem inferius, ubi de recensitis Matheseos

par

partibus singillatim acturi sumus, earumdemque Definitiones, et quas modo subtiliemus Divisionis dederimus ad evidentiam patebit.

§. 20. Schol. 4. In iis quae Inensque de Mathesi, eiusdemque Objecto, ac partibus gratiam diximus, Brevem Systhematis Mathematici Conspectum absolvimus. Cuius uberiori Tractationi Methodi quoque Mathematicae (quam et nos in addiscenda Mathesi sequi debebimus) brevem pariter Expositionem praemisisse, magnopere in fallor Discentium interest.

Methodus Mathematica

§. 21. (b.) Methodi vero Mathematicae nomine intelligitur Ordo, seu Modus quidam peculiaris, quo adhibitus in veniendas, singulas tradendis Dogmatibus, suis utuntur Mathematici.

est 2plex.

§. 22. Scholl. Methodus autem Haec Mathematica, sicut Differentiam dividitur in Analyticam nempe et Syntheticam.

Analytica

§. 23. Methodus Analytica seu Resolutoria a Principiis Vrsalibus ad specialiora procedendo, in veniendis detegendisque veritatibus famulatur.

+ Compositoria, Syntetica.

§. 25. Syntetica vero seu Specialiora ea quae ope Analysis reperta sunt, in Ordinem Dispenendo, Veritatemque Veritati, ita ut eaeque a se invicem non secus, ac Catenae annuli dependeant per Compositionem nectendo tradendis suis Dogmatibus Mathematicis inservit.

§. 24

§. 24. Scholl. In methodo itaque Synthetica plura adhibentur, et quidem.

1º Deffinitiones.
2º Postulata
3tio Axiomata
4to Experientiae
5to Hypotheses
6to Propositiones.
7º Demonstrationes.
8vo Theoremata
9no Problemata ~~Se~~ Lemmata seu
10mo Porismata
11mo Corotollaria
12mo Scholia. Et haec quidem non semper et ubique omnia, sed ut res postulaverit adhibentur.

§. 25. Est autem Deffinitio distincta illa simulque brevissima rei cujusquam per suas notiones explicatio, seu Determinatio, per quam res eadem ab omnibus aliis distingui quae. Definitio.

§. 26. Schol. 1. Notionum nomine veniunt ipsa rerum in mente repraesentamina sive Conceptus, Hi si ad rem oblatam recognoscendam sufficiant. Notio Clara, alias vero obscura est. Notio rei.

Clara verum est v. Distincta v. Confusa, Illa Indicia rei seu notas, quibus illa occurrens distingui quae, aliis numerisque habet. Haec vero rei quae oblatam ab alia distinguit, indicia seu notas tandem recensere quae. Denique Distincta Notio adaequata est, si non modo rei sed et Notarum ejus, quae Distinctam Notionem ingrediuntur, Distinctam pariter Notionem habuerit, quod ubi secus se habet, Notio distincta quidem sed Inadaequata est.

§. 27.

§. 27. Schol. 2. Mathesis in Definitionibus nomini distinctas et quantum fieri plus ad aequalas adminuit Notiones. Proinde neque in subsequentibus Definitionibus adminuit voces nisi v. ex antecedentibus v. aliunde satis intelligatur, quae res iisdem subjiciatur, et si quando notione confusa contenta est, res ad quam spectat obvia sit necesse est ut v. praesentem quandocumque libuerit praecipere, v. saepius jam olim praeceptae, tandem difficulter reminisci valeamus.

§. 28. Schol. 3. Definitiones vero omnes ad duas classes commode revocantur sunt nimirum Aliae Nominales Aliae Reales.

Definitio Nom. Realis.

§. 29. Definitio Nominalis est enumeratio Notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Realis vero est Notio distincta rei Genesim et Modum quo res illa oriatur v. quomodo possibilis sit exponens.

§. 30. Ex. gr. Circulus pro definiri Figura cujus Periferia ubique a centro aequabiliter distat, aut: quae Radio circa Centrum circumacto describitur. Quarum prior Nominalis posterior Realis est Definitio; sed de Notionum atque Definitionum materia tantum ei dixisse sufficiat, de quibus Logice est fusius agere.

Postulatum. Axioma

§. 31. Postulatum dr. quod fieri posse ab alio nobis facile concedendum postulamus.

§. 32. Axioma vero est veritas

per

Est talis Propositio quam expressis terminis statim intelligit ille cui proponitur

perceptis rite terminis, per se v. ex terminis manifesta aut lumine rationis nota.

§. 33. Quod ex Definitionibus statim allatis patet, Postulata aliquid fieri posse, Axioma aliquid esse enunciant.

Differentia inter Post. & Axioma

§. 34. Schol. Voce Axiomatum Euclides, ac Veteres aliqui Geometrae videntur intelligere quasvis Propositiones, quae sine Demonstratione concedi solet. Ast alii vocem eamque magis restringunt, dum in Axiomatum Numerum, in Vel aliud quam Conclusiones, quae ex consideratione Definitionum (sive Nominales eaeque fuerint, seu Reales) aliquid minimum ate depromptum continent referunt. Postulatum vero vocant, quod aliquid ex consideratione eorum quae in una Definitione continentur, immediate deductum effici posse, affirmat aut negat.

Quoniam autem Axiomata atque Postulata sensu quam novissime expositionis accepta per intuitum Definitionum ex quibus fluunt, cognoscuntur, adeoque edicta semel Definitionum Realium illo vera esse intelliguntur, Itaque proinde Demonstratione indigent, hoc intuitu Propositiones per se notae, item ex terminis manifestatae dicuntur.

§. 35. Experientiae Itaque omnis effectus quisquam, seu sensu externo, seu interno perceptus, et cognitus intelligitur.

Experentiae

§. 36. Dum ex gr. Stellas, quae in

[illegible]

non videntur. Sole occumbente, nocte serena conspicuas videmus. Experientia hoc comperire dicimur.

Res singulares, et experimur.

§. 37. Coroll. 1. Experientiae ergo sunt ea rerum singularium perceptiones cognitae, quoniam non nisi res singulares percipimus. Quamobrem etiam ad experientiam provocamus, ut casum singularem proferat in medium, omnino est necesse, nisi illae v. sensui v. memoriae fuerint obviae, ut sunt observationes quotidianae, ac omnibus satis notae.

Experientia in Mathesi pura ob hoc locum.

§. 38. Corol. 2. Patet quoque experientiis seu observationibus in Mathesi pura locum non esse; verum ad Mathesim mixtam, quae quantitatem in hac v. illa re singulari existentem considerat pertinere.

Conclusiones ex Experientia nectendae haud sunt confundendae cum ipsa experientia.

§. 39. Schol. Experientias a conclusionibus inde deductis Mathematici accurate distinguunt aliis ad plurimum, has istis confundentibus. v. gr. Quod candela accensa, corpora non apparentia, in conspectum producat, per experientiam, innotescit; Quod si vero perpendens lumen in causa esse, cur tenebris discussis appareant, et una expendens rerum naturalium, eodem modo se habentium eodem esse effectus infero. Quidquid lumine collustratur videri pu. Haec propositio non experientiarum; sed conclusionum per legitimas consequentias inde derivatarum numerum referenda. Et ad istiusmodi propositiones dum omnissis experientiis ~~[illegible]~~ commemorantur, demonstrandas

das aut saltem illustrandas (: nisi modus quo excli-
cuntur omnibus fuerit perspectus atque cognitus :)
Casus quidem singularis omnino adducendus est ut ratio
Deductionis ad Examen revocari possit. Astero
Experientiae non subsunt Demonstrationi. Quod
enim perceperis cum demonstratione nequeas, ut creda-
tur pure possis, sed quando unum ex altero De-
ductum fuerit cum rationis examini subsistit, ut De-
ducti fides sine ratione habetur flagitas.

§. 40. Hypothesium nomine Ma-
thematici, intelligunt, res vel potius signa rerum
ad has brevius atque commodius explican-
das aut exprimendas, pro lubitu ex insti-
tutione hominum assumpta.

Hypotheses sunt certa signa rerum ad res ipsas brevius & commodius exprimendas ex arbitrio hominum assumptae.

§. 41. Schol. Ex gr. Characteres
sunt talia signa rerum; 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
9. ad exprimendos totidem numeros, pri-
mum adiuncti adhibitique sic Litterae quoque
Alphabeti, a, b, c, d, e, f, g &c. Dum loco numero-
rum vel pro designandis Quantitatibus, et quidem
priores pro cognitis promiscue adhibentur,
posteriores vero x. y. z. &c. pro incognitis promi-
scue adhibentur. Hujusmodi sunt apud Astro-
nomos signa Planetarum: ☉ Solis ☿ Mercu-
rii, ♀ Veneris, ♁ Telluris.

§. 41.

14. ~~Metaphysicam~~ In Mathesim Prolegomena.

Differt Hypothesis Mathematicorum ab Hypothesi Philosophorum.

§. 14. Corol. Ex 2i apparet Vocabulum Hypothesis a Mathematicis alio quam a Philosophis vulgo accipitur, sensu usurpari, 2i enim ita vocant Propositionem, quae ad Probandam veritatem incognitam assumitur, v. Commentum quoddam, quod Loco praesiti veri ad interim supponitur. Unde jam suppositio et Graeca voce Hypothesis appellatur.

Propositio.

§. 43. Prop. Clara et Distincta Convenientiae v. Disconvenientiae rerum inter se comparatarum, v. Praxeos alicujus enuntiatio.

§. 44. Scholl. Propositiones id quod dara §. 5. earum Deffinitione innotescit in Speculativas seu Theoreticas et Practicas recte dividuntur.

Theoretica.

§. 45. Prop. Theoretica quid rei cui quam certis Conditionibus v. in absolute convenire possit, et quid non indicat. Practicae vero quae aliquid faciens aut efficiendum proponunt.

Practica.

§. 46. Schol. Quoniam Enunciatio Convenientiae v. Disconvenientiae rerum ut et earum efficiendarum Prop. esse, et cum et sine ullis Conditionibus si priori modo id fiat, Prop. utriusque Generis Conditionata seu Hypotetica audit, quae autem sine Conditione proponitur absoluta e.

Conditionata quae cum Conditione proponitur.

Absoluta quae sine Conditione &c.

Demonstratio.

§. 47. Demonstrao est Rationum, ob quas

ob quas intellectus, illud, quod in Proone affirmatur, aut negatur, ita se habere concipere valet. Brevius: Quantum quid fieri pu, eaq; secundum Logicas Regulas facta Enumeratio

§. 48. Schol. Ratiocinationes autem hae non aliunde, quam ex Principiis Certis ac Definitionibus Postulatis et Axiomatis praemissis v. in Proonibus, antea demonstratis petuntur.

§. 49. Theorema est Complexum illud, quod Proo Theoretica simul, cum annexa sibi Demonstratione sua considerata constituit. Seu: Est veritas proposita simul et demonstr.

§. 50. Problema autem Complexum tribus partibus. Proone Practica, ejusq; Demonstratione, ac Resolutione constans.

§. 51. Schol. In Theoremate Demonstrao clauditur p. Signa. Q. E. D. voces. Quod erat demonstrandum, denotata. In Problemate vero Proone Practica, quid fieri debeat judicatur. Resolutio autem singulos actus, quibus res proposita effici pu ordine decenti recenset. Denique in Demonstraone evincitur, factis iis, quae Resolutio praecipit effectum intentum obtineri, cui tandem notae. Q. E. F. Clausulam, quod erat demonstrandum ex primentes adjiciuntur.

§. 52.

Est brevis et secundum regulas logicas facta enumeratio rationum illarum ob quas intellectus noster id quod in propoone affirmatur vel negatur ita se habere concipere valet. Seu

Est Thesis alicujus ex certis et indubitatis principiis facta deductio.

Theorema

Est Complexum quoddam Propoone et Demonstraone constans. Theoretica, Seu:

Est Veritas proposita simul et demonstrata.

Problema

Est Theor quoddam

Lemma s. Porism.

§. 52. Lemma seu Porisma est Theorema quoddam, seriei Proonum alicujus Disciplinae ideo solum insertum, ut ~~[illegible] nempe illud sequuntur~~. Proonum (: sive fuerunt Problemata sive Theoremata.) evidentia inde facilius & brevius devici possunt

§. 53. Coroll. Lemma igitur Quodvis cum Theorema sit (§. 4.) Proone Theoretica et Demonstraone ejusdem Clausula. q. e. d. finita constare debet (§§. 49. 51.)

Differentia inter Lemmata & Theorem.

§. 54. Schol. 1. Differentia quae Lemmata inter & Theoremata stricte sic dicta intercedit, in hoc consistit quod ad Disciplinam in qua tractantur immediate pertineant. Cum illa horum ut supra pris. Problematum respectu in eadem Disciplina sett locum mieniunt. Itaque alio quam horum Theorematum nempe stricte sic dictorum, atque Problematum Demonstraones facilitandi, aut abbreviandi Proposito adhibeantur.

§. 55. Schol. 2. Mathematici eos forme, quo Lemmatibus utuntur sine sett ut viam ad Demonstraonem praeparent v. ut ipsas Demonstraones clariores

redde

redderent, nonnunquam etiam Constructiones adhibent, quæ respectu quidem Theorematum, partium, quæ ad idem demonstrandum necessariæ sunt, rectâ coordinatione, respectu verò problematum ordine, qui in eorum Resolutione tenendus est, commodè definientur. Constructiones.

§. 56. Corollaria sunt Veritates Theoreticæ v. Practicæ, quæ vel Propoonum gralium facta ad casus speciales applicaone enascuntur; v ex Definitionibus, Axiomatibus, Theorematibus, aut Problematibus jam demonstratis ultro quasi fluentes, prona quasi consequentia deducuntur. Corollaria

§. 57. Schol: Corollaria prioris gris nullâ egent novâ demonstratione. Quod enim de oibus in gre in ursum casibus demonstratum fuit, de hoc vel ipso in specie ut denuo demonstretur opus o est; At alterum Genus Corollariorum, ut illationis rao, quam oes non æque facilè percipiunt, breviter saltem indicetur, id requiritur.

§. 58. Scholia sunt Observaones seu Annotaones, quàm Definitionibus, quàm Propoonibus Theoreticis atque practicis, earumque Corollariis subjungi solitæ, in quibus subinde Definitiones, & Demonstraones eorum, quæ illa præcesserunt, alia raone inire, quin in aliquando totius Theoriæ in antecedentibus fusius pertractatæ Summaria quædam repetitio, aut saltem difficiliorum Explicao, Obscurorum Declarao, Dubiorum Scholia

Resolutio

Resolutio, contineatur; Quandoquidem Usus quoq; Doctrinarum indicatur, Historiae ac Fontes inventionum describuntur, & digna alia scitu, ni injucunda nec inutilia, quin potius notatu digna occurrant, ea inserentur.

Numeri Paragraphorum. §. 59. Schol. 1. Praeterea quae enumeravimus, Numeriquoq; Paragraphorum ni hac Methodo adhiberi solent, ut horum ope alibi in loci dicta, ni memoriam, si forte excidissent, relegendo revocari facile queant, simulque ut prolixe eorundem rerum aut Definitionum repetitioni via praecludereatur.

Usus horum.

§. 60. Schol. 2. Explicatam hactenus Methodum Mathematicam, eamq; Syntheticam, qui probe perpendit, ejus Praestantiam haud dubie agnoscet; nec diffitebitur, sine hoc ad solidam rerum Cognitionem pervenire haud quaquam posse.

Dicitur vero haec Methodus Mathematica, imo saepius Geometrica, quia hucusq; Mathematici fere soli in Geometria imprimis ejus Leges sancte observarunt; hi enim Dogmata sua per Paragraphorum accurate distincta tradituri initium sumunt constanter a Definitionibus Vocum atque rerum clare atque distincte proponendis; inde tandem ad Axiomata, Postulata, Hypotheses, si ita opus sit, imo ad Experientias, ubi hic locus est, progrediuntur, quibus tandem Theoremata, & Problemata superstruunt ac Propositiones

Theor

Theoreticas & Practicas brevissime sed tamen distincte formantes, id quod in iisdem propositum habetur non verò aliud, neque aliis sub Conditionibus succinctè & clarè demonstrant, id maximè curantes, ut Conclusio non aliunde, quam ex iis, quæ jam prius definita, declarata, aut demonstrata fuerunt, & ex his quoque unò atque altero syllogismo infertur, ex his tandem utilia quæ ultro fluunt Corollaria depromunt: Ubique verò Scholia, si ex re visum fuerit, annectunt.

§. 61. Schol. 3. Cum itaque explicatæ Methodi legibus in Mathesi præsertim pura, ex asse satisfiat, non ex vano prædicatur, quod Mathemata Judicium acuant h. e. Quod eorum Cultores promptitudinem acquirant, veritatem quamlibet ad quam investigandam animam appellunt, accuratius quam alii /: qui non tam accuratè ordinateque meditari consueverunt :/ Solent dijudicare. Usus Matheseos.

§. 62. Schol: 4. Fructus igitur hujus, quem e seria tantùm Demonstrationum Meditatione, adeoque /: juxta §. præ:/ ex Studio Matheseos præsertim puræ maximam expectare licet & percipere, hujus inquam fructus ut & nos participes simus futuri, ad discendam Mathesim nosmet sine oi mora accingamus.

§. 63. Schol: 5. Ordo autem in discenda Mathesi quod observetur, nexus rerum, & solida quam exposuimus demonstrandi scientia requirunt; quemadmodum igitur 3. Ordo.

igitur quoad Propositiones ita ut earum posteriores sine prioribus consistere nequeant, connectendas, non secus quoad ipsas Matheseos in partes hoc maxime curandum erit; ut semper a facilimis maximeque simplicibus ad sublimiora tanquam per gradus progrediamur. Cum itaque Principia, quorum in partibus Matheseos Mixtae fit applicatio, in Partibus Matheseos Purae tradantur, neque proinde illae nisi his prius intellectis rite tractari queant ac perspici (: §. 14:) Mathesis Pura Fundamenti loco omnino est ponenda, atque Mathesi Applicatae praemittenda. Verum in partes Matheseos Purae non promiscue sine omni delectu tractandae; sed Arithmetica Numerica, tanquam reliquorum simplicissima primo omnium locorum ponenda est, quam propter illam, quae in Calculis Numerorum atque Literarum reperibilis est, Convenientiam Arithmeticae Literalis, quae praecipua Algebrae pars est, immediate excipiet, quibus tandem Geometriam mox Trigonometriam & denique Sectiones Conicas, subjungemus, Hisque Mathesi Purae quae Elementalis audit finem imponemus; reliquas ejus Partes, illam Algebrae partem quae Analysis, seu Mathesis Sublimioris nomine venit, nonnisi illis, qui hujus in discendi desiderio capientur, & his quoque privatim tantum, siquidem ipsis placuerit, praelecturi, Matheseos autem Applicatae praecipua saltem & scitu maxime necessaria Capita per decursum Physices, Deo juvante explicabimus.

§. 64.

§. 64. Schol. 6. Hæc erant quæ Summatim de Conspectu Matheseos Ursæ, de Methodo Mathematica, deq; nostro Mathemata tradendi Ordine ad Captum Tyronum pmittenda tractandaque censuimus; jam Ordo postularet agere de Historia quoq; ut et Dignitate deque Usibus Matheseos etiam, ad pcognita eusdem Spectantibus; verum quia cujuscunque rei proinde Matheseos in Cognitio Historica a quolibet proprio Marte, Sineque pcunte Magistro, ex Authoribus, qui de ea ex proposito agunt, facile pt comparari, Usus autem qui pro Scopo, quemvis in addiscenda Mathesi sibi pfigere potest vario varius est, cum autem qui gralis est atque omnibus omnino necessarius (: §. 62:) exposuerimus, de his utrisque hoc loco agere Supersedebimus, & horum loco Monita quædam ex iis quæ hactenus, cum primis de Methodo Mathematica edisseruimus, instar Corollariorum desumenda, inque discenda Mathesi Tyronibus ejusdem necessario observanda, dictis hactenus adjiciemus.

§. 65. Monita autem hæc, quibus partim Animus Tyronis Matheseos disponitur, partim Modus quo idem Mathemata discat pscribitur, sunt Sequentia; & quidem

1mo: Caveat ante omnia Matheseos Studiosus, ne persuasus sit Mathesim Arduam esse & difficilem; Cum vulgaris hæc Oppositio Sabulo invidiæ atque Pigritiæ Superstructa, jam a multis diluta sit, instituas igitur quivis antea, quam Mathemata repudiare, Examen rigorosum, & facile ipsequoq; oppoonem ipsam, di Disciplinæ hujus difficultate falso sic credita proferri solitam

1.) Non sibi persuadeant difficilem & arduam esse.

inse

infectam esse judicabis.

2do: Non est deserendus labor, si occurrant res quæ initio statim non comprehendunt; facile enim concedimus, Mathemata plus quam Historiæ judicii & Ingenii requirere, sed statim non tamen est res desperata, si Principium grave videatur, fiat istud, & pergas in diligentia quotidie plura præstabis; Mathesi enim magis, magisq; excitatur ingenium, & acuitur Judicium, & quidquid veritates hujus Disciplinæ justo ordine proponuntur, perceptâ itaque unâ, alteram eo facilius intelliges, & sic pedetentim ad majora pervenies.

3tio: Simplicitate quoque primorum Matheseos Elementorum & Sterilitatis opinione, cum infinitus eorum usus in initio statim ô innotescat, nemo offendatur. Herculeus foret Labor, qui superandis difficultatibus Mathematicis, imo & talis eventu maximè dubio impendi deberet; nisi a facilimis maximeq; simplicibus fieret progressus, ad ea quæ sequuntur maximè ardua, quæ tu hac viâ (: maximè:) facilimè cedunt. Idcirco in

4o: Tyro Matheseos, eo singula quo posita sunt ordine discat & legat necesse est, neque rem ullam transiliat, aut ô intellectam pertermittat, certus namq; sit Methodum Mathematicam hujusmodi ce, ut intelligentia veritatum posteriorum a priorum perspicuitate pene dependeat, neque proinde de Progressu sibi quis blandiatur, qui per saltum Propositionum Scientiam Mathematicam comparari existimat.

5o: Ante omnia itaque Definitiones & Axiomata (: quæ utraque Fundamenta sunt v. primarum Demonstrationum:)

intimè

intime Sibi perspectas habeat Tyro Mathematicus, eaq; memoria non fallente retinere Studeat, & ex hac sine hæsitaõne depromere asvescat. Deinde

6to: Propoõnem quamlibet demonstrandam aut practice efficiendam omnimode pspiciat ac intelligat; Et si plures complectatur partes, harum singulas, distinctas cognoscat oportet, videatque sub quibus conditionibus enuncientur: Nec prius ad legendam intelligendamque Subjectam Propoõni demonstraõnem progrediatur, quam Propoõnem ipsam penitus sibi cognitam habeat; hunc in finem

7mo. Discat ante Propoõnes sive Problemata fuerint sive Theoremata ad numeros ac figuras delineates applicare (: applicaõnem hanc Veteres Expoõnem Propoõnis appellarunt:) atque adeo ut hæc tanqm duo diversa a se invicem distinguerent; Hanc pure prius enunciarunt, huicq; tandem illam subjecerunt; nos autem in hoc Recentiores, qui Expoõnem cum Propoõne conjungere solent, imitabimur; non quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt, quam ut brevitatis caã una exhiberemus, quæ a Lectore separanda sunt.

8vo: Intellectam probe Propoõnem ô ante veram admittat, nisi Intellectu per subjectam Propoõni demonstraõnem integre convicto, neque enim quærenti veritatem cum primis Mathematicam, quidpiam admittendum aut affirmandum est, de cujus veritte intellectus convictus ne sit, cum in Dogmaticis Mathematicis humana enunciantis

antis Authoritas nullius, aut ô certe majoris ponderis ee debeat, quam vis argtorum seu raones propositae.

9o: Demonstraonem quoq; cujusvis Propoonis attente, ô autem tt perfunctorie legat, videatq; an Praemissas oes intelligat, & si de sensu aut veritte alicujus dubitet, citatum eum in locum §lum evolvat, omniaq; quae sub eo nro continentur sedulo relegat, tandiu quidem, donec omne de veritte dubium sibi sublatum experiatur.

10o: Quod vero Propoones Practicas pter attentionem earum quoque, aeque ac aliarum Propoonum demonstraoni modo quem nro (: pre. 9:) indicavimus evolvendae adhibendaeque, duo adhuc sunt Tyroni curanda, 1mo ut Resoluones Problematum intelligere & 2do ea quae in illis percipiuntur, prompte facere possit.

Quod 1us: Cum qualibet Resoluo singula quae in Propoone fieri pcipiuntur ordine quo fieri debent suis nris distincta exhibeat; adeoque tot Regulas quot numeri sunt contineat, lata 1a, statim faciendae e quod eadem pcipitur, sicque Progressus ordine fieri dt ad sequentes, ita minimum absq; ullo quasi negotio facies, quod fuerat faciendum, & dum hoc facis Regulis affundetur Claritas, quae ad totam Resolutionem intelligendam sufficit.

Quod 2us autem, quoniam non sufficit Problematum Resolutiones intelligere, verum m habitus, ea quae fieri debent faciendi comparandus est, Habitus

aut

autem omnis non nisi exercitio, adeoque idem iterato agendo comparatur, ideo a Problemate uno non progrediendo ad alterum, nisi ubi ea, quae in Resolutione praecipiuntur prompte facere potueris, hoc autem fiet, si Propositionem Practicam loco in Propositione determinato resolutam ipse saepius exerceas, figuras si opus est delinees, construas & rite factas demonstres, atque in his omnibus iteratis viribus repetendis modum operandi periti institutoris ad amussim aemulari coneris.

11mo Modus quoque Corollaria ex antecedentibus praetractatis deducendi singularem meretur Tyronis attentionem, discat proinde cognoscere, perspicereque nexum, qui Corollaria inter & ea ex quibus depromuntur, constanter dari debet.

12o Scholia pariter, siquidem semper observationem aliquam de re in (: obj:) antecedentibus tractata notatu digna retineant, ut a Tyrone attento evolvantur animo necesse est.

13tio Propositiones porro cujuscunque generis semel intellectae ne memoria excidant saepe revocentur, & ut omnia paucis complectar

14to Universim notent Tyrones, ut caeteras Disciplinas, ita Mathesim usu frequentissimo comparari conservarique.

§. 66. Scholion: Monitis his (: §. 4. :) strictim recensitis, nihil amplius addemus; plura tu de his cognoscere, si quidem animus fuerit, eos ad Illustr. Christiani Volffii de Studio Matheseos recte instituendo

accurate

accurate satis elaboratam commemorationem (: quae Elementorum, ejus Matheseos Tom S. habet :) dirigimus, nos autem eo quod instituti ratio vocat ad Arithmeticam, puta numericam, properande pede progrediemur.

ELEMEMENTORUM MATHESEOS PURAE

Pars Prima

De ARITHMETICA NUMERICA. Prolegomenon.

De Definitione Arithmetica in Gre, ejusdemq; Divisione.

Definitio 1a

§. 1.

§.1. Arithmetica est Pars Matheseos Iuræ quæ numerorum atque artis numeros computandi: e quibusdam Numeris datis, alios, quorum ad datos relatio datur, inveniendi; Scientia absolvitur. Est Scientia Numerorum & artis numeros computandi. Quid Arithmetica

§.2. Scholion 1. Arithmeticam Sic vocari ab Objecto, quod est Αριθμος sive Numerus patet dici verè Αριθμος creditur (: quasi ab αρω i.e. apto, quadro, cogmento:) quia fiat ex unitatum conjunctione; Numerus verò Isodoro quidem a Numo, verum aliis (: qui nrum ante Numum quoque fuisse contendunt:) a Νωμη: distribuo, Partitio, Divisio, quod a Νεμω Distribuo, quia quod multum, inquiunt, in unitates dividitur.

§.3. Scholion 2. Dum autem Arithmeticam Scientiâ definimus, talem illius pertractationem intelligimus, quæ præter vulgare, numerum quæsitum inveniendi Regulas, simul & id docet: Cur per Regulas illas quæsitus nrus inveniri possit & debeat (: Cf. §.14. in Probl:) Quid hic Scientiæ nomine venit?

Definitio IIda

§.4. Arithmeticum igitur dicemus, qui Regularum Arithmeticæ rationem reddere sufficientem, & ita Veritatem in hac Scientia contentam demonstrare Arithmeticus quis dicit?

Strare atque alias invenire valet.

§. 5. Coroll: Ille igitur Arithmeticus non est, qui Regulas ꝛc applicare scit & scientia earum raõnes adferendi destituitur.

§. 6. Schol: Arithmetica quam in grẽ (:§.1:) definivimus, varias a variis sortitur Divisiones, nos cæteris omissis duas ꝛc. numerabimus, adeoque prius in Arithmeticam respectu Signorum, quibus utimur, in Numerosam hoc Numericam & Speciosam sive Literalem dividemus.

Quæ Divisio Arithmetica?

Definitio IIIa

Quid Numerica? §. 7. Arithmetica Numerica est Scientia, quæ Signis Numerorum vulgaribus, hoc Characteribus Arithmeticis utendo, definitè & particulariter in naam numerorum inquirit, ex qua certæ Numerorum Proprietates deductæ determinantur. Unde in Arithmetica Vulgaris nomine venire solet

Definitio IVa

Quid Literalis? §. 8. Arithmetica vero Speciosa hoc Literalis est Scientia, quæ Substitutis loco Numerorum Alphabeti Literis in naam Nrorum

&

& Veritates Arithmeticas ursaliter inquirit.

§. 9. Hæc uti Specialis Algebræ Fundamentalis pars alterius Temporis opus erit; Illa verò Arithmetica scilt Vulgaris, sive Numerica, de qua nunc agitur, respectu tractationis communiter in duas Partes Theoreticam vdt & Practicam distinguitur; quarum Hæc operationum Arithmeticarum species tradit, Illa verò Fundamenta, quibus Species illæ operationum innituntur, considerat. Divisio Arithmetica Nrica Practica.

Hanc igitur Arithmeticæ Nricæ partem Theoreticam (: id quod nexus ac expositio superius § 21 = 62. in Prol:) Methodi Mathematicæ Leges exigunt; parti ejusdem Practicæ pmittemus, ambarum verò ptractaone psenti tractatui nostro de Arithmetica Nrica finem imponemus.

ARITH

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS PRIOR DE ARITHMETICA THEORETICA

Definitio. Va:

Arithmetica Theoretica quid? §. 10. Arithmeticæ Theoreticæ Nomine speculativam Numerorum Scientiam intelligimus: quæ nullum exigens actum, Nros horumq; affectiones quasdam nos contemplari docet & intelligere.

Hæc pertinent 1o) Characterum Arithmeticorum expo 2o) §. 11. Scholion: Præcipua autem eorum, quæ ad speculativam Numerorum Scientiam pertinent, sunt sequentia: /: a:/ Characterum numerum Arithmeticorum atq; valori eorundem expositio /: b:/ Objecti Arithmeticæ, sive Nri, hujusdemq; in suas partes divisi Definitiones, ac vocum, quæ illas ingrediuntur, ut & signorum quorundam /: ut vocantur:/ combinatoriorum

Signif.

Significationis declaratio, de quibus in ordinem in iis (: quae statim sequentur:) agemus.

CAPUT I.m

De Characteribus Arithmeticis eorumque Valoribus.

Definitio VI.a

§. 12. Caracteres Arithmetici sunt certae quaedam notae a variis Gentibus ad Nros breviter exprimendos usitatae. Caracteres Arithmetici quid?

Definitio VII.a

§. 13. Scientia quae varios Characteres, quibus Numeri exprimuntur, eorundemque valores explicat vulgo Arithmeticae Characteristicae nomine venire solet. Arithmeticae Characteristicae quid?

§. 14. Schol. 1. Non desunt Mathematici, qui (: §. 9.:) uti nos fecimus duas quidem constituunt Arithmeticae Nricae partes, verum ita ut loco alterius quam nos Theoreticam diximus Arithmeticam Characteristicam (: §. 9.:) definitam ponant,

quia

quia tamen præter Characterum Arithmeticarum eorumq; Valoris, expōnes sunt & alia quæ ad Teoriam pertinent Numerorum (: § 11:) ideo nos Arithmeticam Characteristicam sub Teoretica, tanquam Speciem sub gre esse comprehensam non sine sufficienti cāa voluimus.

Divisio Characterum. §. 15. Characteres aut isti, quibus Numeri exprimi solent generatim in Literales & Figurativos distinguuntur.

Definitio VIII.

Ch. Figurativi quid? §. 16. Characteres figurativi sunt certæ Figuræ a literis diversæ ad numeros indicandos inventæ.

Divisio Figurativorum. §. 17. Scholion. Sunt vero Characteres Figurativi vel Indici vel Vulgares.

Definitio IXa

Vulgares quid? §. 18. Vulgares Figurativi Characteres sunt. Qui vulgo sunt in usu.

§. 19. Scholion. Indicis propterea anteponunt Vulgares Characteres, non quod hi primō fuissent inventi, sed quod Vulgares sint, & idcirco pluribus noti. Ab Indis enim Numeros per Figuras exprimendi rāo excogitata est, ut quibus ipsi Arabes etiam

accept

acceptam referant, non minus quam nos Arabibus; quod quidem egregium figurarum nitentium sagaci ingenio Indorum debitum, atque ab oriente ad occidentem, idq; non ita pridem translatum vulgo nobis & nunc usitatum, & idcirco vulgarem per eos numerandi rationem primo experiamur oportet, utpote per quam reliqua omnes tam Indicæ quam literales experiendæ veniunt.

Hypothesis 1ª

§. 20. Signa Characterum vulgarium sive notæ quibus Arithmetica Hodie hodie utitur decem sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

§. 21. Scholion: Subinde hæ notæ dici Cyphræ vocantur, quamvis usitatius sit, ut hoc Nomen Czyphra seu Zyphra vel Syphra ab Arabibus ad nos delatum non de dictis decem notis, sed de illarum unica nimirum de Figura 0. dicatur, quem morem & nos sequemur.

Hypothesis 2ª

§. 22. Valor autem cuiscunque Characteris per se consideratus omnibus est jam notus, juxta quem 1.

Unum

unum, 2 duo, 3 tria, 4 quatuor, 5 quinque, 6, sex, 7 septem, 8 octo, 9 novem denotat, ultima verò figura sive decima (: O :) quæ nomen Zeri obtinuit per se nihil denotat, adeoque pro nota nullius seu Nullitatis habetur, si autem novem priorum notarum ut vidimus significativarum alicui postponatur, tunc ejus valorem ex ratione (: quæ § 29 :) indicatur per decem auget, & (: 30° §. :)

Novem Notæ Unitates dicuntur.

§. 23. Scholion: Novem Numeri sive Notæ Significativæ Unitatum nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur, quæ Digiti quoque dicuntur; Unitas vero quid sit infra (: § :) dicetur.

Hypothesis 3a

§. 24. Facultate decem numerandi instructi, quò majores nros & ipsi menti sistere distinctius, & cum aliis facilius communicare valeamus (: 1° :) quoque ex decem Unitatibus simplicibus, componimus aliam, quæ una Decas vel simpliciter Decas seu decem dr, duæ autem decades appellantur Viginti, tres Triginta, quatuor quadraginta, quinque Quinquaginta, sex Sexaginta, septem Septuaginta, octo Octoaginta, novem nonaginta; ex decadibus autem decem (: IIdo rursus nova Unitas Centum dicta componitur, & (: IIItio :) Centenis quoque eodem modo numeratis ex decem Centenis novam iterum Unitatem componimus Mille vocatam (: IV :) Millia quoque

eodem

eodem modo numerantes, quo numerabantur Unitates, conficimus decades atque Centenas millium, donec perventum sit ad decem Centenas: mille millium, mille autem millia Millionem dicimus, & si multitudo tanta sit (: V:) Millionis quae ni ea continentur, perinde numeramus ac numerabamus simplices unitates, confectis sit sensim Millionum decadibus, centenis Millibus, decies atque centies Millibus, donec Millionum oriatur Millio, quam Billionem appellamus, Millionem Billionum autem Trillionem, Trillionem Millionem Quadrillionem & ita porro, circa quae numerando ô aliter versamur quam circa millionis.

Corollarium.

§. 25. Patet ex his Classes Arithmeticas nonnisi tres esse, primam Monadum sive Unitatum, secundam Decadum & tertiam Centenariorum; harum autem quamlibet non plures quam novem Nros continere, decimus enim si accedat, idem alterius superioris velut classis erit.

§. 26. Scholion: Vocibus Billio, Trillio, quadrillio &c. utimur, ut in numeris prolixioribus confusio evitetur, & de quavis eorum parte nõ distincta formari possit.

Hypothesis 4a.

§. 27. Ut verò expositis (: §. 20:) decem Characteribus

non

non solum norem Unitatis Simplicis [:§§.22.23:]. sed & decades, Centenarios, Millenarios &c. indigitare possimus, iisdem Characteribus praeter eum, cujus [:§.22:] meminimus, aliumque valorem inbuimus, qui ex institutione hominum ac solo Ordine sive Sitio in quo tale Signum locatur, vel scribitur dependet, unde etiam valor hic Localis dicitur.

Hypothesis V.

§.28. Ordo autem sive Locus Figurae alicujus cognoscitur a dextra sinistram versus progrediendo, cum enim plures Figurae Numericae continua serie scriptae habeantur, spatium ab iisdem occupatum in totidem quot figurae adsunt loca divisim concipimus, quorum quemlibet una illarum figurarum occupabit, numeramus autem loca haec Orientalium mode, a dextra versus sinistram, atque locum illum, qui ad dexteram est primum dicimus, qui illi proximus est sinistram versus Secundus audit, nempe locus, & sic deinceps reliqui quot quot sunt loca numeramus; figurarum tandem illa, quae primo occurrit Loco, tot Unitates simplices numerat, quot ipsius peculiaris valor indicat [:§.22:], quae in Secundo tot decades, quae in tertio tot Centenarios, quae in quarto tot millia seu Unitates millium, quae in quinto tot decades Millium, quae in sexto tot Millium Centurias, in septimo tot hoc Millena Millia seu tot Millliones, seu horum Unitates, in octavo tot decades millionum, in nono tot

millio

Millionum Centuria, ni decimo tot Millionum Millia, seu Millies millena millia, sive millenaria centena millium unitates, & sic deinceps pro singuli loci continua proportione decupla valorem semper augendo.

Corollarium 1um.

§. 29. Plurium itaq; Numerorum in una eademq; serie continua collocatorum loco, & exinde depromti valore, sive Numeri, partes hoc ordine, quem tabula sequens annexa exhibet, se invicem excipiunt.

Locus	Valor		Locus	Valor	
1mus	Unitates	Simplices.	19mus	Unitates	Trillionum
2dus	Decades		20mus	Decades	
3tius	Centenarii		21mus	Centenarii	
4tus	Unitates	Millenarii	22dus	Unitates	Millenarii Trillionum
5tus	Decades		23us	Decades	
6tus	Centenarii		24tus	Centenarii	
7mus	Unitates	Millionarii	25us	Unitates	Quadrillionum.
8vus	Decades		26us	Decades	
9nus	Centenarii		27mus	Centenarii	
10mus	Unitates	Millenarii Millionum	28vus	Unitates	Millenarii Quadrillionum.
11mus	Decades		29nus	Decades	
12tius	Centenarii		30mus.	Centenarii	
13tius	Unitates	Billionum			
14tus	Decades				
15tus	Centenarii				
16tus	Unitates	Millenarii Billionum			
17mus	Decades				
18tius	Centenarii.				

Et sic porrò.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

§. 30. Scholion: Ex hac Tabella valor cujusq; loci facillimè invenitur, dentur n̄ ex. gr. tres figuræ 234. sine Commate interjecto in hoc nr̄o, quatuor stat primo loco ad dextram, 3 secundo, 2 tertio, ut alt̄ e tabula constat tertius locus valet Centurias Simplices, sive Centurias Unitatum Simplicium, secundus decades Simplicium Unitatum, primus unitates simplices, in tertio aut̄ loco est figura 2, quæ igitur duas Centurias valet, sive ducentas unitates, 3 secundo loco ponitur valet itaq; tres Decades, sive Unitates triginta, primo aut̄ loco est 4, quatuor significans unitates, figuræ igitur propositæ valent, Ducentas triginta 4 Unitates, hoc modo quo ad majores etiam nr̄os faciendum erit.

Corollarium IIm

§. 31. Liquet ex his Incrementum valoris numerorum ex loco desumptum fieri sinistram versus per decades antecedentium.

Rao p̄cedentis §. 31mi. §. 38. Rao propter quam incrementum valoris localis a dextra sinistram versus fit hæc est, quod Inventores Arithmetici Orientales fuerint, apud quos modus scribendi erat, & est m̄ nunc a dextra sinistram versus; id verò quod idem incrementum per Decem seu Decadem fiat est proculdubio

inde

inde derivandum, quod Hoēs promiscuē decem digitis tanq numerandarum rerum totidem notis et Instrumentis in computando uti soleant, quamdiu Arithmeticæ Regulis instructi ō sunt; absit tamen ut Inic cum aliquibus concludere velimus; Arithmeticam quā nos utimur & usque decem Numeramus originis Divinæ esse, ac si nulla alia posset existere; Illustris n̄ Leibnitius Dyadicam invenit, & Celebris Vejgelius Tetractycam produxit, & alii aliam si modō usum Jaberet hodiē quoq invenire & delineare quare ō posset?

Corollarium III.tium

§. 33. Zerus autē tanquam nota Nullitatis (:§. 22:) ut locum promiscuē ōem, in quo ex significantibus notis novem aliqua non ponitur, occupet necesse est. ex. gr. in hoc ordine 204 ubi (:0:) locum occupare debet ut Nrus 2 locum Centenariorum possit occupare, secus n̄ si locum illum Zerus ō occuparet, sed scriberetur sic: 24 Nrus 2 ō Centenarios sed decades significaret (:§.§.26.27:)

Corollarium IVtum.

§34. Patet

Dictae Notae sufficiunt ad Nrum quemcunque magnum expr.

§. 34. Patet quoque quod decem illa signa Nrorum vulgaria superius (§. 20.) expressa sufficiant ad expressionem Nri cujuscunque magni.

§. 35. Scholion. Quemadmodum Arithmeticae Decadicae (§. 31.) ita characterum quoque ejus electio arbitraria est, hinc ut statim patebit apud varias Gentes varii occurrunt, e quibus primum quidem Indicos, cum & hi aeque ac vulgares de quibus hactenus egimus Figurativi sint, ex post autem literales etiam paucis videamus; Paucis inquam, neque non est necesse his utriusque generis ut et valoribus eorundem exponendis diu immorari, utpote horum tanquam hodie minime usitatorum notitia ideo duntaxat nobis opus est, ut Nros talibus in characteribus expressos sicubi occurrant legere pariter ac intelligere possimus, ad hos autem characteres, quibus Nrus aliquis exprimitur eorundemque valores nosse sufficit, quare nos in characteres utriusque generis Indicos scilicet & literales, & singillatim quosque sui in locis per ordinem & simul inferius (§. 66.) Tabella in totidem ~~valores~~ columnas quot genus Characteres sunt exhibebimus, valores autem brevitatis causa tum per signa Nrorum vulgaria fuse satis & clare jam in fallor explicata indicabimus.

CAPUT IX

CAPUT IX.

De Numeris in Genere, quis demque in suas Species divisi, nec non vocum quarundam Definitionibus, et quae ex iisdem deducuntur Corollariis, Regulis, Signis, ut et Axiomatibus nonnullis, in Arithmetica Familiaribus. — membrum quod Arithmeticae Theoreticae.

Definitio XX.

§. 69. Numerus est multitudo ex Unitatibus composita. — Def. Num.

Definitio XXI.

§. 70. Multitudinem (: alias totum :) vocamus Rem illam, quae non tantum sed et alia plura in se comprehendit. Et Plura illa in toto comprehensa dicuntur partes. — Multitudo

Definitio XXII.

§. 71. Pars quae aliquoties repetita, Tori suo fit aequalis, Aliquota dicitur. Pars vero Aliquanta est, quae repetita semper vel major vel minor est Toto. — Pars Aliquota, Aliquanta

NB. Numerus Simplex est qui unica tantum nota constat.

Scholion.

§. 72. Scimus Omnes: Numerum in se nihil reale esse, sed id res ipsas referre, Res autem ad quam Numerus refertur, seu quae per Numerum exprimitur, ejus modi est Quantitas, quam velut in plures partes

Dex

Determinatas et eas quidem æquales, Divisam concipimus (: Prolog. §. 11.) Et ex partibus istis, si quæpiam solitarie spectatur Unitas etc. Hinc patet Numerum a nobis (: §. 69.) Multitudine ex Unitatibus composita, et ab aliis, quod tamen idem est, Ordinata Unitatum Multitudine sive collectione, non male definiri. Ex. gr. Quatuor Grossi sunt determinata pecuniæ Quantitas constans 4 Grossorum Unitatibus vel ut alii appellant Monadibus.

Unitas quid?

Corollarium 1.

Quid Numerus quilibet exprimit?

§. 73. Unde patet: quemvis Numerum exprimere, quo Quantitas quæpiam (: seu Totum :) partes æquales determinatas continetur, ejusmodi quarum quælibet appellatur Unitas; atque adeo Numerum neque posse esse, nisi plures partes seu Unitates punctim sumantur.

Corollarium 2.

Unitas quid est Numerus.

§. 74. Cum itaque Binis ad minus Unitatibus sit opus, ut Numerus aliquis conficiatur (: §. 73.) Unitas Vel sensu accepta, non est Numerus. Sed pars potius seu principium Numeri dicenda est.

Scholion.

§. 75. Sed quia nulla reipsa Unitas, nulla pars Quantitatis determinata datur, quæ in ipsa extensa non sit, adeoque ex certo partium, æqualium, ac minorum

com

ac minorum composita, nisi eas distributa concipi non
possit; Tunc paret Unitatis etiam vicem semper id Genus collectio-
nem subire, quae et ipsa nequaquam est indivisibilis, sed suis quo-
que Partibus constat, quarum respectu totum aliquod seu
integrum constituit (: §. 70.) Cuius tamen partes singulae
aut aliquot si accipiantur relatae ad ipsam Unitatem,
jam non amplius dicentur Unitates, id quod bene notandum,
sed potius Unitatis illius, tanquam Integri, minutias, aut
portionem seu fractionem constituunt, atque tunc Fractiones ipsae,
ut et Divisio Numerorum in Integros et Fractos, ut
statim patebit Originem ducunt.

Definitio. 23.

§. 76. Numerus Integer vocatur qui refertur ad Uni- Numerus integer quid?
tatem tanquam Totum ad Partem. Qui vero ad Unitatem
tanquam Pars ad Totum refertur, is Numerus Fractus dicitur: Fractus quid?
Ac rem Exemplis illustrabimus de Numeris inferius Se-
ctione secunda acturi.

Scolion.

§. 77. Praeter datam (: §. praec.) variae ad tunc re-
perimuntur in diversis Auctoribus Numerorum Partitiones
in suas Species subdivisiones, quarum plerosque ad
Arithmeticos recentiores imitaturi penitus subiicebimus.
nonnullas vero in suum locum tempusque commodum, quo
facilius intelligantur servabimus, illas autem, quarum no-
titia

titia proxime nobis opus, erit statim enumerabimus, quo fine Numeros primum quoque in puros et mixtos dividemus.

Definitio. 24.

Nrus Purus? qui multitudinem sine mu scat.

§. 78. Numerus purus est, qui solam Multitudinem ab omni Rei alicujus Mtia abstractam scat. Unde etiam Numerus Abstractus aut Discretus quoque dr. Defin. 25.

Mixtus Defin. 25a qui multitudinem cum mtia signat.

§. 79. Numerus Mixtus est, qui præter Multitudinem mtiam quoque sive Rem, cujus est Multitudo, simul scat. Unde et Concretus aut Mtialis quoque vocari potest.

Scholion.

§. 80. Ex gr. Si quis simpliciter dicat: Duo, Triginta, Centum &c. non determinando, quænam sint illæ Res, quæ taliter numerantur is utitur numero puro. Contra: si quis dixerit cum addito, Duo Studiosi, Triginta Libri et Centum Globi aurei is Res ipsas, quas numerat, determinat; adeoque utitur nro Mixto seu Concreto. Vocant nonnulli numerum Purum, Numerantem, Mixtum vero Numeratum. Hic Mixtus sese dividitur in Numeros Homogeneos et Mixtos v. Heterogeneos. Definitio 26.

Nri Mixti Divisio.

Nri Homogenei quid sunt? qui scant Unitates ejusdem Speciei. qui scant Unitates diversæ Speciei

§. 81. Numeri Homogenei sunt, qui scant Unitates sive res ejusdem Speciei, atque Denominationis. Qui vero Unitates seu res diversæ Speciei atque Denominationis significant, Heterogenei vocantur.

Scho

Scholion.

§. 82. Ex. gr. si dicas: Triginta Globi et Centum Globi, habebis duas Numeros, nimirum Triginta et Centum Homogeneos, quorum utrique Unitates, seu Res ejusdem Denominationis, i. Globos significant. Quod si vero pono Globos per Materiam ex qua constant distinguas et illos Triginta ut Aureos, Eos autem Centum ut Plumbeos spectes, Numeri Triginta et Centum, qui prius erant Homogenei, nunc Heterogenei evadent. Sic Triginta Globi aurei, sunt Numeri Homogenei inter se; sed Triginta Globi aurei, et Centum Globi plumbei, sunt inter se Numeri Heterogenei, Tales autem Heterogenei dicti Numeri pono sunt vel Reducibiles vel Irreducibiles. Divisio Heterogen.

Definitio. 27.

§. 83. Numeri Heterogenei Reducibiles sunt: qui ad eandem speciem seu Denominationem reduci possunt, qui vero ad eandem speciem seu Denominationem reduci non possunt Irreducibiles 10. cantr. Reducibiles Irreducibiles

Scholion I.

§. 84. Sic v. gr. quatuor Grossi et Duo Cruciferi sunt quidem Numeri Heterogenei (§. 80.) sed quilibet Grossus valeat tres Cruciferos, quasi et duo Cruciferi quoque sunt Numeri Reducibiles. Ast quatuor Libri et Duo Gladii sunt Numeri Irreducibiles, quoniam Res diversae specie sive Denominationis, videlicet ille Libros, Hi autem gladios significant.

Sed

SECTIO 2ION

Etiam Irreducibiles post medio precii reduci.

§. 85. Observandum tamen est Numeros etiam Heterogeneos, qui secundum se spectati sunt Irreducibiles in tertio Ejusdem, in quo conveniunt posse fieri reducibiles ex gr. quatuor Libri et Duo Gladii per se quidem spectati sunt Numeri Irreducibiles (§. 83. et 84.) rerum si considerentur quoad precia pecuniae, in ratione pecuniae Reducibiles erunt.

Corollarium 1.

Quilibet Numerus est instar totius et Unitas instar partis.

§. 86. Ex iis quae Ineunsque de Numeris diximus, quae manifeste sequuntur, eorum primum quoque est: Quemvis Numerum instar totius et quamlibet ejus Unitatem instar Partis illius considerari debere (conf. §§. 69. 70, 72, 73. 74.)

Corollarium 2.

§. 87. Magnitudo Numeri adeo non pendet a Magnitudine et Ordine Unitatis ut si modus compositionis servetur, Numerus maneat utcunque mutetur Unitas. Sic v. gr. Numeri trium Flos. trium gratiarum, et trium Cruciferorum, sunt aequalis Magnitudinis. Constant enim singuli tribus Unitatibus, licet eaedem quorum ad magnitudinem collatae inter se multum differant, et manebunt dicti Numeri, quocumque tandem Ordine Unitates illos dislocentur.

Corol. 3.

§. 88. Magnitudo autem per Numerum ex

pressa

expressa et a Numero pendet, et a Magnitudine Unitatis ad quem refertur, et utroque eorum perceptio intelligitur, crescit enim Magnitudo Idee, non modo quando Unitate servata crescit Numerus; rerum etiam quando manente numero crescit Unitas: Et utrovis eorum decrescente decrescit. Coroll. 4.

§. 89. Numeri quidem Puri omnes, Mixti autem nonnisi Homogenei, inter se et componi et comparari possunt. Sic si dicat tria oportet ut quaedam Unitas, quae in Tunc numerum suscipitur, vel sit abstracta ab omni materia, quam significet Res ejusdem speciei v. gr. tres Studiosos vel tres Libros, vel tres Calamos, non autem unum Studiosum, unum Librum et unum calamum. Ex talibus enim Unitatibus, quale foret Totum s. conf. §§. 78. 79.

Coroll. 5.

§. 90. Numerus quilibet et augeri et minui potest s. conf. §§. 73. 86. Augetur v. gr. Dato aliquis Numerus. Si una vel plures aliae Unitates sive numeri ejusdem speciei adjiciantur Dato. Minuitur vero si una vel plures etiam Partes sive Unitates eidem adferantur.

Corollarium 6.

§. 91. Hinc sequitur quoque: Quod si uno Aucto

ad

adimatur id, quo erat auctus, prodire debebit idem Numerus, qui erat primus: Et si imminuto illud, quod eidem ablatum erat, restituatur idem numerus, qui ante in imminutionem erat, ut prodeat necesse est.

Corollarium 7.

§. 92. In Numeros per se spectatos praeter dictam §. 90. Augmentationem et Diminutionem nulla alia diminutio cadit vid §. 87.

Corollarium 8

§. 93. Modi diversi datum aliquem Numerum augendi, non nisi duo possunt esse, Quoties enim Numerus datus vel augebitur, numeri alterius ejusdem speciei adjectione (aut Unitate.) vel repetita sulphinsimet positione. Operatio quaeta priorem modum infinita, nempe qua numero dato nova Unitas sive Numerus alterum aut plures adjungantur simpliciter vocatur Additio, qua vero idem Numerus datus vicibus repetitis ponitur dicitur Multiplicatio.

Coroll. 9.

§. 94. Nec minus evidens est: Modus quoque Numerum datum imminuendi diversos, plures quam Duos, dari reperiri. Minuitur enim numerus datus Unitatum sive Numeri alterius, unius vel plurium

abla

ablatione (§. 90) Ablatio autem Idee Differentiam pu-
fieri, vel enim Numerus aliquis sive Unitas aut etiam
plures successive semel a e dato auferuntur, vel aufe-
runtur Sæpius. Prior Ablatio Subtractio Posterior Di-
visio appellatur. Scholion

§. 95. Hæ quatuor Operationes (§§. 93. 94.
recensitæ, sunt vulgares illæ quatuor Arithmeticæ
species, quæ vulgo Algorithmus vocantur, et quæ sunt
fundamenta omnium aliarum operationum Arithme-
ticarum, solent autem Arithmetici, sese ingenii
Gyrorum aplicantes Subtractionem Multiplicationi, quæ
facilior multo est, præmittere, adeoque dictas species,
ordine sequenti proponere, Nempe in primo loco
Additionem quam Subtractio, tunc autem Mul-
tiplicatio excipit, Divisione ultimum locum occu-
pante, quæ quidem operationes in Numeris tam inte-
gris, quam etiam fractis instituitur, atque ad Compo-
sitionem, aut Decompositionem illorum pertinent,
reliquæ autem Operationes dictum statim superstru-
ctæ, in Comparatione seu Relatione Numerorum tracti-
one consistunt Scholion

§. 96. Numeri aut qui inter se compara-
ri

ti possunt (§. 89. omnes vel sunt Æquales v. Inæqua-
les i. unus Major, et alter Minor §§. 87. 88.

Definitio. 28.

Æquales? §. 97. Numeri inter se æquales illi vocantur, in qui-
bus numerus partium seu Unitatum est idem. Quorum re-
Inæquales? ro partes seu Unitates, non differunt, Inæquales Nu-
meri dicuntur, et quidem pro ratione Unitatum, vel ma-
jores si nempe pluribus constent Unitatibus, vel mi-
nores si paucioribus.

Scholion

§. 98. Arithmetici tam in Absoluta, quam etiam
in Comparatione motum Fractione, si quis in aliqui-
bus in Algebra Ordinarie ad Zibel solitis, non nunc-
quam compendii causa uti solent. Quæ signa
vulgo dicuntur Combinatoria. Quid autem quære sint
statim dicemus.

Definitio. 29.

§. 99. Signa Combinatoria sunt certæ quædam
notæ, quibus vulgo sic dictæ species seu Operatio-
nes Arithmeticæ, nec non Æqualitas Majoritas,
Minoritas, ac Proportio designantur.

Hypothesis VI.

Additionis + plus. §. 100. Signum Additionis est Cruciata Zu-
gis modi (+.) quod per plus effeni solet. Ita 6+2

de

Denotat Numerum compositum ex 6. atq. 2. et pro nunciatur. 6. plus. 2. Hypothesis VII.

§. 101. Signum Subtractionis seu Diminutionis est Lineola talis (—) quod effertur per Minus. Ex. gr. 6—2 significat Numerum, qui remanet si ex. 6. auferantur 2. et enunciatur 6. minus. 2. Hypo. VIII

Subtractio. ∸ minus

§. 102. Signa autem ex Tibiae Multiplicationis sunt Crux, Decussata (×) vel punctum Unicum (·) et efferuntur per rotam Multiplicatum. Sic. 6×2 vel 6·2, denotat Numerum qui exurgit ex 6. bis sumpto, et pronunciatur 6. Multiplicatum per 2. nos priori utemur. Hypothesis IX

Multiplicatio. ×, ·. ∸ multiplicatum.

§. 103. Signum Divisionis sunt (:) quae per Divisum efferri solet. Ex. gr. 6:2 Denotat Numerum ex Divisione 6. per 2. emergentem. et effertur 6. divisum per. 2.

Divisionis ∸ divisum.

Hypothesis X.

§. 104. Signum Aequalitatis Pe (=) vel (∞) et exprimit Aequale sic 6+2=8 aut 6+2∞8. Dic 6. plus 2 Aequale 8. Posterius signum ad Tibent II, qui Cartesium imitantur, nos priori utemur, aliis alia placent.

Aequalitatis ∸ aequale.

Hyp.

Hypothesis xi.

Majoritatis > ci majus. < ci minus. Minoritatis

§. 105. Signum Majoritatis est (>.) quod inversum sic (<.) Minoritatis est signum; adeoque illud per majus vel major, hoc autem per Minus aut Minor addendo volens Quam effertur. sic 6>2. Dic 6. majus est quam 2. et: 2<6. Duo minus est quam 6.

Hypothesis xii.

Proportionis :: §. 106. Signum Proportionis quatuor punctis constans est (::.) De quo ut et aliis signis, si quae parva occurrant suo loco dicentur.

Scholion.

§. 107. Dictum est superius (: in Rolle ad Ursam Math. §. 24.) Axiomata quoque praecipuam Methodi partem Mathematicae constituere, hinc est, quod et Arithmetici in suis Demonstrationibus plerisque Axiomatibus nonnunquam utantur. Talia autem, quibus in Arithmetica locus esse possit, inter alia sunt sequentia:

Axiomata.

§. 108. I. Totum est aequale suis Partibus omnibus simul sumptis et vicissim. Ergo

II. Totum est Majus qualibet sua parte. Et

III. Pars qualibet est minor suo Toto.

IV. Quae sunt aequalia uni tertio sunt aequalia inter

nitas se.

V. Si aequalia nitas se aequalitas augeantur, vel aequalitas minuantur, etiam aucta vel minuta erunt aequalia.

VI. Si vero aequalia nitas se augeantur v. minuantur inaequalitas fiunt inaequalia.

VII. Si inaequalia nitas se augeantur v. minuantur, aequalitas semper erunt inaequalia.

Scholion 1.

§. 109. Axiomata ille singula talia sunt quorum ma et veritas v. ex ex ti, quae hoc capite de numeris viximus prolo perspecta habentur alias etiam lumine nulla nota, ut adeo Demonstratione minime egeant.

Schol. 2.

§. 110. Haec erant: Quae in Arithmeticae numericae Parte Theoretica, tanquam pro scopo nostro magis necessaria tractanda esse censuimus. Neglecta itaque Numerorum et eorum Characterum Historia etiam ad partem eandem Theoreticam pertinente ad alteram Arithmeticae Numericae partem, Practicam puta transibimus.

ARITHMETICAE NUMERICAE PARS POSTERIOR.

De ARITHMETICA PRACTICA.

Definitio 30.

§. 111. Arithmetica Practica est Scientia computandi, i.e. Numeros sive Res Numerandas, ope signorum quorundam pro ratione compendiosas et expeditas Operationum Arithmeticarum Regulas, sive tractandi, atque ex datis quibusdam Numeris, alias quorum ad datos relatio datur inveniendi.

Scholion.

§. 112. Signa Numerorum vulgaria, quibus et nos in dictum §. praec.) finem utemur superius (§. 20.) ut et valores earundem speciales quidem (§. 22.) Locales vero (§§ 27. 28.). Exposuimus, nunc itaque Praxes ipsae seu Operationes Arithmeticae, earumque Regulae sequuntur. Hae autem Operationes, et ipsae (: id quod §§. 93. 94.) partim jam indicavimus, partim vero inferius suo loco videbimus, et obscura specifica, circa quae Pars autem variae sunt Denominationes Specificae. Instituuntur enim Operationes, et quidem in absoluta Numerorum tractatione vel a.) in Numeris integris, vel b.) in Fractis et 2is quidem vulgaribus v c.) in Fractis Decimalibus

Hor

Horum itaque respectu nos etiam praesentem Tractatum nostrum De Arithmetica Practica in Sectiones tres quarum singulae certa sub se capita complectuntur, distinguemus. Quibus tandem revisis et examinatis nos quoque Numericae Arithmeticae finem imponemus. Erit itaque

SECTIO PRIMA.

De Primis Numerorum Integrorum calculis sive Speciebus Arithmeticis.

CAPUT 1mum

De Numeratione.

Definitio 1.

§§ 113. Numeratio est Ars Datos quoscumque Numeros secundum valores suos Totales enunciandi, et scribendi.

Se Solion.

§§. 114. Calculi sive sive Species Arithmeticae Numerorum Integrorum vulgo sunt 5e Numeratio, Additio, Subtractio, Multiplicatio et Divisio, De 2i per Sexum in Sequentibus, Hoc autem Capite De sola Numeratione agemus. Quae uti ex Data (§ praeced.) Definitione patet, Duo in se continet seu denotat nimirum: 1. Numeri cujusvis scripti enunciationem atque 2do enunciati Descriptionem. Hinc

Proble

Problema I.

Problema I.tum — Propoo: —

§. 115. Numerum quemcumque Scriptum enunciare. I.e, cuilibet quidem Characteri enunciatione, valorem competentem assignare.

Resolutio.

Resolutio

1.) Commata post ternas notas superponuntur Membro cuilibet attribuantur 3es notæ.

(I. Series notarum Numeri proposita, facto a Dextris initio (: §. 28.) per commata post ternas singulas notas intergeera in totidem, quot fieri possunt, membra dividatur, atque ita cuilibet membro ternæ notæ attribuantur (§. 25.) excepta sinistima, quæ in Duabus, aut una nota constare potest.

2.) Discantur Membra separatim enunciari.

(II. Discat Tyro taliter Partiti numeri, quodlibet membrum, ac si separatus esset Numerus singillatim, notam quidem quidem sinistimam, per centenarios, mediam per Denarios, et Dextimam per Unitates enunciare (§. 28.) mox tandem.

3.) Nota 2di membri a dextris superne notetur punctio 3i membri per Unam virgulam, tandem alternantur virgulis semper auctis.

(III. Nota secundi a Dextris Membri, Dextima noteto superne uno puncto, nota autem tertii Membri Dextima, etiam superne una virgula noteto et sic deinceps puncta et virgulas semper alternando ita tamen ut virgulæ superiores, semper una versus sinistram crescant puncta non item.

IV Hac

(IV. Hac quoque Partitione peracta, Membrum Sexti Dextrinum nullo puncto, neque virgula ulla notatum simpliciter, membra vero superne virgulis notata, per Millenarios et quinque minus virgulae per Millionem, quarum virgularum per Billionem trium, per Trillionem etc. Membra puncto affecta per Millenarios, Ipsique v. simplicis si nulla virgula ad Dextram superior sequatur, vel per Millenarios Millionum, si una, per Millenarios Billionum, si duae, per Trillionem, si tres etc. virgulae superius sequantur. Nota autem minus, cujus cumque sinistrinae quinque per Centenarios mediae per Decades et Dextrinae per Unitates enumerentur (juxta Reg. 1.) et sic factum erit, quod perebatur.

Demonstratio

Demonstratio.

Numerus quiscumque scripto tenus propositus, qualis est sequens 38,529,416,725,978,623,542,582 juxta praescriptas Reg. per virgulas et puncta Distinctus (: ad quod de aliis omnibus, verum est.) sic enumerantur Triginta octo Millia Trillionum, Quingentae viginti novem Trillionis, Quadringenta decem et sex Millia Billionum, nongenta septingenta octo Millia Millionum sexcentae viginti tres Millionis, Quingenta quadraginta duo Millia (: sexte simplicium.) Quingentae octoginta duae Unitates. Et Alter.

4.580.

4.580.902.063.000 effert relitt. 4. Billio-
nes 580. Millia Millionum 902 Milliones, 063 Millia
Unitatum, atque in enumeratione Totum Numerorum, juxta
praescriptas Reg. facta, cuilibet Characteri valorem
singularis, quam etiam Localis, adeoque totalis Distin-
cte innotescit, id quod de numeris omnibus aeque
procedit. Et si Numerus quidem scripto tenus propositus ob-
servatis iisdem Regulis enunciatus erit quod perebat.

Problema II. PROBLEMA II.

§. 116. Proo. Numerum quemcumque enunciatio-
ne propositum, ita ut par est, describere. 2. e. unicuique e-
jusdem Characteri, locum illius valori competentem assignare.

Resolutio: Resolutio. 1. Reg. Quoniam in Describendis quibus-
cumque Numeris modum enunciationis sequimur, ideo ini-
tio a notis Maximi Membri facto, ad notas mino-
rum Membrorum, per Ordinem sinistra Dextram re-
sus fiat progressus, donec ad membrum minimum
fuerit perventum, ita tamen ut et notae cujusvis
Membri juxta tres Numerorum Classes sese indi-
cem excipiant, 2. e. in quolibet Membro, pri-
mum ei sinistris locum Notae centenariae, secun-
dum Decadicae tertium Monadicae occupent si ad-
sint (: Conf. §§. 25. 28. 29. :) alias vero in quo-
vis Membro absentis cujusvis notae significari
rel

vel Zerus in signum nullitatis occupet (§. 33.)

(II Descripto primo Membro, illud statim in nota Dextima vel puncto, si Milenarium denotet, vel si Millionarium significet, Virgula et quidem si sit Millio simplex una, si Billio duabus, si Trillio tribus virgulis, superne notetur, et sic deinceps in Membris quoque sequentibus ad minimum usque praecedendum est. Adeoque.

(III.. Membra inter Media si desuerint loca eorundem (: quemadmodum de notis singulorum Membrorum Reg. 1.) dictum est tribus Cyfris impleantur, quas Dextima (: juxta Reg. §. 2.) puncto et virgula superne notatis, atque characteres sequentium Membrorum minorum tandem ebiunde describantur.

IV. Si quando vero Membra maximum sequentia (: quae quot et qualia sint facta propositi Numeri enuntiatione statim patescit.) nullas habent notas significativas, tunc aut singulorum loca juxta dictas statim Reg. Cyfris impleantur: aut ubi ad Notam Millionarii Monadicam primum derentum est, illa seu sit significativa seu minus (juxta Reg. 2.) una pluribus virgulis superne notetur, sequentibus membris, quae alias Cyfris expressari debent, prorsus neglectis.

Hoc

Hoc enim in casu valorem localem, notarum Descripti Numeri virgulae ipsae ultimae Decimae appositae declarant. Atque observatis Ij Reg. Numerus quidem ut par est describi fuit.

Demonstratio.

Demonstrão:

Numerus quidem enumeratione propositus ex. gr. sequens viginti octo Billiones, ter Centa. Sexaginta Millia Millionum quingentae et septem Millionum, una cum viginti Unitatibus simplicibus. Et Alter: Gerenta quadraginta Millia Grillionum, secundum praescriptas Reg. describentur et quidem prior ille taliter. 28,360,507,000,020 posterior sic: 340,000,000,000,000,000,000, aut. 340,000. Atque in Ij Numerorum Descriptionibus enumeratione datorum cuilibet novae valor proprius assignatus est et utraque etiam ut par est sunt Descripti. Id quod de Numeris aliis etiam omnibus cadit. Ergo Numerus quidem enumeratione propositus observatis Ij Reg. Describati factum erit quod petebatur.

Coroll: 1.)

Corollarium 1.

§. 114. Patet ex Ij Numerum Millenarium quatuor ad Millenarium simplicem septem notas Numericas requiri; reliquos autem Millionarios supra simplicem, constanter incremento sequentium crescere

1000
7,000,000.

Corol.

Ac enim in casu, valorem localem, notarum Descripti Numeri virgulae ipsae ultimae Decimae appositae declarant. Atque observatis Ij Reg. Numerus quidem ut par est describi fuit.

Demonstratio.

Demonstrão:

Numerus quidem enumeratione propositus ex. gr. sequens viginti octo Billiones, tercenta, sexaginta Millia Millionum quingentae et septem Millionum, una cum viginti Unitatibus simplicibus. Et Alter: Gerenta quadraginta Millia Grillionum, secundum praescriptas Reg. describentur. Et quidem prior ille taliter. 28,360,507,000,020 posterior sic: 340,000,000,000,000,000,000, aut. 340,000. Atque in Ij Numerorum Descriptionibus enumeratione datorum cuilibet novae valor proprius assignatus est. Et utraque etiam ut par est sunt Descripti. Id quod de Numeris aliis etiam omnibus [illegible] Numerus quidem enumeratione propositus observatis Ij Reg. Describatur factum erit quod perebatur.

Coroll: 1.)

Corollarium 1.

§. 114. Patet ex Ij Numerum Millenarium quatuor, ad Millionarium simplicem septem notas Numericas requiri; reliquos autem Millionarios supra simplicem, constanter incremento sequentium crescere

1000
7,000,000.

Corol.

Coroll. 2.

Cor. 2: a.b.c.&c. 1.2.3.

§. 118. Quod si notis Numericis substituantur, Literae ad arbitrium electae, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui debet (§§. 22. 28.) Numerum occulte scribere licet.

Scholion.

§. 119. Ex. gr. Dentur duae series altera Numerorum Vulgarium, et altera Literarum ad arbitrium electarum atque ita illis singulae singulis subscribantur taliter 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. denotent autem Literarum singulae eosdem Numeros, quos designant notae singulae correspondentes in priori serie, erit tum 358294 = adenio. Et hoc est Artificium, quo Mercatores ad praevia mercium in schedulis affixis designanda utuntur.

Hypothesis. XIII.

§. 120. Familiare etiam est Arithmeticis Numeros non raro Literis Alphabeti A. B. C. D. designare. Sic v. gr. 5204 A 1387 B. Et hoc quidem faciunt causa compendii nescit in Citationibus talium Numerorum semel Datorum semper Numeros ipsos, sed potius illorum loco Literas ut quibus signati fuere, debeant enunciare aut scribere ut adeo hoc in casu, Litera quaelibet Numerorum, cui adjacet de

nota.

Exp

nore. Ex. gr. in Maris Numeris A. valet 5204. 23 autem Numerum 1387. denotat et sic in Ceteris.

CAPUT II.

De Additione Numerorum Integrorum.

Definitio. 32.

§. 121. Additio Idee e operatio illa, per quam pluribus Numeris partialibus in Unum Totum collectis, Numerus aliquis invenitur, qui datis punctim sumptis aequalis est.

Scholion.

§. 122. Numeri Dati seu colligendi dicuntur, Addendi. illi autem qui ex Datis punctim sumptis emergit Summa (: alias Totum, Aggregatum, Quaesitum.) vocatur. Corollarium. 1.

Ex Addendi vel Sint Nri puri vel Homogenei necesse est. Quia Heterogeneos nisi reducibiles possumus reducere.

§. 123. Hinc Numeri Addendi v. Puri v. Homogenei sint necesse est (: §. 59.) neque enim tres Calami, et duo Floreni ergo in Unam summam possunt. nam ea neque Calamos, neque posset significare Numeros itaque Heterogeneos nisi fuerint Reducibiles in unam summam non coalescere, nemo non videt (: §§. 83. 84.) Corollarium 2.

§. 124. In Additione summa debet esse aequalis Numeris Addendis tamquam partibus suis simul

Sum

sumptis (§. 108. Axiom. §lo 121.) ut adeo si inae-
qualis deprehendatur id erit indicii Additionem
fuisse vitiosam. Scholion.

§. 125. Utrum ergo summa sit aequalis,
omnibus partibus additis simul sumptis? ex-
plorari pro auferendo, ex illa, vel alterum Numerum
Addendorum vel singulos eram successive, tum enim in pri-
ori quidem casu alterum Numerorum Addendorum
in summa integre relinquitur, in posteriori autem
casu summa quoque ipsa tota et ex integro au-
feretur; si quidem aequalis fuerit Numeris simul sum-
ptis addendis (§. 91.) alias si nempe ex summa ipsa
aut singulae partes successive auferri non possunt, aut
ablatae post se aliquid relinquant, ut et: si abla-
ta una parte id, quod remanet non sit praecise pars
altera sed illa vel major, vel minor tunc in singu-
lis minimum 2is casibus tuto concludi pro sum-
mam non fuisse aequalem partibus simul sumptis Ad-
dendis, neque Additionem rite peractam extitisse.
Hinc.

Corollarium. 2.

§. 126. Examen seu Proba Additionis
institui pro debet ope subtractionis (§. 94.)
De qua inferius capite proxime sequenti.

Problema 3.

§. 127. Prob. Numeros quotcumque datos addere.

Resolutio. Dum Numeri Addendi sunt infra Decadem (: quales simplices vocamus :) Regulis non indigemus, ut summam eorum reputamus. Exercitium tantummodo requiritur, per quod memoriae infigatur, quantum quivis Numerus parvus ad alium sumptus constituat. Ex. gr. Duo et tria constituere quinque quatuor sex et octo, efficere Decem et Octo. Id quod comprehendi causa, tunc in modum exprimitur: 2+3=5 4+6+8=18. Verum ubi Numeri compositi (: quales vocantur Decadici et Centenarii :) plures veniunt Addendi, tunc Reg. sequentes sunt revendae.

Reg. prima: Numeri Addendi omnes ita sub se invicem sequantur, ut Unitates infra Unitates, Decades infra Decades, Centenarii infra Centenarios &c. positi singulas columnas seu verticales constituant.

Linea ducatur. Reg. IIda: Infra Numeros Addendos ubi omnes secundum Reg. I. Descriptifuerint Linea transversa ducatur, ne alias cum summa ex ipsis emergente confundantur. Tum

Reg. IIIa: Incoetur collectio a nostri columnae

3

Colligantur Nri

lumnae Dextrae, utpote cujus Unitates omnium minimae
sunt §§. Et per singulas columnas sinistram versus
gradatim procedatur. Ita tamen

IVa Ut summa sive Numerus, e quavis colum-
na collectus, si Numerum 9. non excesserit, adeoque
una tantum signa constiterit (§. 22.) scribatur infra li-
neam sub columna correspondente, ex qua fuit qui-
vis collectus est: Ubi autem nihil reperietur, Ze-
rus erit scribendus (§. 32.) Vid. Ex.

Summa si unica nota constiterit columnae illi unde summa enata est subscribatur.

Va Si quando vero summa ex qualibet co-
luma collecta excrescat ultra Numerum 9. in ejus
modi Numerum qui duabus notis scribendus fo-
ret, tunc scribi ex qua talis summa collecta fo-
ret, illa tantum subscribatur seu fuerit significa-
ta seu minus quae §. 28. ad Dextram scribi
debet, altera vero seu mente retenta seu ne ni-
de excedat, separatim assignata, notis proxime
sequentis ad sinistram columnae adjiciatur, et ter-
tia quoque adesset nota (quod rarius accidit.)
Idem ad tertiam columnam seu locum tertium
pertinebit, omnes autem notae ex omnibus colum-
nis ita collectae, atque infra lineam consignatae
summam dabunt. Vid. Exemp. 2.

Si vero 9 excesserit tunc supra illi columnae subscribitur ea quae summa nata est, alia separatim assignata aut mente retinetur.

6a Denique si addendi fuerint Nri

Hec

Heterogenei Reducibiles ut Flor. Gro. Xfr. et similia sub similibus scribantur, ut floreni floreni, Grossi Grossi respondeant, et ita descripti linea transversa subducantur, atque collectionem a minima specie in Quando Additio secundum Reg. praescriptas peragatur, hoc solum discrimine ut summa et quacumque inferioris speciei collecta, si minor sit quam species proxime superior tota subscribatur, sin autem major videndum quoties maximam speciem superiorem contineat, et tot Unitates ad eam referantur solo residuo /: aut ubi nihil remanet Zero./ infra lineam descripto, ut si summa Xfr. esset 4. cum in hac summa unum Grossum contineatur, et insuper unum Xger sub columna Cruzerorum scribi deberet 1. Xger. et unum Grossum seu Unitas 1. ad columna Grossorum foret conservanda Cons. Exemp. 3. 4.

Demonstratio. Additio Numerica est talis operatio per quam Numerus qui collectione datorum Numerorum partialium in unum totum emergit, datis ipsis punctim sumptis aequalis est /: SS. 121. / atque per praescriptam Resolutionem, omnes Numerorum partialium Unitates, Decades, Centenarii etc. omnes Numeri partiales in unum totum seu summam talem coguntur, quae datis punctim sumptis aequales est

id

est, id quod nunc cuique, sive in exemplis sequentibus, sive in aliis juxta §. 125. 126. / experientia volenti patebit. Quod praemissam Resolutionem modorum datorum rite peragatur et efficietur, quod ad faciendum proponebatur.

Paradigma Additionis.

Exemp. 1. Reg. 4.

Addendi	510	A
	380	B.
Summa	890	C

Exemp. 2. Reg. 5.

Adden	607	A
	803	B.
Summa	1410.	C

Exemp. 3. Reg. 6.

	R.F.	Gr.	Xgr.	
Addendi	23	14	2	A
	8	5	0	B.
Summa	31	19	2	C

Exem. 4. Reg. 6.

	R.F.	Gr.	X.	
Add.	78.	16	2	A
	49.	19	2	B.
Summa	128.	16	1	C.

Scholion.

§. 128. Quamvis diximus §. prae Reg. 3. / Additionem a Dextris sinistram versus peragi debere, attamen fieri etiam fieri a sinistra ad Dextram dummodo in Descriptione summarum particularium cuiusque columnae id observetur, ut numerus e quavis serie collectus, ex integro infra lineam describatur, et quidem una constans figura eodem

Seri

Serici ex qua collectus est subjiciatur, si vero Duabus aut tribus (: quod rarius fit :) earum prima et seu Decima isti Serici subscribatur altera vero ad locum versus sinistram secundum, et tertia si adsit ad tertium collocatur, atque sic absoluta operatione per singulas Series, ultimo etiam summae ipsae ipsae partiales in unam summam totalem colliguntur ut patet in exemplo adjecto

Adden. { 97063 A
8002. B.
5041. C

Summae Part. { 9
20
0
10
66

Sum. Tot. 110106. D.

Operatio ad Dextram a Sinistra.

In quo exemplo vides Nros Addendos esse A. B. et C. summam vero totalem D. quae summa D. et non alia prodibit etiam Numeri A. B et C. juxta Reg. praec. adviti fuerint id quod Operationem instituenti parebit.

Scholion.

Multi ordines addendorum lineis dividi neque aut subtrahendi est.

§. 129. Si multi fuerint Numerorum Addendorum Ordines, expediet eos lineis interpositis, in tres quatorie partes dividere, et ex singu

singulis partibus singulas summas colligere, quae de-
inde ad unam redactae summam, totalem summam par-
tialium exhibent ex. gr. Dentis Numeri

	8752	
	346	
	6019	15117.
	85	
	793	
Addendi	504	1382
	837	
	655	
	38	2530.
Summa Tot.		19029.

Summa Part.

Scol.

S. 130. Quicumque Nostri Heterogenei Reducibiles ne-
thodo S. 121. Reg. 14. / praescripta atque ibidem exemplis
4 et 5. illustrata possunt
addi omnino de tabulis no-
ritia singularium specierum, tam su-
periorum quam inferiorum, sic si
addendi sunt Dies Horae, minuta, nor-
se debes quod 60 minuta proxima
faciant unam Horam 24. Horae unum Diem: et
ita in aliis, Horum autem notitia, v. usu vel ex Au-
thoribus comparabitur, videlicet in Tunc finem poterit
R. P. Maximilianus Hell. Astronomus Caeo Regi-
us, per Ursum Pruditorum Orbem celebratissimus
qui in elementis suis Arithmeticae mem Orae et Li-
teralis Par. 3. Cap. 2. Tabulas Reductionum non-
nullas, et eas quidem satis accuratas dedit.

C. A P U T. III.

De

De Subtractione Numerorum Integrorum.

§. 131. Subtractio idem est operatio per quam Numerorum Datorum alter ab altero auferitur, ita ut cognoscatur uter major minore sit altero, seu quantum sit utriusque Differentia; Numerorum vero Datorum ille, a quo Subtractio fit minuendus, et alter qui subtrahitur ab eodem Subtrahendus ab eodem, id vero quod facta ablatione rem aut Residuum vel Differentia vocatur.

Minuendus
Subtrahendus
Residuum.

Corollarium 1.

De Subtractione duas esse Numerorum species minuendi unam, Subtrahendi alteram, atque tunc Subtrahendum puta illo, minuendo minorem minorem, vel saltem ambos aequales esse debere, neque enim quod majus est minori, sed vice versa aut saltem aequalis ab aequali potest auferri.

Corollarium 2.

§. 133. Minuendus itaque Subtrahendo minor aut saltem ad aequalitatem augeatur necesse est, ut sic ex illo auferri possit. Corol. 3.

§. 134. Ad Subtractionem quoque requiritur, ut Subtrahendum minuendo similis, aut saltem ad eandem aliquam speciem Reducibilis sit, neque ut sic

re

Heterogenea inedu cibilis a se invicem. v. gr. a sex duo calami subtrahi possunt, nam Residuum vel differentia 4. neque Libros, neque calamos pro significare.

Corol. 4.

§. 135. Quoniam respectu subtrahendi et Residui Numerus minuendus instar totius est, ut pote cujus partes subtractas, Numerus subtrahendus, reliquas vero Residuum continet (§. 131.) Quia Residuo ad subtrahendum addito necesse est minuendum tanquam totum ex integro Restitui (§. 108.) ∴ Summam ex subtrahendo et Residuo, Minuendo aequari §. 91.) Consequenter Summae ex Minuendo aequalitatem, subtractionis rite factae, in aequalitatem vero operationis male peractae, Criterium infallibile esse, Examen Proba subtractionis quod sit fallacia expers ope Additionis instituatur (: Cons. praeter §. sequentibus sub ex

Problema 4.

§. 136 Subtractionem Numericam rite peragere.

Resolutio. In Numeris simplicibus subtractio omni caret difficultate cum nemini non sit clarum, quod si ex 6. auferatur 2, supersint 4. proinde 4 esse excessum 6. supra 2 seu differentiam inter 6 et 2,

cujus

cujusmodi operationis compendiaria expressio sicut est 6-2-4. Verum in Numeris compositis major est difficultas cujus superandae causa sequentes observentur Regulae

Reg. 1. Numerus subtrahendus ita minuendo subscribatur, ut similes utriusque Numeri notae similibus respondeant, quemadmodum in Additione quoque §. 27. Reg. 3. dictum est. ut unitates minuendi unitatibus subtrahendi respondeant &c.

Reg. 2. Sic Descripti Numeri linea transversa subducatur ut sese cum Residuo confundantur. porro.

Reg. 3. Operatio sinistram versus progressura a Dextris incipiatur et primum quoque Dextima Numeri inferioris nota, a Dextima pariter superioris auferatur atque Residuum scribatur infra lineam sub eadem columna in primo loco, tum secunda etiam inferior tematur a secunda nota superiori, et Residuum ejus secundo loco describatur et ita porro.

Reg. 4. Si Nota tollenda aequalis fuerit superiori aut si Zerus a Zero subtrahi debeat in his casibus loco Residui Zerus scribatur vid. Exemp. 1.

Reg. 5. Si autem Zerus a nota significante fuerit subtrahendus, sicut Nota pro Residuo ponatur vid. Exemp. 2.

Reg. 6. Pariter si in superiori Numero restent aliquae notae, quibus Nullae respondent

in ro

in Numero inferiori, etiam illae pro Residuo infra lineam scribantur. vid. Exemp. 2.

Reg. 7. Si autem superior fuerit Zerus vel etiam Nota significatria minor inferiore, tum ad superiorem e vicina eidem transfertur Unitas in eo loco Decadem valens (§. 31.) tunquam fiat Subtractio inferioris a Zero vel Nota superiore jam Decade aucta (§. 133.) nota vero est quae Unitas translata e Signi eorum puncto, quod admoneat illam una Unitate minorem esse vid. Exemp. 3.

Reg. 8. Si vero Nota illa superior e qua transferenda foret Unitas Zerus fuerit, tum primum quidem ad Zerum ipsum e nota eidem proxima sequente transferatur Unitas, quae in loco Zeri valebit 10. (§. 31.) Unde etiam Unitate ad augendam notam minorem superiorem concessa in locum Zeri remanebit 9. Quo in casu ambae notae tam significatriam Unitate, quam etiam Zerus puncto notetur, est quo illam quidem Unitate minutam, Zerum vero Supismodi puncto notatum 9. valere intelligatur Exem. 3. pari quoque ratione plures etiam Zeri, si in minuendo contrahentur occurrentes translata ad ejusdem Unitatem, e nota significatria illis proxima, omnes in Notenarios mutantur, adeoque singulis punctis notandi veniunt Ex. 4.

Reg. 9. Si Dari Numeri sint Heterogenei Reducibiles Zerum etiam minor majori

Subseri

Subscribatur, ita ut similes similibus respondeant, quibus subductis operatio quoque juxta praescriptas Reg. fiat. Ac solum Discrimine, quod Unitas a specie superiore ad inferiorem translata non Decuplum valet, sed quot Unitates in ea continentur hoc est, quot speciei minoris Unitates in illa continentur ex. gr. si ad Xferos Grossos transferatur valet tres Unitates seu tres Cruciferos, unus vero Flor. Rh. ad locum Grossorum translatus valet 20. Unitates seu Grossos. Exemp. 5.

Dum autem species inferiores subtrahendi, desiderantur ex minuendo eae ex Unitate speciei superioris minuendae erunt faciendae, ut si subtrahendus contineret Flor. Grossos et Xferos, minuendus vero 10 florenos ex. gr. 5tum relictis 4. Flor. in loco Flor. ex uno fieri deberent 20. Grossi. Et in loco grossorum 19. relictis, in locum Xferorum scribi 3. Xferi. Exemp. 6.

Demonstratio. Subtractio Numerica peragitur ita, si Datorum Numerorum alterum auferendo ab altero tantum fuerit Residuum, quod additum subtracto restituat minuendum (§. 110 125.) atque per traditas Reg. singulae partes minus Datorum nempe subtrahendi, a singulis partibus alterius, nempe minuendi, adeoque totus subtrahendus, a singulis alterius partibus, nempe minuendi adeoque totus subtrahendus a toto minuendo (§. 108 Ax. 1.) ita auferetur ut Residua singularum partium,

ac

ac proinde totum quoque Residuum (Scil.) si addantur tori subtrahendo, restituetur totum minuendum. Id quod exemplis subjecti Paradigmatis ostendunt. Et per tractatus Rg subtractio Numerica rite peragitur.

Paradigma subtractionis

Exemp. 1. Reg. 4.			Exem. 2. Reg. 5. et 6.		
Minuend.	760508 A	Add.	Minuend.	423851. A	
Subtra	720508 B		Subtr.	2030 B	Add
Residuum	040000 C		Resid.	421821. C	
Proba	760508 A		Prob.	423851 A.	Summa

Exemp. 3. Reg. 7. 8.			Exemp. 4. Reg. 8.		
Minu.	6.5.0.3.0. A.		Minuend.	8.0.0.4 A	
Sub.	8457 B	Add.	Subtr.	6347 B	Add.
Resid.	56573 C		Resid.	1657 C	
Prob.	65030 A	Summa	Prob.	8004. A.	Summa

Exem. 5. Reg. 9.	Rg.	Pro.	Xfs.		Exemp. 6. Reg. 9.	Rg.	Pro.	X.		
Minuend.	743	1.2	1 A		Minuend.	5	00	0 A		
Sub.	54	17	2 B	Add.	Subtra.	3	12	2 B	Add.	
Resid.	688	14	2 C		Resid.	1	07	1 C		
Prob.	743	12	1 A	Summa	Prob.	5	00	0 A	Summa	

Scrol

Scholion. 1.

§. 134. Mirum fors videbitur Tyroni, qui fiat quod in casu Reg. 7. 8.) quando nota inferior demi nequit, a superiore nota significatoria ad sinistram proxima in minuendo unitate minatur, et Cyfrel si quae fuerint medial in totidem 9. commutentur, hoc ut explicetur expediet Exemp. 4. §. praec. inspicere et paulo curiosius examinare, in quo subtrahendi 23. notas Dextimas notis Dextimis minuendi A. majores esse palam est, quia ergo ipsius 23. nota Dextima 7. demi nequit ex 4. adjiciuntur 10. et quidem propter Zeros sequentes a nota (3a quae valet 8000 = Octo millia §. 28.) liquet autem cum ab Octo Millibus 10 subducuntur remanere 7000 et nongenta et nonaginta, quae quia Arithmeticae exprimuntur 25 notis 7990 patet quare in A nro sese superiore 8 restantur in 7 et Zeri 00 in 99.

Scholion. 2.

§. 138. Nonnulli Arithmeticorum Reg. subtractionis praescribentes in casibus 7. 8.) §. 136 dum sese a nota Minori superiore v. Zero major subtrahenda venit percipiunt unitatem a sexta inferiore, a vicina nota mutuandam esse, eandemque 0 minuendam sed aliam intelligunt ex. gr. in Exempl. 3 §. 136. sic operaturi. 7 ex 0. subtrahi nequit proximam itaque notam subtrahendus 5. puncto ad mi

Minu.	65030 A.	
Sub.	8457 B	Ad.
Resid	56573 C	
Prob.	65030 A.	Sum

minuendum eam Unitate auctam esse, et tum ad 0. unam Decadem mutuo adeptam mente adjiciens dices 7. ex 10 subtrahendo restat 3. Deinde procedendo ad sequentem notam 5 puncto signatam 6 dico 5. sed 6 a 3 iterum subtrahi non potest, proinde sequentem notam inferiorem 5 ex dicta prius ratione puncta signans mutuata Decade dico 6 ex 13 manet 7. et ita porro, sed quae Praxi nos §§ 136. Rg. 7. 8.) traditam proferimus, tum quia facilior multo est, plerique ubi Zeri complures occurrunt, tum quia Usualior, utpote quae etiam ad Numeros Heterogeneos Reducibiles extenditur, quibus tamen praxis de §§. mentionata applicari nequit.

Sectio Tertia.

§§. 139. Subtractio a sinistra etiam ad Dextram ut fieri potest, dummodo in Describendis partialibus Residuis de numero observetur ut unus Residuus unius notae infra eandem notam minuendae ex quarum ausit subscribenda, si vero fuerit Duarum notarum, id quod saepius accidit quando scilicet ex Duabus notis minuendi simul fit ablatio unius notae subtrahendi, tum Decadica illius nota describatur, et ea quidem infra lineam minuendae pariter Decadica, altera autem Residui nota aut mente teneatur, aut ne inde excidat notae minuendae Monadicae, qua scilicet

parti

Sese partim ablatio facta fuit subscribatur ex qua tandem cum sequenti nota minuendi connexa, nota subtrahendi sequens auferatur, et sic porro donec ad ultimum derentum fuerit, quod totum infra lineam reponitur, Res nonnisi unico exemplo illustranda ira voce magis clarescet. Dentur v. gr. duo numeri A. B. die ex illo auferendus, operatione igitur a sinistris in Dextra

A.	768	
B	65.030	Minu
	8457	Subt.
C	57573	Resid.

8 ex 65 relinquit 57. adeoque 5. infra lineam sub nota minuendi 6 repono 7. vero retineo v. scribo supra notam minuendi 0. tandem 4 ex 70 aufero restantque 66 jam 7. supra scriptum deleo 6 vero scribo infra lineam suo in loco alterum vero 6 retineo v. superscribo notae minuendi 3, postea 5 e 63 relinquit 58. et 16 sub scriptum deleo 5. infra scribo et 8. appono notae minuendi 0, denique 7. ex 80 aufero, Residuum tanquam ultimum totum subscribo lineae, sicque habeo Residuum quaesitum C. conf. Exemp. 3 § 136

C A P U T IV.

De Multiplicatione Numerorum Integrorum.

Definitio. 34.

§. 140. Multiplicatio Numerica est operatio per quam Dati alicujus Numeri totius facta positione quotiens

alter

alter Numerus Datus Unitates continet, invenitur summa seu Novus Numerus extinde consurgens

Scholion.

§. 141. Multiplicationis itaque usus usi (§ prae) ex Definitione patet: est enim reperienda intra longiorem calculum summa alicujus Numeri, sibi ipsi iteratis vicibus Addendi. ita si quis quaerat summam quae ex 15 octies sumptis oritur necesse est e 15 octies sumptis seriem efformare indeque summam 120 colligere nisi Multiplicationem adhibeat, quae eandem summam 120 breviori multo vice inveniet usi infernis §. 153 &c.

Definitio. 35.

§. 142. Iterata vero hujusmodi Additio vocatur: Ductus unius Numeri in alterum. E Numeris autem datis ille qui iteratis vicibus sumitur Multiplicandus, et alter qui Unitates indicat, quotiens ponantur Multiplicator audit, communi denique vocabulo tam Multiplicator quam Multiplicandus Factores, et summa ex illis in se ductis resultans, Factum aut productum appellatur, sic in exemplo praecedente (§. 141.) si 15 vero et 8 et quidem 15 Multiplicandus, et 8 Multiplicans, summa vero 120 est factum seu productum, est ductu 15 in 8 result.

Quid iterata Additio?

Quid Multiplicandus?

Multiplicator?

Quid Factum?

Corollarium 1

§. 143. Hinc Multiplicare est: Ducere Factorem unum in alterum, i. Multiplicandum in Multiplicantem, ut inveniatur factum seu productum

Quid Multiplicare?

§. 144

Quid est Factum?

§. 144. Corol. 2. Unde patet Productum seu factum: esse summam Multiplicandi tories sumpti quot Multiplicator Unitates continet, seu quod idem est: In producto tories continere Multiplicandum, quoties Unitates continentur in Multiplicatore. Corol. 3.

Sive

§. 145. Si itaque Multiplicator Unitas fuerit, productum debebit esse aequale Multiplicando, adeoque: Unitas non Multiplicat. Coroll. 4.

§. 146. Ex dictis quoque clarum est: Productum penitus tolli debere, ubi est eo Multiplicandus tories auferri quoties unitas continetur in Multiplicatore, si quidem legitima sit operatio §. 91.) Nam quibus positis aliquid coaluit, iisdem ablatis idem destrui ac annihilari pro uno debet, Qui Divinitas Multiplicationis probatur, reperita subtractione sive Divisione §. 94. de quo Cap. 5. sequenti plura. Corol. 5.

§. 147. E Multiplicatione ergo rite deducitur Idea proportio seu similitudo. Productum ita se habet ad Multiplicandum, quemadmodum se habet Multiplicator ad Unitatem. Aut: Unitas est ad Multiplicandum, uti Multiplicator ad productum: quoties, productum continet Multiplicandum, tories quoque continet Multiplicator Unitatem, et quoties Unitas continetur in Multiplicando tories Multiplicator in facto.

Gregore

De Multiplicatione Numerica.

Theorema 1.

§. 148. Prop. Duorum quorumvis Numerorum Datorum inter se Multiplicandorum, seu Duorum factorum uterlibet ducatur in alterum idem semper factum producere debet. Propoo:

Demonstratio.

Dentur Duo Numeri inter se Multiplicandi 4. et 3. qui in suas Unitates resolvi exprimi possunt taliter 1.1.1.1. 1.1.1. ducere itaque 4. in 3. idem erit acceptum 4 Unitatum ter sumere uti Tabetur in figura A. et B. atque utroque in casu seu 4 Unitates per 3. series scriptas in A. seu 3. Unitates in 4 series scriptas in B. computes id Numerus 12 prodibit, per Jos autem Numeros 3. et 4 Duo quivis Numeri inter se multiplicandi possunt repraesentari, eadem enim e ratio Duorum quorumvis Numerorum, quoad Multiplicationem uti evidens e §. 140. Ergo Duorum quorumvis Numerorum Datorum inter se Multiplicandorum seu Duorum factorum, uterlibet ducatur in alterum idem factum debebit producere. q. e. d.

A.	B.
1111	111
1111	111
1111	111
12	12

Ergo Dum alter factorum e Zeris tum productum etiam erit Zerus.

Corollarium.

§. 149. Ante: Factorum quivis toties continetur in facto, quoties Unitas in altero §§. 143. 147. adeoque quivis etiam factorum toties ablatus e facto, quot Unitates alter continet constanter debet

relin

~~reliquere alterum factorum~~ S. 146. productum ex integro annihilat

Scholion.

S. 150. Multiplicatio respectu habito ad Numeros, qui Multiplicantur est vel Simplex v. Composita.

Definitio. 36.

Simplex Multipl.

S. 151. Multiplicatio Numerica simplex est: In qua uterque factorum est Numerus simplex seu Unius notae.

Scholion.

S. 152. Pro Multiplicatione simplici nulla prae praescribi Reg. quin (: ut Regularum quoque Multiplicationis usus Compositae expeditior sit :) opus est pro vera rerum simplicium aut memoria tenere, aut Saltem Abacum aut Tabulam Pythagorae istic subjectam in promptu habere.

Tabula Pythagorica.

A H. B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	F
3	6	9	12	15	18	21	24	27	H
4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	M
7	14	21	28	35	42	49	56	63	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	D

E G S C

I

Abacus Ze sive Tabula, quae ab Auctore Pitagoricus
est, in supremo Ordine A. B. habet notam simplicis no-
tas Arithmeticas 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 et sub singu-
lis in Ordine C. F. ponitur singulorum duplum, in
Ordine tertio G. H. triplum, et sic usque ad Ordi-
nem nonum C. D. in quo singulorum Nonuplum posi-
tum habetur, uti hoc unicuique ad oculum patet. Usus
autem hujusce Tabulae extimus Ze est. Datis nimi-
rum duobus Numeris simplicibus qui inter se multi-
plicandi veniunt, unum eorum quaerere in latere superi-
ore A. B. et alterum a sinistro A. C. atque in com-
muni utriusque, datur Numerus ex uno eorum in
alterum ducto productus. Ex. gr. sint duo
Numeri 8. et 6. inter se multiplicandi, quaeratur itaque
in Serie A. B. Numerus 8. et in Serie A. C. Nume-
rus 6, tum ab 8. procedatur per Seriem K. I. et a
6. per Seriem L. M. donec perveniatur ad quadran-
gulum, in quo dictae duae Series concurrunt Nu-
merus autem 48. illi quadrangulo communi in Se-
ris, et utrique Datorum respondens est. Factum
est 8. in 6. productum pari modo inveniretur. 9 x 7 = 63
6 x 6 = 36 &c.

Definitio 37.

§. 153. Multiplicatio Composita est Nu- Multiplicatio Composita
merorum quorum ambo vel saltem unus constat

ex

ex pluribus Figuris.

Problema V.

§. 154. Pro. Numeros quosvis multiplicare.

Resolutio. Numerorum simplicium Multiplicatio ope Tabulae Pitt Japonicae quomodo fiat, jam I. §. 152. Exposuimus, pro Multiplicandis autem Numeris compositis Tae Reg. Serientur V.

Reg. (I.) Numero Multiplicando Multiplicator constanter subscribatur, ea prorsus lege, quam in Additione (§. 127 Reg. I.) diximus, ut adeo nota Dupris, puta Multiplicatoris, si sit unica notae Dextrinae illius puta Multiplicandi, Multiplicatoris vero plurium notarum Unitates Unitatibus multiplicandi, Decades illius decadibus Dupris respondeant, atque sic descripti lineae transversa subducantur, ut factores a facto distinguantur, uti Tabetur in Exemplis subjecti paradigmatis.

(II.) Si Multiplicator unica constet nota, Tunc in omnes multiplicandi notas initio a Dextris facto singillatim ducantur, et facta particularia equavis nota Multiplicandi productae numis quinque Figurae eidem infra lineam subscribantur. Productorum vero Duarum figurarum prior ad Dextram subjiciatur notae Multiplicandae

candel, altera Proximo, proinde addenda reserveri, non secus ac in Additione (§ cit. Reg. V.) dictum est vid. Exemp. 1.

(III) Si vero tam Multiplicandus quam etiam Multiplicator ex pluribus constent notis, Multiplicatione a Dextris inchoata singulae Multiplicantis notae in singulas Multiplicandi ducantur, initiumque particularia producta scribendi semper fiat sub ea nota Multiplicantis per quam actu fit Multiplicatio vid. Exemp. 2.

(IV) Si in loco Multiplicandi Zeri occurrant, iidem prout sequuntur in loco productorum describantur, nisi aliquid e producto prius multiplicatae notae eodem loco describendum reservatum fuerit, Zeri vero in intermedio multiplicantis loco occurrentes compendii causa omittantur, dummodo, Multiplicatione per notas ut significantes instituta servetur ordo, quo facta partialia juxta praec. Reg. 3. scribenda sunt Conf. Exem. 3. et 4.

(V.) Peracta Multiplicatione omnia producta partialia, per Additionem in unam summam redigantur. Conf. 2. 3. 4.

(VI.) Si vero in fine unius vel etiam utriusque factorum unus vel plures Zeri occurrant, Multiplicatio compendii causa fiat per notas significantes, et producto totali ad Dextram adnectantur, tot Zeri quot adsunt in fine factorum vid. Exem. 5. 6.

(VII

VII. Si Multiplicandus Unitate & uno vel pluribus Zeris constiterit in fine Multiplicandi illi tot Zeri ascribantur & habebit productum: Vice versa autem si Multiplicandus constiterit unitate, & uno vel pluribus Zeris, Zeri in casu Multiplicatori adjiciantur, ut factum obtineatur vid. Exempl. 7. 8.

VIII. Denique si Multiplicandus constet Numeris Heterogenis Reducibilibus, & per Numerum aliquem datum multiplicetur, vel singulae ejus species ab infima inchoando multiplicentur, atque in describendis productis (Reg. 6.) quam pro Descriptione summam (§. 127.) praescripsimus, observetur, juxta quam factum Speciei inferioris Speciem superiorem adequans, ad factum Ejusdem Speciei sed superioris addendum erit. vid. Exempl. 9. Vel vero Species diversae Multiplicandi, ex gr. Rhf. Flor. Grossi, & Cruciferi. (si offerantur, prius ad minimam (puta Cruciferos.) sunt reducendae & sic reducere per Reg. jam traditas multiplicentur conf. Exempl. 10.

In hoc casu posteriori productum ad majorem, quae placuerit, speciem ope Divisionis cap. 5 seq. tradendae reduci poterit. Sed de Reductione inferius dicetur.

Demo

De Multiplicatione Numerica. 126.

Demonstrao: Multiplicao vice peragitur quando multiplicandum toties positum existit in Facto, quot sunt Unitates in Multiplicatore (: conf. §§. 140. i 42 146) Atq. per datas Reg. omnes partes Multiplicandi, adeoq. totum Multiplicandum (§. 108. Ax. i.) toties ponitur, quot in omnibus notis Multiplicatoris, sicq. in toto Multiplicatore (: §. cit.) Unitates existunt. Id quod tam ex subnexo Paradigmate, quam ex aliis exemplis aliis satis e evidens. Ergo per das Regulas Numerorum quorumvis Multiplicao vice peragitur. q. e. d.

PARADIGMATA multiplicationis

Exempl. i.

17934 } Factores
2 }
35868. Factum

Exempl. ii

4861 } Factores
352 }
9722 }
24305 } Facta partialia
14583 }
1711072. Factum Totale

Exempl. iii

604080 } Factores
213. }
1812240 }
604080 } Fact. partialia
120816 0 }
128669040 Factum Totale

Exempl. iv.

3852 } Factores
2003 }
11562 } Facta partialia
7708 }
7719562 Factum Totale

Exem

Exempl. V.

836
200 } Factores
167200 Factum Gen.

Exempl. VI.

36|000
2|00 } Factores
7200000 Factum

Exempl. VII.

352
100 } Factores
167200 Factum

Exempl. VIII.

1000
23 } Factores
23000 Factum

Exempl. IX.

Rf.	Gron.	Xf.	
3	12	2	Factores
		4	
14	10	2	Factum

Exempl. X.

R.	Gron.	Xf.	
3	12	2	218 Fact.
			4
			872 Factum

Scholion.

§. 155. Multiplicatio pro etiam a sinistra in Dextram, et quidem ceteris observatis tunc in modum

1mo Multiplicator multiplicando, ad partem sinistram ubi Multiplicatio incipit, subscribatur.

2do In describendis productis, siquidem illudimus notae fuerit, scribendi initionem incipit sub nota Multiplicante, in quem locum alias (si nempe productum duarum notarum fuerit.) Nota ejusdem Dextrina

so

ponitur, sinistrum autem eidem ad partem sinistram praeponitur: ex multiplicationibus autem reliquarum Notarum, si productum aliquod oriatur, duobus notis scribendis, ejus nota sinistrum scribatur infra eam, quae in Antecedenti producto Dextra, sive prima erat, sed ut res exemplo clarius patescat. Oporteat. v. gr. 753 ducere in 84 operatio absolvetur juxta propositum schema minimum 7 * 8 = 56 scribo ergo 6. infra lineam sub nota Multiplicante 8. et 5 eidem versus sinistram praepono, tandem 5 * 8 = 40. cujus notam sinistram 4, scribo infra 6. et 0 ante 6 Deinde 3 × 8 = 24 itaque 2. scribo infra 0. et 4. ante 0. Eodem modo etiam cum nota altera Multiplicante 4. facimus 7. × 4 = 28. adeoque 8. scribo in sertem verticalem notae Multiplicantis 4. et 2, eidem appono ad partem sinistram mox 5 × 4 = 20, proinde 2. scribo infra 8, et 0 ante 8. postremo 3 × 4 = 12, itaque 1 scribo infra 0, et 2. ante 0, quibus subductis facta partialia in unam summam colligens reperio factum totale 63252 quod prodibit etiamsi 753 per 84. a Dextris sinistram versus progrediendo, secundum praeactam Regulam Multiplicationis multiplicentur

753	Factores
84	
5604	Facta Part.
42	
2802	
21	
63252	Facta Tot.

Sed de Multiplicatione sufficiant.

CAPUT V.

De Divisione Numerorum Integrorum.

Definitio. 38.

§. 156 Divisio Numerica est operatio, qua Numerorum Datorum minorem ex Data majori toties, quoties Ei in illo continetur, auferendo, Numerus, qui idem indicat suis Unitatibus, reperitur.

Solution.

§. 157. Ex. gr. si Dentur Duo Numeri 8 et 2, atque Ei ex eo toties auferatur, quoties id fieri potest, minor est Numerus 4, Ei enim indicat suis Unitatibus quoties 2 in 8. continetur, auferendo ex eorum potest.

Definitio. 39.

Quid Dividendus? §. 158. Numerus Datorum major, sive is, ex quo alter auferetur, vocatur Dividendus. Et qui ex eorum auferetur, seu minor appellatur Divisor. Numerus autem indicans quoties Divisor insit Dividendo, Quotus in Dato (§. pr.) Dividendus est 8. Divisor 2, et Quotiens sive Quotus 4.

Divisor?

Quotus?

Corollarium 1.

§. 159. Cum quotus indicet Numerum, quoties Divisor in Dividendo continetur, seu quoties Ei ab illo subtractus

tractus sit (§§ 156 158.) Quae sequitur: in Dividendo, toties continere Divisorem, quoties Unitas in quotiente reperitur.

Corollarium 2.

§. 160 Hinc ergo vice deducitur ista proportio: Unitas est ad Quotum, uti Divisor ad Dividendum.

Corollarium 3.

§. 161. Si ergo Divisor toties sumatur, quoties est Unitas in Quoto, Dividendus in integrum debet restitui (: id enim nihil aliud est, quam toties restituere Divisorem, quoties ablatus est, hoc autem fit ut Dividendus integre reddatur (§§. 91.) seu quod idem est factum ex Divisore in Quotientem esse aequale Dividendo.

Corollarium 4.

§. 162. Ut igitur examinetur an operatio recte peracta, seu: An quotiens accuratus sit is multiplicandus est per Divisorem, et factum cum Dividendo conferendum §. cit. praec.) quod si enim hoc majus deprehendatur, quam Dividendus, Quotus justo major acceptus est ex opposito, Unde patet Probam Divisionis esse Multiplicatorem

Corollarium 5.

§§. 163. Cum idem factum prodeat sive Divisor ducatur in Quotum, sive Quotus in Divisorem (§§. 148.) Quae palam est sequi hanc proportionem: Quotus est ad Divi-

dendum

videndum usi Unitas ad Divisorem.

Corollarium 6

§. 164. Sequitur Dividendus considerari qui instar producti alicujus ex Multiplicatione, cujus Factores sunt Divisor & Quotiens (§. 161, 162.) Hinc dividendum dividere per Divisorem, ut obtineatur Quotiens, idem est ac factum dividere per unum Factorem cognitum, ut Factor alter reperiatur. Unde constans est Regula: Dato producto & Factore, datum dividendum est, i. e. Si factum aliquod dividatur per unum Factorem, Quotus est alter Factor. (§. 149.)

+ ejus altero, ut inveniatur alter Factor, Productum per Factorem.

Scholion.

§. 165. Patet ex 2i illud, quod supra (§. 146.) diximus scilicet, per Divisorem posse explorari utrum Legitima fuerit Multiplicatio. Hæc enim legitima tunc est, quando factum coalescit e Multiplicando per ceteris rotis positio, quotiens est Unitas in Multiplicatore (§. 140 142.) id vero innotescit, si Ablato totiens Multiplicando quotiens est Unitas in Multiplicatore, Factum penitus destruatur (§. 91.) i. e. si Factum per Multiplicandum absque ullo Residuo dividi possit (§. 56.)

Problema VI.

§. 166. Proo. Numerum Datum quemvis

majo

Majorem per Datum alium Minorem simplicem dividere.

Resolutio. Si Numerus quoque Dividendus simplex fuerit, ad inveniendum Quotum Regulis tandem opus est, facile enim quisque providet, Quoties Numerus simplex in alio simplici contineatur, verum si Dividendus compositus sit, is observatis Regulis sequentibus dividetur.

Reg. 1a. Ad sinistram collocetur Divisor dimidia lunula cornibus sinistrorsum spectantibus comprehensus, ad cujus Dextram scribatur dividendus, quem sequatur dimidia alia lunula, sed cornibus Dextrorsum spectantibus, et hic erit locus scribendi Quoti.

Reg. 11a. Interstitio quoties Divisor contineatur in primis, vel si ea Divisore minor est, in duabus prioribus Dividendi notis a sinistra in Quando, id quod + Tabellae + ope Pii Tagoriae superius (S. 152.) expositae facile reperietur, si sese in serie ejus superiore Nota Divisoris quaeratur, atque tam reperta in eadem serie eousque descendatur, donec in aliqua columnarum ad Dividendum vel ei proxime minorem Numerum proventum fuerit; huic enim correspondens in serie sinistrina, Numerus erit Quotus quaesitus, qui nis scribatur dimidiae lunulae Quoto destinatae per quem deinde multiplicetur Divisor et Factum exactae suscriptum notae vel notae dividendi cum quibus actu operatio exercetur, ab eadem vel iisdem subtrahatur, ac si quid permaneat ducta transversa linea subscribatur.

Reg. 3

Reg. III Residuo Quoti ad Dextram pingatur, sequens Dividendi nota, aut Iste, si Iste in Iis in Iis ex priori divisione remanserit, sola deponatur infra lineam ductam, in ipso Dividendo + puncto sive virgula notanda, quae indicet eam jam depositam etc.

Reg. IV. Numerus autem iste infra lineam dicto modo scriptus, pro novo dividendo Tabeatur, in quo rursus inquiratur, quoties Divisor contineatur, et Quotus ope Tabulae Pitagoricae modo primo (Reg. II) indicato repertus scribatur in lumbam ad priorem Quoti latus Dextrum, cum quo recenter inventus multiplicetur Divisor, et factum ut ante subtrahatur, atque iterum deponatur sequens Dividendi nota in ipso Dividendo virgula signanda, et eadem operatio tamdiu continuetur, donec omnes dividendi notae sensim deponitae fuerint, si quid autem ex ultima subtractione remanent, illud adjungatur ad Dextram Quoti, et lineola interposita Divisor eidem Residuo subscribatur conf. Exemplum 2, et 3.

Reg. V. Quod si in operatione Residuum nullum fuerit, et deposita nota Dividendi minor sit Divisore, hoc in casu pro Quoto Zerus scribatur et ex Dividendo ad hoc una nota deponatur vid. Exempl. 3.

Demonstratio. Divisio rite peragitur quando ablatione Divisoris ex Dividendo invenitur Quotus, in quo toties continetur Unitas, quoties Divisor in Toto Dividendo, ideoque indicans suis Unitatibus, quoties

Divi

Divisor in Toto Dividendo Contineatur (§§. 156 et 158.) Atque per Das Reg. talis Quotus invenitur uti patet ex subjecto Paradigmate nec non Exemplis Et per Das Regulas recte peracta Debet Divisio. q. e. d.

PARADIGMA DIVISIONIS PRIUS

Divisor.	Divid.	Quotus.	Divisor.	Divid.	Quotus.
2.)	72	34 (3617.	3.)	2504.	(834 2/3
	6			24	
II Divi.	12		II. Divi	10	
	12	Exempl. i.		9.	Exem. II
III Divi	3		III Divi	14	
	3			12	
IV. Divi	14		Residuum ult.	2.	
	14				
Residuum ult.	00				

Divisor.	Divid.	Quotus.
9.)	2754381	(306042 3/9
	27	
I Divi	54 . .	
	54 . .	
II Divi	38	
	36	
III Divi	021	
	18	
Residuum ult.	03	

Exemplum iii.

SCIOLION.

§§. 167. Tribus ut vidisse operationibus Divisio ab so

absolvit 1o. Dividit Dividendus per Divisorem ut habeat Quotum 2do Multiplicat Divisor per Quotientem ut obtineat productum 3o: Hoc productum subtrahit e Dividendo ut reperiat Residuum cognoscatque novum Dividendum. Hora aut Idee quae hoc Mnemonico continetur: Dic quotiens, multiplica, subduc, transfer quae secundum (: sic notandum.)

Definitio 40.

§. 168. Quantitas quae per alteram exacte quinquiesquam manet Residui dividi pro 8 Multiplicatis illius quippe aequalis facto est quotiente Divisionis in Quantitatem illam Duero: Sic 6. est Multiplum Numerum 3. & 2. item 18. Numerorum 9. 6. 3. & 2 Quinero nullius alterius quam Unitis & Multiplus dicitur Numerus primus, Omnis autem Numerus est Multiplum Unitis.

Problema VII.

§. 169. Proo: Numerum quemvis dividere compositum per Numerum aeque compositum!

Resolutio.

Reg. I. In describendis Divisore, Dividendo, & Quoto Reg. I. Prob. VI §. 166 Servetur.

Reg. II. Inquiratur ope Tabellae Pythagoricae, uti in Reg. II §. cit. dictum, quotiens sinisti-

ma Divisoris Nota continetur in Sinistrina Dividendi (: aut si Iste minor sit quam Sinistrina Divisoris nota :) in Duabus Sinistrinis Dividendi notis, et Quotus in Numerum Scriptus ducatur in totum Divisorem atque productum Ive subtrahatur a tot Sinistrinis notis Dividendi, quot notas habet Divisor (: ✠ una vel pluribus, si nempe Sinistrina Divisoris nota major sit quam Sinistrina Dividendi. :) Si autem inde subtrahi nequeat, invicio est Quotum respectu totius Divisoris justo majorem esse, ac proinde una vel pluribus Unitatibus minuendum, augendum vero sui facta Subtractione Residuum majus fuerit Divisore, donec sit productum et Ive et in illo casu ex Quoto in Divisorem v. sit aequale vel proximè minus notae Dividendi Conf. Exemp. 1. Para. sequentis.

Reg. III. Peracta Subtractione Residuo ad Dextram jungatur proxime sequens Dividendi nota, virgula signata uti S. Cit. Reg. 3. dictum est, et summa pro Numero Dividendo habita operatio eadem plane ratione continuetur donec omnes Dividendi notae sensim depositae sint, siquidem ex ultima Subtractione remaneat, illud jungatur Quoto per modum Fractionis juxta Reg. IV. S. Cit. Conf. Exempl. 1. Part. 2.

Reg. IV. Quando Residuum quodsam notam Dividendi nota autem minus est Divisore illico compendii

Causa

causa Quotienti inventae adjungatur Zerus, atque ex Dividendo, Nota Sequens Denuo deponatur, idque tamdiu repetatur donec Residuum sit aliquem, Dividi Denuum possit per Divisorem, Deinceps autem Metzodo indicata continuatur operatio vid. Exemp. 2. Sequens Pand.

Reg. V. Si Divisor ex Unitate et nullo vel pluribus Zeris constiterit, tot notae Dextrae ex Dividendo rejiciantur, quot sunt Zeri in Divisore et Quotus erunt Notae sinistrae Dividendi a quibus notae ejusdem Dextrae abscissae sunt. Ac autem abscissae Dividendi Scotae notae, tanquam Residuum ultimum per formam Fractionis jungantur Quoto scripto sub ex minore Divisore vid. Exempl. 3. Pandq. Sequentis

Reg. VI. Pariter si Divisor quis cumque in fine Zeros adjunctos habeat, Zi ex Divisore abscissis totidem quoque notae ex parte Dextra Dividendi resecetur, quot Zeri sunt in fine Divisoris, et cum reliquis tam Dividendi quam Divisoris notis instituatur operatio quae tota peracta Residuo ultimo si quot fuerint jungatur a Dextris notae resectae Dividendi quibus interposita Lineola, subscribatur Divisor. Conf. Ex. IV. Par. Sequ.

Reg. VII. Si vero tam in fine Divisoris quam etiam Dividendi adsunt Zeri, Zi in utroque pari Numero

Dele

deleri possunt, reliqui notis juxta Regulas praescriptas Divisis Conf. Exempl. V. Paradig. Seq.

Reg. VIII. Si Numeri Dati sunt Heterogenei Reducibiles primo ad speciem ex datis minimam reducantur, et Deni. juxta praecedentes Reg. dividantur.

Demonstratio.

Hujus Problematis eadem est, quae praecedentis vid. §§. 166.

Paradigma secundum Divisionis

Exemplum i.

Divisor. Divid. Quotus.

362) 147475. (: 407 $\frac{141}{362}$

1448

--2675

2534

-141

Exemplum ii

Divi. Divid. Quotus

298:) 894745 (: 3002 $\frac{149.}{298.}$

894.

---745

546

149

Exempl

Exempl. III.

Div.	Divid.	Quotus.
100.)	436/27	(436 $\frac{27}{100}$

Exempl. IV.

Div.	Divid.	Quotus
3200)	86547	(27 $\frac{147}{3200}$
	64	
	225	
	224	
	00147	

Exemplum V.

Div.	Divid.	Quotus.
2500)	436000	(174 $\frac{10}{25}$
	25	
	186	
	175	
	100	
	100	
	10	

Scholion.

§. 170. Ex dictis Jacemus de Divisione Regulis, ut et exemplis illas illustrantibus Tyrones ad facilitandum sibi usum Divisionis observatur

(1o.) In Positionibus Particularibus Quotum particularem nunquam posse inquirere quam 9.

(2do.) Quando §. praec. in casu Tele Problematis septimi juxta Reg. secundam inquiritur Quoties sinistrum Divisoris nota, in una vel pluribus partibus sinistrum Dividendi notis contineatur, videatur simul an reliquae notae Divisoris, tunc in reliquis notis

Divid

Dividendi continentur, et hoc ideo, ne ubi Quotus Particularis justo magis accipiatur ex. gr. (ss. prec.) in Paradig. 2. Exempl. V. primi Divisoris nota duo, in primis dividendi 4. continetur quidem bis, sed quia secunda Divisoris nota 5. in secunda Dividendi 3 non continetur bis, ideo 2. in 4. non bis, sed semel (ut primi nota Quoti docet.) acceptum est, pari modo ibidem in secundae quoque positionis, seu secundi Dividendi 186 sinistrinis notis 18. Divisoris 25. nota 2. novies quidem continetur sed tamen (ubi secunda nota Quoti indicat.) septies tu accipitur, quoniam quidem Divisoris secunda nota 5. in nota Dividendi 6. semel tu non ideo novies continetur.

Solution.

§. 171. Patet quoque ex dictis, Divisionem ut eandem esse dum totum aliquod in Datas partes distribuendum aut partiendum est, sive Divisione utimur, in vita communi quoties inquirimus in partem unam, quae emergere debet si certa summae in plures partes partiendae sit. Partio autem haec id fit aequaliter vel inaequaliter, priori modo si fiat Divisio aequalis dicitur. An aequalis autem audit, quando totum seu summa in plures partes inaequaliter partitur ex. gr. Cuiusdam Civitati impositum est Quantum pecuniae, in aera

rium

in Aerarium Regium conferendae 8192. reperiuntur Cives
i. ex 512. Q. Ergo quid singuli conferre debeant, at
ero, vel conferent singuli Civium aequaliter vel inaequa-
liter relate scilicet ad suas quisque facultates. Si prius tum
praelatactam pecuniae summam 8192 per Numerum Civium
512 juxta Reg. (§. 169.) daras dividendo emergit Quo-
tus 16, seu totidem Floreni a singulis Civibus aequaliter
conferendi.

Verum si quisque Civium relate ad suas facultates
debeat conferre, tum praelatactae quoque summae pecuni-
ariae divisio relate ad facultatem singulorum Civium, adeoque
inaequaliter fieri debebit. Quo autem modo id ut eo-
gnoscatur Edo Problema VIII.

§. 172 Prob. Numerum quemvis Composi-
tum v. gr. legatam summam pecuniae 1081 Rh. Flo-
renos in plures partes puta quatuor legatorios quos
nocemus A. B. C. D. Dividere inaequaliter ita ut A.
9. portiones B. 6, C. 4 et D 2 ff. accipiant.

Resolutio. (I. Ante omnia fiat Additio singula-
rum Portionum i. e. 9. 6. etc. summa earundem (ie 23) mo-
do ut supra (§. 166. Reg. 1.) dictum est, scribatur pro Di-
visore, et summa legata 1081 pro Dividendo tunc
operas incipiat procedatque secundum Reg. §. 169. praescriptas.

(II. Ubi denique Quotus inventus integer fuerit

qui

qui in Dato exemplo est 47. / Is multiplicetur seorsim per singulorum Legatorum portiones, et singula producta dabunt Quotos pro singulis Legatariis, seu rarum earundem portionem ex. gr. A, qui ex Legata summa 1081 habet 9. portiones participare debebit 47 × 9 = 423 Rh. Flor. B accipiet 47 × 6, 282 C. 47 × 7 = 329. et D 47 + 1 = 47 Rh. Flor.

III Facta denique Partialia, seu Quoti partiales colligantur in unam summam, quae cum Dividendo 1081. collata si huic sit aequalis, id erit indicio operationem peractam fuisse ut in praesenti Exemplo 423 + 282 + 329 - 47 = 1081.

Demonstratio. Atque quoque Problematis e tenore Demonstrationis Prob. VI. §§. 166. / pari conficiatur debet cuius minor proo, ex praesenti Exemplo in subjecto Paradigmate juxta praescriptas Statuum Divisionis leges, ex libro verbisque ad hunc fusius declarando cuivis manifeste liquere poterit. Eadem est autem Ratio omnium aliarum Divisionum Aequalium

Paradigma Divisionis Inaequalis.

Legatarii	Portiones		Divis.	Divid.	Quotus
A = 9	423	Quoti Partiales sive ratae Legatorum	23.	1081.	47
B = 6	282			92.	
C = 7	329			161	
D = 1	47 × 1 = 47.			161	

10 : / 470 (47.

A = 4 × 47 = 188.
B = 2 × 47 = 94
C = 3 × 47 = 141
D = 1 × 47 = 47
470.

Scholion.

§. 173. Proba Inaequalis Divisionis non secus ac aequalis (§. 162.) etiam per Multiplicationem institui potest ducendo scilicet Quotum in Divisorem et factum cum Dividendo conferendo, imo idem quoque ipsa fit licet via longiori quoniam per singularum Partium portiones singillatim multiplicando partialia producta in unam summam colligantur ut Dividendus obtineatur, idem enim obtinebitur etiamsi quotus in Divisorem ducatur ex. gr. in praescripto Sexemate 47 × 23 = 1081

Scholion.

§. 174. Dicti quoque Factorum illud quoque addendum est, quod ubi facta operatione seu aequali seu Inaequali Divisione Residuum aliquod superest, hoc in casu ut examinetur operationis Bonitas, non sufficit ducere quotum in Divisorem sed producto taliter ostenso ipsum quoque Residuum addi debebit et summa erit ipse Dividendus si Divisio recte peracta sit, id quod in Exempl. Paradig. 2 §. 169 (unicuique rem experiri volenti patebit.

Scholion.

§. 175. Adeo erant quae de primis ut vocantur Arithmeticis seu Algorithmis Numerorum Integrorum dicta esse volumus, Quae reliquarum Omnium per Ur Pam Arithmeticam occurrentium fundamenta atque elementa esse quisque facile assequetur, cum nihil aliud in Quaestionibus A-

rith

Arithmeticis percipere possit, quam ut Numeri vel Addantur vel Subtrahantur, vel Multiplicentur aut Dividantur. (§§ 92, 93. 94.) itaque nisi Tyroni sic Algorithmi probe sit exercitatus frustra se ad alias operationes, tanquam ex primis illis variis compositis onus conferret. NB.

Proinde Tas, antequam ad alias transeamus, etiam in Numeris fractis repetamus, quia tamen in sic prima operationum Reductio est, quia tamen (simplicissima minimarum operationum, quae a primis oriuntur.) primis in Numeris integris instituere ut per hoc eosdem in Numeris fractis prosecutio facilior reddatur.

Dictis igitur Tactenus adjicitur.

APPENDIX.

De Reductione Numerorum Integrorum.

Definitio 41.

§. 176. Reductio Ideae est operatio a primis ona per quam Numeri majoris speciei seu Denominationis in alios minoris speciei sive Denominationis vel inversa (: sed ejusdem semper Quantitatis :) transformantur seu reducuntur. Sectionis Reductio igitur in Ascendentem et Descendentem dist. Nunc est Triplex

Defin. 42. §. 177. Reductio Descendens est qua Numeros majoris Denominationis + sed ejusdem Quantitatis reducitur. Descendens

+ in alium minoris Denominationis =

Problema IX.

Multiplicatione mediante. §. 179. Proo Reductionem Descendentem perficere.

Resolutio. Numerus Datus ducatur in talem Numerum proximae minoris Denominationis, qui aequalis sit Unitati in Numero Dato, et productum erit Numerus minoris Denominationis quaesitus. Conf. subjectum Schema 1.

II. Si Numerus Datus sit Diversarum Specierum, post quamlibet multiplicationem similes Speciei datae similibus adjiciantur. Conf. subjectum Schema 2.

Demonstratio. Reductio Descendens tunc rite peragitur, dum Numerus inventus minoris Denominationis ejusdem e Quantitatis cum numero Reducto majoris Denominationis (§. 178.) Atque per praescriptas Regulas ~~idem obtinetur~~ ~~uti est~~ sequentibus Schematibus evidens est, quod per easdem Regulas Reductio rite peragitur, quae e. demonst.

Schema Dentur v. gr. Rh. Flor. 382 Reducendi in Grossos Grossi 20. aequales sunt uni Flor. Rh. Duo ergo 382 in 20, et productum 7640 est summa Grossorum quaesita, sive quae in Rh. Flor. 382 continentur. Si autem pono Grossos repertos 7640 vis reducere in Cruciferos. Xsteri 3. aequales sunt Grosso 1. duo itaque 7640. in 3. et fiet productum 22920 summa quaesitorum Cruciferorum quam si duces in 2, quoniam Duo Denarii aequales 1. Cruciferi productum 45840 est Numerus Denariorum, qui in 22920 Cruciferis seu in 7640

Grossi

Grossi aut in 382 Rh. Flor. continetur.

Sexema. II. ex gr. Annus Tropicus est D. 365 Hor. 5 49. Si itaque prima in eo contenta deponeres, due 365 in 24 et totis 8760 productis adjice 5 dictas, ac summam 8765 due in 60 tunc producto 52590, adjunge minuta prima seu scrupula 49. data, et summa scrupulorum quaesita exinget 525949.

Definitio 43.

Ascendens.

§. 180. Reductio Ascendens, qua Numerus minoris speciei seu Denominationis, ad alium majoris speciei seu Denominationis (sed ejusdem Quantitatis) reducitur.

Problema X.

§. 181. Pro Reductionem Ascendentem peragere.

Divisione mediante

Resolutio. I. Dividatur Numerus datus minoris Denominationis, per talem Numerum ejusdem Denominationis qui unitatem proximi majoris exequet, et Quotus erit Numerus majoris Denominationis quaesitus. Conf. subj. Sexema. I.

II. Si quid vero post Divisionem superexit ejusdem Denominationis atque Dividendus Conf. S. 2.

Demonstratio: Reductio Ascendens peragitur, quando Numerus majoris Denominationis (+ §. prec.) Atque observatis quaesitis Statuum Reductionis Regulis Numerus quaestus talis obtinetur. Id quod subjecta Sexema

+ Sive quaestio ejusdem est quantitatis cum numero ejusdem dato minoris denominationis

mata evincunt. Quibus Regulis Reductio vice pera-
gitur, quod e. Hm.

Schema I. Dentur v. gr. Rx. 45840 in cruci-
feros, Grossos, et Flor. reducendi (1o. Itaque Divisor Dena-
rios datos per 2 / quoniam 2. Rx. 1 Crucigerum, quae Da-
torum proxime major est Denominatio aequent. / et Quo-
tus dabit 22920 cruciferos in illis contentos, quos si di-
vidat per 3 / quot cruciferos in uno grosso continentur. / quo-
tiens dabit grossos 7640. At in uno Flor. colligunt
Grossi 20, quod divide 7640 Grossos per 20, Quotus 382
erit Numerus Flor. qui in iis continentur ubi vides ut
idem Numerus sursum, et Deorsum reducantur.

Schema II. Dentur v. gr. 525949 Mi-
nuta prima in Dies, Horas et Scrupula reducenda
Hunc Numerum Datum si dividas per 60 Quotus erit
8765 Residuum 49. quod per completos Dies et Horas
Scrupula seu minuta prima 49. quisdem Denominatio-
nis ac Dividendus, in iis continentur. Hunc autem
Quotum 8765 si dividas per 25 quotus erit 365 Re-
siduum 5, at quoniam Divisor 24 est, Divisor Horarum
unius Diei, et Horae per eum dividuntur, Quae quoque 365
Dies, Residuumque 5 Horas designat, sic et in aliis.

Scholion.

§. 182. Ex dictis satis liquet, quod ad Reductio-
nem Numerorum Mixtorum Heterogeneorum Reducibilium

praeter

praerequiratur notitia specierum inter se Reducibilium quam acquirere Desiderantem ad Tabulas Reductionum Rev. Patr. Maximiliani Hel mieniamus, quas ille mo 15 in Elementis suis Arithmeticae Numericae Part. 3 Cap. 2 satis accuratas dedit, usus quoque illarum ad calcem Tabularum declarando. Nos interim qui de praesenti a necessaria et maxime utilia curamus, praxim Transylvanis maxime utilem adferemus, qua calculo per quam facillimo absque Multiplicatione, Flor. Rh. in Hungaricales per Transylvaniam usitatos et vicissim converti possunt. Id quod sequentia duo Problemata docebunt.

Problema XI.

§. 180. Proo. Florenos Rh. integros in Ungaricales ope Additionis convertere.

Resolutio. Antea omnia constare debet operanti 1 Florenum Ung. in Transylvania valere Centum 100 Dr seu Nummos, quales in Rh Flor. habentur 120. Hoc cognito operatio institui debet secundum Reg. sequentes.

Regula (1. Dati Rh. Flor. in Hungaricales convertendi 2. directe infra sinistrum scribantur ita, ut Unitates Unitatibus Decades Decadibus respondeant, et tertiario idem tandem Numerus Flor. Datus infra praeterito modo descriptus una nota remotius sinistram versus scribatur.

Reg. (II.

Reg. II Sub ducta linea Zi Numeri adeantur in unam summam, cui Summae ad Dextram adjungatur Zerus.

Reg. III Summae taliter obtentae, unae notae Dextrae a reliquis ungula secernantur, quae Numeros reliquae aut sinistram versus scripti Flor. Hungaricales indicabunt, quos valent Dari Rh. Flor. Conferre Sedema annexum ex. gr. quaeritur 12. Rh. Flor. quot faciunt Hungaricales Igitur juxta datas Regulas, modo Zi in Sedemare ex Libro Scribit operatio i. e. Rh. Flor. 12 valent Flor. Hung. 14 et Dr. 40.

12
12
12
1440

Demonstratio Rh. Floreni rite convertuntur in Dr. multiplicari per 120 (§ 149.) Atqui dignismodi Multiplicationis vicem subit Additio per elementis Regulis praescripta nam ad Oculum patet si 12 multiplicentur per 120 eodem modo collocari reperientur Numeri ex. gr. In Adducto Exemplo, productum primum per Numerum 2 est 24, sed Zo e 12. additum ad 12 Deinde ex producto secundo per Numerum unum a 1. patet quod idem Numerus 12 una nota remotior scribi debeat, versus sinistram quod vero Zerus in fine summae addi debeat Ratio e quia Multiplicatus 120, in fine Zerum habeat (§ 154 Reg. VI.) Numeri autem 1440 faciunt Flor. Hung. 14 et Dr. 40 Ergo Floreni Rh. integri ope Additionis per praescriptas Regulas

12
120
24
12
1440

Regulas in Flor. Hung. reiterum convertuntur, quod e. dem.

Sesolion.

§. 184. Quando Rh. Florenis in Hung. convertendis cruciferi adsterent, tos sibimetipsis addendo vel per 2. multiplicando in Dr. conversos (§. 149 Reg. ibid.) addite Classi Numerorum, et si summa adequat Numerum 100 Numerus Florenorum angelatus Unitare.

Problema XII.

§. 185. Proo. Florenos datos Hungaricales per Transylvaniam usitatos in Rh. seu Germanicales convertere. Resolutio. Ante omnia censendum est an Flor. Hungaricales sint Integri sine Nummis, sed an vero adjectos quoque habeant Nummos, tunc Reg.

(I.) Si sint Integri sine Nummis, illis ad Dextram Zeros apponatur, tandemque Numerus Florenorum Datorum, vero auctus dividatur per 12 et Quotus dabit Rh. Florenos (: Conf. Extem 2. Para. 5.) aut dico: Ex. 1. Parad. Sequ.

(II.) Si ex hac Divisione Residuum remaneat, sine addatur iterum Zeros, et summae Signis Dividendum valebit Cruciferos Conf. Ex. 2. Parad. 5.

(III) Si vero Flor. Hung. in Rhenenses convertendi adjectos quoque habeant Nummos, tos abscindite a Florenis Integris, et cum Flor. operare juxta praemissam Regulam primam. Deinde ad Residuum, si quod

Ce

Pe avoc abscissos Numeros et summae signi Dimidium dabit Cruciferos Conf. Exem. 3. Paradig. Sequens.

IV. Quando vero summa Numerorum ex Residuo et abscissis Numeris colligera, adaequat Numerum 120, cujus Dimidium 60, hoc in casu Numero Florenorum mente advi debebit 1 Flor. vid Exem IV. Paradig. Sequen.

Demonstrao. Observatis praescriptis Regulis in Problemate S. 182, fundatis Flor. Hung. in Rh. Flor. recte converti docent subjecti Paradigmatis Exempla. Et iisdem Observatis Sequentes Flor. quoscumque Hung. avi Cales in Rh. seu Germanicos semper converti posse, ab esse enim semper q. e. d.

Paradigma Reductionis Flor. Hung. in Rhenenses.

Exempl. I.

Sint Flor. Hung: 36 in Rh. convert.

Divisor.	Divid.	Quotus
12.)	360	(30 Rh. Flor.
	36	
	0	
	0	

Exempl. III.

Sint Flor. Hung. 14. Numi 30. erit

Divis.	Divid.	Quotus.
12)	140	(14 Rh. Flor.
	12	et 25 Xfer.
	50	
	48	

Residuum 2 auctum 240 erit 20 x 30 fan. erit 50 cujus Dimidium 25 Xfer.

Exemplum II.

Sint Flor. Hung. 14 in Rh. conv.

Divis.	Divid.	Quotus.
12)	140	(12 Rh. Flor.
	12	et 40 Xfer.
	20	
	13	

Residuum 8. adito 240 erit 80, cujus dimidium 40 Xfer.

Exempl. IV.

Sint Flor. Hung. 24 Numi 60 ccit

Divi.	Divid.	Quotus
12	240	22 Rh. Flor.
	24	& 60 Xfr.
	080	
	14	
	6	

Resid. — 6 autem 240 ccit 60, cum fuit 120, cujus Dimidium 60 Xfri seu 1 Rh. Flor.

Et Ille de Reductione Numerorum integrorum Ratione sufficiat, quam ad ea quae sequuntur translamus.

Sectio II.

De vulgaribus Numerorum Fractionibus deque Operationibus Arithmeticis, quae in iisdem Fractionibus institui possunt.

Capitulum I.

De Natura et proprietatibus Fractionum vulgarium in Genere.

Definitio. 44.

§. 186. Vulgaris Numerorum Fractio nihil aliud, quam aliquis Unitatis instar integri considerata, atque in plures partes seu Portiones divisae, partem vel partes aliquot seu Portiones significare, patet ex iis, quae sequuntur (§. 76)

Ord

Corollarium 1.

Hinc Vulg. Fractio minor est Unitate.

§. 187. Ergo Fractio vulgaris seu valor ejusdem minor est Unitate cum non omnes sed aliquot tantum partes integrae Unitatis (§. 185.) Idem autem non aliquot sed omnibus suis partibus punctim sumptis est aequalis (§. 108.) Axio. 1.

Corollarium 2.

§. 188. Quoniam integri cujuspiam, permendum mihi considerati pars quaelibet, e certo quoque partium minorum ac aequalium Numero composita concipi, adeoque relate ad suas partes et ipsa integri instar haberi potest, patet: Dari etiam Fractionum fractiones. Ex. gr. Grossos relate ad Florenum est Fractio (§. 186.) ast idem relate ad Cruciferorum est Totum, quare cruciger et Grossi (§. cit.) consequenter Fractionis Fractio. Hypothesis XIII.

Numerator $\frac{2}{3}$ Denominator

§. 189. Vulgaris Numerorum Fractio duobus Numeris interjecta lineola transversa designetur, tunc in modum $\frac{2}{3}$ quorum superior Numerator, inferior vero Denominator Fractionis appellatur.

Scholion.

§. 190. Ratio cur ad exprimendam Fractionem Numerorum vulgarem duobus opus sit Numeris, satis est evidens, cum enim Fractio talis partem integrae Unitatis significat (§. 186.) partes integri alicujus tam Numero quam specie differre possunt tunc nisi et Numerus, et species

partium

partium Integri, quas Fractio significat exprimentis pa-
lam est, valorem Fractionis distincte intelligi minime posse,
inferiori itaque Numero indicatur in quot partes integra Unitas
divisa sit, consequenter quales illae partes sint denominatur
unde etiam idem Numerus, Denominatoris Nomen obtinet,
quotnam vero istarum partium sint accipiendae ad agno-
scendum valorem Fractionis id Numero supra lineam trans-
versam scribi solito exprimentis & quasi numeratur unde i-
dem Numerus superior Numerator dici consuevit. Sic in
hac Fractione $\frac{2}{3}$ Numerus 3. ostendit seu Denominat
integrum ipsum (puta grossum) divisum esse in tres par-
tes aequales, Numerus vero 2 numerat seu dicit duas par-
tes accipiendas esse (ex illis tribus in quas Grossus
divisus est) ad constituendum valorem Cujus Fractio-
nis $\frac{2}{3}$ enunciatur hoc modo Duae tertiae partes unius Gros-
si a duo crucigeri. Corollarium 1.

§. 191. Numerator Fractionis vel seu pro-
priae dictae debet esse minor ejusdem Denomi-
natore. Hic omnes enim partes integrae Unita-
tis (§. praec.) ac proinde ipsam Unitatem (§. 108 Ax. 1.)
Numerator vero Fragmentum ac seu aliquot ejusdem Uni-
tatis partes denotat (§. praec.) ergo si minor est illo
(§. 108 Axim. 3.) Corol. 2

§. 192 Hinc patet. Ultima Divisionum

Resi

Residua veras seu proprie dictas Fractiones esse Conf. §§ 191. et 189 cum § 166 Reg. IV

Scholion

§ 193. Interim occurrunt saepe Quantitates Fractionum forma expressae, in quibus Numerator sit aequalis, vel etiam major Denominatoribus, unde in expressiones ejusdem Generis Fractiones quidem sed improprie (aliis Fictae et Spuriae) vocantur, contra distinctae sunt ad veras Fractiones veras, sive proprie dictas, aut Genuinas.

Corol. 3.

1. §. 194 In Fractione spuria si Numerator aequalis sit Denominatori valor Fractionis aequalis est Unitati. Etenim Fractio $\frac{2}{2}$ denotet ex integra Unitate in duas partes aequales divisa, sumi partes ejusmodi duas (§. 190.) evidens est, integram Unitatem accipi (§ 108.) Axiom. 1.) atque adeo $\frac{2}{2}=1$ si quando vero Numerator Denominatorem superat valor Fractionis Unitatem excedit; Nam hoc in casu Numerator plures partes numerat quam sunt in Denominatore, adeoque in integra Unitate (§ 190 sic $\frac{8}{2}=4$ (§ 166) sed $4>1$. Ergo $\frac{8}{2}>1$

Corollarium 4.

Exempl. 4

$\frac{2}{2}$ (1

$\frac{4}{2}$ (2

$\frac{6}{2}$ (3 $\frac{8}{2}$ (4 $\frac{10}{2}$ (5.

§. 195. Hinc liquet: Valorem Fractionis improprie aequari Quoto, qui oritur Numeratore per Denominatorem diviso, quemadmodum enim valor

fra

Fractionis Unitati aequalis, si Numerator sit aequalis Denominatori (§ praec.) ita Fractio dupla est, si Numerator fuerit Duplus, triplus etc. Denominatoris, sic autem dicta statim divisione innotescit. Corollarium 5. Hic de Proprie Fract.

Exempl. 1. $\frac{4}{8}$ (2 $\frac{2}{8}$ (4.

§. 196. Ex adverso autem: Magnitudines seu valores Fractionum proprie dictarum possunt aestimari Quoto, qui obtinetur Divisione Denominatoris per Numeratorem. Si enim Numerator sit major quotus erit minor, major vero sic, si ille fuerit minor (§. 159.) Jam vero Numeratore majore existente Fractio quoque major est, minor autem sic illo minore existente (§ 190) Quia quotus minor indicio erit Fractionis majoris, et contra quotus major Fractionis minoris, consequenter Quoti diversi Fractionum inaequalium. Quoti vero aequales Fractionum aequalium. Sic Numer.

Exempl. 6. $\frac{2}{4}$ (2 $\frac{2}{6}$ (3 $\frac{1}{4}$ (4.

Coroll. 6.

§. 197. Hinc ergo liquet (1º: Quod si manente Numeratore augeatur Denominator, aut manente Denominatore minuatur Numerator, Valor Fractionis minuitur (§ praec.) Crescit enim Quotus utroque in casu, qui Divisione Denominatoris per Numeratorem oritur. Contra vero 2vo. Si manente Denominatore crescat Numerator, aut si manente Numeratore decrescat Denominator, Valor Fractionis augetur (§ cit.) utroque enim in casu Quotus

1. Casus. 2dus. 3tius. 4tus.

$\frac{3}{4}$ (:1 Quotus emergens ex Divisione Denominatoris per Nu-
$\frac{2}{3}$ (:1 meratorem decrescit, Denique 3º

Corollarium 7.

§ 198. Inter duas vel etiam plures Fractiones quae habent eundem Numeratorem, illa est major cujus Denominator minor est (§ 196) quoniam in minori Denominatore continetur pauciores idem communis Numerator. $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{8}$ Exempl. 7.

Corollarium 8.

§. 199. Fractionum vero eundem Denominatorem habentium ejus valor est major quae majorem habet Numeratorem (§ 196.) idem enim Denominator, per majorem Numeratorem divisus minorem quotum dabit $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ Exempl. 8.

minor quotus vero est indicium fractionis majoris.

Corollar. 9.

§. 200. Ursa liter igitur: Valores Fractionum quae eundem habent Numeratorem, ex solis Denominatoribus (§ 198.) et valores Fractionum ejusdem Denominatoris, a solis Numeratoribus (§ 199.) facile agnoscuntur

Definitio. 45.

§. 201. Fractiones quae eundem habent communem Denominatorem Homogeneae vocantur, quae vero sub diversis Denominatoribus comparent Heterogeneae appellantur.

Definitio 46.

§. 202 Fractiones autem ejusdem valoris seu aequa

Aequales sunt, quarum Numeratores aequaliter continentur in suis Denominatoribus ex. gr. $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{6}$. Contra Inaequales sunt Fractiones quas Denominatores non continent aequaliter suos Numeratores v. gr. $\frac{2}{4}$ et $\frac{2}{6}$ Conf. §. 196, ex quo Definitio-nes Ice Corollarij instar deducuntur.

Corollarium 1.

§. 203. Si igitur ejusdem Fractionis tam Numerator quam Denominator multiplicetur aut Dividatur per eundem Numerum aliquem tertium, Fractio nova in priori quidem casu ex productis in posteriori vero ex quotis orta, erit aequalis quoad valorem Fractioni priori i.e. multiplicandae aut dividendae ex. gr. Quoad casum priorem Fractionis $\frac{1}{2}$ tam Numeratorem 1. quam Denominatorem 2, multiplicando per 3. Varum erit nova Fractio $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ per §. praeced. Si quoad casum posteriorem si Fractionis $\frac{3}{6}$ tam Numerator 3 quam etiam Denominator 6. dividatur per 3. erit Fractio nova ex Quotis orta $\frac{1}{2}$ Atque $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ per casum priorem. Unde patet valorem Fractionis neutro in casu mutari.

Corollarium 2.

§. 204. Quod si tam in Numeratore quam Denominatore Fractionis Numericae reperiantur 2 eri finales 2s utrinque Deletis valor Fractionis non variatur.

Sic. 20

Sic: Loco $\frac{200}{4000}$ scribi pro $\frac{2}{40}$ Ratio Ingens apparet ex (§. prec.) Quia cum finales oriuntur ex Multiplicatione Decadica Numerorum vel. 10. v. 100. v 1000, & §. 154. & per eosdem Numeros divisae (quod fit delendo Zeros utrinque aequales (§. 169) manent eaedem. Sed Iste de Fractionum Natura generatim dixisse sufficiat, jam ad operationes ipsas, quae in Fractionibus instituuntur, progrediamur.

CAPUT II.

De Reductione Numerorum vulgarium

Definitio. 47.

§. 105. Reductio Fractionum est certa quaedam earum, sine mutatione valoris, transformatio, quam subeunt ut Caeterae operationes commodius institui possunt.

Scholion.

§. 206. Operationes Arithmeticae in Fractionibus duplicis speciei sunt: aliae dicuntur. Reductiones aliae autem nihil differunt a quatuor Algorithmis Numerorum Integrorum, sunt minirum: Additio, Subtractio Multiplicatio & Divisio.

Problema XIII.

§. 207. Proo. Numeros (majores) integros invariato eorundem valore ad Fractionem vulgo spu-

rielem reducere.

Resolutio. Dato Numero Integro, integra Lineola transversa subscribantur, Unitas pro Denominatore, et Fractio inde nata, aequivalet integro.

Demonstratio. Sit Numerus integer 4. erit idem juxta praescriptam Resolutionem $\frac{4}{1}$ atque $\frac{4}{1}$ est spuria Fractio (§. 193.) et quoniam aequalis Dato Numero integro 4. i. e. $\frac{4}{1} = 4$ (§. 195.) Collat. cum §. 156. eadem ratio est Ratio quorumvis Numerorum integrorum ad Fractionem spuriam, per praemissam Resolutionem reducendorum, Ergo quivis Numerus integer, invariato valore forma Fractionis spuriae exhiberi potest, si eidem pro Denominatore Unitas subscribatur q. e. d.

Problema XIV.

§. 208. Prob. Datam Fractionem Impropriam invariato valore ad integra reducere.

Resolutio. Numerator Datae Fractionis dividatur per suum Denominatorem, et quotus dabit integra quaesita, vel cum vel sine Fractione genuina remanente.

Demonstrao. Fractio Impropria, sit $\frac{12}{3}$ cujus Numeratorem 12. per Denominatorem 3. dividendo erit Quotus 4. atque $\frac{12}{3} = 4$. (§. 195.) Ergo Data Fractio Impropria per praemissam Resolutionem ad Integra invariato valore

lore reducta e. q. e. d.

Problema XV.

§. 209. Prob. Numerum integrum manente valore reducere ad Fractionem Dati Denominatoris.

Resolutio. Datus Numerus Integer multiplicetur per Datum Denominatorem, et productum erit Numerator quaesitae Fractionis, cui interposita lineola subscribatur pro Denominatore Datus Denominator.

Demonstro. Sit Numerus Integer 4. et Fractionis (: ad quam idem Numerus Integer Reducendus e.) Datus Denominator sit 3. erit tunc Operatio juxta praescriptam Reg. instituta, Quaesitae Fractionis Numerator 12, et Denominator 3. adeoque ipsa Fractio $\frac{12}{3}$ (§ 189.) atque $\frac{12}{3} = 4$ per §. praecedentes et in §. 159.) ÷ uno integro ad Reducendum Dato. Q. e. d.

Coroll.

§. 210. Hinc liquet: Methodus reducendi Numerum integrum ad Datae alicujus Fractionis Denominatorem; sive quod tamen idem e, est numero Integro et Facto, unicam Fractionem efficiendi; Si nempe Datus Numerus integer multiplicetur per Datae Fractionis Denominatorem, et producto addatur Numerator datae ejusdem Fractionis, mox que summae, Huic lineola subductae, Denominator Datae Fractionis subscribatur pro Denominatore

est pr.

ex. gr. Sit Numerus Integer 4. reducendus ad Denominatorem datae Fractionis $\frac{2}{3}$ erit multiplicando 4 Productum 12 cui addendo Numeratorem 2 efficitur Summa 14 et Quae ducta linea subscribendo Dat. Denominatorem 3. erit unica Fractio impropria $\frac{14}{3} = 4$ et $\frac{2}{3}$. Sive $4 \times \frac{2}{3} \div$ integro et Fracto simul, ad Reducendum Datis.

Problema XVI.

§. 211. Pro. Duas v. plures Fractiones Heterogeneas ad Fractiones Homogeneas, sive ad eundem Denominatorem reducere valore Fractionum invariato.

Resolutio. Rs. Si Fractiones reducendae duae dentur quaelibet integra (3. e et Numerator et Denominator ejus) multiplicetur per Denominatorem alterius ex. gr. $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ erunt reductae $\frac{4}{8}$ et $\frac{6}{8}$ ex $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3} = \frac{9}{15}$ et $\frac{10}{15}$

Rg. II. Si vero Fractiones reducendae plures dentur uniuscujusque tam Numerator, quam Denominator ducantur in Factum ex Denominatoribus reliquarum per se invicem multiplicatis natum ex gr. $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{4}$ erunt reductae $\frac{20}{60}$ $\frac{48}{60}$ et $\frac{15}{60}$.

Demonstratio. Fractionum sive Duarum sive plurium per datam Resolutionem Reductarum, uniuscujusque Denominator est Factum Omnium Denominatorum in se invicem ductorum, adeoque idem seu Communis esse debet (§. 148.) Quod vero singulae aequivaleant, primum pro

pro

Ex. 2ᵒⁿⁱ Reg $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{6}{12}$

positis, manifestum est (per 203.) constat. Et propositum, q. e. d.

Corollarium. 2.

§. 212. Duarum v. plurium Fractionum, tam quoad Numeratores quam Denominatores diversarum, quae-nam sit major vel minor ope Reductionis (§. praec.) ex positae, facile est resolvere, etenim si datae fractiones re-ducantur ad eundem Denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus Numerator major erit v. Cau: Si quaeratur: Da-tarum Fractionum $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$ quaenam sit major? Erunt re-ductae (per §. praec.) prior quidem $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; posterior re-ro $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, jam vero $\frac{8}{12} > \frac{3}{12}$ §. 199. Et etiam $\frac{2}{3}$ majoris $> \frac{1}{4}$

Scholion. 1.

§. 213. Vulgo Usitatissime plures Fractiones ad commu-nem Denominatorem, reductae exprimuntur semel ac subscri-bendo Denominatorem communem. Ex gr. Datum superius §. 211. Reg. 2 Resol. Exempl. sic scribitur $\frac{40\ 48\ 15}{60}$ quae expressio compendiosior quoad significationem nihil differt a priori.

Scholion. 2

§. 214. In hac Fractionum Reductione datur quidem aliquando locus compendio, sed quia horum ra-rarior usus occurrit, Tyrones Problema Reductionum, utpote Ursale frequenti exercitio familiare sibi reddant, oportet, cum Fractiones Heterogeneae, nec addi, nec subtra-

di

ti possint, nisi prius ope Problematis Antecedentis Homogeneae efficiantur.

Scholion. 3.

§. 216 Praescripta §. 211, Met 2do Fractiones, quae-cunque ad eundem quoque Numeratorem reduci possunt, si sese tam Numerator quam Denominator, cujusvis ducatur in Numeratores reliquarum + ext. pr. Fractiones $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ reducentur ad tas $\frac{12}{24}$ $\frac{12}{20}$ $\frac{12}{21}$. + cum invicem multiplicatarum

Problema XVII.

§. 216 Pro. Fractionem Datam ad aliam sese Datum Denominatorem habentem, reducere, manente valore Resol. Datus Denominator multiplicetur per Numeratorem datae Fractionis & Factum dividatur per Denominatorem ejusdem Fractionis datae, exitque quotus Numerator quaesitae Fractionis.

Demonstrao. Sit Data Fractio $\frac{2}{4}$ reducenda ad Fractionem, cujus Denominator sit 20. erit Reducta per datam Resolutionem $\frac{10}{20}$ Atque $\frac{10}{20} = \frac{2}{4}$ (§. 202.) Ergo per datam Resolutionem Data Fractio ad Fractionem Dati Denominatoris mutato valore reducitur quod. e. d. Exempl. $30 \times 3 = 9 : 6 = 15$.

Corollarium 1.

§. 217. Quod si quaeratur, quid data quaecunque Fractio valeat in mensura Integri, seu in Data quavis certa specie? Ope Ejusdem Problematis Resolutionem quaestio resolvitur; nam si data species, in qua valor Fractionis quaeritur

quaeritur, reputatur quasi Denominator Datus, ad quam reducenda est Fractio Datae, cujus valor quaeritur, tum juxta Resolutionem Problematis (: §. praec.) multiplicando datam speciem per Numeratorem Datae Fractionis, et Factum dividendo per Denominatorem ejus Fractionis Datae. Quotus repertus (: in casu quidem Problematis praecedentis Numeratorem quaesitae Fractionis indicans.) Dabit valorem Fractionis quaesitum in Data specie ex. gr: Si quaeratur $\frac{2}{4}$ Unius Floreni Germanici, in specie Grossorum, quot faciunt grossos? Multiplicando itaque Datam speciem ÷ 20. (: 20 enim grossi metiuntur, seu adaequant Datae majoris speciei, puta Flor. Germani. Unitatem.) per 2 et Factum 40. dividendo per 4. erit quotus 10, qui indicat, in casu quidem Problematis (§. praeced.) Numeratorem quaesitae Fractionis; in casu vero praesentis Quaestionis valorem Fractionis quaesitum in data specie grossorum ÷ 10. Grossos. Exempl. $\frac{2}{4}$ 60 = 30 Xfer in speci Crucis.

Corollarium 2.

Hoc Corollarium tt in eo differt a Problemate qd ibi tt gratiae agitur, sed hic ad casus singulare, fit ejusdem applicatio.

§. 218. Hinc patet: Quaestionem in Exemplo (§. praeced.) allatam ut et eidem alias similes (: ex re vera Problematis / 216.) expositi applicationem ad casum particularem in ipsa Quaestione specificatum; ac proin de

ac proinde nihil differre ab hoc Problemate datam Fractionem ($\frac{2}{4}$ unius Flor. Germ.) aliam scilicet habentem Denominatorem 20 reducere interrallato valore, eritque reducta per Datam (§. 216.) Resolutionem $\frac{10}{20}$ unius Floreni Germ. 10 Grossi unde manifestum est Problema (§. 216 utilissimum et in Praxi summe necessarium esse, vidimus enim superius (§. 171.) Divisione utendum esse, quotiescunque certum Quantum seu certa summa in datas partes distribuenda occurrit, cum autem Quoto ex divisione orto plerumque adhaerent Fractio (quae indicat partem vel partes aliquot Unitatis illius speciei cujus erat Dividendus (juxta §. 190.) necessarium est ad aequam hoc in casu Distributionem, ut sciatur quid data Fractio in specie illius Unitatis valeat? Hoc autem fiet, aut Problematis ejusdem (§. 216.) expositi, facta ad casum particularem applicatione (ut statim vidimus.) aut juxta id quod praecedenti Corollario (§. 217) monimus Ex. gr. si sint Distribuendi Flor. Germ. 26 in 3. pauperes per (§. 166.) erit Quotus $8\frac{2}{3}$ unius Flor. Germ. ignorantur, cujus ut habeatur valor in Integri mensura. V. gr. in Nummis Multiplicatio datam speciem 120 Nummos, quot habet unus Flor. Germ.) per Numeratorem 2 et Factum 240. dividio per Denomina-

natorem 3. erit Quotus, quaesitum Numeratorem (§ 216.) sive quaesitum valorem (. juxta §. praec.) indicans 80. igitur ex 26 Flor. Germ. cuilibet pauperi obtenuit 8 et 80. Numini

Definitio 45.

Quid Metiri Numerus alium. §. 219. Numerus quispiam metiri, seu juxta alios numerare dicitur Numerum eum, quem ita dividit, ut quotus sit Numerus integer sine Fractione. Ita 2. metitur 6. per 3.

Definitio

Quid Pars aliquota v. Mensura aliquota, seu mensura Numeri illius quem metitur. (2. Is vero quem alter metitur est Multiplus Numeri ipsum metientis ita et 2. et 3. sunt mensurae Numeri 6. qui illorum Multiplus est. (3.) Qui vero Numerus solius Unitatis est quasi Multiplus, seu quem sola unitas, quasi metitur, v. numerat is vero, primus in se sunt, 3 5 7. 11

Quid Multiplus vocatur?

Quid primus in se dicitur.

Corollarium 1.

Mensura Maxima. §. 121. Hinc liquet (1.) Mensuram maximam Numeri esse Numerum maximum eorum, qui ipsum exacte dividere possunt. Ita Numeri 12 (. quem 2. 3. 4. et 6. exacte metiuntur, maxima mensura est 6. secundo.) Communem mensuram vero recte dici Numerum Unitate majorem,

Mensura Communis.

qui

qui alios Duos vel plures Numeros singulos exacte meritis. Sic Numerorum 8 et 12 tanquam simul junctorum communis mensura est 2. item 4. quia per 2 tam 8 quam 12. exacte dividitur) Ac de communi mensura etiam parsali-quora vel communi. Corollarium 2.

§. 222. Ipsius communis mensura maxima dicitur Numerus, qui metiendo plures Numeros inaequales est mensura maxima respectu Quantitatis inter datas minimae, tanquam cum aliis datis conjunctae. ita Numerum 8 et 12 communis mensura est 4 maxima, quia 4. respectu Numeri 8. tanquam conjuncti cum Numero 12 est mensura maxima seu Divisor maximus qui Numeros 8. et 12 exacte dividit. Ratio: quia quilibet Numerus se ipsum exacte dividit, et hoc major mensura ejusdem dari nequit.

Communis mensura maxima quid est?

ex. gr.

Corollarium 3

§. 223. Cum Duorum vel plurium Numerorum communis mensura maxima sit Divisor qui respectu Numeri inter Datos minime est maximus (§. pr.) sequitur Inde: Quod si Numerus inter Datos minimus sit Divisor respectu reliquorum erit idem communis mensura omnium maxima quae in Dato casu haberi possunt. ex. gr. sint Numeri 12 juxta (§. 221 Nro 2.) cumque respectu sui sit maxima per (§. sic Num 1) Divisor enim Dividendo major esse non potest (§. 156.) adeoque eidem

aequa

aequalis omnium maximus est. Et eidem Numerus 6, etiam respectu Numeri 12, quicum conjunctus est, Mensura maxima existit (. §. praec.) qua major in dicto casu haberi nequit. Definitio 50.

§. 224. Numeri Bini v. plures, qui punctim sumpti nullam communem Mensuram, habent praeter Unitatem Dicuntur primi inter se. Ita 12 et 19, sunt Numeri primi inter se.

Numeri Primi inter se qui dicuntur?

Problema XVIII.

§. 225. Prob. Invenire communem Mensuram maximam seu Divisorem communem maximum Duorum Numerorum Datorum.

Resol. Dividatur Numerus major per minorem, et hic si illum exacte dividat seu metiatur erit communis mensura maxima. Ratio quia cum minor dividi debeat est quia hic si majorem exacte dividat, tum hic erit maxima sui et majoris numeri mensura.

II. Si vero ex hac Divisione prima relinquatur. Residuum aliquod per hoc dividatur Divisor primae Divisionis seu Numerus Datus minor. Quod si ex hac Divisione secunda nihil remaneat, erit Divisor Ipsis (. seu Residuum primae Divisionis .) communis mensura maxima Numerorum Datorum

III. Quod si denuo ex hac minorum secunda Divisione relinquatur quidpiam per hoc Residuum secundum

eundem dividatur. Residuum primum, sive Divisor secundae divisionis, et si non deveniatur ad tertium Residuum, secundum est quaesitus Divisor. Universim hac methodo alternativa, tamdiu procedendum est, donec inveniatur tale Residuum magis unitate, quod suum dividendum exacte, sine aliquo Residuo dividat, ergo ut ultimus Divisor seu ultimum Residuum communis mensura maxima respectu Datorum Numerorum.

(IV. Quod si vero hac methodo procedendo, semper aliquod Residuum emergat donec tandem perveniatur ad ultimum Residuum, quod sit Unitas, signum est, Datos numeros esse primos inter se, adeoque nullam communem mensuram habere praeter Unitatem vid. Exempl. 11.

Exem 1. Reg. 2.

Si nos. 108 et 144. communis mensura quaeratur erit 1o

Div.	Div.	Quot.
108)	144	(1

Factum subtr. 108.

Resid. 36. Ergo (2vo erit.

36 Div.	Divid.	Quot.
36)	108	(3.
	108	
	Residuum 000.	

Exempl. 2. Reg. 4.

Si quaeratur, communis mensura maxima Nros 88 et 17. erit 1o.

Div.	Div.	Q.
17)	88.	(5

Factum sub. 85.

Resid. 3. Hinc 2vo

Div.	Div.	Quo.
3)	17.	(5

Factum subt. 15

Resid. 2. Ergo (3o.

Div. Div. Q. 3 (1 Fact. sub. 2 Resid. 1.

(B. Igitur Datos Nros 108 et 144 communis Divisor maximus est 36 quo major reperiri nequit (Conf. §. 222)

Demonstr. Reg. 1. ex (§. 223.) et Reg. 4. ex (§. 224.) patent Regula vero 3. docet continuationem a operationis Regula secunda exposita, in casu quo secunda Divisione communis mensura maxima non obtinetur adeoque quoque quoque e naturae cum hac Regula secunda, ergo hanc a demonstrabimus, et quidem per Gradationem retrogradam in Exempl. 2, ubi Divisor secundus 36. seipsum seu 36 exacte dividit, sed idem etiam exacte dividit Divisorem primum 108 ergo 36. exacte dividit quantitatem 36 x 108. sed 36 x 108. = 144 per (§. 138.) et 36 e communis mensura, et quidem maxima respectu numerorum Datorum 108. et 144 q. e. d.

Scholion

§. 226 In Jugismodi Divisione Quotorum ut apparet nulla habetur ratio, Ceterum molesta hic initio Gyronibus Radii, alia met Jodo quomodo supplentur in sequentibus (§. 230.) dicetur. Hic (§. pr.) per Datum Problema non qua necessarium, sed qua utile in certis circumstantiis actulimus ideo a, ne id a nobis desideretur praestitum fuisse, quod ab aliis prolixa nonnunquam serie pertractantur.

Problema XIX.

§. 224. Roo. Datam quamvis Fractionem maneat valore, ad minores Terminos reducere i. e. ad Fractio

tionem datae aequivalentem; sed minoribus Numeris expressum.

Resolutio. Datae Fractionis quam Numerator quam Denominator dividatur, per eundem aliquem Numerum, qui utrumque metitur, sive dividit, et Quoti component Fractionem Quaesitam (: Corollarium :)

Demonstratio. Si operae quaeram datam Resolutionem instituatur, tum et Termini Fractionis reducendae minuentur, et valor ejusdem retinebitur (§. 203.) Ergo per eandem Resolutionem Fractio data manente valore ad minores Terminos reducitur

Corollarium.

§. 228. Si ergo datae Fractionis Numerator ac Denominator per communem mensuram maximam dividantur Fractio ad minores Terminos reducitur (Conf. §§ 221, 222.) inter plures enim ejusdem Dividendi Divisores qui maximus est, is continetur omnium pauciis in ipso Dividendo, adeoque Quotum debet dare minimum (Conf. §§. 156 158, 159.) Rat:

Scholion.

§. 229. Reductio haec ad Terminos minores per §. 224. tanto magis ad minimos per (§ praec.) Sand parvae est utilitatis, nam 1o Valor Fractionis alicujus si sit in Numeris minoribus facilius innotescit, sic facilius intelligetur, quod ora sit $\frac{1}{2}$ minus Florenis, quam ejusdem Utilitas 1ma

26

+ $\frac{26}{52}$ Floreni, et si quoad valorem $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ (§. 202) Secundo:

Utilitas 2ª Modusque operandi est compendiosior per parvos quam per magnos Numeros. Scolion. 2.

§. 230. Verum molestius accidit mercatoribus communem mensuram maximam modo supernis (per §. 225.) exposito quaerere, quam iterata per mensuras minores fiore aut saltem facile animadversas, Divisione Fractiones reducere, ad minores, et successive mox etiam ad minimos Terminos in usu itaque quotidiano, fere sufficiunt animadversiones sequentes.

1º Si Numerator exacte meritus, Denominatorem factam per eundem tam suipsius, quam Denominatoris Divisione Fractio ad minimos Terminos reducitur (§. 223 ex.

$\frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ (§. 202)

2º Si tam Numerator quam Denominator fuerint Numeri pares, Numerus 2 communis Divisor semper erit, per quem semper ad eorum dimidia, adeoque continuata per eundem Divisione, etiam ad Terminos minimos reduci possunt ex. gr. $\frac{128}{432} = \frac{64 \cdot 32 \cdot 16}{216 \cdot 108 \cdot 54} = \frac{8}{27}$

iterato dio. p. 2.

$\frac{48}{96} = \frac{3}{6}$.

3º Si tamen Numerator quam Determinator in fine habuerint 2 eos ambo dividi poterunt per 10. 100 deletis utrobique aequali Numero 2 eis (§. 169.) Reg. 7.) ex gr. $\frac{200}{3000} = \frac{2}{30}$ et $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

$\frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$.

4º

4º. Si tam Numerator quam Denominator, pro Decti-
ma nota Habuerint Numerum 5. aut alter 5. alter vero 2e-
rum, ambo dividi poterunt per 5 ex. gr. $\frac{25}{115} = \frac{5}{23}$ et $\frac{135}{350} =$
$\frac{25}{70} = \frac{5}{14}$. Quia tales Numeri sunt Multipli de

5º Si tam Numeratoris novae omnes Sim-
plici Additione in Unam summam collectae, quam etiam no-
vae omnes Denominatoris pari modo collectae efficiant
ambae tales Numeros, quorum uterque sit Multiplus nri 3.
tum ambo possunt dividi per 3. ex. gr. $\frac{288}{351} = \frac{96}{117} = \frac{32}{39}$.
Et Tacteus de Fractionum Reductione.

C A P U T. III.

De Additione Fractionum vulgarium.

Definitio. 51.

§ 231. Addere Fractiones e colligere valores partiales Datarum omnium Fractionum Homogenearum, in unam Fractionem Datis Homogeneam, continentem summam valorum omnium

Addere Fractiones quid est? Talem inveniri fractionem quae aequalem habeat valorem dabere plurium fractionum [illegible] simul sumptis.

Problema XX.

§ 232. Pro: Datas quotcumque; Fractiones addere + partialium

Resolutio. 1. Si Fractiones Datae sint Homogeneae, earundem Numeratores, more integrorum addantur et Summa exinde collecta erit Numerator novae Fractionis, cui Denominator communis subscribitur. ex. gr. $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Homogenearum Fractiones more integrorum addantur.

II

2) Si sint Heterogeneae reducantur ad Homogeneas, & Numeratores addantur more integrorum, com. Dem. Subscriptae.

(II. Si vero Fractiones addendae sint Heterogeneae, reducantur primi omnes ad Homogeneas per (§. 211.) & reductarum tandem fiat Additio juxta Reg. praec. Sic $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{5}$ erunt reductae $\frac{5}{10}$ & $\frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

3) Additione nata Fractio spuria reducatur ad integra. Quod fit divisione Nratoris per Denominatorem.

(III. Si vero ex Additione Fractionum datarum quod non raro evenit,) Fractio spuria emergat haec ad integra reducatur (per §. 268.) Sic. $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

Quia Nri addendi dnt esse u. puri u. Homogenei.

Demonstratio. Ratio Reg. II. patet ex (§. 123) nam secus Fractionum v. gr. $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{5}$ summa neque tertias neque quintas partes denotaret Reg. III. fundatur in (§. 195.)

Quia secus valor cognosci non [illegible]

Reg. I. vero facile demonstrari potest, nam valores Fractionum partiales, a Solis Numeratoribus pendent §. 199) Consequenter Fractio ejusdem Denominationis (cum ad eundem) habens pro Numeratore summam omnium Numeratorum Fractionum Homogeneas. Continet valores partiales omnium & vice fit juxta eandem Reg. I. Additio Fractionum Homogenearum (§. 231.) q. e. d.

CAPUT. IV.

De Subtractione Fractionum Vulgarium.

Quidem Subtrahere Fractione?

§. 233. Subtrahere Fractiones est invenire Fractionem, quae contineat Differentiam valoris duarum Fractionum Homogenearum valore inaequalium

Problema XXI.

§. 234

§. 234. Prob: Fractionum datarum alteram ab altera subtrahere.

Resolutio. (I. Si Fractiones sint Homogeneae Numeratorum minor subtrahatur a majore, et Differentia accipiatur pro Numeratore novae Fractionis, cui pro Denominatore subscribatur Denominator communis datarum Fractionum. Sic $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

(II Si vero Fractiones fuerint Heterogeneae reducantur primi ad Homogeneas per §. 211. et tandem tractentur juxta Reg. praecedentem ex. gr. $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ erunt Reductae $\frac{12}{15}$ $\frac{10}{15} = \frac{2}{15}$.

Demonstratio. Valores fractionum Homogenearum, habentur per solos Numeratores (§. 199.) adeoque; Fractio Homogenea habens pro Numeratore differentiam Duorum Numeratorum, continet differentiam valoris duarum Fractionum Homogenearum. Atque per datam Resolutionem obtinetur. Fractio Homogenea, habens pro Numeratore differentiam Numeratorum ipsarum Fractionum Datarum; ergo continet Differentiam valoris earundem Fractionum adeoque habetur Subtractio (§. 223.) q. e. d.

Scholion.

§. 235. Examen Subtractionis fit per Additionem, Quae vero per Subtractionem, ea plane methodo, qua idem in Numeris integris, fieri debere diximus (§§. 125 126. 127.

126. 127. CAPUT V.

De Multiplicatione Fractionum Vulgarium

Theorema II.

§. 236 Roo. In Multiplicatione si Multiplicator sit Fractio propria, sive genuina generatur Factum minus multiplicando

Demonstro. In omni Multiplicatione productum, ita se habet ad Multiplicandum, quemadmodum se Multiplicator habet ad Unitatem (§. 147.) Atqui multiplicator, qui est Fractio propria, minor est Unitate (§. 187.) Ergo Factum quoque seu Productum in Multiplicatione, in qua Multiplicator est Fractio propria, debet generari minus multiplicando. q. e. d.

Notiones continetur Multiplicandus in Facto quoties Unitas in multiplicatore.

Multiplicandus neque semel sumitur in facto. Generatur

Theorema III.

§. 237. Roo. In Multiplicatione, si Multiplicator fuerit Fractio impropria, aequalem Denominatori, generatur Factum aequale Multiplicando.

Demonstrao. In dicto Casu Multiplicator aequivalet Unitati (§. 194.) Ergo etiam Factum aequivalet Unitati) debet generari aequale Multiplicando (§. 145.) q. e. d.

habens Numeratorem

Atqui Unitas multiplicat

Theorema IV.

§. 238. Roo. In Multiplicatione, si Multiplicator sit Fractio impropria habens Numeratorem majorem Denominatore, generatur Factum Majus multiplicando.

Dem

Demonstro. In dicto casu Multiplicator major est Unitate (§. 194.) Ergo Factum quoque debet generari magis multiplicando (§. 147.). q. e. demonstrandum.

Problema XXII.

§. 239. Propo. Fractiones datas inter se Multiplicare. Resol. I. Multiplicentur Numeratores Datarum Fractionum inter se dabunt Numeratorem Facti.

II. Multiplicentur quoque Denominatores inter se et dabunt Denominatorem Facti.

Demonstratio. Dum Fractio per Fractionem multiplicatur, multiplicator v. est Fractio propria, v. impropria, habens Numeratorem aequalem, aut vero majorem Denominatorem. Si primus tunc debet generari Factum minus multiplicando (§. 236.) adeoque idem Multiplicandus debet minui per Multiplicationem minuitur vero, si ejus Denominator magis crescat, quam crescit Numerator (192 Nro 1.) magis autem crescet, si per Numerum majorem multiplicetur, quam multiplicatur Numerator (§. 144.) Atque Multiplicatoris cum sit Fractio propria Denominator major est Numeratore (191.) Ergo debet duci Denominator Multiplicandi in Denominatorem Multiplicatoris, et Numerator illius in Numeratorem Ejusdem. 1.us Casus.

Si vero Multiplicator sit Fractio impropria, 2.us Casus.

Habens

Jabens Numeratorem aequalem Denominatori, tum Factum debet esse aequale multiplicando (§ 237.) Atque idem obtinetur multiplicando Numeratores inter se et Denominatores inter se (§. 203.)

3us Casus.) Denique si Multiplicator sit Fractio impropria Jabens Numeratorem majorem Denominatore, tunc Multiplicandus debet esse Major facto (§. 238.) quare per Multiplicationem valor quis crescat, oportet, unde Numerator ejusdem per Majorem Numerum debet multiplicari quam Denominator (§ 192.) nro 2.) Et etiam hic in casu Numeratores inter se et Denominatores inter se erunt Multiplicandi, Cons. in singulis casibus Multiplicatio Fractionum per datam Resolutionem rite peragitur, q. e. d.

Scholion

§. 240. Quoniam Multiplicationis Proba sit per Divisionem (§. 247.) aliam quoque Jugis Problematis Demonstrationem dabimus, post Proxime sequentis Problematis Demonstrationem in Scholio ad (§ 247.)

Corollarium.

§. 241. Si igitur Fractio aliqua multiplicetur per Fractionem propriam nova Fractio ex productis orta erit Fractio Fractionis (§. 188.) cum sit pars totalis multiplicandi Fracti, qualem partem Unitatis denotat Multiplicator (147.)

CAPUT

CAPUT VI.

De Divisione Fractionum Vulgarium.

Theorema V.

§. 242 Ro. In Divisione per Fractionem propriam emergit Quotus major ipso Dividendo.

Demonstro. Quotus itaque se habet ad Dividendum quemadmodum se habet Unitas ad Divisorem (§. 163.) At quia Unitas est major Divisore, qui est Fractio propria (187.) ergo Quotus quoque Divisione per Fractionem propriam emergens, major est Dividendo. q. e. d.

Theorema VI.

§. 243. Ro. In Divisione per Fractionem impropriam, habentem Numeratorem Aequalem Denominatori, emergit Quotus Aequalis Dividendo.

Demonst. In hoc enim casu Divisor Aequivalet Unitati (194.) nro 1.) ergo etiam Quotus Dividendo Aequalis est §. 163.)

Theorema VII.

§. 244. Ro. In Divisione per Fractionem impropriam, cujus Numerator, major est Denominatore, emergit Quotus minor Dividendo.

Demonst. In hoc enim casu Unitas minor est Divisore Facto (§. 194 nro 2) ergo Quotus quoque minor est Dividendo (§. 163.)

Problema XXIII.

§. 245. Ro. Fractionem unam per alteram dividere.

Resol

Resol. I. Fractionis dividendae Numeratur multiplicetur per Denominatorem Divisoris, et Factum scribatur pro numeratore Quoti.

II. Denominator vero Fractionis dividendae multiplicetur per Numeratorem Divisoris, et Factum scribatur pro Denominatore Quoti.

Demonstro. Dum Fractio per Fractionem dividitur Divisor v. e. Fractio propria v. impropria, et Idcirco quidem Habens Numeratorem, aut aequalem aut majorem Denominatorem.

Casus primus Si prius Tum Quotus debet prodire major Dividendo (242) debet itaque per Hanc Divisionem augeri Dividendus, augebitur autem; si quis Numerator magis crescat, quam Denominator (192 nro 2.) debet itaque in majorem Numerum duci quis Numerator, quam Denominator. Atque in Divisore, si sit Fractio propria, Denominator major e. Numeratore (§. 191.) Ergo Numerator dividendi hoc in casu debet duci in Denominatorem Divisoris, et Denominator illius in Numeratorem Huius.

2dus Si vero Divisor sit Fractio impropria Habens Numeratorem aequalem Denominatori, tum quotus debet emergere aequalis Dividendo (§. 243.) adeoque valor dividendi, hac Divisione mutari non debet

non

non mutabitur autem peragendo Divisionem, juxta datam Resolutionem (§. 203.)

Denique si Divisor sit impropria Fractio, habens Numeratorem majorem Denominatore, tum quotus debet emergere esse minor Dividendo, adeoque valor Signi debet per Divisionem minimum, quod fiet si Numerator ejusdem in minorem, Denominator vero in majorem Numerum ducatur (§. 192.) Nro 1.) Et hoc quoque in casu Numerator Dividendi per Numerum majorem Divisoris in Numeratorem et Denominator illius per Denominatorem Signi est multiplicandus, Cons. in singulis casibus operatione juxta datam Resolutionem instituta, justus obtinebitur quotus. q. e. d.

Scholion.

§. 246. Demonstratio Signi Problematis sic quoque fit, et quidem breviter instituitur Sole Divisio rite peragitur, cum invenitur Quotus, qui multiplicatus per Divisorem, ex integra restituit Dividendum (§. 162) Atque per Datam Resolutionem qualiscunque fuerit Divisor, talis obtinetur quotus. (id quod exemplis illustrari aut probari potest.) Ergo per eandem Resolutionem rite peragitur Divisio Fractionum q. d. d.

Scholion 2.

§. 247. Divisio fit et aliter, quam praecedenti

Reso

Resolutione (§ 245.) diximus peragi, si nempe Divisor invertatur, i.e. loco Numeratoris Denominator proprius, et loco Denominatoris Numerator scribatur, ac deinde fiat Multiplicatio Numeratorum inter se; itaque Denominatorum inter se ut (§. 239.) dictum, erit ex ora Fractio Quotus.

Scholion.

§. 248. Siquidem Multiplicationis rite peractae Examen per Divisorem quoque potest institui (§. 165.) ideo reservatam. Imo in locum Problematis (§ 239.) expositi. Demonstrationem jam indicabimus, quae Idea Pe Bona Pe Multiplicatio, ubi factum Divisum per unum Factorem, dat pro quoto alterum Factorem (§ 165) Atque per datam (§ 239.) Resolutionem, in singulis casibus, ibidem in serie demonstrationis recensitis tale productum sive factum obtinetur (id quod Exemplis experiri licebit.) Ergo ope ejusdem Resolutionis Multiplicatio Fractionum rite peragitur. quod. e. d.

Scholion 4.

§. Quoniam in Praxi Arithmetica Fractiones Numeris integris, frequenter tractandae occurrunt; ideo artem Numeros integros, cum Fractis tractandi brevissimam

unico

unico Problemate, quod sequens Ursali compreliensam Familiarem, quisque sibi reddat oportet.

Problema XXIV.

§. 250. Prob. Numeros integros cum Fractis addere, subtrahere, Multiplicare, & Dividere.

Resol. I. Numerus integer reducatur ad Fractionem spuriam (§. 204.) subscribendo sibi eidem Unitatem pro Denominatore.

II. Sub hac Forma Fractionis spuriae tractetur tanquam Fractio vera, secundum omnia Problemata Fractionum quaesque instituta.

Demonstratio. Resp. 1. fundatur in (§. 204.) ex quo patet valorem Integri praedictam Fractionem spuriam non minutari. Id vero quod Resp. 2 praecipitur nempe Fractionem spuriam per modum Fractionis vel posse tractari per omnes Algoritmos, constat ex tota Doctrina fractionum, quam quaesque tradidimus. Et per has Regulas Numeri integri cum Fractis, & addi, & subtrahi, & multiplicari, & dividi possunt. q. e. d. Exempla pro singulis speciebus Algoritmorum recitationibus nostris coram adferemus.

Scholion.

§. 251. In Adductis quaesque Theorematibus & Problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarium & simplicium Doctrina continetur, de reliquis vero Fractionibus vulgaribus, quae minorum Fractionis potentias vocantur,

de

deque earundem Progressionibus, ut et aliis Affectionibus in Algebra, loco videlicet commodiori tractabitur nunc autem ad Fractiones Decimales transgrediamur.

SECTIO III.

De Fractionibus Decimalibus deque operationi Arithmeticis, quae in his Fractionibus institui solent.

CAPUT I.

De Natura Fractionum Decimalium.

Definitio. 53.

§. 252. Fractiones Decimales vocantur, quarum Denominator est constanter Unitas cum tot adjunctis Zeris quot notis Numerator constat.

Corollarium.

§. 253. Ante liquet ratio, propter quam Signis Generis Fractionum, Numeratores tantummodo describi soleant omissis Denominatoribus, quum Zerum nota significata constanter sit Unitas cui Zeri pro Numero notarum Numeratoris adjungantur.

Scholion

§. 254. Quoniam Denominatores Fractionum Decimalium, ne quidem scribuntur (§. pr.) ideo 1° ut Numeratores Signis Generis Fractionum ab integris dignoscantur, ab iis siquidem illis praefixi adsint, interjecta virgula

pro

separari committere consueverunt. Ex. gr. loco $12\frac{3}{10}$ scribatur 12, 3. 2do Si quando vero numeri integri nulli sint, talium absentia vero in locum integri ante virgulam sinistram versus adscripto solet indicari taliter. v. gr. loco: loco $\frac{3}{10}$. scribitur 0. 3. sunt tamen, qui virgulae loco, puncto utantur: et sunt quoque non pauci, qui cum Fractio sine integra indicanda est, ante virgulam vel punctum zerum omittunt, et ut v. gr. $\frac{3}{10}$ significent, scribunt 3; vel. 3,

Corollarium. 2.

§. 255. Ex data (§ 252.) Definitione sequitur, quod in Fractione Decimali numerator partes Decimas significans, debet esse minus a, nosse. Quarum vero Notarum, siquidem centesimas partes integri exprimat; et sic pono: secus enim, quae plesnam partes integri significet, omisso Denominatore, tandem patescet: et ideo est ratio propter quam, in exprimendis v. gr. tribus Centesimis loco, loco $\frac{3}{100}$ scribatur 0. 03. vel 03. sic loco $\frac{3}{1000}$ ponatur 0, 003 vel, 003 et sic pono.

Hic autem colligitur. In Fractione Decimali pluribus notis significativis constante, primi post virgulam nota exprimi partes Decimas, secundum a Centesimas, tertia Millesimas &c sic 4. 532 idem est ac $4+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{2}{1000}$

Theorema VIII.

§. 256. Pro valor Fractionis Decimalis non augetur, si ei versus partem Dextram zeri quotcunque adjiciantur.

Demonst

Demonstrat. Valor Fractionis non mutatur, si ejusdem tam Numerator, quam Denominator, per eundem Numerum tertium multiplicetur (§. 203.) At quia Fractionis Decimalis tam Numerator, quam etiam Denominator per eundem Numerum tertium multiplicari, intelliguntur, quando eidem versus Dextram Zeri adjiciantur (: cum in hoc casu multiplicator sit Unitas cum adjunctis sibi totidem Zeris, quot Zeris talis Fractio dextram versus augetur (. §. 154.) 12 Q. VII.) Q. valor ejusdem hoc in casu non augetur q. e. d.

Corollarium

§. 257. Hinc perspicuum est, Fractiones Decimales, quae sinistimas notas significativas easdem habent, etiamsi quoad Numerum Zeros notis significativis dextram versus adjectorum, multum differunt, quoad valorem aequalem esse, ex. gr. 0, 30 = 0, 3000, Haec enim forma Fractionum Vulgarium ex Libra erit $\frac{3000}{10000}$, quae si ad Terminos minores reducantur, deletis sibi tam in Numeratore, quam in Denominatore pari nro, puta duobus utrinque Zeris, invariato valore dabit tam Fractionem $\frac{30}{100}$ (§. 204.) atque $\frac{30}{100}$ = 0, 30, per (: §§. 252, 253.), adeoque 0, 30 = 0 3000

Theorema IX.

§. 258. Prop. Inter duas v. plures Fractiones

De

Decimales, ea est major, cujus nota sinistima est major:

Demonstrio: Dentr. v. gr. Fractiones 0, 42 & 0, 299, dico esse 0, 42 > 0, 299; nam 0, 42 = $\frac{4}{10} + \frac{2}{100}$ (§. 255.) i. e., utriusque ad communem Denominatorem reductis:) $\frac{400}{1000} + \frac{20}{1000} = \frac{420}{1000}$ (§. 232.) Fractio vero 0, 299 = $\frac{2}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$ (§. 255.) i. e., reducendo ad communem Denominatorem: $\frac{200000}{1000000} + \frac{90000}{1000000} + \frac{9000}{1000000} = \frac{299000}{1000000}$ (§ 232.) = $\frac{299}{1000}$ (§. 204.) Atque $\frac{420}{1000} > \frac{299}{1000}$ (§. 199.) Ergo etiam 0, 42 > 0, 299. q. e. d.

Theorema X.

§. 259. Rog. Inter duas Fractiones notam sinistimam aequalem habentes, ea est major, cujus nota secunda sinistimam accipiens est major nota tali alterius.

Demonstratio. Dentr. v. gr. Fractiones 0, 45 & 0, 43888, dicimus esse 0, 45 > 0, 43888. nam 0, 45 = $\frac{4}{10} + \frac{5}{100}$ (§. 255.) id est, utriusque ad eundem Denominatorem reductis:) = $\frac{400}{1000} + \frac{50}{1000}$ (§. 211.) = $\frac{450}{1000}$ (§ 232) = $\frac{45}{100}$ (§ 209.) Fractio vero datarum posterior, videlicet 0, 43888 = $\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000}$ (§. 255.) id est = $\frac{40000000000000}{100000000000000}$ + $\frac{30000000000000}{100000000000000}$ + $\frac{8000000000000}{100000000000000}$ + $\frac{800000000000}{100000000000000}$

+ 800

$\frac{80000000000}{100000000000000} = \frac{43888000000000}{100000000000000}$ (§. 211.)
$= \frac{43888}{100000}$ (§. 204.) jam vero utriusque per (§. 211.) ad communem Denominatorem reductus erit $\frac{45}{100} = \frac{4500000}{10000000}$ altera vero $\frac{43888}{100000} = \frac{4388800}{10000000}$ atque $\frac{4500000}{10000000} > \frac{4388800}{10000000}$ (§. 199.) Ergo quoque $0,45 > 0,43888$. q. e. d.

Corollarium 1.

§. 260. Ex his autem sequitur 1° Quod si Fractio Decimalis sit plurium Notarum, aliquae ex his versus Dexteram, sine magno valoris Decremento possunt omitti tuto Ex. gr. sint Calculo quovis repertae 0, 45, 46 Hexapedae si Dextrinae Fractionis nota delectur, valor minimum $\frac{6}{1000}$ Hexapedae quae particula fere dimidiam lineam aequat, si vero rescindantur, duae postremae notae, valor fractionis decrescit $\frac{46}{1000}$ sive fere quatuor lineis.

Corollarium 2.

§. 261. Hinc itaque 2do in Fractionum Decimalium Calculo sufficit plerumque unam alteramque aut ad summum tres notas sinistrinas adhibere; nisi forte opus fuerit, magna prorsus accuratione. Sic v. gr. si operis fruendi per Hexapedam pretium sit 3. Librarum patet

$\frac{6}{1000}$

$\frac{6}{1000}$ nimio $\frac{46}{10000}$ Hexapedae negligi posse, cum $\frac{46}{100}$ sint proxime $3\frac{1}{3}$ Denariorum, ideoque duae notae in Fractione 0, 45 46, tuto omittuntur; At vero si in pretium 10000 Librarum pro una Hexapedae conventum esset valor $\frac{6}{10000}$ foret sex Librarum et $\frac{46}{10000}$ = 46 Libris, quarum omnino ratio habenda est, atque ideo etiam plures notae ad Iebesi deberent.

Scholion.

§. 262. Si quae notae in Fractione Decimali omittantur, atque sinistrum Neglectarum, primarum excedit, ultima earum, quae retinentur, unitate augenda est, ita enim ad aequalitatem proprius accedetur ex. gr. si in Fractione 0,47, 63 negligantur, binae posteriores scribendum est 0, 48, non vero 0.47 etenim 0, 48 = 0; 4800 (§ 256.) et 0. 47 = 0, 4700 (§ Cit.) jam vero 0,, 4800 proprius accedit ad valorem 0, 4763 quam 04700, id quod attendenti patet.

Problema XXV.

§. 263. Pro Fractionem quamcumque vulgarem ad Decimalem reducere.

Resol. 1. Numeratori Fractionis reducendae adjungatur Dextram versus Zerus, atque sic auctus Numerator dividatur per suum Denominatorem, erit que Quotus repertus prima nova Fractionis Decimalis.

(II. Si verò rursus aliquid supersit, idem Residuum adjuncto pariter Zero, iterum dividatur, et quotus erit altera Nota Decimalis, et sic deinceps reperatur Divisio, donec v. nihil remaneat, vel sufficientes notae Decimales habeantur.

Demonstratio Fractio quaevis ad alteram rite reducitur, quando reducta reducendae aequalis est, atque observatis praemissae Resolutionis Regulis Fractio Vulgaris ad decimalem sibi aequalem reducitur. Ergo rite reducitur. Minor. Probatur exemplo: Detur v. gr. Fractio reducenda $\frac{3}{4}$. Cujus Numeratoris 3. juxta Reg. I. adjungatur Zerus, dividatur 30 per 4. Quotus est 7. et remanent 2. Zs juxta Reg. II. novo Zero ascripto, et 20. per 4. divisis, alter Quotus sit 5. ita ut nihil supersit, adeoque $\frac{3}{4} = 0,75$, id quod illico parebit ubi Fractio Decimalis 0,75, Forma Fractionis vulgaris $\frac{75}{100}$ exhibita, ad eundem cum Fractione $\frac{3}{4}$ Denominatorem reducitur per (§. 211.) Et ipsa quoque satis est manifestum, quod cum 25. fuit quarta pars Centenarii tres quartae sunt 75; Ergo per dictas statim Regulas Fractio vulgaris ad Decimalem, rite reducitur. q. e. d.

Corollarium.

§. 264. Hinc apparet: Divisionem Quantitatum Integrarum posse continuari per Fractiones Decimales, si nempe residua Divisionum, quae vera sunt Fractiones, modo (§. pr.) exposito tandiu, donec id fieri poterit,

continua

continuata Divisione dividantur.

Scholion

§. 265. Hoc tamen notandum: plurimas dari Fractiones quarum exactus valor in Decimalibus haberi nequit, quotcumque Divisionis successive adhibeantur. Dignoscitur autem ex eo, quod v. in Quotorum serie, eaedem notae iterum, eodemque ordine redeant; vel quod idem post aliquot Divisiones semper maneat Residuum. Exemplo sit Fractio $\frac{4}{7}$ ad Decimalem reducenda, reperietur 0,571428571428571428 &c, quin nunquam ad Divisionem exactum perveniri possit. Similiter si fiat Reductio Fractionis $\frac{5}{12}$ invenitur 0,416666 &c quorum si contingat, satis fuerit, reliquis neglectis, duas aut tres priores notas adhibere v. gr. sumi poterit $\frac{4}{7} = 0,57$ et $\frac{5}{12} = 0,417$. Et haec de natura et proprietatibus Fractionum Decimalium dixisse sufficiat.

Scholion

§. 266. Iam ad operationes Arithmeticas in operationibus Decimalibus instituendas progrediendum nobis est, sed ex iis, de Reductione Fractionum Decimalium, id ex praecinsinuatae sufficiat, quod cum haec vult in Dictis Fractionibus Decimalibus institui, tunc et haec Fractionum vulgarium forma exprimuntur, adeoque Reductio illarum in omnibus conveniat, cum Reductio Fractionum vulgarium; quae proinde iam de Reductione Superius (Cap. 2 §§. 205 sequentibus) diximus, eadem Reductioni quoque Fractionum

Deci-

Decimalium inservient. Reliquae autem Operationes Arithmeticae (puta Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio) in Fractionibus Decimalibus, in Stil diversi habent ab iis, quae in Numeris integris instituuntur, nisi quod praeter operationem nonnulla attendenda sint in Collocatione Numeros integros a notis Decimalibus separantis, quae ut pateant, dictas statim Operationes, totidem Problematibus succincte, unico videlicet, quod statim sequetur, expediemus.

CAPUT II.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Divisione Fractionum Decimalium.

Problema XXVI.

§. 267. Prop. Fractiones Decimales addere.

Resol. I. Si Quantitates addendae fuerint, partim integrae partim vero Fractae, tum scribantur in primis Numeri Integri, ut alias fieri solet, videlicet secundum valorem suum localem alii infra alios (§. 127 Reg. 1.) ita ut etiam virgula in eadem sit, serie verticali, deinde singulis integris versus Dextram adjungatur ~~continuo~~ sua Fractio ut data est, partes sese decimas partibus Decimis, Centesimas Centesimis, Millesimas Millesimis &c. subscribendo. Tandem

II. Subducta linea omnia in unam summam

colligan

colligantur juxta Reg. de Additione Numerorum Integrorum (124.) traditas. Denique

(III) Ex summa hac modo collecta, versus Dextram totidem notae, quot notis maxima Fractio addenda constiterit, virgula resecentur, quae notae. Fracta, reliquae vero ad sinistram, integra designabunt, vid. Paradigma, annexum,

Demonstratio. Observatis hi Regulis emergens summa aequalis e omnibus Addendis punctim sumptis (id quod Subtractione probabitur, & Additio juxta Datas Statuum Regulas rite peragetur (§. 121.) q. e. d.

PARADIGMA Additionis

52, 791	Nam Quantitates istae	52, 79100
4, 00745	per (§§ 225 & 226) sunt	4, 00745
2, 7	aequales hi videlicet	2, 70000
0, 00490		0, 00490
59, 50335		59, 50335

PROBLEMA XXVII

§. 268. Koo. Fractiones Decimales subtrahere.

Resol. I. Subtrahenda Minuendae ita subscribantur ut integra integris Fracta Fractis, quoad valorem respondeant, uti & virgula virgulae. Tandem

(II. Reliqua omnia fiant juxta Regulas subtractionis Numerorum integrorum superius (§§ 136.) tra-

ditas

traditas hoc numero addito, quod scilicet ex Differentia seu Residuo totidem versus Dextram virgulam resecentur, quot notis Fractionum praemissarum major constabit, quae notae resectae Fracta, reliquae vero ante virgulam existentes Integra denotabunt.

Demonstratio Rite peragitur Subtractio ubi invenitur Residuum tale, quot additum Subtrahendae ex integro restituit numerandum (§. 135.) Atque per traditas Resolutionis Regulas tale obtinetur Residuum (: id quod Exempl. Subjecti Paradigmatis obtinetur. Q. e. d.

PARADIGMA Subtractionis

Numerand.	57,	02		Numer.	3.	842	
Subtr.	48,	1		Subt.	1	004554	
Resid.	8,	92		Resid.	2	837446	
Proba	57,	02	Summa	Prob.	3.	842000	

Ad. Aliud

Ad.

Problema XXVIII.

§. 269. Prob. Fractionum Decimalium Multiplicationem peragere!

Resol. 1. Multiplicando Multiplicator, uti in

Numer

Numeris integris subscribatur nulla tabula positionis quoque virgulae Ratione.

(II. Multiplicatio peragatur juxta datas de Multiplicatione Numerorum Integrorum Regulas (§ 154.) Hoc facto

(III. In producto totali tot versus Dextram separentur notae pro Fractis, quot Decimales in utroque factore simul fuerint, ita ut si notae producti totalis non sufficiant, iis tot Zeri a sinistra praefigi debeant, quot ad summam illam conficiendam requiruntur, quemadmodum in Exemplo 2do Paradigmatis videre licet

Demonstratio. Juxta tas Regulas Multiplicationem in Numeris integris rite peragi, jam supernis (154.) demonstratum est, quae Demonstratio, loco cum exposita, die quoque locum obtinet. Et simul tam rite per tas Regulas exequi Divisione mediante optime probari potest, si nempe Factum per unum Factorem dividendo, pro Quoto reperiatur alter Factor, atque idem obtinet multiplicatione per praescriptas Regulas instituenda (id quod in Praxi probari debet) Ergo. e. d.

PARADIGMA Multiplicationis.

43

Sed

43	7	Factores	2,	4542	Factores
1	35		0,	0053	
131	1	Facta part.	7,	3626	Facta part.
437			122,	710	
568.	1.	Factum totale	00130	0726.	Factum totale

Scholion.

§. 270. Factum totale rite operatione (§ praed.) praescripta quoque experiri quoque poterit via alia, si nempe ambo Factores forma Fractionis vulgaris exhibeantur, atque dein multiplicentur, juxta (§ 239.) Numeratores inter se, et Denominatores pariter inter se, nam ex hac methodo, idem prorsus factum obtinebitur, facta Fractionis vulgaris per Decimalem expressione. Rem exemplo coram ostendemus.

Problema XXIX.

§. 271. Prop. In Fractionis Decimalibus Divisionem peragere.

Resol. 1. Omnia fiant juxta Regulas De Divisione Numerorum integrorum (§. 169.) expositas, hoc unico addito, quod in Quotiente reperto tot versus Dextram notae interposita virgula, separandae sunt, quot notis

notis Fractio Dividendi excedit Numerum Notarum Fractionis. vid Exempl. 1.

II. Si vero in Divisore occurrant plures notae Decimales, quam in Dividendo tunc Dividendi tunc notis Decimalibus, quotlibet Zeri adjici debent, donec Numerus eorum paulo major evadat, quam in Divisore, ut sic etiam aliquae Decimales in Quotiente acquirantur. vid Exempl. 2.

Demonstratio. Divisio peragitur, ubi Quotus inventus per Divisorem multiplicatus restituit Dividendum (§. 162.) atque per datas Regulas, nobis Quotus obtinetur (id quod probanti rem parebit) quam juxta easdem Regulas Divisio in Fractionibus Decimalibus rite peragetur. q. e. d.

PARADIGMA DIVISIONIS.

Exempl. 1.			Exempl. II		
Div.	Divid	Quotus	Div.	Divid	Quotus
3,22)	8,445	(2,6	20,074)	49,1	(2,44
Fact. sub.	644		Fact. sub.	40148	
Resid pr.	2005		Res. pri.	89520	
Fact. sub.	1932			80296	
Resid 2um	-73		Resid 2um	92240	
			Fact. sub.	80296	
			Resid 3tium	11944	

Sed

Scholion.

§. 272 Si in quisquam divisionibus, etiam notarum Residuarum rationem habere lubeat, iis Zeri adjungi possunt, juxta (§. 256.) et iteratis divisionibus novi quotientes erunt, qui totidem notae Decimales erunt, ut in priori exemplo, additis ad Residuum 73 tribus Zeris invenitur Quotus 2, 6226 cum novo Residuo 228, quod negligi potest. Et Tacitum de Fractionibus Decimalibus. Scholion 2.

§. 273 Praeter expositas quaesque sunt et aliae Fractionum species; ex multiplicibus enim, quae in diversis Matheseos partibus, atque universim in Commercio adhiberi solent, mensurarum Generibus, respectu habito partium, in quas nempe mensurae ipse dividuntur, totidem diversae, quam Denominationem, Fractionum species oriuntur; sed jam Fractionum diversae Denominationis Additionem quidem superius (§. 127. Reg. VI.) Subtractionem vero (§. 136 Reg. IX.) indicaremus; Multiplicatio autem et divisio talium Fractionum satis prolixa, et longe diversa ab iis, quae in aliis Numeris instituuntur in Elementis Mathematicis locum non habent; ideo hic hoc loco tamen numerabimus. Scholion 3.

§. 274

§. 274. Absolutis ita primis, ut volant operationibus Arithmeticis, quae tam integris, quam etiam Numeris Fractis institui solent. Iam ordo postularet agendi de iis etiam, quae a primis Oriuntur operationibus Arithmeticis, nempe de Ratione, Proportione, Progressione, Potentiis, vel Dignitatibus, ac de Regula Trium vulgo Aurea, quas tamen (: si quidem sed faciliore longe Methodo in Algebra demonstrantur :) ad calculum literalem reseriamus, quem etiam Algebram puta, statim aggrediemur, Tractatui nostro de Arithmetica Numerica, finem sic loci imponentes. Finis Arithmeticae Numericae.

Exempl. Divisionis Algebraicae:

Div: Divid:

$$3a^m b + 2ac^3 - 4b^2c^3 \,)\, \tfrac{3}{2}a^{3m-1}b^2 - 2a^m b^{n+3}c$$
$$+ a^{2m}bc^3 - \tfrac{4}{3}ab^{n+2}c^4 - 2a^{2m-1}b^3c^3 + \tfrac{8}{3}b^{n+4}c^4 \,(=$$

NB. Quando Quantitas integra debet multiplicari per fractam, tunc per numeratorem debet quantitas [illegible]

Quotus: $(= \tfrac{1}{2}a^{2m-1}b - \tfrac{2}{3}b^{n+2}c$

NB. Quando Quantitas integra debet multiplicari per fractam aut vice versa, tunc Quantitas integra multiplicetur per numeratorem fractae, et facto subscribatur denominator datae fractionis, compendii causa.

ELEMENTORUM MATHESEOS PURÆ PARS POSTERIOR.

ELEMENTA ALGEBRÆ.

A KOLOZSVÁRI UNITÁRIUS FŐISKOLA KÖNYVTÁRA

ELEMENTORUM MATHESEOS PURAE PARS. II.

ELEMENTA ALGEBRAE.

Complectens Prolegomenon.

Exhibens præcipua eorum, quæ claris instar totius Algebræ, Taberi dicique merentur.

Definitio 1.

§. 1. Algebra est Scientia, quæ ope Literarum Alphabeti, certisque adhibitis signis, per Regulas sibi proprias, inquirit in Quantitates ac Veritates quotas, easque ex Datis quibusdam cognitis, ad quas illarum Relatio quædam datis infallibiliter eruit, ac demonstrative determinat. Quid Algebræ?

Scholion

§. 2. Vocabulum Algebræ, quidam deriuant a præfixo articulo Al, et Nomine Auctoris Geber, qui Scientiam Iane in Arabia primus excogitasse creditur: Alii vero idem vocabulum deducunt, a præstanti artis Iugis valore, quem Arabes Gabir appellant. Dividitur vero Algebra

Algebra dividitur in Arith. Literalem & Analysim Mathemat.

gebra in Speciosam, seu Arithmeticam Literalem & Analysim Mathematicam.

Definitio II.

Arithmetica Literalis quid?

§. 3. Arithmetica Literalis est, quæ substitutis loco Notarum Numericarum Alphabeti Literis, earum ope, ordinarias Arithmeticas # operationes seu Computum Quantitatum indeterminatarum peragere docet. Methodus vero Problemata Mathematica resolvendi, seu Quantitates quæsitas ex datis quibusdam, ad debito calculo, & signis Algebraicis, secundum Axiomata æqualitatis eruendi, Analysis vo.

Analysis quid?

Definitio III.

Quantitas quid?

§. 4. Quantitas autem audit, quidquid augeri v. minui potest. Ex. gr. Numeri, Lineæ, Pondera, relocitates &c, quoniam augeri minui nunquam possunt. Quantitates sunt.

Hypothesis I.

Quantitates abstr. designantur literis alphabeti lat. minusculis. Cognitæ a. b. c. incogn. x. y. z.

Ratio qui ordinantur plures incognitæ quantitates tribus in una Quæstione.

§. 5. Quantitates ab omni materia abstractæ in Algebra minusculis Alphabeti Latini Literis solent designari: & cognitæ quidem prioribus a. b. c. &c; incognitæ vero, constantes postremis x. y. z # Aliqui tamen, ut memoriæ, imaginationique ad hoc melius subveniunt, in quantitatibus cognitis designandis, literis utuntur initialibus, earundem rerum, per quas Quantitates illæ cognitæ denominantur. Ex. gr. Tempus designant Litera t

Pondus

Pondus Litera p. Spatium per S. Celeritatem per C. Quantitates autem eadem sive aequales, in eadem Quaestione, literis iisdem; et diversae Literis etiam diversis indigitantur.

in Quaestione eadem Eadem v. aequales Quantitates, iisdem diversae diversis designantur literis.

Corollarium 1.

§. 6. Cum ergo Quantitatis nomine intelligatur, quicquid augeri v. minui potest; §. 4. Literae Alphabeti, pro omnibus universim Quantitatibus v. gr. Numeris, Lineis, Areis, Viribus &c. designandis adhiberi possunt, eaque sic adhibitae universaliter significant illam Quantitatem pro qua substitutae sunt; ut adeo quae de Literis hisce in Algebra demonstrantur, ea in quavis Quantitatum specie locum habeant.

Et literis omnes quantitates designari possunt. v.c. Nr. Lineae, Areae, velocitates.

Corollarium. 2.

§. 7. Unde apparet Algebram esse Scientiam quandam Ursalem, quae praeclaros habeat usus, in omnibus iis Disciplinis, in quibus certae quantitatum species. Ex. gr. Numeri, Lineae, Spatia, Tempora, Celeritas, Vires, Pondera &c. pertractantur; quaslibet enim Quantitates literis designare, et ad Calculum revocare sive (§. pr.) quapropter in Calculus Ursalis, seu Calculus Quantitatum indeterminatarum prae merito appellatur.

Et haec scientia praeclaros habet usus in talibus Scientiis in quibus certae Quantitatum species pertractantur.

Hinc quo nomine insignitur Algebra? Calculus Ursalis. Calculus Quantitatum indeterminatarum.

Scholion 1.

§. 8. Multum omnino interest Algebrae Tyroni in ipso statim Ursalitatem, et indeterminationem Quantitatum Literis Alphabeti expressarum, recte intelligere, seu quod in Algebra Literae a. b. c. x. y. &c. sibi relinquatis perspicere, id quod paritate ex Arithmetica Numeri-

In quo sita est Ursalitas Literae ad Alphabeti?

ca

Illustratio Ur-salitis Literarum Alphabeti in Calculo Algebraico.

1a Similit. ca desumpta, ad captum minusque ut puto facile declarabitur. Numerum quemadmodum in Arithmetica Numerica, signa Numerorum vulgaria 1. 2. 3. &c. significant Ursaliter et indeterminate quamcumque Unitatem Binarium ternarium, et ita pariter (. uno magis Ursaliter .) Literæ il-

2a Similit. lee in Algebra denotant, quamlibet quantitatem, Et sicut in Arithmetica Numerica, Numeros seu signa eorundem tractando nihil determinati, non pecunias, non Homines, non libros, intelligimus; sed Numeros ab omni materia abstractos; ita cum in calculo Algebraico, literis Alphabeti utimur, per has nullam Quantitatem determinatam, non Numeros, non Literas, non spatium &c. sed quamvis generatim Magnitudinem incrementi ac Decrementi capacem de-

3a Similit. signamus. Quemadmodum itaque Notæ Numerorum prius quam ad certam materiam determinentur, significant quasvis Res Numerabiles; ita plane literæ antequam ad certum aliquod Quantitatum genus ex. gr. ad Numeros Lineas, pondera, ad Celeritates &c. applicentur, Universe denotant omnes quantitates; ut adeo calculus Literarum, facta earundem determinatione ad omne quantitatum genus transferri possit. Unde etiam Calculi Ursalis Nomine non immerito venire solet

Scholion 2

Objectio: §. 9. Sed fors objicies; Calculum omnem Numeris absolvi posse; imo eosdem resolutâ Quæstione, Literis

pla

plerumque substitui, proinde in usu Literarum, tandem multum inesse emolumenti?

R. Verum 1º: praeterquam quod in iis ipsis, quae solvi metodo utraque possunt, Literarum Calculus et multo brevior; et longe expeditior est. 2º: Complures Quaestionis Numerorum ope omnino resolvi non possunt, quae Literarum adjumento admirando compendio facilimeque solvuntur. Et 3º: Resolutiones seu formulae Literales Ursalissimae sunt, continentque solutiones omnium generum Quaestionum, quod Numeri non praestant; sed tot ut et alios Fructus Algebrae praestantissimos, priusquam delibet Tyro, Calculos Algebraicos rite condiscendos habet:

1º. Praeciorum expeditior est operatio literis, quam ante.

2º. Plurimae Quaestiones numero ope nequeunt resolvi, Literarum ope resolvuntur.

Hypothesis 2.

§. 10. Quantitas quae sub consideratione seu Calculum Algebraicum cadere potest, v. e. Positiva seu major nihilo, v. e. Negativa, seu minor nihilo; ut adeo Nihilum sit quasi Limes quidam, Quantitatum Positivarum seu Affirmativarum et Negativarum. Illae designantur signo + plus praefixo. Hae autem signo − praefixo. Quorum prius + Quantitati positivae, aut Solitariae, aut ad initium plurium, quantitatum interpositis signis + et − conjunctarum positivae, nunquam praefigitur, sed ut praefixum subintelligitur. At negativae Quantitati, signum − semper expresse praefigitur.

Quant. Positiva quid?

Negativa quid?

Solitariae Quant. Positivae non praefigitur.

neque in initio plurium quantitatum existenti. quia negativae quantitati signum − semper praefigitur.

figitur. Ex. gr. Si tam a, quam b. fuerint quantitas positiva, hoc modo scribendæ erunt a+b, si vero a sit positiva b, negativa, sic easdem scribes: a−b, et vice versa si a sit negativa b. positiva; sic scribendæ erunt: − a+b. Quod si autem utraque fuerit negativa, hoc modo scribuntur: − a−b. Porro uti jam in Arithmetica Numerica (§§§ 100 101.) indicatum est, signum + per rocem plus, et − per rocem minus enunciatur, sic: a+b, vic: a plus b, et a−b, significat a minus b. Denique signum Nihili, seu si placet Quantitatis nullius est Zerus (0.) qui præcipue inservit, in Problematibus ad Nihilum reductis locum minus partis æquationis occupando, ut infra dicetur.

Scholion I.

§ 11. Sedulo curandum est Tyronibus, ut quantitatum Earum Claram Distinctamque Notionem alte menti imprimant, minimum (1º) Si quis quam possidet Flor. 4. nec ulli debeat quicquam, si 4. Florenos, relate ad cum Possessorem sunt quantitas Positiva, seu Affirmativa, atque major nihilo (cum ois illa pecunia, quam habet ab æquali debito.) cum plus habeat quam nihil. At

Illustratio Quant. Positivæ

(2do) Si quis possidens 4. Florenos tantundem alteri cuipiam debeat, ut is habere nihil, cum omnis illa pecunia, quam habet ab æquali debito reluti est

Quis dr nihil habere?

tuique

reluti extinguatur. Sui autem

3º: Possideat quispiam Florenos 4, sed alteri cuipiam debeat Florenos 6, postquam 4 illos, quos actu possidet, creditori suo deverit, tenebitur eidem ad hoc duobus Florenis. Qui duo Floreni, comparare ad ipsum Debitorem, hoc in casu sunt quantitas Negativa seu minor in zilo, cum totidem Floreni desiderantur ut ex soluto creditore in zilo ipse habere censeatur. Unde quicquid supra in zilum est Positivum dicitur: et quicquid ad in zilum desideratur illud Negativum dicitur. Quis habet minus Nihilo. Positivum quid Negativum quid!

Scholion 2.

§. 12. Natura quantitatis Positivae, et Negativae solet etiam exemplo motus progressivi declarari. Ex gr. Si quis fenestram inter, et portam cubiculi sive fenestrae oppositam mediam constitutus fenestram aperire velit ad hunc finem obtinendum necesse est eundem propinquum fieri aperiendae, itaque 1º. Si e medio cubiculi, in quo consistit, duos passus fenestram versus faciat, dicetur fecisse duos passus positivos, quia conducunt ad finem fenestram aperiendi. At

2º Si in medio consistens quietus maneat, id est nec versus fenestram, nec portam versus ullum passum faciat, habet motum nullum seu Quantitatem nullam motus progressivi fenestram versus. Si vero

3º

(3º) E medio cubiculi non fenestram versus (quam aperire necesse est.) sed versus portam duos passus, retro faciat, dicetur fecisse duos passus Negativos, videlicet respectu habito finis, quem intendit, cum hoc in casu non appropinquet fenestræ aperiendæ; sed ab ea magis elongetur, atque ad hoc ut e medio fenestram versus non processisse dicatur, necesse est, ipsum per duos passus ad medium redire cubiculi, in quo consistens depræsendet se in hil magis fenestræ appropinquasse, quam si ibidem quietus mansisset.

Sicuti igitur, regressus iste fenestram versus est, rerum motus, et debitum quoque illud (3º pr.) duorum Florenorum est relapse aliquid, ita Quantitas Negativa est Quantitas Realis, non merum nihil, sed quæ comparare ad certam circumstantiam, Negativa fit tanquam non conducens ad finem intentum.

Hoc itaque sensu, quascumque duas quantitates directe oppositas inter se conferamus. Ex. gr. Lucrum et Damnum, Incrementum et Decrementum, motum sursum, motumque deorsum; semper una quantitas relate ad alteram sibi oppositam Negativa est. Unde etiam generatim signa + et − semper contrario sensu sunt accipienda, ut si

signum

Signum ⊞ significet Lucrum, Incrementum, motum sursum, tum signum ⊟ designabit, Damnum, Decrementum, motum Deorsum. Si autem signum ⊞ postrema haec denotat, signum minus priora illa designabit.

Scholion. 3.

§. 13. Quamvis signa (§. praec.) specificata, ut et alia plerasque in operationibus Algebraicis ordinarie adhiberi solita, jam (in Arithm. Num. §100=106) enumeraverimus earundem tamen praecipua (memoriae Tyronum consulere volentes.) Ac quoque recensebimus, caetera per Algebram occurrentia, signa suis locis indicaturi.

Hypothesis III.

§. 14. Signum = dr. aequalitatis, quia designat aequalitatem earum quantitatum, inter quas interseritur ex. gr. Haec expressio a=b indicat quantitatem a, aequalem esse quantitati b. Signum vero > ostendit quantitatem anteriorem majorem esse posteriori, at idem signum inverse positum. Sic < significat anteriorem quantitatem posteriori minorem esse. Illud signum Majoritatis, hoc autem Minoritatis signum appellantur vulgo. Hinc a > b enunciatur a est majus quam b, contra b < a enunciatur b est minus quam a. Porro signum ∽ est similitudinis. Autem ∽ Similitud.

Sign. aequal: =

Majoritatis: >

Minoritatis: <

Signum

Quantitatem Positivam, adjuncta aequali Negativa, vel Nihilo aequalem nihilo. Ex gr. $a - a$ vel $-a + a$ in $3 - 3$ aut $-3 + 3$ aequantur nihilo. Hinc signa $-$ et $+$ vocantur etiam signa contraria, et Quantitates 2 affectae sicuti affectae signis contrariis.

Quantitas Positiva, Quantitas Negativa, aequalis nihilo.

Corollarium 2.

§. 17. Hinc porro sequitur, quod si duae inaequales Quantitates, quarum altera Positiva sit altera Negativa conjungantur per signa $+$ vel $-$, ex in casu minor a majori semper est destruat quanta est ipsa minor. Sic $8 - 3 = 5$, $3 - 5 = 2$.

Quantitas Neg. [illegible]

Definitio iv.

§. 18. Quantitas quae a pluribus quantitatibus signis $+$ vel $-$ junctis constat Complexa ab ipsis ideo illae quantitates quae complexam constituunt dicuntur Termini. Pro ratione vero plurium Terminorum Complexa Quantitas generatim Polynomia appellatur. Haec autem pro uno [illegible] sortitur Denominationes, si enim sit Rationum Terminorum Binomia, si Trinomia, et sic pro numero [illegible]. Ex gr. $a + b$, aut $a - b$ sunt quantitates Binomiae, et $a + b - c$ est Trinomia. Verum tamen [illegible] quae illae sunt quantitates complexae, seu Polynomiae [illegible] plurium Terminorum.

Quantitas Complexa [illegible]

Quantitas Polynomia [illegible]

Quantitas Binomia [illegible]

Corol

Coroll.

Manet Valor Quant. Complexae, quocunque ordine Termini scribantur.

Quia Compl. Quant. e instar totius, tantum vero invariatis Partibus ō mutatur. Partes vero cum loco ō amittunt valorem.

§. 19. Valor itaque Quantitatis complexae non mutatur, quocunque tandem ordine scribantur Termini ipsum constituentes; Est enim Complexa Quantitas instar totius, cujus autem valor nihil mutatur; nisi mutato valore partium, quem sola ordinis ipsarum permutatione, non mutari perspicuum ē. Sic $8+3-5=6$; $3-5+=6$; $-5+3+8=6$; $3+8-5=6$.

Definitio. V.

Incomplexa sive Monomia Quant. quid? Quaevis Quantitas seorsim sumpta, seu cum alia per signa +, −, ō conjuncta. do. Quant. Incompl.

§. 20. Incomplexa autem seu Monomia vocatur, quaevis quantitas seorsim sumpta, seu quae non ē conjuncta cum altera quantitate per signa + vel − interposita. Ex. gr. a ē quantitas Incomplexa item abc sic 3ab ut et ab2 &c.

Hypothesis. V.

Signum Multiplicationis Algeb. aut ē • aut × aut nullum.

§. 21. Multiplicatio in Algebra, v. prorsus signo caret, et Quantitates, seu mutuo multiplicantes absque ullo signo jungatur; vel vero Multiplicationem indicat punctum (•) inter Factores interjunctum; aut unde Lineae decussatae (×) Factoribus interjectae. Ex. gr. quando a per b multiplicari debet, sumitur v. ab, vel a•b, aut vero a×b, nos signo de ultimo utemur.

Hypo

Hypothesis VI.

§. 22. Quando Multiplicatio Quantitatis Polynomiae per Monomiam, aut Binis per illam indicanda est, quantitas Polynomia parenthesi includitur, cui Monomia v. cum vel sine signo Multiplicationis (§. pr.) expositio jungitur. Sic. $a+b$ Multiplicatum per c. exprimitur taliter (: $a+b$:) c; vel intejecto signo (: $a+b$.) $\times$ c; aut vice versa c. Multiplicatum per $a+b$, ita designatur c. (: $a+b$.) vel $c \times$ (: $a+b$.) Denique si ambo factores fuerint Quantitates Polynomiae, uterque eorum seorsim parenthesi includantur signo Multiplicationis inter duos factores exhibito ex. gr. Sit quantitas Polynomia $a+b-c$ indicanda esse multiplicata per Polynomiam $d-f$: scribatur (: $a+b-c$.) $\times$ (: $d-f$.)

Quantitas Polyno. per Monomiam multiplicanda includitur Parenthesi cum Mono. v. cum v. sine signo adjicitur.

aut vice versa mon. scribitur ante Polynomiam.

Scholion.

§. 23. Vulgo Factores, qui sunt quantitates Polynomiae, etiam superducta linea notantur ex. gr. Exempla (§. prae.) altera sic scribuntur $\overline{a+b}.c$. vel $\overline{a+b} \times c$. Item Exemplum nostrum (i. e.) ultimum sic exprimitur $a+b-c \times d-f$; aut $a+b-c-d-f$, verum praestat abusu hujuscemodi Expressionis, velut errori plurimum obnoxiae abstinere, atque Parenthesi uti; Nisi fors contingat ut per signa (§. 22.) indicatam jam Duos Factorum Multiplicationem per novum Factorem, aliquem Tertium multipli-

7

tiplicationem esse, indicare cogamur, tali quippe in casu super priori modo indicatam Multiplicationem linea erit ducenda, quæ indicet, aut utrique Factorum prioris expressionis aut alter ut eorum sit per novum Tertium factorem multiplicatus. Ex. gr. Expressio 3 ac (: a + b) x (: c + d.) x (: m − n :) indicat ambos priores factores, multiplicatos esse per factorem Tertium m − n.# intelligendum erit, illum e factoribus prioribus, cui linea superducta non est, non esse multiplicatum per Tertium Novum Factorem, sed 3 ac insinuasse sufficiat, cum quismodi Exemplaribus occurrant.

Hypothesis VII.

Signum Divisionis est : vel, vero instar Fractionis vulgo exhibet sit Dividendo pro Numerat. Sequito subditur Denom. Divisor.

§. 24. Signum Divisionis sunt, (:) Duo Puncta, aut Dividendus ac Divisor Fractionis ad instar exhibentur, id est Dividendus linea subducitur, et infra lineam scribitur Divisor. Ex. gr. Quando a per b Dividi debet, scribitur a : b ÷ vel $\frac{a}{b}$ et utrumque effertur a Divisum per b.

Scholion

§. 25. Quemadmodum indicata ~~[illegible]~~ superius (§ 15) Additio summam : Subtractio Residuum seu Differentiam significat : ita pariter Multiplicatio (§ 21) indicata factum seu Productum : et Divisio (§ præc.) Specificata Quotum denotat. Ex gr. si a. valet 12. b. valet 3, erit a. b. seu a. æquale = 12. 3 $\frac{12}{3}$ vel = 4. Cum sit

quo

Quotus Ortus ex Divisione Numeri Integri 12 per 3.

Hyphothesis VIII

§. 26. Quemadmodum in Multiplicatione (§ 22.) dictum est, etiam in Divisione quantitas Polynomia seu sit Dividendus, seu Divisor Parenthesi includitur sinempe pro signo Divisionis usurpentur (:) duo Puncta. Si vero per modum Fractionis exprimere placeat omittatur Parenthesis, et Linea sub Dividendo ducenda ad totum Dividendum, et Divisorem extendatur ex gr. Si quantitatis $a+b$, Divisio per quantitatem c indicanda est, scribitur $(a+b):c$ aut $\neq$ ~~[illegible]~~ vice versa c. Divisum per $a+b$ indicatur taliter $c(a+b)$ vel $\frac{c}{a+b}$ $\neq \frac{a+b}{c}$ Item si quantitas Polynomia $a+b-c$ dividenda esset per Polynomiam $d-f$ scribitur pro quoto $(a+b-c):(d-f$ v. $a+b-c$

Scholion.

§ 27. Ultimo Multiplicatione indicanda (§ 23.) monitum est, pari modo in indicanda quoque Divisione nonnunquam pro Parenthesi linea usurpatur, sine quae de signis Multiplicationis (§ cit.) dicta sunt, ea quoque cum Analogia applicari possunt. Ex gr. loco $(a+b):c$ scribitur $\overline{a+b}:c$. Item Divisio Polynomiae per Polynomiam sic exprimitur $\overline{a+b-c}:d-f$ ⁊

Corollarium 1.

§ 28. Cum Multiplicatio in Zilalium sit, quam utra-

ta

ra Additio, Divisio autem sit repetita subtractio (: Arit. Im. §§ 53. 94.) addere vero & subtrahere, ut & signa amborum contraria sunt (§. 16.) patet quoque Multiplicationem & Divisionem sibi contrarie opponi, atque adeo signa etiam Multiplicationis (§ 21.) & Divisionis (§ 24.) adducta esse signa contraria, consequenter destructiva seu deletiva duarum quantitatum æqualium ex signis contrariis affectarum, Unde manifestum est sequens

Quoniam Multiplicat. iterat. addit. Divisio vero iterat. subtractio, & signa Additionis & Subtr. sunt contraria igitur etiam Mult. et Divis. signa sunt talia.

Corollarium 2.

§. 29. Quantitas aliqua Multiplicata per aliam quamquam quantitatem, & per eandem simul divisa, manet invariata; nec illi quantitati aliquid accedit per Multiplicationem, nec per Divisionem decedit aliquid, sic $\frac{a \times b}{b} = a$ Id quod in Numeris magis est videns. Ex. gr. si a valeat 2, erit quoque præcedens literalis in Numeris hujusmodi $\frac{5 \times 2}{2} = 5$; nam $5 \times 2 = 10$. 10 vero Divisum per 2 æquale 5, seu $10 = 5$.

Quantitas aliqua per eandem quantitatem multiplicata et divisa manet invariata.

Corollarium 3.

§. 30. Quantitas autem quæ multiplicat simul, & dividit, aliam aliquam quantitatem, tanquam si non adesset, ita pro reputari, atque deleri, omittique pro. Ex. gr. in allato (§ præc.) exemplo quantitas b. multiplans simul & dividens quantitatem a, tanquam in illo variat, itaque quantitas b. tanquam si neque adesset ita reputatur.

Quantitas talis multiplicans simul dividens quæ ... potest omitti. quoniam ... variat quantitatem.

Sed

Prolegomenon ad Algebram 217.

Scholion.

§. 31. In Algebra Literis Alphabeti Numeri quoque saepissime adjungentur. Id quod triplicitur fieri: Nam vel 1° jungentur Numeri Literis per signa + aut −, ut in hac quantitate complexa $a + b - 3$. Vel 2° praefigentur Literis nullo signo interposito, ut $3a$, $4ab$; vel denique 3° Numeri literis a Dextris sursum versus adscribuntur ut a^3, b^2.

Literae Alphabeti quando scribuntur cum literis numeris vel cum, vel sine signo, sine signo vel ante vel post literam sunt.

Definitio VI.

§. 32. Numeri literis nullo interjecto signo praefixi appellantur earum Coefficientes, afficiuntque totum Terminum, cui praefiguntur, ac indicant quoties Terminus ille cum suo signo positus sit ex. gr. In quantitate $3ab$ coefficiens est 3, significatque Terminum ab, ter esse positum cum suo signo, quod intelligitur esse + (§ 10) i.e. $3ab = ab + ab + ab$, item $-2a = -a - a$. Corollarium 1.

Quid Coefficientes? sunt literae quae quantitatibus sine ullo signo praefigitur, totamque coefficit quantitatem indicant toties positam esse quantitatem cui praefigitur quoties unitas continet illam.

§. 33. Quoniam $3ab = ab + ab + ab$ (§ 7.) $ab + ab + ab$ vero est summa quantitatis ejusdem nempe ab ter sibi additae (§ 13.) Sui patet: Expressionem per Coefficientes esse Metodum compendiariam scribendi easdem quantitates, aliquoties sibi additas, seu Additione positas.

Sine apparet compendium in describendo [illegible] coefficientes.

Corollarium 2.

Quod

§. 34. Quod si ergo cuipiam termino nullus praefigatur coefficiens, illi unitas praefixa intelligitur, cum quisque termini semel ea positum sit. Sic loco 1ab solet sine unitate scribi ab

Definitio. VII.

§. 35. Numeri qui literis a Dextris sursum versus ascribuntur, vocantur earundem literarum Exponentes, afficiuntque, eam solum literarum, cui a Dextris pinguntur, ac indicant, quoties ea litera sit, consequenter i.e. nullo interjecto signo seu Multiplicatione (§ 21.) posita sic a^3 significat, quantitatem a, ter esse consequenter seu Multiplicatione positam, sic est $a^3 = aaa$.

Exponentes quid?

Corollarium 1.

§. 36. Cum $a^3 = aaa$; sic vero aaa exprimat Hypothesim Multiplicationis primo modo indicatam, sitque aequalis sive $a \times a \times a$ (§ 21.) sive linquet: Expressiones per Exponentes esse modum scribendi; per abbreviationem quantitates easdem, in semet aliquoties multiplicatas. Sic loco $a \times a \times a \times a \times a \times a$ vel loco aaa aaa, brevissime scribitur a^6

Corol. 2.

§. 37. Quoniam omnis Quantitas Monomia simplex, seu unica litera expressa sive instar totius con-

sit

considerari; sicut considerata semel, seipsam sumptam seu semper Unitatem Multiplicatam significat, quae sequitur: quod sibi desit Exponens, illic Unitas intelligatur esse Exponens ex. gr. $a = a^1$ $a = b$

Scholion. 1.

§. 38. Probe advertendum est, quid sit aliquam Quantitatem aliquoties esse Multiplicatione positam Nimirum quantitas ex. gr. a. bis multiplicatione posita seu a^2 est $= a \times a$ ‡ et quater Multiplicatione posita seu a^4 est $= a \times a \times a \times a$ et sic pono. Consequenter tunc aliqua Quantitas ponitur bis Multiplicatione, cum semel per seipsam multiplicatur, tunc ponitur ter Multiplicatione, cum bis per seipsam Multiplicatur ‡; et sic pono. Unde patet: Exponentes non esse confundendos cum coëfficientibus, consequenter aliud esse ex. gr. a^2. ac est $2a$ quippe significat quantitatem a bis esse Additione positam, seu est $2a = a + a$ (§§ 32, 33.) ast a^2 significat quantitatem a bis esse Multiplicatione positam, seu est $a^2 = a \times a$ Hinc si ponatur $a = 5$ est $2a = 5 + 5 = 10$: et $a^2 = 5 \times 5 = 25$. Praeterea Exponens eam solum Literam afficit, cui a Dextris pungitur, sic in

‡ eadem quantitas a ter multiplicatione posita, seu a^3 est $= a \times a \times a$.

‡ & tunc ponitur quater multiplicatione, cum ter per se ipsam multiplicatur.

quantitate ac 2 d Exponens 2 solam literam c. in-
dicat, bis esse Multiplicatione positam, at contraria
e coefficientium una, si enim indicant integrum Ter-
minum, cui Fixi existunt, esse Additione positum
ut supernis (§ 33. exposuimus.

Scholion.

§. 39. Interdum pro Exponentibus loco Nume-
rorum, Literae minusculae ex Libentur, et quia literae m
n r. s. t &c. quibus significatur quantitas illa,
cui aliqua Harum Literarum, a Dextris sursum
versus adscripta habetur, tories esse Multiplicatione
posita, quot in eadem exponente Literali Unita-
tes continentur, ut adeo Exponentes Litera-
les sint Exponentes indeterminati, atque Ursa-
liter significant illum Exponentem Numericum
pro quo substituuntur. Nonnunquam autem pro Ex-
ponentibus adsibentur Literae Numeris permixtae,
ut in his a^{2m} a^{m+2} a^{n-1}; &c.

Definitio VIII.

§. 40. Quantitas Monomia simplex, dr
quantitas 1ª Litera expressa, quae vero quantitas
Monomia duabus, vel etiam pluribus literis nullo
inter

intermediante signo aliquo sibi indicem conjunctis expressa habetur, Composita audit, ut e bc v. abc aut abcd; item aa, v. aab.

DEFINITIO IX

§. 41: Quantitates Monomiae seu Termini dicuntur prono similes seu Homogenei, si constent iisdem accurate literis, eosque Exponentes habentibus, tametsi diversis, gaudeant signis et coefficientibus, sic Homogeneae Quantitates sunt 3ab et 2ab, item 4ac et 7ac et id bc et 4cb &c. Quantitates vero Monomiae, quae aut Literas diversas habent aut in iisdem Literis diversos Exponentes Heterogeneae vocantur, ut sunt a et b. item ab et bc, id a=b et ab &c.

Termini Homogenei quidem

Quid Heterog.

Coroll.

§. 42. Cum Homogeneitas Terminorum seu quantitatum Algebraicarum consistat in Identitate solum Literarum et Exponentium Heterogeneitas, contra solum in Literarum et Exponentium diversitate (40: 41 §§.) hinc sequitur Homogeneitatem in quantitatibus Monomiis compositis non tolli per diversitatem praecise earundem Literas

rarum Ordinem & situm. Sic quantitas Mono-
mia Composita abc manet Homogenea, licet ejusdem
literæ quocumque Ordine situque permutatæ combinentur
Ex. gr. abc, acb, bac, bca, cab cba. Alias etiam Adduc-
tæ quantitates Ideæ singulæ exprimunt Hypothesim Mul-
tiplicationis primo modo indicatum (§ 21.) factum vero seu
productum idem manere, quomodocumque factores inter se du-
cantur vidimus (§ 148 Arithm.) ut adeo vel Imo pareat
Adductas quantitates esse inter se easdem & æquales pro-
inde Homogeneas.

Definitio X.

§. 43. Quodvis Complexum Literale ex Libris Ursa-
liter per signa Algebraica factas aut faciendas Operatio-
nes Algebraicas vel Formula aut Propositio Practica
Algebraica. Talis est gr. Hoc Complexum Alge-
braicum $x = \frac{bc}{a}$ ex Libris quantitatem incognitam x esse
æqualem Quantitati b, multiplicatæ per quantitatem c. & divisæ
per quantitatem a. DEFINITIO XI.

§. 44. Operatio autem, quâ Formula quæ Æquam Alge-
braica secundum suam Compositionem Ursalem proposita ~~pro-~~
~~posita~~ resolvitur in suos valores Determinatos, substi-
tuendo sese pro Literis Numeros Arithmeticos, vocatur:

Re

Resolutio Algebraica. ex gr. ponendo $b=4$, $c=3$, et $a=2$ Formula Algebraica, in Numeros literis statim substitutos resolvenda sit Idee x bc, quae erit in Numeris $x = \frac{4 \times 3}{2}$ seu $x = \frac{12}{2}$ id est $x=6$, adeoque 6 est aequalis quantitati Numericae 4. Multiplicatae per Numerum 3, et divisae per Numerum 2, quod ipsum faciendum formula Algebraica eloquitur.

Scholion.

§ 45. In Geometria valor formulae Algebraicae determinatus sustinendo pro literis (: Non Numeros ut § praecedenti dictum est.) lineas Geometricas, seu lineam effigiis Geometrice construi solitam, unde etiam ibidem operatio Idee Constructio appellari consuevit.

DEFINITIO XII.

§ 46. Formula Algebraica est Libens per sua signa ac Literas, eam Veritatem Ursalem, quae demonstranda proponitur, simulque ejusdem Demonstrationem Argumentativam tacite continens vos, Demonstratio, seu: Proo speculatiua Algebraica. Ex gr. Si ad Demonstrandum Algebraicae proponatur, Idee Veritas Ursalis: Quantitas Positiva addita quantitati Negativae aequali (: et vicissim.) Se invicem destruunt. Erit Ejusdem Demonstratio Algebraica, Idee

for

Ideo formula: $-a \mp a = 0$ Quæ formula Ursalis dictam Rationem exacte elogiatur, et simul Jane tacitam Demonstrationem Argumentiam demonstratiam continet: + Quantitas $\mp a$ Pe æquali quantitati $-a$ (§ 5) [illegible] quantitas $\mp a$ Pe quoque addita quantitati $-a$ (§ 13) adeoque in Jac formula Jabetur quantitas Positiva conjuncta cum quantitate Negativa æquali ~~conjuncta~~ æquantur in Zelo. Eu Stupendam Signorum Algebraicorum virtutem. Ez a Laurus.

+ Quantitas $-a$ est Quantitas negativa, et $+a$ est Quantitas Positiva (§. 10.) Simulque +

Corollarium

§. 47. Hinc itaque liquet Formulas Algebraicas non esse exprimere Rationem speculativam, aut Practicam, sed simul quoque continere modum perfectissimam argumentandi sive Demonstrationem et quidem pacissimis Characteribus Clarissime tanquam in imagine expressam, ut adeo Formulæ ipsæ Algebraicæ, sint quoddam Compendium Ursale. Veritatum Mathematicarum, quo una Linea, sæpe tot veritates elogiatur, quas si per voces explicare ac consignare vellemus, plures paginæ conscribendæ forent, id quod inferius Clarius adhuc patescet. Miram autem Jane Signorum et Literarum virtutem Numeri et tamsi si sint puri possidere nequeunt, cum si determinatas semper Unitatum Multitudines exhibeant. Et hinc Formula Algebræ Numerosæ

(i.e)

(i.e.) quæ ad Dibitis signis Algebræ cum notis Numericis operationes peragit.) Declarationi a v. Demonstrationi inservire sunt. THEOREMA I.

§. 48. Rōo: Quævis Formula Algebraica continens Rōonem speculativam, rite per suas Regulas Hypotheses, et Axiomata deductam vices obit Theorematis Mathematici. Demonstratio. Theorema Mathematicum est Complexum constans Rōone Theoretica seu speculativa, ejusque Demonstratione, sive est veritas simul proposita ac Demonstrata (§. 49 Proleg. in Ursam Mathesim.) atque Ingrismodi Complexum est quædis formula Algebraica continens Rōonem speculativam rite per suas Regulas Hypotheses et Axiomata deductam (§. 46.) Ergo quædis formula Algebraica continens &c.

THEOREMA. II.

§. 49. Rōpōo. Quævis Formula Algebraica continens Propositionem Practicam, rite per suas Regulas Hypotheses et Axiomata deductam, vices obit Problematis Mathematici. Demonstratio: Problema Mathematicum est Complexum tribus partibus Rōone videlicet Practica, ejusque Resolutione, ac Ingrismodi Demonstratione constans (§. 50 Proleg. in Ursam Mathesim.) Atque Ingrismodi

Ingressus modi complexum est, quelvis formula Algebraica continens Proœnem Practicam rite per suas Regulas, Hypotheses et Axiomata deductam (§§ 43, 44.) Ergo quæ formula &c. quod e. de.

Corollarium.

§ 50. Quidquid igitur Formula Algebraica, rite per suas Regulas Hypotheses et Axiomata deducta exprimit, ac eloquitur, pro Demonstrato concedendum, et ab omnibus admittendum est.

Solion.

§ 51. Hactenus de Prolegomeno, quod pure Clavim, totius Algebræ dixerim. Quicumque igitur Neglecto de Prolegomeno, sive Clavi hac ad Cæteras Algebræ secreta penetraros confidunt, monitos eos esse volo, pedam referant neque tempus pretiosum in de perdant singula, quæ de Prolegomeno continentur, repetant, et memoriæ mandent; quicumque enim huic intelligendo penetraverint, audacter affirmare ausim, eos per discursum Ingressus Doctrinæ vix aliquam difficultatem habituros. Quam Doctrinam nos in nonnullas sectiones distinctam proponemus pertractabimus N. S. 72 Erit ergo

Sectio

SECTIO I

De Primis Quantitatum Integrorum Calculis.

CAPUT. I.

De Additione Algebraica.

DEFINITIO XIII.

§. 52. Quantitates Algebraicae seu Literales dicuntur Quantitates, quae cumque per Literas Alphabeti (§ 5.) expressae ac denotatae. ex gr. si linea vocetur a aut Numerus 12 vocetur b, quantitates a et b. dicuntur literales seu Algebraicae. Quantitates Algebraicae quid sint?

Scholion.

§. 53. Quemadmodum superius § 31:) dictum est in Algebra literis Numeri quoque, et quidem aliquando per signa + et − interposita jungunt, quo in casu notae etiam Numericae Terminum quantitatis Complexae Algebraicae constituunt, uno in Algebra Numerosa (: i. e. quae notis Numericis et non literis Alphabeti utitur.) integrae quoque Quantitates Complexas notae Numericae absolvunt.

DEFINITIO XIV.

§. 54. Additio Algebraica est quarumcumque et quomodocumque affectarum, quantitatum Algebraicarum, (seu eae Numeris pertinentes sint, seu minus.) in unam Additio Algebraica quid est?

quan

quantitatem Complexam, seu in unum Complexum Algebraicum Collectio, Quod Complexum vocatur Totum vel summa.

Summa seu Totum quid?

Corollarium

§. 55. Quoniam valor quantitatis Complexæ non mutatur, quocunque Ordine scribantur illius Termini (§ 19.) Ejusmodi autem Complexum est Summa ex Additione Algebraica resultans (§. præc.) sequitur: Eandem fore summam quocunque Ordine quantitates Algebraicæ, cum signis suis collectæ scribantur, adeoque Additio quantitatum literalium inclinari sive a quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in Summa omnes quantitates addendas rite collectas esse exprimatur.

+ quæcunque

Scholion

§. 56. Quod de Additione (§ præc.) conclusum est idem Subtractioni quoque, ut et Multiplicationi, ac etiam Divisioni æque convenit (1. In Algebra etenim Subtractio peragitur per Additionem Joce subtrahenda, mutatis signis in contraria, additur Minuendæ, et summa ex his dabit Differentiam seu Residuum, ut infernis (§ 65.) patebit. Unde Differentiam, quoque per solam partium permutationem non variari clarum est. 2° Porro ipsa Multiplicatio non aliud est, quam multiplex Additio (§§ 93. 141 Arithm.) et insuper in fa-

1°)

2°)

ctis

ctis partialibus per variationem combinationis, earundem literarum factum, non variari superius (§. 42.) vidimus factum vero totale e summa ex factis partialibus Additione collata ergo idem quoque per solam factorum partialium permutationem non variari tuto concludetur ex (§ 42.), Unde patet Multiplicationem Algebraicam ~~imitari~~ posse inchoari, a quacumque quantitate Multiplicandi, et per quamcumque quantitatem Multiplicatoris. ut infra patebit. Denique (3º Quotus etiam ex Divisione Algebraica resultans quocumque ordine scribi posse infra docebitur. Ut adeo die etiam arbitrarium sit, operanti Divisionem inchoare a quacumque quantitate Dividendi, et per quamcumque Quantitatem Divisoris. Liquet igitur ex his multo facilioris esse operationes Arithmeticae literalis quam Numerorum; cum in operationibus Arithmeticis, opus sit multis Regulis, solum situm et ordinem concernentibus easque Regulas caute observandas habeat operans, quibus in calculo literali tuto supersedemus. 3º.)

Problema I.

§ 57. Rō. Quantitates Algebraicas quascumque addere.

Reso

Resol. I. Partes addendae retentis singulorum signis, scribantur infra eas, ad quas addendae sunt, ita tamen ut termini, ut singulae literae cujusvis termini, quantum fieri potest, ordinem Alphabeti sequantur, sicque descripti lineae transversa subducantur. Et tum Operationem a sinistris incipiendo.

II. Dispiciatur, quinam partium addendarum termini sint, inter se Homogenei, et si termini similes eodem signo gaudeant, signum eorum commune in locum summae deponatur, tum coefficientes addantur, in unam summam, quae deposita, communes quoque terminorum literae semel acceptae describantur, quin earundem exponentes immutentur.

III. Si vero quantitatibus Homogeneis, seu Terminis similibus signa contraria sunt praefixa. Videndum: Num etiam coefficientes eorundem Terminorum sint inaequales an aequales! Et si quoque inaequales fuerint, tum signum Majoris coefficientis in locum summae deponatur, minor coefficiens a majore subtrahatur et Residuum una cum Communibus Terminis similium literis semel acceptis pro summa Describatur.

IV

IV. Quod si vero termini Homogenei contrarii signis affecti aequales habuerint coëfficientes tunc di termini, una cum signis suis prorsus omittantur.

V. Denique Termini Heterogenei punctim cum suis signis absque ulla Mutatione in loco summae Describantur. Demonstratio. Ratio Reg. II. patet ex (§ 33.) Idem enim Regula non aliud exigit, quam Methodum Compendiariam Scribenti Terminos cum suis signis aliquoties positos. Reg. III. aut ex (§ 14.) et Reg. IV. (§ 16.) continetur. Denique Ratio Reg. V. est, quia Heterogeneae quantitates tamen confundi in unam summam non possunt (§ 123. Arithm. &c.)

Scholion

§. 58. Proba Additionis algebraicae fit ope Subtractionis sequenti Problemati II. pertractandae, dicta Exempla quaedam, quibus praemissae Reg. applicari queant adferemus.

Exempla Additionis Algebraicae.

I. Partes addendae	$3a$	$-$	$4b$	$+$	c
	$2a$	$-$	$3b$	$+$	$2c$
Summa	$5a$	$-$	$7b$	$+$	c

II. Par

II. Partes addend. $\begin{cases} 5a^2b - 3a^2c - 4 \\ -a^2b + a^2c + 3 \end{cases}$

Summa $4a^2b - 2a^2c - 1$

III. Partes addend $\begin{cases} 2a + 8 + 3 \\ -5a + 2 + 7 + 12 \end{cases}$

Summa $-3a + 10 + 10 + 12$ seu $-3a + 12$.

IV. Partes addend. $\begin{cases} 4a^2 + 3b - c \\ ab - 3bd + 2c - 4. \end{cases}$

Summa. $4a^2 + ab + 3b - 3bd + c - 4$.

Corollarium

§. 59. Cum Numeri Puri sint quantitates inter se Homogeneæ (: Arithm. §§. 78, 81.) Quin si inter quantitates addendas plures Numeri seorsim cum signis Algebraicis positi reperiantur, iidem addendi veniunt per Regulas Additionis quantitatum Homogenearum (§. 57.) traditas, vid. (§. prec.) Exempl. II. et III. Si vero tales Numeri cum signis algebraicis seorsim positi addendi veniant, cum quantitatibus Literalibus, quo-

niam

pro omnibus tantum respectu sunt quantitates Aetrogeneae (§. 41.) Series (Reg. V. et §. 57.) vid. Exempl. IV (§. 59.)

Scholion

§. 60. Claritatis gratia adductum (§. 58.) Ursa le Exempl. 1. ad determinatas quantitates applicemus substituendo videlicet loco Literarum primum quoque certas quantitates v. gr. Florenos, Grossos, atque Cruciferos, et mox etiam Numeros. Igitur primum quoque signi-ficet a numerum florenum Perman: b numerum grossum et c numerum cruciferum, erit igitur in Numeris determinatis

Exempl. 1.	$3a - 4b + c$	Algebraice	Flor:	Gros.	Cru.
	$2a - 3b + c$	Numerice	3	− 4	+ 1
			2	− 3	+ 1
Summa.	$5a \quad 7b + 2c$	=	5	− 7	+ 2.

Et idem Arithmetice erit.

Flor.	Grossi.	Crucig.
2	16	1
1	17	1
4	13	2

Deinde idem Exemplum substituendo pro Literis Nu-

me

Numeros. v. gr. sit: $a = 6$ $b = 3 = c = 5$ erit

$$3a - 4b + c = 18 - 12 + 5 = 11.$$
$$2a - 3b + c = 12 - 19 + 5 = 8.$$
$$\text{Summa } 5a - 7b + 2c = 30 - 21 + 10 = 19.$$

Eodem modo et reliqua Exempla substitutis loco Literarum certis quantitatibus v. Numeris rerum cum Doctrinæ declarabuntur.

CAPUT II.

De subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

§. 61. Subtractio Algebraica est operatio per quam invenitur, aut saltem exprimitur, quantitas quæ quam algebraica, ex dibus Differentiam seu Residuum alterius majoris v. simplicis vel Complexæ quantitatis ex gr. si ex quantitate a sit subtrahenda quantitas b, erit Complex. a−b ex dibus Differentiam seu Residuum Be quantitate a (§ 15.)

Scholion

§. 62.

§. 62. Hic quoque non secus ac in Arithmetica Numerica, quantitas ex qua altera subtrahitur Minuenda vocatur, quae vero ex subtrahitur Subtrahenda et tertia quae reperitur Residuum sive Differentia est.

Corollarium.

§. 63. Si ergo Subtractio legitime facta est hic quoque (ut in Arithm. Numer. §. 135.) Residuum sive Differentia addita Subtrahendae, Minuendam ex integro restituat necesse est, alias si nempe Additioni Residui ad Subtrahendam summa Major vel Minor reperiatur ipsa Minuenda, id erit indicio Subtractionem fuisse vitiosam.

Coroll. 2.

§. 64. Igitur sicut Additio ope Subtractionis (. 18.) Ita Subtractio ope Additionis comprobatur.

PROBLEMA II.

§. 65. Prob: Quantitates quascumque Algebraicas subtrahere.

Resolutio I. Quantitas Subtrahenda Minuendae subscribatur ita ut homogeneae (. si adsint.) sibi invicem respondeant, tumque

(II. In quantitate subtrahenda cujusvis

Ter

termini signa mutentur in Contraria: Signum ✝ mutetur in —; et Signum — in ✝ tumque linea transversa subduc.

III. Eadem Subtrahenda jam contrariis signis affecta adventur (per Reg. Robl. 1. §. 54.) quantitati Minuendae, eritque summa ex hac Additione enascens ipsa Differentia seu Residuum praesitum.

Demonstratio. Quantitatem Positivam tollere idem est, ac tantundem Negativum addere est (§. 16.17.) et vice versa Negativam quantitatem tollere est tantundem Positivi addere (§. cit.) atque dum Subtrahenda mutatis signis in Contraria adventur Minuendae, tunc constanter loco Positivi tollendi tantundem Negativi et loco Negativi tollendi, tantundem Positivi adventur Minuendae, et dum Subtrahenda mutatis in contraria signis, fit additio ad Minuendam, reapse instituitur Subtractio. q.e.d.

Seu sic: Rite peragitur Subtractio, quando Differentia seu Residuum tale obtinetur, quod advitum Subtrahendo restituit ex Integro Minuendam (§. 60.) Atqui per praescriptas Regulas obtenta summa, et tale Residuum, quod advitum Subtrahendae ex Integro restituit Minuendum (vid. Exempl. Parad. Sequent. et alia si placet.) Ergo per datas Regulas rite peragitur Subtractio. q.e.d.

Exempla

Exempla Subtractionis Algebraicae desumpta ex Exemplo Additionis (§. 58.)

I.

Minuend.	$5a$	$-7b$	$+2c$	
Subtra-hend.	$2a$	$-3b$	$+c$	
Omnib. Signis —	$-2a$	$+3b$	$-c$	
Residuum	$3a.$	$-4b$	$+c$	

II.

Minuend	$4a^2b$	$-2a^2c$	-1	
Subtra. —	$-a^2b$	$+a^2c$	$+3$	$-2d$
Omnib. Signis +	$-$	$-$	$-$	$+$
Residuum	$5a^2b$	$-a^2c$	$+4$	$+2d.$

III.

Minuend.	$3a$	$+12$	
Subtra.	$2a$	$+8$	-3
omnib. Signis —	$-$	$-$	$+$
Residuum	$-5a$	$+4$	$+3 = 5a + 7.$

IV.

Minuend.	$4a^2$	$+ab$	$+3b$	$-3bd$	$+c-4$
Subtr.	$4a^2$		$-3b$		$+c$
Omnib. Sig.	$-$		$+$		
Residuum		ab	$+6b$	$-3bd$	$+2c-4.$

Scholion 1.

§. 66.

§. 66. Claritatis Gratia Est 1. Sic prosit ut in Additione (§ 60.) Scimus ad quantitates determinatas applicatum ad Libenum. Igitur Significet a. Flor. b. Gros. c. Crucifer. ut in Additionibus. Erit igitur

Minuend.	5a	−	7b	−	2c	= 5 Flor.	− 7 Gros.	+ 2 Crucif.
Subt.	2a	−	3b	+	c	= 2	− 3	+ 1.
Mutt. Sig.	−	+	−	Sen	−	+	−	
Residuum	3a	−	4b	+	c	= 3	− 4	+ 1.

Id est Arithmetice:

	Flor.	Gros.	Crucif.
Minuend	4	13	2
Subtr.	1	17	1
Residuum	2	16	1

Idem vero in Numeris juxta Substitutionem (§ 60.) si sit: a = 6 b = 3 c = 5 erit.

Minuend.	5a	−	7b	+	2c	= 30	− 21	+ 10	= 19.
Subtr.	2a	−	3b	+	c	= 12	− 9	+ 5	= 8.
Mutt. Sig.	−	+	−	−		+	−		
Resid.	3a	−	4b	−	c	= 18	− 12	+ 5	= 11.

Scdo

Scholion. 2.

§. 67. Examen subtractionis fit per Rg. Additionis (§ 57.) adductas, uti jam superius (§§ 63. 64.) indicavimus. Videlicet si quantitati subtrahendae non mutatis signis seu cum signis superioribus expresse addatur Residuum, summa restituet Minuendum ex integro si bona sit subtractio. ex gr: In exempl. 1. Proba instituetur hoc modo:

Minuend.	5a	− 7b	+ 2c
Subtr.	2a	− 3b	+ c
Mutatis sig.	−	+	−
Resid	−3a	− 4b	+ c
Addendae Subtrah.	2a	− 3b	− c
Summa	5a	− 7b	+ 2c

CAPUT III.

De Multiplicatione Algebraica.

§. 68. Multiplicatio Algebraica est ductus quantitatis Algebraicae minus in aliam quantitatem Algebraicam, qui ductus exprimitur per Hypothesim Multiplicationis primo modo (§. 21.) indicatae, id est conjungendo Literas Multiplicatoris, cum Literis multiplicandi juxta Originem Alphabeti sine ullo signo interposito.

Treore

THEOREMA III.

§. 69. Pro. Multiplicatio quantitatis Negativae per Positivam; et vice versa Positivae per Negativam factum producit Negativum.

Demonstratio. I. Multiplicatio quantitatis Negativae per Positivam est ejusdem quantitatis Negativae iterata seu toties facta additio, quoties quantitas Positiva affirmat (§§ 141 142.) Arithm.) Atqui additio ejusdem quantitatis Negativae iterata seu toties facta, quoties quantitas Positiva affirmat, summam producit Negativam (§§ 32 36. Rg. II.) Ergo Multiplicatio quoque quantitatis Negativae per Positivam factum producit Negativum.

Quod erat Prius.

II. C. Juxta Statum factam Demonstrationem Multiplicatio quantitatis Negativae per positivam factum producit Negativum. Atqui idem est factum ut cuilibet factorum ducatur in alterum (§ 148 Arithm. Num.) Ergo etiam eadem quantitas positiva Multiplicata per Negativam factum procedere debet Negativum.

Quod erat Posterius.

THEOREMA IV.

§. 70 Pro. Multiplicatio Quantitatis Positivae per Positivam, aut Negativae per Negativam Factum pro

producit Positivum.

Demonstratio Prioris Partis Multiplicatio seu Ductus unius Quantitatis in alteram est iterata Additio (§ 142. Arithm.) Atque Additio quoque Quantitatis Positivae iterata, seu toties facta, quotiens altera Quantitas Positiva affirmat summam producit Positivam (§ 32. Coll. § 57 Reg. 11.) Ergo Multiplicatio quoque Quantitatis Positivae per Positivam Factum producit Positivum. quod erat Primi.

Pars 2da vidlic: Multiplicatio Quantitatis Negativae per Negativam Factum producit ~~[illegible]~~ Positivum. Sic Demonstratio $-a-a=0$ (§ 16.) evidens est oportere esse Factum quoque ex (: $a-a$:) $x-b$, Duo quilibet Factores Negativi possunt designari per $-a$ et $-b$ (§ 6.) Atque $-ax-b=+ab$. Ergo

Minor probatur. Sit enim $a-a$ ducendum in $-b$ cum sit $a-a=0$ (§ 16.) evidens Quod est oportere esse factum quoque ex (: $a-a$:) $x-b=0$ (§ 149.) Arith.) jam vero pars prior Facti est $+ab$ (: § 69.) per partem II.) Ergo posterior ex $-a$ ducto in $-b$, Debet esse $+ab$, Secus ~~[illegible]~~ factum non esset $=0$, sed $=1-2ab$ (§ 32.) Ergo $-ax-b=+ab$. Quod erat Posterius.

Corollar

Corollarium.

§ 71. Ex his duobus Theorematibus Deducitur Regula pro signis in Multiplicatione Algebraica cautè observanda; Idle nimirum: signa eadem Factorum dant in Facto +, diversa vero −, i. si uterque Factorum habeat signum + praefixum, vel uterque habeat signum −, tum in facto semper ponendum est signum +; si vero unus Factorum habeat signum + alter signum − in Facto scribendum est signum −.

Problema III.

§ 72. Prob. Quantitates Algebraicas quasvis inter se Multiplicare.

Resolutio. 1. Scribatur Multiplicatorum infra Multiplicandum, ductaque linea transversa, per singulos Terminos Multiplicatoris, multiplicentur quilibet terminus multiplicandi, ita quidem ut Operatione, sive a Dextra, sive a sinistra (: ut nos faciemus :) in Quadrata, in cujusvis termini Multiplicatione, per alterum sedula habeatur ratio, signorum coefficientium, Literarum & Exponentium. Itaque esto

II. De

II. Reg. de signis. Signa eadem Factorum dant in signo + et contraria vero in —.

III. Reg. de Coefficientibus, coefficientes Multiplicatoris et multiplicandi inter se multiplicentur, et Factum eorum post signum juxta Reg. II. praecedentem Descriptum, Dextram versus adjungatur.

IV. Pro Literis et Exponentibus (I. Literae dissimiles Multiplicandi et Multiplicatoris retentis singularum Exponentibus, secundum Alphabeti ordinem jungantur, nullo signo interposito (II. Si vero Litera quapiam in utroque Factore reperiatur, ea in Facto semel describatur, et Exponentes ejus, qui sunt in ambis Factoribus addantur in unam summam, Idque summa adscribatur ipsi in Facto pro Exponente

V. Denique peracta utriusque Multiplicatione facta partialia juxta Regulas Additionis (§ 57. Colligantur in unam summam, et Summa Idee erit ipsum Factum totale.

Demonstratio. Reg. I. Demonstratione non eget, Regula secunda eadem est quae (§ 41.) Reg. V. Jabetur demonstrata (§ 54.) Reg. IV. autem, quoad partem priorem constat ex (§. 21.) est enim Hypothesis Multipli

tiplicationis primo modo 1. c. indicare. Pars vero Posterior ejusdem Regulæ sic probatur, ex gr. sit a^2 Multiplicandum per a^3. Est $a^3 = aa$ et $a^3 = aaa$ (§. 35.) ergo a^2 multiplicare per a^3 idem est ac aa, multiplicare per aaa, Atqui $aa \times aaa = aaaaa$ (per priorem partem Regulæ IV.). ergo in $a^2 \times a^3 = aaaaa$. Jam vero est $aaaaa = a^5$ (§ 35.) ergo si a^2 multiplicetur per a^3, factum est a^5 q. e. d.

Denique Regula III. sic Demonstratur: sit ex. gr. $2a$, Multiplicandum per $4b$, erit tum factum æquale $= 8ab$. Nam si ponatur $2 = m$, et $4 = n$, erit tum per Reg. IV. partem 1) $2a \times 4b = mn\,ab$ loco mn substitui pro 8 (per Axioma Æqualitatis) sicque erit $2a \times 4b = 8ab$. quod. e. d.

Exempla Multiplicationis Algebraicæ.

1.	Mult.	$a + b - c$	Factores
	Mult.	$a - b$	
	Facta partialia	$a^2 + ab - ac$	
		$- ab + ac + bc$.	
	Factum tot.	$a^2 - ac - b^2 - bc$.	

II. Mult.

II.

Multipl. $2a + 3b + c$
Mult $2a - 2b - c$ } Factores

Fact. part. $4a^2 + 6ab + 2ac$
$- 4ab - 6b^2 - 2bc$
$- 2ac - 3bc - c^2.$

Fact. Tot. $4a^2 + 2ab - 6b^2 - 5bc - c^2.$

III

Multip. $2ab + 3b^2c + 3cd^3$
Mul. $2ab - 2b^2c - 3cd^3$ } Factores.

Fact. P. $4a^2b^2 + 2b^2c + 6abcd^3$
$- 4ab^3c - 6b^4c^2 + 6b^2c^2d^3.$
$- 6abcd^3 - 9b^2c^2d^3 - 9c^2d^6.$

Fact. T. $4a^2b^2 + 2ab^3c - 6b^4c^2 - 15b^2c^2d^3 - 9c^2d^6.$

IV.

Mdus $am + bx - 2cn$
Multor. $2am + 3b$

Fact. P. $2a^2m + 2ambx - 4a^mc^n$
$+ 3amb - 3bx + i - 6bc^n$

F. Tot. $2a^2m + 2a^mbx - 3a^mb - 4a^mc^n - 3bx + i - 6bc^n$

Scholion I.

§ 73, Pro illustranda Multiplicatione Algebraica Exempl. 1. §. prec. sic ad numeros applicatum ex Zibebinum. Sit igitur $a = 8 - b = 4c = 2$ Itaque erit

Alg

Algebraice		Numerice.
$a+b-c=8+4-2$	$=$	10
$a-b \quad =8-4$	$=$	4
$a^2+ab-ac=64+32-16$		Factum Multipl. Sctt
$-ab-b^2+bc=-32+16+8$		10. x 4.
$a^2-ac-b^2+bc=64-32-8=$		40.

Scholion. 2.

§. 74. Quemadmodum de Multiplicatione Numerica diximus (Arith. Num. §. 165.); Ita Algebraice Multiplicationis Examen per Divisionem Algebraicam (ap. sequenti tractandam) obtinetur Sctt legitima e Multiplicatio quoque Algebraica, si Facto per unum Factorem Diviso, alter Factor obveniat pro Quoto, Atque id sine eius Regulas superius (§. 73.) allitas rite peragi Multiplicationem Algebraicam, si enim factum per eas Regulas obtentum dividatur per unum factorem, pro quoto prodibit, alter Factor, ut periclitanti ram in aliis, quam Etiam in praeallegatis (§. cit.) exemplis patebit.

CAPUT.

CAPUT. IV.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

§. 75. Divisio Algebraica est Productifice Facti alicujus Algebraici in suos Factores Resolutio. Hinc dividere Algebraice est dato Facto, atque Factore uno, inveniri Factorum alterum, ex. gr. Dato Facto algebraico abc, tanquam Dividendo. Datoque uno Factore a, tanquam Divisore inveniri Factorem alterum bc, tanquam Quotum, qui Factores a et bc, in se ducti produxerunt Factum abc §. 73.

Corollarium

§. 76 Hinc liquet Divisionis quoque Algebraicae Examen fieri debere per Multiplicationem Algebraicam, Sed legitima est Divisio Algebraica, si Quotus obtentus ductus in Divisorem restituat Dividendum, uti etiam de Numerica Multiplicatione diximus (Arith. Num. §. 162)

THEOREMA V.

§. 77. Prob. 1 Quantitas Negativa divisa

sa per Positiuam, dat pro quoto Quantitatem Negatiuam. Diuisa vero per Quantitatem Negatiuam pro quoto dat quantitatem Positiuam.

Demonstrão, Quantitatem Negatiuam Algebraice diuidere, est eandem tanquam Factum Algebraicum in suos Factores resolue, ~~i~~ datâ ipsâ quantitate Negatiuâ, relut Facto diuidendo, datoque uno eiusdem Factore, tanquam Diuisore, alterum Factorem tanquam quotum inuenire (§ 75.) Atque Facti cuiusuis negatiui, Factor unus e Positiuus, et alter negatiuus (§ 69.); Ergo si Diuidendi quantitatis negatiui, Diuisor fuerit Factor eiusdem Positiuus, quotus debebit esse alter eius Negatiuus; Ex adverso autem, Diuisore Factore negatiuo existente, quotus erit Factor Positiuus. Sic v. gr. si $-a$ ducatur in $+b$ Factum est $-ab$. (§§. 68. 69.) Ergo si $-ab$ diuidatur per $+b$. quotus esse debet $-a$ si vero $-ab$ diuidatur per $-a$, quotus esse debet $+b$ (§ 75.) h. e. quantitas Negatiua Diuisa per Positiuam, quotum dat negatiuum, Diuisa vero per quantitatem Negatiuam, quotum dat Positiuum q. e. d.

2us Demonst.

Theore

THEOREMA VI.

§. 78. Prop. Quantitas Positiva divisa per Negativam, pro quoto dat quantitatem Negativam; Divisa vero per Positivam, dat pro Quoto quantitatem Positivam.

Demonstrao: Divisio quantitatis Positivae, est quasi relatio Facti Algebraici in suos Factores Resolutio (§. 75.); Atque Facti cujusvis Positivi factores vel ambo sunt Positivi, vel ambo negativi (§. 70.) Ergo necessario in Divisione quantitatis Positivae qualis est Divisor, quotus quoque esse debet, s. e. si Divisor fuerit negativus, et quotus negativus erit; illo vero Positivo existente, quotum quoque Positivum esse oportet. quod e. d.

Coroll.

§. 79. Ex his duobus Theorematibus (§. 77 78.) apparet quod et in Divisione valeat Regula: Signa eadem (: puta Dividendi et Divisoris :) dant in Quoto Signum + diversa vero —.

Problema IV.

§. 80. Prop. Quantitatem Algebraicam monomiam, per quantitatem aliam incomplexam, seu

mo

monomiam dividere.

Resolvo. Dato Dividendo descripto, ad partem ejus Sinistram /: uti § 166 Regulae in Artis Numeri diximus :/ Scribatur dimidia Lunula Cornibus Sinistram versus Spectantibus in quam collocato Divisor, pro Quoto vero ad partem dextram Dividendi Scribatur alia Lunula cornibus ad dextram Spectantibus.

2do: Inspiciatur Num in Dividendo continetur totus Divisor tanquam unus e Factoribus Dividendi et quidem /: 1mo Si non continetur non est tantum tentanda Divisio utpote impossibilis :/ § 75 :/ Sed indicanda duntaxat videlicet Scribendo pro Quoto Divisorem infra Dividendum interjecta linea, cum haec Scribendi Ratio semper indicet quantitatem Superiorem esse divisam per Quantitatem inferiorem :/ § 24 :/ Sic Divisor sit CD dividendus AB Quotus hoc modo exprimendus est $\frac{ab}{cd}$ Notabene Saepe tamen evenit /: 2do :/ Ut tametsi totus Divisor non continetur in Dividendo, tanquam Factor aliquae tamen literae una vel plures communes /: sino Divisori et Dividendo, ut sit Divisor sit BC, et Dividendus AB quo casu in exprimendo quoto compendio

est.

locus Ex quo in Exemplo nunc memorato Quotus est $\frac{ab}{bc}$ qui Compendiosius exprimi potest Hoc modo $\frac{a}{c}$ minimum communem utrique Literam b poenitus negligendo juxta Art. 30. at de hujusmodi Compendiis in Theoria fractionum Algebraicarum Scilicet sequentibus erit agendi locus. Si vero (: 3tio :) In Dividendo totus Divisor tanquam unus factor contineri deprehendatur id erit indicio possibile esse Divisionem Actualem Art. 75. in qua instituenda operatio sese extendat ordine ad haec quatuor videlicet ad Signa, ad Coefficientes, Exponentes, Literas, adeoque ante omnia

(iii. Quod Signum, pro toto praefigendum, Idem generalium Regula e praeceptis debenda: Signa eadem dant pro Quoto Signum +; Diversa vero − (§ 79.) h.e. si Divisor et Dividendus eodem Signo gaudeant, sive ambo Positivo + sive ambo Negativo − utroque in casu pro toto debebit scripto Signum + (: quod tamen Quantitati Positivae, si Idem sit solitaria vel ad initium quantitatis Complexae fere nunquam praefigitur, sed a subintelligitur (§ 10.) Quod si autem Divisor

sor et Dividendus contraria signa habeant id est alter + et alter −, tum quoto signum − affigi debet ex. gr: si + ab per + b, vel − ab per − b dividatur pro quoto obtinet + a; at si − ab per + b; vel + ab per − b dividi debeat, Quotus est − a.

IV.ta Reg. Pro coefficientibus. Per coefficientem divisoris dividatur coefficiens Dividendi Arithmetice. juxta (§ 166 Arithm. Num:), siquidem id sine Residuo fieri potest. ex. gr: si per 2a dividi debeat 6ab: Quotus est 3b (§ 45.), quum 6ab sit factum ex 2a multiplicando per 3b (§ 42.). Quod si autem coefficiens dividendi neque exacte dividi per coefficientem Divisoris, indicetur, tantummodo eorundem divisio in Quoto, scribendo coefficientem Divisoris infra coefficientem Dividendi lineola interjecta. sic v. gr: per 3a dividi debeat per 2ab. Quotus est $\frac{2}{3}$b; aut si per 2a, dividatur 3ab. Quotus erit $\frac{3}{2}$b.

V. Regula. Pro Literis et Exponentibus

Literæ una v. plures Divisori et Dividendo communes; si (§ 10.) Diversos habeant Exponentes, tunc Litera communi pro Quota semel posita Exponens

Di

Divisori subtrahatur arithmetice ab Exponenti Dividendi, atque Residuum ex hac subtractione resultans ascribatur pro Exponente Literae communi pro Quoto positae ex. gr. $a^5 : a^2 = a^3$; Nam aaaaa Divisum per Unum Factorem aa, dabit pro Quoto alterum Factorem aaa (§ 75.) Jam vero aaaaa $= a^5$; aa $= a^2$; et aaa $= a^3$ (§ 35.) Ergo etiam $a^5 : a^2 = a^5$.

Quod si autem (2do.) quismodi Literae Divisori et Dividendo communes eundem habeant Exponentem, tunc (alijs Literis in Dividendo deficientibus.) pro quoto Unitas, omnistâ literâ communi sola scribatur ex gr. $a^4 : a^4 = 1$. Ratio est: quod si a^4 dividi debeat per a^4, quotus erit a^0 (per priorem partem Regulae hujusce jam demonstratam.) Atque $a^0 = 1$ (Etenim quantitas omnis habens pro Exponente Zerum Aequalis Unitati ut infernis Sat III. § 115 demonstrabitur.) Ergo $a^4 : a^4 = 1$.

Denique 3o si in Dividendo praeter Literas eidem et Divisori communes, aliae etiam reperiantur, hae invariatae cum suis Exponentibus, pro quoto scribantur, et quidem ita ut, ubi Quotus

e Li

+ juxta Pledertem Mundanorum 1. Sed tenta est litera communis =

Literis communibus, + habens pro Exponente Differentiam Exponentium Dividendi et Divisoris tunc Quoto Literæ illæ Dividendi, quæ non adsunt in Divisore jungantur, sine ullo signo interposito. Sic. v.g. si a^5b debeat dividi per a^2, erit Quotus a^3b (§ 75.) quem a^5b, sit productum $a^2 \times a^3b$ (§ 72 Reg. IV.)

Ubi vero Quotus e literis communibus æqualium Exponentium (: juxta præc. Num. 2.) emersus ~~e Unitas~~ e Unitas, tunc ejusmodi Literæ, quæ præter communes, in Dividendo reperiuntur scribantur pro quoto omissa Unitate e Literis communibus obtenta, ex. gr. e a^4b diviso per a^4 Quotus foret $= ib$; ex demonstratis.) sed quia $ib = b$, (§ 34.) Quo loco quoti $= ib$ solet omissa Unitate scribi $= b$.

Demonstratio Divisionis Algebraicæ vide peragitur, ubi invenitur, quotus qui ductus in Divisorem ex integro restituit Dividendum (§ 76.) Atque per illas statim Regulas Resolutionis talis obtinetur quotus, qui ductus in Divisorem ex integro restituit Dividendum, ut periclitanti

pa

periclitari patebit, & per easdem Regulas vere pera-
gitur Divisio Algebraica. q. e. d.

PROBLEMA V.

§. 81. Prob. Quantitatem algebraicam Com-
plexam, per Incomplexam dividere.

Resolutio. I. Datae quantitates; videlicet Di-
visor, et Describentur juxta Reg. I. in praecedenti
Resolutione (§ praec. 80.) datam, apposita etiam
ad Dextram Dividendi, pro quo dimidia Lunula.
Deinde (II. Dispiciatur, in quonam Dividendi Ter-
mino continetur totus Divisor, tanquam unus Factorum
ejusdem termini, et si in aliquo continetur, deprehen-
dendatur, ij Dividendi terminus per Divisorem divi-
datur, juxta Regulas (§ praec. 80.) allatas, quo-
tus repertus scribatur post Dividendum in Lu-
nulam; tunc

(III. Quotus iste multiplicetur per Divisorem
et Factum ex hac multiplicatione enatum, sibi Ho-
mogeneo, dividendi termino subscribatur, atque
ex hoc algebraice subtrahatur.

IV. Id quod peracta hac subtractione

e Di-

e Dividendo integro remanebit, tanquam primum Residuum rursus dividatur, eodem plane modo, quo ante Dividendus, Jaque methodo tamdiu continetur Operatio donec in Zil super sit e Dividendo (vid Exempl. 1. §. 83.)

V. Quodsi vero in Dividendæ quantitatis complexæ neutro Termino continetur totus Divisor in Complexus tanquam Factor, tunc neque tentetur Divisio, sed indicetur duntaxat subscripto Divisore infra Dividendum, integrata linea (vid Exem. 2. §. 83.)

Demonstratio. Hujus quoque est eadem quæ præcedentis Resolutionis (§ 80.)

Problema VI.

§. 82. Pro. Quamcumque Complexam, sive Polynomiam Quantitatem Algebraicam per aliam Complexam dividere.

Resolutio. 1. Divisore, Dividendo, locoque Quoti juxta Reg. 1. Resolutionis (§ 80.) Descriptis, Ze quoque ante omnia Despiciatur, num primus aut quivis alius Divisoris terminus totus tanquam Factor continetur in aliquo Dividendi termino, Et si nullus reperiatur terminus Dividendi, in quo

ullus

ullus Terminorum, Divisoris plus e continetur, tunc Divisio tanquam impossibilis Forma Fractionis debebit exhiberi (vid Exempl. III. §83.

(II. Si vero terminus Positionis Divisoris, aut quivis alius in alio Dividendi termino plus e contineatur, id membrum Dividendi, per illum terminum Divisoris juxta Regulas superius (§80.) allatas, dividatur quotusque scribatur in locum suum post Dividendum.

(III. Per Quotum tum inventum, ut in Arithmetica Numerica (§169 Reg II.) dictum e multiplicetur totus Divisor, atque factum suscriptum Dividendo, ab eo subtrahatur Algebraice. Ratio est. quod ex praecto totus Divisor toties tollitur a Dividendo, quoties e Unitas in Quoto inventa, adeoque divisio per totum Divisorem fit (§156.) Arithm. Num.) Proinde, si ex hac subtractione nullum remaneat Residuum indicio id praeactam esse totam Divisionem erit (vid Exempl. IV §83.)

(IV. Quod si vero post subtractionem statim memoratam, remaneant termini unus v. plures in Dividendo II omnes simul pro primo Residuo habentur, ac proinde cum eo Residuo, tanquam secundo

Di

Dividendo, repetatur eadem, quæ primo, operatio, tamdiu per sequentia quoque (§. si forent.) Residua continuanda, donec nihil amplius restet e Dividendo (vid. Exempl. V. § 83.)

V. Si autem dum taliter continuatur in Residuis successivis, Divisio, adiectatur inter operandum subtractione ejus Facti, quod enascitur e Quoto in Divisorem ductio, non nimium numerum Terminorum in Dividendo, sed potius incipere augeri id erit plerumque indicium Divisorem absque Residuo peragi non posse. Quare Residui (in cujus tentata Divisione Algebraica, numerus Terminorum Dividendi decrescentium modo incipit augeri.) Ignis in quam Residui Divisio tantummodo indicari debet in Quoto Divisore infra idem Residuum Dividendi, interjecta linea subscripto (vid. Exempl. VI. et VIII. §. 83 sequ.)

Demonstratio est eadem, quam superius (§. 80. attulimus.

Sectionis I.

§ 83 Pro illustrandis Regulis Resolutionum Problematis IV^ti (§ 80. præbuimus Exempla in ipsis Regulis, quare in sequenti Paradigmate

Regu

Regulas dumtaxat Resolutionum Problematum VI et V. (§§ 81. et 82.) expositas illustrare intendimus, et quidem adferentes in Numeris IV et V. Exempla in Multiplicatione superius (§. 12) adducta

Exempla Divisionis Algebraicae

I.	Div. $2ab^2$.	Dividendus. $6a^2b^6c - 2ab^2d^3f$.	Quotus. $= 3ab^4c - d^3f$.
II.	Divisor cd	Dividendus $ab + f - g$	Quotus $= \frac{ab + f - g}{ad}$
III.	Div. $d - f$	Dividendus $2a + b^2c - bg$	Quotus. $= \frac{2a + b^2c - bg}{d \quad f}$.
IV.	Divisor. $2a^3 - c$	Dividendus $6a^3b^2d - 3b^2cd$	Quotus $= 3b^2d$
V.	Divisor. $a + b - c$	Dividendus $a^2 - ac - b^2 + bc$	Quotus $= a - b$
		Aliud	
	Divisor $2a - 2b - c$	Dividendus $4a^2 + 2ab - 6b^2 - 5bc - c^2$	Quotus $= 2a + 3b + c$.

Aliud

Aliud.

Div. Dividendus Quotus

$2ab+3b^2c+3cd^3 \,)\, 4a^2b^2+2ab^3c-6b^4c^2-15b^2c^2d^3-9c^2d^6 \,(= 2ab-2b^2c-3cd^3$

Aliud.

Div. Divid. Quotus

$2a^m-3b : \,)\, 2a^{2m}+2a^mb^x-3a^mb-4a^mc^n-3b^{x+1}+6bc^n \,(= a^m+b^x-2c$

VI. Div. Divid

$3ab-2b^3c^2+5 : \,)\, 6a^m+1b^2+10a^mb-9abcd^n-15cd^n+12a^3bc$
$-4a^mb^4c^2+20a^2c+6b^3c^3d^n-8a^2b^3c^3-12a^2b^4.$

Quotus.

$$(= 5ab^m-12b^3c-\frac{6a^mc^3}{3ab-2b^3c^2+5}.$$

VII. Divis. Divid.

$2a^2c^2-3a^nb^m \,)\, 10a^3b^mc^2-24a^2b^3c^3-15a^n+1b^{2m}$
$+36a^nb^m+3c-6a^mc^3.$ Quotus. $(= 5ab^m-12b^3c$

$$-\frac{6a^mc^3}{2a^2c^2-3a^nb^m}$$

Solution. 2.

§. 84. Hactenus de primis Quantitatum integrarum Algebraicarum calculis, qui sunt fundamenta

mentum Omnium sequentium Operationum Algebraicarum, quicunque igitur sine facilitate tractant, Jos quatuor primos calculos alterius progredimentantur, Jos omnes monitos esse solo, quod mutent consilium, seq; in Jis quatuor calculis saeculo exerceant aliquin saepe saepius ad nos ex operationibus reliquis redire cogentur calculos, propterea quod Si calculi omnes reliquas operationes Algebraicas ingrediantur.

SECTIO II.

De Fractis Quantitatibus Algebraicis

CAPUT I.

De natura atq; Transformationibus Fractionis quantitatum Algebraicarum

Definitio XVIII.

§. 85. Fractio ingrediatur Quantitas, quae integre cujuspiam seu totius (: quod per modum unius consideratur :) unam v. plures partes significat, qualis quantitas si literis Alphabeti exprimatur erit Fractio quantitatis Algebraicae seu Quantitas Algebra

Fractio Algeb:

gebraica fracta. Appothesis IX.

§ 86. Exprimitur autem sic designatio, Fractio Algebraice, duabus Quantitatibus Literalibus, interjecta linea transversa, sive videlicet in modum $\frac{a}{b}$ quarum superior Numerator inferior vero Denominator Fractionis appellatur. Ideo quod Ze exprimendo omnes partes in quas dividi concipitur Totum illud, de cujus Fractione sermo est, per Ze declaret, cujus nam speciei Denominatio, quæ sunt partes illæ, quas Fractio in se continet. Ille vero indicet, qui nam ejusmodi partes Fractio valeat, id est numerum partium totius, quas Fractio quæ Epiam significat (Conf. Arithm. Num. § 190.) Sedotion.

Denominator

Numerator

§. 87. Si quis conferat (§. prae 85 et 86 cum Arithm. Num. §§. 186, 189 190.) illico facile animadvertere poterit. A Fractione Numerorum vulgarium Fractionem Quantitatum Algebraicarum in eo tantummodo differe, quod in illa quantitates Fractæ notis numericis, in hac vero literis Alphabeti exprimantur, designentque, ut adeo quæ (in

Arith

in Arithm. Num. Sectio II. §. 186 Seqq. de Fractionibus Numerorum diximus, ea a potiori omnia, Si quis locum inveniant, quae tamen omnia Si repetere volumus, reddimus eorum, qui in illis jam sunt exercitati evitaturi, verum ea ut ex iis quae maxime necessaria judicamus, Si loci quis in gratiam Tyronum breviter saltem numerabimus.

Definitio XIX.

§. 88. Duae v. plures Fractiones, quae sub eodem Denominatore comparent Homogeneae vocantur Fractiones Homogeneae. In earum Denominatores sunt diversi dicuntur Heterogeneae ex. gr. $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sunt Homogeneae $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sunt Heterogeneae. Heterogeneae

PROBLEMA VII.

§89. Pro Fractiones Heterogeneas reducere ad Homogeneas invariato valore.

Resol. 1. Fractionum Reducendarum, numerus quisque Numerator multiplicari per omnes Denominatores Fractionum reliquarum, emanante vidlet proprio Denominatore, erunt quae Producta Numeratores Fractionum Reductarum.

II. ut

II. Ut Communis Omnium Determinator obtineatur multiplicatur per Omnes Denominatores Fractionum Reducendarum, erit quoque Productum Omnium Denominatoris Communis Denominator, Omnium Fractionum Reductarum

Demonstratio. Sint Fractiones Reducendæ v. gr. prima $\frac{a}{b}$ secunda $\frac{c}{d}$ tertia $\frac{f}{g}$ et quarta $\frac{m}{n}$ erunt reducta per datam Resolutionem, prima $\frac{adgn}{bdgn}$ secunda $\frac{bcgn}{bdgn}$ tertia $\frac{bdfn}{bdgn}$, quarta $\frac{bdgm}{bdgn}$, atque ideo Fractiones sunt Homogeneæ (§ pr.) Est quoque per (§ 203 Arithm. Num.) Prima $\frac{adgn}{bdgn} = \frac{a}{b}$, secunda $\frac{bcgn}{bdgn} = \frac{c}{d}$, tertia $\frac{bdfn}{bdgn} = \frac{f}{g}$; quarta $\frac{bdgm}{bdgn} = \frac{m}{n}$ Ergo Datam Resolutionem Fractiones Heterogeneæ ad Homogeneas mariato valore reducuntur. quod. e. d.

Problema VIII.

§ 90. Prob. Datam quamvis Fractionem manente valore ad minores terminos reducere.

Resolutio. Datæ Fractionis tam Numerator quam etiam Denominator dividatur per quantitatem eandem, in per literas utriusque cum Numeratori, tum Denominatori communes, et Quotus dabit Fractionem

nem, quae sitam minoribus terminis expressam.

Demonstrao. Fractio ad minores terminos re-
ducenda sit $\frac{ac}{bc}$, cujus sitam numerator ac quam etiam de-
nominator bc, dividatur per eandem quantitatem tertiam c.
utriusque communem, erit Fractio nova ex quotis orta
$\frac{a}{b}$ atque $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{c}$ (§§ 29. 30.) quod datam Resolu-
tionem Fractio data ad aliam minoribus terminis expressam
mutato valore, sicque, vice reducitur. q. e. d.

CAPUT. II.

De quatuor Algoritmis Quantitatum Algebrai-carum Fractarum.

Problema IX.

§. 91. Prob. Fractiones quasvis Algebra ice expressas addere.

Resolutio. 1. Si Fractiones addendae sunt Ho-
mogeneae (obseruatis Regulis, quas de Additione quan-
titatum Algebraicarum pro signis coefficientibus lite-
ris et exponentibus superius §§ 57.) ordinemus, addan-
tur ac numeratores, et earum summae tanquam numera-
tori

ratori, pro Denominatore Denominatio communis subscribatur vid. Exempl. 1.

II. Si Fractionis Addendæ sunt Heterogeneæ reducuntur primis ad Homogeneas (juxta §. 89) tunc reductæ addantur, juxta Reg. 1. Ejusdem Resolutionis. vid. Exempl. 2.

Demonstrat. Ratio Reg. 1. est quod valores particules fractionum Homogenearum habentur per solos Numeratores (§ 199 Arithm. Num.), adeoque Fractio ejusdem Denominationis, habens pro Numeratore Summa Omnium Numeratorum Fractionum Homogenearum (qualis per Reg. 1. obtinetur.) continet valores particules omnium, ergo per eandem Regulam recte fit Additio Fractionum Homogenearum. Reg. II. vero Ratio est, quod quantitates particules Heterogeneæ in unam summam cogi non possunt (§ 123 Arithm. Num.)

Exemplum 1. Sint Addendæ $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ erit summa $\frac{a+c}{b}$.

Exempl. II. Sint Addendæ $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ erunt Reductæ $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$ §. 89. et sic additæ $\frac{ad+bc}{bd}$ vel sine Reductione simpliciter exprimentur $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Problema

Problema X.

§. 92. Rō Datam Fractionem Algebraicam ab altera Subtrahere.

Resol. I. Si Fractiones sint Homogeneae habentes Numeratores quoque similes seu Homogeneos, tum Fractionis Subtrahendae Numerator met 2do supernis (§ 65 indicata subtrahatur a Numeratore Fractionis Minuendae, i. e. tum ille mutato in Contrarium suo signo, Algebraice addatur, atque Residuo taliter obtento subscribatur communis Denominator, ideoque nova Fractio erit quaesitum Residuum. vid Exem. II.

Reg. II. Si vero Fractiones Homogeneae habeant Numeratores Heterogeneos, tum Numeratori Fractionis minuendae pingatur Numerator Subtrahendae Fractionis per signum subtractionis atque differentiae Numeratorum taliter indicatae communis Denominator subscribatur, haec nova Fractio erit quaesitum Residuum.

III Si denique Fractiones ipsae sint Heterogeneae prius reducantur ad Homogeneos (§ 89.) et deinde poterunt earum Numeratores tractentur vel per praescriptam statim Regulam I. vel per Reg. II. vid Ex. III.

Demonstratio. Rō Reg. III. est, quod quantitates Heterogeneae, nec addi sibi invicem, nec a se invicem subtrahi queant (§. §. 123. et 134. Arithm. Num.) et tam ob Rationem, etiam in casu Reg. II. subtractio exhibetur, et non pergitur. Denique ra-

onem

Rationem Reg. I. partium (§ 199. Arithm. Num.) partium vero (§ cit. 65.) Superius exposuimus.

Exempl. I. Sit a Fractione $\frac{5a}{b}$ subtrahenda, Fractio $\frac{2a}{b}$ erit Differentia: $\frac{5a-2a}{b} = \frac{3a}{b}$.

Exempl. II. Sit a Fractione $\frac{a}{b}$ subtrahenda Fractio $\frac{c}{b}$ erit Differentia $\frac{a-c}{b}$.

Exempl. III. Sit a Fractione $\frac{a}{b}$ subtrahenda $\frac{c}{d}$ erunt Reductæ per (§. 89.) $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$ et hinc Differ. per Reg. II. Ejus Problematis erit $\frac{ad-bc}{bd}$ vel sine Reductione in $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

Problema XI.

§. 93. Prob: Fractiones Algebraice expressas inter se multiplicare.

Resol. Numeratores Datarum Fractionum inter se et Denominatores pro 2 inter se multiplicentur juxta Reg. de Multiplicatione Algebraica superius (§ 72.) expositas, atque Factum Numeratorum pro Numeratore Factum vero Denominatorum pro Denominatore producti scribantur.

Demonstratio. Ratio Ejus Resolutionis datur (in Arith. Num.) § 239.) sic v. cum Fractio

res

ones dare $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ inter se multiplicare dant productum $\frac{ac}{bd}$

Problema XII.

§ 94. Rō. Fractionem Algebraicam expressam per aliam dividere.

Resol. 1. Fractionis Dividendae Numerator multiplicetur per Denominatorem Fractionis Divisoris Algebraicae juxta § 72.) atque factum est Dj

II. Fractionis Dividendae Denominator, multiplicetur per Numeratorem Fractionis Algebraicae juxta (§ 72.) atque factum est Dj scribatur pro Denominatore Quoti.

Demonstrationem Jugis quoque Problematis exposuimus (§ 245.) in Arith Num.) Exemplum sit Divisor $\frac{a}{b}$ & Dividendus $\frac{c}{d}$ erit Quotus $\frac{bc}{ad}$.

§ 95 Examen operationum Algebraicarum in Fractis quoque ut in integris, eodem modo, quo in Numeris peragitur minimum Additio per Subtractionem, & Ille per illam, Multiplicatio vero Divisionem & vice versa Divisio per Multiplicationem debet examinari sic v. gr. Bona e Additio; si unum Addendum sublatum a summa minora, relinquat

prae

Hisce partem alteram addendum (§ 125 / Arithm. R.) Et Bona est Subtractio Algebraica; si Residuum sive Differentia addita Subtrahendae ex integro restituat (Dividendum) Minuendum (§ 135. Arithm. R.) Non secus: Bona est Multiplicatio Algebraica etiam in Fractis, si productum Divisum per unum factorem det pro quoto alterum Factorem (§ 145 Arith. Num.) Denique Bona est Divisio quoque Algebraica Factorum, per quam inventus est quotus, qui ductus in Divisorem, ex integro restituit Dividendum (§ 162 Arith. Num.) Ad has igitur Regulas examinentur necesse est, Operationes quoque juxta Resolutiones a nobis de Additione, Subtractione, Multiplicatione et Divisione Fractionum Algebraicarum datas peragendae, et si operationes ipsae ad dictas statim Regulas examinatae, iis conveniant, de quo nihil dubitamus, concludendum erit Resolutiones quoque earundem operationum a nobis praecedentibus Proxime quatuor Problematibus traditas accuratas esse. Sed haec de Fractionibus Quantitatum Algebraicarum dixisse sufficiet.

Sectio

SECTIO III.

De Quantitatum Potentiis & Radicibus.

CAPUT I.

De Quantitatum Potentiis & Radicibus in Genere.

DEFINITIO XX.

§. 96. Potentia v. Dignitas. Quantitatis cuiuspiam vocatur Factum, quod oritur, si ea quantitas per se ipsam semel v. saepius multiplicetur. Ex. gr. si A per A multiplicetur, erit Factum aa vel A^2 Potentia sive Dignitas. idem est in Numeris sic 3x3 dat Factum 9. quod est Potentia &c. Potentia quid?

DEFINITIO XXI.

§ 97. Ipsa Multiplicatio quantitatis cuiusvis per se ipsam vocatur eiusdem quantitas, Erectio sive Elevatio ad Potentiam, Quantitas vero illa ex qua per elevationem, vel fieri sive vel facta est Potentia sive quae per se ipsam multiplicata producit factum seu Potentiam vocatur Radix vel latus Potentiae. Elevatio ad Potentiam. Radix quid?

aut etiam prima Potentia. Sic a sive a^1 est Radix de Potentia a^2 vel a^3, item 3. e Radix de 9.

Scholiori 1.

§ 98. Radicem ita appellari propter similitudinem seu Metaphorice, unicuique satis e evidens; eadem vero prima Potentia vocatur relate ad Potentias, secundam tertiam et reliquas quæ omnes e primæ Potentiæ per seipsam Multiplicatione oriuntur; Quantitas enim aliqua; si semel duntaxat multiplicetur per seipsam ob elevari ad secundam Potentiam. Sic a Radix multiplicata per seipsam semel, 3. e: a x a dat Productum a^2 (§ 72.) quod ob secunda Potentia sive eadem quantitas sive Radix a, bis per se ipsam multiplicetur, id est, si Factum est prima Multiplicatione acquisitum $= a^2$ rursus multiplicetur per radicem a, tunc dicetur elevari per Potentiam tertiam dabit enim Factum $= a^3$ (§ 72.) quod appellatur Tertia potentia et sic pono, Radix ter per seipsam sive Tertia Potentia per Radicem multiplicata dat Factum $= a^4$ ie Potentiam 4tam ⚹ ⚹ ⚹ Scho

Scholion. 2

§. 99. Ex Analogia ad Dimensiones Corporis solet quoque Secunda Potentia, ut a^2, vocari Quadratum quantitas a, et Potentia Tertia; ut a^3 Cubus ejusdem Quantitatis a, Potentia vero quarta ut a^4 alias dicebatur etiam Quadrato-quadratum, et a^5 Quadrati Cubus a^6 Cubo-Cubus Quantitatis a; sed Iodie posteriores tres Denominationes Iam sunt in usu, ita ut a^4 dicatur simpliciter Potentia Quarta seu Potentia quarti gradus. a^5 Potentia Quinta sive Potentia quinti gradus; a^6 Potentia Sexta, vel Potentia Sexti gradus, et sic porro.

Quadratum quid
Cubus quid
Quadrato quid

Scholion 3.

§ 100 Radix quoque in Relatione ad diversas Potentias variantes sortitur Denominationes v. gr. Comparatae ad Quadratum seu Secundam Potentiam, dicitur Radix quadrata seu Secundae potentiae; Comparatae ad Cubum seu Tertiam Potentiam Radix Cubica, seu Tertiae Potentiae, comparatae ad quartam Potentiam Radix quarta et sic deinceps.

Corollarium 1.

§ 101

273. Math. Puræ Pars II. Sectio III. Cap. I.

§. 101. Ex dictis satis clarum est; per Exponentem Quantitatis accurate indicare, Quadratum Potentiæ illius, ad quam ea Quantitas elevata sit, seu quoti gradus quelvis Potentia sit. Ex. gr. a seu a^1 est potentia prima (§. 97.) a^2 est Potentia secunda seu quadratum; a^3 est Potentia tertia seu Cubus; a^4 est Potentia quarta, et sic porro, conf. §§ 98 97. Hinc ergo a^m est ea Quantitatis a, potentia, quam exprimit Exponens Numerans, tot Unitatibus constans, quot Unitates m in se continet, adeoque est potentia quelvis determinata. ex gr. si ponatur esse $m=3$; a^m est potentia tertia seu Cubus Quantitatis a, sic a^∞ est potentia infiniti gradus cum Exponens quis sit signum Quantitatis infinitæ.

Corollarium

§ 102 Quoniam secunda Potentia seu Quadratum nascitur ex Radice, semel per se ipsam multiplicata; Cubus vero seu tertia Potentia ex Radicibus per seipsam seu ex secunda Potentia per Radicem multiplicata; ex Cubo autem sive

tertia

tertia potentia, rursus per Radicem multiplicata, sed quod eodem redit, ex Radice ter in seipsam ducta oriatur Quarta Potentia; Idem autem ducta in Radicem, seu Radix quater per seipsam multiplicata generet quintam Potentiam; Et ita porro (§§ 98. 99.) Inde liquet: Exponentem cuiusvis Potentiae, Unitatem multatum indicare, quoties sit Radix in seipsam ducta. Ex. gr. Ad generandam potentiam a^5, ducta e in seipsam 5—1 id est quater.

Coroll 3.

§. 103 Cum quelvis Quantitas tunc elevatur ad Potentiam aliquam, cum per se ipsam multiplicatur (§ 97.) Fractio autem tunc multiplicatur per seipsam; cum quis tam Numerator per seipsum; quam Et iam Denominator per seipsum multiplicatur (Conf. §. 93 cum Arithm. Num. § 239.) Inde sequitur: Quod si aliqua Fractio ad potentiam eleranda, sit quis Numerator per seipsum Et Denominator ibidem per seipsum multiplicari debet. Ex. gr. Quadratum Fractionis: $\frac{2}{3}$ est $= \frac{2 \times 2}{3 \times 3} - \frac{4}{9}$.

Corollarium 4.

§§ 104.

§. 104. Sequitur quoque ex dictis (§ 97.), quod Quantitas quæ per ipsam multiplicata nullam Potentiam producit, seu quæ ad secundam tertiam et Potentiam elevari nequit, ea nulla est Potentia, seu non est Radix. Ex gr. Unitas quotiescumque ducatur in seipsam semper pro Facto dabit Unitatem. Ergo cum ad Potentiam secundam Tertiam ꝛc. elevari nequeat nulla etiam est Potentia seu non est Radix.

Potentia nulla

Scholiori.

§. 105 Quemadmodum in quantitatibus monomiis uniuscujuscumque Potentiæ gradum Exponens indicat (§ 101.) eodem modo per Exponentes exprimuntur etiam gradus Dignitatis seu Potentiæ, Quantitatum Binomiarum v. Polynomiarum. Sic $(a+b.)^2$, vel juxta alios $\overline{a+b}^2$ significat totam quantitatem $a+b$ est elevatam ad secundam Potentiam; seu ad Quadratum: item $(:a+b.)^3$ vel $\overline{a+b}^3$ significat Cubum Tertiam Potentiam, et ita pono. Id quod in Numeris etiam locum habet.

Hypothesis X.

§. 106 Signum Radicale est V. numeri re

ro

vero vel literae ~~[illegible]~~ sine signo supra scripta dicuntur Exponentes Radicis, utpote, quibus indicatur gradus potentiae, cujus Radix est quantitas Radicalis id est cui tale signum Radicale praefixum est. Sic ex gr. $\sqrt[2]{}$, vel simpliciter sine Exponente $\sqrt{}$ indicat Radicem Quadratam, seu secundae Potentiae: $\sqrt[3]{}$ indicat Radicem Cubicam sive Tertiae Potentiae; $\sqrt[4]{}$ Radicem quartae Potentiae, $\sqrt[n]{}$ vero indicat Radicem cujuscunque, seu indeterminatae potentiae. Itaque $\sqrt[2]{aa}$, $\sqrt{aa}$, aut $\sqrt{a^2}$, significat Radicem quadratam, ex aa seu a^2, quae cum sit a (§ 97) erit $\sqrt[2]{aa}$, $\sqrt{a^2}=a$ ita $\sqrt{aabb}$, seu $\sqrt[2]{a^2b^2}=ab$ &c. item $\sqrt[3]{aaa}$, seu $\sqrt[3]{a^3}=a$ et Ursaliter $\sqrt[n]{a^n}=a$. Eodem modo in Fractis $\sqrt{\frac{aa}{bb}}=\frac{a}{b}$ et $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b}$ aut $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{a}{b}$. Pariter in Polynomiis quoque $\sqrt[3]{(a+b)^2}$ vel $\sqrt{a+b^2}$ significat Radicem quadratam de $(a+b)^2$, quae est $a+b$ item $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ denotat Radicem Cubicam, de $(a+b)^3$, quae est $a+b$.

Scholiori

§ 107. Observandum sic est: Signum Radicale $\sqrt{}$ afficere a Quantitatem sibi ad Dextram scriptam, si quae vero quantitas eidem signo Radicali ad Sinistram seu anteposita existat ea

coefficiens

erit quantitatis Radicalis. Si ex gr. in 3 ave ab $\sqrt{aa}$ vel $2\sqrt{aa}$ signum $\sqrt{}$ non afficit quantitatem ab v. 2, signo $\sqrt{}$ antepositio coefficiens Quantitatis Radicalis $\sqrt{aa}$, ita ut $2\sqrt{aa}$, significet $\sqrt{aa} + \sqrt{aa}$

Scholion 2.

§ 108. Radix alia est Rationalis, alia Irrationalis, alia denique imaginaria.

Definitio XXII.

Rad. Ration. §. 109. Radix Rationalis seu vera est, quæ numeris exacte exprimi potest. Ex. gr. Numerus 3 est vera Radix quadrata Numeri 9; quia $3 \times 3 = 9$. Sic etiam $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2 Rationalis, quia $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Definitio. XXIII.

Irration. § 110 Radix Irrationalis seu surda vocatur illa, quæ non potest Numeris exacte exprimi; licet in lineis Geometricis darique at. Ex gr. Videbimus suo loco Radicem quadratam Numeri 8, seu $\sqrt{8}$ lineis exprimi posse. Sed tamen numeris exprimi nequit. Rad. quia nullus est Numerus, qui per seipsum multiplicatus producere posset 8.

posset 8, nam $2 \times 2 = 4 < 8$; & $3 \times 3 = 9 > 8$, ideoque Radix quadrata Numeri 8, est Surda seu Irrationalis.

Definitio XXIV.

§ III. Radix Imaginaria v. Impossibilis illa est, quae nec Numeris nec lineis, exprimi potest. Ex. gr. $\sqrt{-4}$, est Radix imaginaria seu impossibilis, quippe impossibilis est, ut ulla Radix per seipsam multiplicata, dat quadratum $= -4$; nam Radix illa deberet esse vel $+2$ vel -2; atque neutra Radix sese dat quadratum $= -4$ quippe tam $+2 \times 2$, quam ~~est~~ -2 est $= +4$ (§. 72 Reg. II.)

Theorema VII

§ 112. Prob. Potentiae habentes Exponentem parem v.c. 2. 4 6 ⁊ de Radicibus tam Positivis quam etiam Negativis semper debent esse Positivae: Potentiae vero quae habent Exponentem imparem v.c. 1, 3, 5 7 ⁊: de Radicibus quidem Positivis sunt Positivae, de Radicibus vero Negativis figuntur negativae.

Demonstratio. Omnis Radix Positiva per $+a$ & omnis Radix negativa per $-a$ possunt repraesentari; jam vero de Radice $+a$, seu

$+a$

$+a^1$. Quadratum seu secunda Potentia est, $+a \times a$ (§§ 98. 99.) $= +a^2$ (§ 72.) Unde cubus seu tertia Potentia erit $+a^2 \times +a$ (§§§ 98. 99.) $= +a^3$ (§ 72.) et quarta potentia $+a^3 \times a$ (§ 98.) $= +a^4$, sive vero quinta Potentia $+a^4 \times a$ (§ 98.) $= +a^5$ et sic porro. De Radice autem seu prima Potentia Negativa $-a$ sic a^5, Quadratum est $-a \times -a$ (§§§. 98. 99.) $= +a^2$ (§ 72.) Tertia vero Potentia seu cubus erit: $+a^2 \times -a$ (§ 98. 99. $= -a^3$.) § 72.) Unde quarta Potentia sit $-a^3 \times -a$ (§ 98) $= +a^4$ (§ 72.) quinta Potentia tandem $+a^4 \times -a$ (§ 98.) $= -a^5$ et sexta $-a^5 \times -a$ (§ 98.) $= +a^6$ sic porro. Atque ex his Potentiis tam de Radice $+a$, quam etiam Radice $-a$ genitis quæ habent Exponentem parem, omnes sunt Positivæ; habentes autem Exponentem imparem, a Radice quidem $+a$ sunt Positivæ, de Radice vero $-a$, negativæ existimet (: ut inspicienti patet.) Ergo etiam Ursaliter concludendum erit: Omnes Potentias habentes Exponentem parem debere esse semper Positivas; Potentias vero habentes Exponentem imparem debere esse quidem a Radicibus Positivis Positivas, a negativis vero negativas. q. e. d.

Coroli

Corollarium 1.

§ 113. Si ergo occurrat Potentia Negativa habens pro Exponente Numerum Parem, ejus Radix est impossibilis sive imaginaria; si vero ejusmodi Potentia Negativa habuerit Exponentem imparem Radix quoque ejusdem, et si negativa possibilis tamen est vera si v. gr. $\sqrt{-a^3}$ et $\sqrt[4]{-a^4}$ sunt Radices impossibiles v. imaginariae, verum $\sqrt[3]{-a^3}$ est possibilis et vera, est enim $-a$ si quidem $(-a-a.)\times -a$, $= -aaa$, seu $-a^3$

Scholion.

§ 114 Radix Impossibilis, quare ita dicitur satis est evidens, quod scilicet nulla quantitas possit ejusmodi Potentiam gignere de cujus Radice quaeritur ut est v. gr. $\sqrt{-a^2}$. Dicitur autem imaginaria quia saltem imaginatione nostra concipi potest comparatione minorum ad Positivam, cui negativa opponitur, eo prorsus modo quo impossibilia concipere possumus

THEOREMA VIII.

§ 115 Potentia habens pro Exponente Zerum est aequalis Unitati.

Demonstratio. Omnis ejusmodi Potentia repraesentari potest per a^0. At quia $a^0 = 1$; nam $\frac{a^m}{a^m} = 1$ (149

Art

Arithm. Num.) Sed etiam $a^m : a^m$ seu $\frac{a^m}{a^m} = a^0$ (§. 80 Reg. V. Numeris. 10. et 20.) & $a^0 = 1$ (§. 108 Axiom. IV Arithm. Num.) q. e. d.

Scholion

§. 116 In Libris quidem Solent Mathematici occurrere Quantitates Algebraicae, habentes pro Exponente Quantitatem integram negativam, aut Fractionem aliquam jam Positivam jam Negativam, sed quia ei Expressionibus nos neque per Algebrae, neque per Physicae decursum utemur, eas proinde hic loci omittemus, sed si quis eiusmodi Expressionum valores nosse desiderat, Consulat Auctores Algebrae, pos vix non omnes, de eiusmodi quoque Expressionibus, etiam in elementis suis, cursum saltem egisse deprehendet.

CAPUT. II.

De Elevatione Calculisque Potentiarum.

Problema XIII.

§. 117. Proo: Potentiam quamvis Monomiam ad aliam Dari Sit Exponentis Potentiam elevare.

Resol.

Resolutio. Exponens datæ Potentiæ elevandæ multiplicetur per Datum Exponentem Potentiæ ad quam elevari debet, tumque Factum Exponentium, scribatur pro novo Exponente potentiæ quæsitæ ex. gr. Si a^3 elevari debeat ad quadratum seu secundam Potentiam, datæ Potentiæ 2, exponens 3 multiplicetur per Datum Exponentem 2. Potentiæ sese quæsitæ, et ex 3 x 2 factum = 6 adscribatur Potentiæ quæsitæ a, pro novo Exponente tumque acquiretur Potentia a^6, quæ est quadratum Datæ Potentiæ a^3.

Demonstratio. Sit Data Potentia Monomia a^3 elevanda ad secundam Potentiam; Atque a^3 elevatum ad secundam Potentiam est $- a^3 \times a^2$ (§ 98.) $= a^6$ (§ 72 Reg. IV. Num 2.) Cum itaque per datam Resolutionem quoque Idem eadem Potentia obtineatur nempe $a^3 : x^2 = a^6$, liquet per eandem Resolutionem Quantitates Monomias, quas vi rite elevari posse ad etiam, cujus Exponens datur. q. e. d.

Corollarium 1.

§ 118 Si ergo quæcumque Potentia a^m elevari debeat ad Potentiam Exponentis n, quæsita potentia erit a^{mn}: Sic si $a^{\frac{m}{n}}$ debeat elevari ad Potentiam Exponentis n, potentia quæsita erit $= a^{\frac{mn}{n}} = a^m$

Corol

Coroll. 2.

§ 119. Ex dictis (§ 117.) facile quoque apparet, quod si quantitas Monomia elevanda pluribus constet literis singularum literarum Exponentes duci debere in Datum Exponentem, quæsitæ Potentiæ Ex gr: Quantitas Monomia $a^m b^r$ ad quadratum elevata est $= a^{2m} b^{2r}$. Eadem vero elevata ad Potentiam Exponentis n est $= a^{mn} b^{rn}$.

PROBLEMA XIV.

§. 120 Prob: Radicem quamvis Binomiam elevare ad quamcunque Potentiam Dati Exponentis.

Resol. Data Radix Binomia (quæ ex gr. sit repræsentari per $a+b$.) multiplicetur per seipsam (: id est per $a+b$.) et productum hoc dabit quadratum seu secundam Potentiam; tunc secunda hæc potentia iterum multiplicata per Radicem (id est in illaro Exemplo per $a+b$.) dat tertiam potentiam seu Cubum, tertia iterum multiplicata per Radicem (id est per $a+b$.) dat Quartam; Et ita procedendum erit pro tamdiu donec Exponens Membri Primi (: v. gr. in allaro Exemplo Exponens de a.) et membri ultimi (i. e. juxta datum Exemp. Exponens de b.)

d & b.) exprimat ipsam Potentiam Petitam, erit q. Factum illud totale potentia quaesita Dati Exponentis.

Demonstrao. Hujus Resolutionis fundatur in ipsa Genesi potentiarum superius (§ 98) exposita

Scholion

§. 121. Methodo § prae) tradita, constructa e sequens Tabula, quatuor Potentiarum ex Radice binomia $a+b$ productarum quas infinitum eadem Methodo continuare licet.

Radix seu I. Potentia $= a+b$
Quadrat seu II. Potentia $= a^2+2ab+2b^2$
Cubus seu III. Potentia $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
IV. Potentia $= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Si vero Radix seu I. Potentia $= a-b$
erit Quadrat. seu II. Potentia $= a^2-2ab+b^2$
Cubus. seu III. Potentia $= a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$.
et sic porro in infinitum.

Coroll 1.

§ 122. Hinc itaque liquet: 1º Omne quadratum generatum e Radice Binomia constare e tribus Elementis (2º) ex quadrato partis

primae

primæ Radicalis. (2do.) ex duobus Factis partium Radicalium seu ex duplo termini primi per Terminum secundum multiplicato; et (3o.) Ex Quadrato Termini secundi seu partis secundæ Radicalis. ex gr. Radicis Binomiæ $a+b$, quadratum est $= a^2 + 2ab + b^2$ (§. præc.) quod ex tribus prælactactis Elementis constare, attendenti satis est evidens.

Corollarium. 2.

§ 123. 2do: patet quoque ex (§ 121.) Cubum Radicis Binomiæ constare (1o) Cubo Termini primi Radicis suæ nempe a^3 (2do) Triplo Quadrato Termini primi ducto in Terminum secundum. i.e. $3a^2b^3 = 3a^2 \times b$ (3o.) Triplo Quadrato termini secundi in primum ducto v.c. $3ab^2 = a \times 3b^2$ (. Se quod eodem redit ex Triplo facto termini primi in Quadratum secundi ducto, id est ex $3a \times b^2$.) Denique (4o.) Ex Cubo Termini secundi Radicis suæ i.e. b^3.

Scholion.

§ 124. Quartam quoque Potentiam Radicis Binomiæ, ex quibus constet Elementis,

ut et

ut et cui altiores ejusdem Radicis potentias secundum Methodum jam jam erit difficile determinare. Problema XV.

§ 125. Rōo: Potentias datas addere, subtrahere, multiplicare et Dividere.

Resol. Quoniam potentiae Algebraicae non aliud sunt, quam Quantitates Exponentibus affectae (§§ 96 101.) Jam palam est earum Additionem, Subtractionem Multiplicationem, et Divisionem pergi debere Regulas, quas de iis Calculis in superius tradidimus, atq; demonstravimus.

CAPUT III.

De Extractione Radicum, et Potentiis Algebraicis

Definitio XXIV.

§ 126. Extractio Radicis est inventio quantitatis Radicalis ut quae sese elevata seu in se aliquoties ducta aut producit datam Potentiam, aut producere non potuit saltem in ea quantitate, cujus Radix quaeritur proxime continetur

Scholi

Scholion.

Quid est Extr. Radicis Quadratæ?

§ 127. Hinc in specie Extractio Radicis Quadratæ v. gr. a^4 est Inventio quantitatis a^2, quæ per se ipsam semel multiplicata generavit Quadratum a^4, item Extractio Radicis Cubicæ ex gr. e potentia a^6 est inventio quantitatis a^2 quæ per se ipsam bis multiplicata seu per quadratum sui a^4 semel multiplicata produxit Cubum a^6 & ita porro.

Extr. Radicis Cubicæ? quid?

Corollarium 1.

§ 128 Hinc liquet: Radicum Extractionem penitus contrariam esse operationi qua potentiæ gignuntur seu componuntur, ut adeo ut potentiæ coalescunt multiplicatione ita eædem debeant in suas Radices tanquam Factores resolvi Divisione Coroll. 2.

§ 129. Itaque Proba quoque Extractionis Radicis instituti debet per multiplicationem seu per Elevationem Radicis inventæ ad eam potentiam, de qua Radix illa quæsita est; si enim Radix inventa sit Rationalis

lis seu vera elevata ad eandem Potentiam ex qua ipsa erectra est, dabit Factum eidem potentiae datae aequale seu eandem praecise potentiam. Sic v. gr. e quadrato Radix quadrata vere inclusa est, si cujus Quadratum aequale sit ~~sit~~ potentiae datae est autem aequale si ab eo subductum nihil relinquat ut adeo Radicis inventae Quadratum tolli debet a data Potentia, et si nihil ab hac superabundet indicio est ipsam Radicem inventam esse legitimam; pariter Radix ex Cubo extracta si ad Cubum elevata dederit Factum seu Cubum datae potentiae aequalem, id quod Subtractione innotescit, sit Radix vera et sic in reliquis.

Corollarium 3.

§. 130. Ex his porro evidens est quod e quantitatibus quae (. siquidem Productum alicujus quantitatis per se aliquoties multiplicatae) non sunt perfecta potentia sed tali aliqua Potentia majores existunt, et per consequens Radices habent surdas seu Irrationales existimandi in quam quantitatibus radices verae erui nequeant, ac proinde cum in talibus quantitatibus

Radix

Radix quæritur talis quantitas indagatur, quæ capax sit producendi potentiam ad Datam quantitatem proxime accedentem. Sic ex gr: si quæratur $\sqrt{12}$ mil. stigatus Numerus cujus Quadratatum proxime accedat a 12 ÷ Numerus 3; nam $3 \times 3 = 9 < 12$.

Problema XVI.

§ 131. Prob: E data Potentia monomia Radicem quamcumque extrahere.

Resol. Exponens datæ Potentiæ dividatur per Exponentem datæ Radicis, & habebitur Exponens Radicis desideratæ pura Quotus inventus.

Demonstrao. Per hanc Resolutionem invenitur Radix, quæ ad Gradum datæ Potentiæ elevata, seu per (§§ 98. 99.) seu (§ 112.) semper restituit Datam Potentiam. Atqui Radix talis est genuina q. e. d. Ex gr: si potentia a^6 extrahenda sit $\sqrt{}$ erit hæc per Resolutionem $a^{6:2} = a^3$ quæ est Radix Quadrata genuina datæ Potentiæ a^6; nam $a^{3 \times 2}$ seu $a^{3 \times 3} = a^6$.

Coroll.

§. 132 Si ergo e quantitate Monomia plurium Literarum sit Radix quæpiam data extrahenda

tenda, per tam dividantur Exponentes singularum Literarum datae Potentiae & obtinebitur Radix. Sic v. gr. si ex a^4b^2 Radix quadrata extrahenda sit, dividantur Exponentes per 2 Exponentem scilicet datae Radicis, & erit Radix quaesita $= a^2b$ item Radix Cubica Quantitatis a^6b^3 erit $= a^2b$ & sic porro.

Scholion.

§. 133. Notari hic debet: Proxime praecedens hic Problema (§ 131.) ut & Problema superius (§ 117.) expositum Amplissimum habet usum in Calculo Quantitatum Radicalium; nam ope horum Problematum Quantitates irrationales reduci possunt ad expressionem Rationalium, sub qua ut Rationales tractari possunt; sic $\sqrt[2]{a} = a^1 : 2$. item $\sqrt[3]{x} = x^1 = 3$.

Theorema IX.

§. 134. Prop. Omnis Quantitas Radicalis considerari exprimique pro tanquam Quantitas Binomia ex gr: $a + b$ aut $a - b$. Item $x - y$ et $x + y$.

Demonstrao. 1º Differentia duarum quarumvis quantitatum pro considerari & exprimi Quantitatem Binomiam $a - b$ aut $x - y$ (§§ 5. 15.) Atque Omnis Quantitas Radicalis pro concipi tanquam

Diffe

Differentia duarum aliarum Quantitatum, & Omnis Quantitas Radicalis considerari exprimique pro tanquam Quantitas Binomia $a-b$ v. $x-y$.

2do: Summa quaevis Duarum v. plurium Unitatum seu totum quodvis Duarum v. plurium partium aequalium, pro concipi Divisum in duas et partes aequales, aut etiam inaequales, Ita autem possent designari per a et b aut x et y (§ 5.) Imo palam e Summam quamvis duarum v. plurium Unitatum, seu Totum Duarum v. plurium Partium, posse considerari et exprimi tanquam quantitatem Binomiam $a+b$ vel $x+y$ (§ 15.) Atque Omnis Quantitas Radicalis, cum sit capax per se multiplicata factum seu Potentiam aliquam producendi (97.) est instar totius sive Summae ex pluribus aut saltem e duabus partibus seu Unitatibus constantis, & Omnis etiam Quantitas Radicalis considerari et exprimi pro tanquam Quantitas Binomia $a+b$ aut $x+y$. Coroll 1.

§ 135 Itaque Omnis Numerus Radicalis

lis Monomiis exprimi sive per Expressionem Binomiam. Sic Numerus $7=2+5$ vel $3+4$ aut $1+6$; item $7=9-2$ vel $8-1$ Et seu 7 per se seu per Expressiones suas Binomiis elevatur ad eandem aliquam Potentiam, idem semper factum obtinebitur Facta Potentiae Polynomiae Reductione. Coroll 2.

§ 136. Imo quaecumque etiam Polynomia Radix ad Binomiam reduci sive, juxta (§ 134.) si nempe plures ejus notae instar minus Termini considerentur, cujus Radix tribus notis Numericis constans est $=132$, Quoniam $132=130+2$; si ponatur $130=a$ et $2=b$ erit Radix illa $=a+b$.

Coroll. 3

§ 137 Ami igitur sequitur: Cujusvis Quadrati quamcumque Polynomiam Radicem habentis partes per alternatam formularum, potentiae secundae seu Quadrati, superius (§ 121.) allatum exhiberi posse. Ex gr. Cum Radix quadratica 132 sive repraesentari per $a+b$ (§. pr.) ipsum quoque Quadratum ejusdem radicis rite repraesentabitur per $a^2+2ab+b^2$

Corol

Corol. 4 (§. 138.) Et cum quælibet Radix Polynomia possit revocari ad Binomiam $a+b$, evidenter est cubum quoque cujusvis Polynomii tam Algebraici quam numerici repræsentari posse hac formula: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. nimirum b denotante Polynomii Terminum ultimum & a omnes cæteros.

Problema XVII.

139. Prob: Edata Potentia Algebraica Polynomia Radicem Quadratam extrahere.

Resolutio. I. Observata Lege Generali Quadratorum superius (§. 122.) legitimia adducta (: quam formula Generalis quadratorum nimirum $a^2+2ab+b^2$ ob oculos posita continuo suggeret.) Siquidem valor quantitatis complexæ non mutatur quocunque Ordine scribantur termini eandem componentes (§. 19.) ante omnia uti proposita formula generalis inviat, ordinetur data Potentia e qua Radix extrahenda est, secundum exponentes cujusdam Literæ ita ut maximus Exponens primo loco sit, sicque ordinata, rota parentesi includatur. Deinde

II. Quoniam in primo datæ rite ordinatæ potentiæ Termino latet quadratum termini primi Radicis (§. 122.) loco e primo termino per §. 131.) extrahatur Radix quadrata, & scribatur pro primo Radicis + Signis Quadratum subtrahatur e data Potentia, ac notetur pro ulteriori

+ termino post Potentiam inkumulatam, tamque Radicis,

opera

ratione primum Residuum.

III. In hoc Residuo juxta (§ 122.) latebit ad hoc duplum factum termini primi in secundum ducti & insuper quadratum termini secundi, Itaque termini primi jam inventi, duplum accipiatur pro Divisore, per quem Residuum primum, seu aliquis ejusdem terminus dividatur, & Quotus scribatur pro secundo Radicis Termino; deinde Quotus ille multiplicetur tam per duplum Termini primi seu per Divisorem, quam etiam per seipsum, & facta hoc a Dicto Residuo subtrahantur, ac si nihil remanserit, ex data potentia, id argumento erit eam potentiam fuisse perfecte quadratam extractae jam Radicis Binomiae, siquidem factum ex data Potentia nihil aliud subtractum est, quam per res quadrati Radicem Binomiam habentis scilicet 1. Quadratum Termini primi 2. Duplum factum termini primi in secundum, & 3. Quadratum Termini secundi, vid. Exemplum 1.

IV. Quod si vero post alteram subtractionem aliquod Residuum & data potentia remaneat

neat, indicio erit, Radicem quæsitam tertio quoque Termino constare, pro hoc itaque extrahendo, Termini Duo Radicis jam inventi instar unius accipiantur habeantque pro primo Radicis quæsitæ Termino, ille autem qui ad hoc latet, pro secundo. Et quia posita hac Hypothesi, habemus e data potentia solummodo. Quadratum Termini primi subtractum est ac proinde in quo Residuo latet ad hoc Duplum factum Termini primi (: qui hic jam est summa Duorum Terminum inventorum :) in secundum ducti (§ 122.) igitur rursus (: ut in præc. Reg. III. factum est :) Termini primi jam inventi (: ie summæ duorum Terminorum inventorum :) accipiatur Duplum pro Novo Divisore per quam dividatur secundum Residuum, seu aliquis illius Terminus et scribatur Quotus pro Novo seu tertio Radicis quæsitæ Termino, atque hic tam in duplum Terminos præcedentium, seu in Divisorem, quam in se ducatur. ac facta hæc adversa Residuo subtrahantur, et si post tertiam hanc subtractionem nihil amplius remaneat e data potentia

tentia, id erit indicio eandem Potentiam esse perfectum Quadratum Radicis Trinomiae jam inventae vid. Exempl. II.

V. Si vero post tertiam quoque Subtractionem aliquod Residuum maneat e data potentia id erit indicio, quartum quoque Radicis Terminum latere in eadem potentia, itaque Radix quatuor Terminorum reducatur ad duos ita ut primo termino accipiantur tres simul Termini jam inventi, quorum duplum erit novus Divisor; Caetera autem peragantur ut ante (: in Reg. IV.) ac eadem constanter lege continuetur operatio, dum V. nihil supersit e data potentia, vel ibeatur in Seriem quandam infinitam.

VI. Si data Potentia fuerit Fractio praescriptas Regulas das extrahatur Radix tum e Numeratore, quam etiam ex Denominatore (Conf. §§ 103 128.) sic $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; cum $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Demonstratio. Legitima tunc per acta habetur extractio Radicis Quadratae, quando inveniatur Radix, quae semel per seipsam multiplicata

tiplicata, dat quisquis quadratum, quod cum Data potentia prorsus idem sit (§ 129.) Atque per praescriptas Regulas Resolutionis talis Radix invenitur (id quod tum sequentis Scholii, tum et aliis Exemplis experiri poterit.) Et per datam Resolutionem Extractio Radicis Quadratae e quacumque potentia Algebraica Quadratica, vice peragitur. q. e. d.

Scholion.

§. 140. Praescriptas Regulas illustremus duo saltem Exempla immutatim facta sese ad Regulas applicatione persequi privabit sit proinde juxta Reg. 1. ordinata potentia in

Exempl. 1. x^2+4x+4 erit hujus Radix Quadrata $x+2$, Nam in primis ex Quadrato Monomio x^2 per Reg. 2 Extracta Radix erit x, Scribatur itaque haec post datam Potentiam proprio Radicis praesitae Terminio, tumque elevata ad quadratum x^2 hoc subtractatur e Data Potentia manebit Residuum $= 4x+4$ Ideoque juxta Regulam III. hujus Residui primus terminus $4x$.

di

dividatur per Duplum Radicis inventae id est per $2x$ et quotus $= +2$ scribatur pro secundo Radicis quae dat Factum $= 4x + 4$ sic itaque ab eodem Residuo subtrahatur. Et quia post alteram dam subtractionem nihil amplius remanet e data potentia, patet eandem esse perfectum Quadratum Radicis Binomiae $x + 2$, quae etiam in se ducta non aliud gignit quadratum, quam ipsam datam Potentiam, ut periclitanti patebit.

Exemplo. 2. $\sqrt{(a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)} = a^2 + 3ab - 2b^2$. Est haec potentia data juxta Reg. 1. Ordinata secundum Exponentes Literae b:) itaque juxta Regulam secundam ex primo ejus Termino a^4 extrahatur Radix quadrata a^2 scribatur post datam Potentiam pro primo Radicis Termino, ac ejus quadratum a^4 subtrahatur e data Potentia et obtinebitur primum Residuum, Ejusque itaque primus Terminus $6a^3b$, dividatur per duplum Termini jam inventi i. e. per $2a^2$ aequotus $3ab$, scribatur pro secundo Radicis quaesito Termino, qui tam in Divisorem, quam in seipsum

Etiam

Etiam ductus dat factum $= 6a^3b + 9a^2b^2$, quo subtracto
debebit Residuum secundum, itaque juxta Regulam
IV. duo quæsitæ Radicis Termini jam inventi instar
minus accipiantur, et per eorum duplum ÷ per $2a^2 + 6ab$
dividatur postremum ut ac Residuum $4a^2b^2 - 12a$
$b^3 + 4b^4$, quærendo minorem, quotiesnam prior Di-
visoris Terminus $2a^2$ juxta (§. 82) et Quotus
$-2b^2$ scribatur pro tertio Radicis quæsito Ter-
mino, qui tam in totum Divisorem quam in se-
ipsum ductus dat Factum $-4a^2b^2 - \sqrt{12ab^3 + 4b^4}$,
quod ab eodem Residuo postremo subtractum ni-
hil amplius remanet e dara potentia, ac proinde ejus-
dem tanquam perfecti quadrati radix quæsita est $= a^2$
$+ 3ab - 2b^2$, quæ per seipsam multiplicata dabit pro
facta datam Potentiam, et sic in omnibus Radici-
bus quadratis extrahendis procedendum erit.

Problema XVIII.

§. 141. Prob. E dara Potentia Polynomia Alge-
braica Radicem Cubicam extrahere.

Resol. 1. Ordinetur dara Potentia (ut §. pr.)
secundum Exponentes cujusdam Literæ, ita ut maxi-
mus

maximus Exponens primo loco sit. Deinde si quaelibet Radix Polynomia possit Reduci ad Binomiam, consequenter: Radix quidem quae per $a+b$ Cubus autem ipsae per formulam $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ repraesentari queat (§ 123.) exposita, quam praescripta statim formula generalis ob oculos posita memoria excidere non sinet, quoniam in Datae rite ordinatae potentiae primo termino juxta Legem formulamque ejusdem Generalem latere debet Cubus Termini primi, quaesitae Radicis, ideo

II. E primo potentiae datae Termino extrahatur Radix Cubica (juxta § 131.) Scribatur post potentiam in locum Quoti pro primo Radicis quaesitae termino, deinde Cubus ejusdem e data Potentia subtrahatur, ac notetur primum Residuum. pono.

III. Quum in hoc Residuo adesse debet factum ex triplo quadrato primae, seu mineralis partis Radicalis in partem alteram, quae jam mineranda est (§ 123.) proinde primus seu in rectus jam terminus jam Radicis elevetur ad quadratum, et per quod tri-

plum

plum dividatur primum ejus Residuum, ac quotiens extunde re-
periendus collocetur penes priorem partem Radicis:
deinde Quotus Zi postremo inventus primum quoque du-
catur in Divisorem, seu in Triplum quadratum Ter-
mini primi, secundo autem ejusdem Termini secun-
di Triplum Quadratum multiplicetur per Terminum pri-
mum (quoniam Terminum Elementum Cubi Radicem Bi-
nomiam habentis sit Factum ex Triplo Quad-
rato Termini secundi in primum (§ 123.) ac Denique
3o idem Terminus secundus elevetur ad Cubum, pro
quarto sese Elemento Cubi Radicis Binomiæ ob-
tinendo, tunc tribus Zisce factis e Residuo pri-
mo sublatis, si in Zil amplius remaneat e dara
potentia, id Argumento erit, eam potentiam esse
perfectum Cubum Radicis Binomiæ ejus nempe
quæ extraeta jam e vid ex. 1.

IV. Quod si vero eveniat, ut post alteram
quoque subtractionem, aliquod Residuum e dara
potentia remaneat, indicio erit Radicem quæsitam
tertio quoque termino constare. Quo casu duo

prio

primi, quaesitae Radicis Termini jam inventi instarmi-
ns accipiatur reputentque pro primo Radicis quaesi-
tae Termino, ille autem qui ad hoc laret pro secundo.
Quo posito dicemus non plus subtractum esse dara
potentia, quam Cubus Termini primi, adeoque in cujus
Residuo hoc secundo latent ad hoc tria elementa
videlicet triplum Quadratum Termini primi (: per quem
modo summa duorum Terminorum jam inventorum
intelligi debet.) in secundum ducti, ita triplum
Quadratum termini secundi latentis ad hoc multipli-
catum per terminum primum, ac Cubus ejusdem Termini se-
cundi (§ 123.) itaque rursus met Zedo, quam praece-
denti Statim Reg. III. de Termino secundo exprimendo
actulimus, quaeratur terminus latens, tanquam
secundus, modo in Cit. Regula III. exposita
tractandus, atque dele operandi ratio tamdiu provo-
cata, donec vel nihil supersit, v. ab eatur seriem
quandam infinitam. Hoc bene notato, quod termi-
ni quaesitae Radicis jam inventi; quotcumque fuerint,
tamdiu pro uno primo nempe Termino accipi de-
bent

beat, quamvis latens ad hoc terminus et quidem hic sem per tanquam secundus, in qui reddus erit vid. Ex. 2.

V. Denique si data Potentia Fractio fuerit per prescriptas Regulas Radix Cubica, tam e Numeratore, quam etiam a Denominatore ejusdem extrahenda erit ex. gr. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, nam $\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Demonstratio. Tunc legitime peracta habere Extractio Radicis Cubicæ quando Radix elevata ad Cubum dat ejusmodi Factum, quod cum ipsa Potentia data prorsus sit idem (129.) Atque per daram Resolutionem relis obtinetur Radix (: ut periclitanti parebit.) Ergo per eandem Resolutionem vice peragitur Extractio Radicis (u. e quavis potentia Algebraica Polynomia q. e. d.

Exemplum I. $\sqrt[3]{(8x^6 - 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3)} = 2x^2 - n$.

II. $\sqrt[3]{(x^3 + 6bx^2 - 3x^2 + 12b^2x - 12bx + 3x + 8b^3 - 12b^2 + 6b - 1.)} = x + 2b - 1$.

Scholion.

§ 142 Exemplum posterius Clarissimi gratia prescriptæ Resolutionis Regulis applicabimus. Igitur

ex

ex datae ex eodem exemplo II. vitaque ie. secun-
dum Exponentes Literae x ordinatae Potentiae
primo Termino x^3 extrahatur per Regulam secundam
Radix Cubica x, quae post potentia scripta elevetur
ad Cubum x^3, quae subtrahatur a data potentia, seu in-
jusdem primo Termino, quem destruit, noterique Resi-
duum primum $= +6bx^2 - 3x^2 + 12b^2x - 12bx - 3x +$
$8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$. Hujus itaque Residui primi ter-
minus $6bx^2$ juxta Reg. III. dividatur per triplum Quadra-
tum Radicis jam inventae ÷ per $3x^2$ & Quotus $= +2b$
scribatur pro secundo Radicis Termino, ducatusque in
primis in Divisorem, unde factum erit $= +6bx^2$, secun-
do ejusdem secundi Termini $+2b$ triplum quadra-
tum $= 12b^2$, ducatur in primum Terminum Radicis id est
in x, unde Factum $= +12b^2x$, ac tertio idem secundus ter-
minus $= 2b$ elevetur ad Cubum, qui est $= +8b^3$. Ejus itaque tri-
bus factis e Residuo primo Algebraice sublatis
noterur secundum Residuum $= -3x^2 - 12bx + 3x - 12b^2$
$+ 6b - 1$. pro hoc itaque Dividendo juxta Reg. IV. acci-
piatur pro Divisore triplum Quadratum summae Ter-
minorum Radicis jam inventorum, quod est $= 3x^2 +$

12

$12bx + 12b^2$, per quos itaque tanquam Divisoris primum Terminum $3x^2$ dividatur secundi Residui primus Terminus $3x^2$ unde quotus est $= -1$. quae scribatur pro tertio Radicis quaesitae termino, ac deinde primum quoque ducatur in Divisorem totum unde factum erit $= -3x^2 - 12bx - 12b^2$, tandem secundo ejusdem Terminum Ultimum Radicis pura -1. Triplum Quadratum $= +3$. ducatur in terminos Radicis praecedentes, unde factum erit $= +3x + 6b$ Denique 3o ille idem Terminus Radicis videlicet -1, elevatur ad Cubum quae est $= -1$. Quibus tribus factis e 2do Residuo Algebraice subtractis, cum nihil amplius est data potentia remaneat, est Radix quaesita $= x + 2b - 1$; siquidem haec elevata ad Cubum dat pro facto ipsam potentiam propositam.

CAPUT IV.

De Extractione Radicum e Numeris

Definitio XXVI.

§. 143. Extractio Radicis Numericae est inventio Numeri, qui per se aliquoties multipli

Cat

cutus, aut datam Potentiam aut si non eadem est praeci-
se, saltem Factum, quod in illa proxime contineri pro-
duxit.

Scholion.

§ 144 Pro Radicibus quae numeri de nova con-
stant, tam e quadrato, quam etiam Cubo Numerico ex-
trahendis nulla Regula opus est, sed potius in prom-
ptu esse debet Tabula sequens, in qua Prima Columna Ra-
dices media exhibet quae est pro Arbitrio etiam
pro Aliis etiam potentiis continuari potest.

TABULA.

Radicum, Quadratorum, et Cuborum in Numeris sim-
plicibus.

Radices	Quadrata	Cubi
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	66
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729.

Scho

Scholion

§ 145. Quod vero Radicum Numericarum duabus aut etiam pluribus notis constantium extractionem attinet: siquidem Radices Polynomiæ, quæ cumque etiam Numericæ ad Binomium revocari consequenter per $a+b$ exhiberi possunt (§ 136 vel sine apparet, quod si et Quadrato Numerico Radix Binomia, aut etiam quævis Polynomia sit extrahenda, reapse eadem methodus gratis quam superius (§ 139.) de extrahenda Radice Polynomia potentiisque Algebraicis præcipuum observanda, ac eadem formula gratis $a^2+2ab+b^2$, partes Quadrati exhibens, qua illic usi fuimus, hic quoque præ oculis habenda erit pari modo, quum Cubus quoque cujusvis Polynomiæ Radicis Numericæ possit repræsentari formula gratis: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§ 138.) evidens pe ipsam hanc formulam in Extractione Radicum Polynomiarum e Cubis Numericis præ oculis habendam, et Methodum Generalem de Extractione Radicum Polynomiarum e potentiis Alg. (§ 141, tra dictam

se

Sequendam est. Sed Ohori

§ 146 Quia tamen partes sive Elementa quadratorum et Cuborum quae Scriptis Statim formulis generalibus exhibentur, non aeque facile incurrant in Oculos in Quadratis ac Cubis Numericis ac in Algebraicis, Quae si quis nosse volet, quem quodque Elementum locum in data quacumque potentia Numerica obtineat, id ipsum Merzoo sequenti facile exequetur. nimirum 1º. Si posita potentia Numerica per Virgulas in Classes seu membra ita distingatur, ut singulis Classibus facto a Dextris initio tot assignentur notae quo habet Unitates Exponens propositae potentiae (: in Quadrato duae in Cubo tres :) tum mihi erit Numerus notarum Radicis, siquidem quot in posita potentia reperientur membra Virgulis distincta (: quorum sinistimam [illegible] nota constare [illegible] :) Radix quoque ejusdem Potentiae, tot notarum erit. Ex. gr. Radix Quadrati Duorum Membrorum 1156 est duarum notarum, quae est 34. Sic Radix de Quadrato trimembri 54756 est trium notarum videlicet 134.

2º. Locum vero minus cujusque

etc

Elementi in Potentia v.c. quadratica Binomii indicabit productum quod oritur si Radix quaepiam Duarum notarum ad quantitatem Binomiam (§ 27) reducta elevetur ad Quadratum, pari modo locum Elementorum in potentia Trinomii quadratica cognoscet e facto quod gignitur. Radicis cuiuspiam Trium Notarum sub forma Quantitatis Trinomiae elevatae ad quadratum. Ex gr. Radix duarum notarum 34 = 30 + 4 dat Quadratum = 900 + 240 + 16 = 1156, cum itaque pars secunda Radicis Unitates, et primi Decades significet necessario Quadratum Unitatum in loco Dextimo factum e duplo minus Termini in alterum, et in loco secundo, Quadratum vero Decadum in loco tertio debet terminari, sic Radicis Trium notarum 234 sub forma Quantitatis Trinomiae, quae est 200 + 30 + 4 elevatione ad quadratum gignitur Factum = 40000 + 12000 + 1600 + 900 + 240 + 16 = 54756 Unde liquet Quadratum Unitatum Sexterae partis Radicis terminari in Facti totalis nota Unitates significante ÷ in loco a Dextris primo Factum e duplo secundae partis Radicis in

loco

(in tertiam in loco 3o duplum primae) xx, loco secundo, quadratum secundae ut et factum e duplo primae partis Radicis in tertiam in loco tertio duplum primae in secundam, in loco quarto, et sic ratio cinae ac Methodus loca Elementorum inveniendi de aliis quoque Radicibus Polynomiis, deque aliis earum potentiis deque procedit.

Sectio 4.

§ 147. Ratio propter quam Classificatio Potentiarum (§ pr. Num. 1.) mentionata in Quadrato quidem per Ordinas in Cubo per ternas, et sic pono notas fit, scilicet, quia Quadratum Numeri 9 (: qui est maximus inter Unitates :) non excedit duas Notas, Cubus vero quis Numeri sit ad terminum notarum ut patet e Tabella (§. 144.)

Problema XIX.

§. 148. Ratio e dato quovis Numero Radicem Quadratam extrahere.

Resol. 1. Ro Numeri ultra duas notas non assurgentibus in promptu esse debet Tabella Radices ac potentias Numerorum simplicium continens

tenens, quam supernis (§ 144.) exhibimus, si autem Numerus plurimum Notarum occupat, tum ante omnia id distinguatur in Classes seu membra a Dextris sinistrum versus. Classibus singulis binas notas assignando (sinistima tamen Gratia una constare sit.) Haeque Classificatio ante operationem ostendit tot notas Numericas habituram Radicem extrahendam, quot Classes seu membra in uno dato reperiuntur (§ 146 Num 1.) Cujus Classificationis rationem jam (§. praec.) indicavimus.

II. Hoc fato intuendo semper praefixam formulam Generalem Algebraicam (137.) eadem Methodo §139 dictum operatio procedat, itaque eandem a sinistris inquando, assumatur sinistimum Dati Numeri membrum in quo cum contineatur Quadratum termini primi quaesitae Radicis (§146 Nro 2.) quaeratur in Tabula (§. 144.) Numerus in Columna, et Radix ejus ponatur post Datum Numerum in Cumulam primo termino quaesitae Radicis, ex quo fiat quadratum, idque membro sinistimo subscriptum ab Ave subtrahatur noretque primum Residuum.

III. Ejusmodi Residuo, si quod mansit,

adjici

adjungatur Sequens Dati Numeri Membrum aut Ve
si nullum mansit Residuum solum scribatur infra
lineam transversam in quo (ac Residuo; si quod
mansit.) cum tam ex formula Generali quam Et iam
(§. 146. Nro 1.) Continuo Duplicandum est Termini Ra-
dicalis jori ductum in Secundum Et praeterea Secundi Termi-
nini Quadratum illud per Zab. Ve autem per b² in
formula generali repraesentatum, Et quia illud Factum
nempe e duplo Termini primi in Secundum termini pri-
mi jam inventi, unde Quotus emergens erit Secunda no-
ta Radicis, quae ducenda est tam in Divisorem quam
in Seipsam, at facta sic addantur ut Quadra-
tum notae Secundae, quod in ultimum termini Secundi
nota terminatur una nota versus Dextram excurrat
Et summa sic subtrahatur, seu (: ut idem brevius pro-
gatur.) Quotus recenter inventus Divisori a Dextris
jungatur Totumque Ve in eundem quotum ducatur Et
factum e Vinculo evascens subtrahatur e Numero sub
lineis Scripto; si nihil remaneat in casu, quo Da-
tus Numerus e Dimensionibus, indicio est eundem Nu-
merum datum esse perfectum, quadratum inventae Ra-
dicis

Radicis duarum Notarum vid Exempl. I. Si vero numero Dimembri post alteram subtractionem aliquid remanens erit, Id erit Argumento, Numerum Datum non esse quadratum perfectum consequ. Radicem illius esse Irrationalem; vid Exempl. II.

IV. Quod si autem datus Numerus pluribus quam duobus membris constet, qui Radix pluribus quam Duabus Notis constabit (§ 146 Num 1:) Itaque secundo Residuo, si quod mansit adjungatur sequens membrum aut de non illo existente infra lineam deponatur, tumque quod infra lineam existit nota Dextrina imminutum dividatur per Duplum Terminum primi Radicis (~~[illegible]~~ (atque instar minus Tabulae constituunt:) Et Quotus pro Nota Radicis quaesitae nota scribatur, tumque reliqua operatio peragatur ea Lege, quam Reg III. continet, Et ita porro quoque si nempe tribus notis Radicis jam inventis, quartae ad duae lateat, tres illae notae jam inventae instar minus quoque primo Radicis quaesitae Terminum Tabulae, Et ea quae ad duae lateat pro secundo, tum rursus modo praescriptis statim Re

quem primum terminum duae notae radicis jam inventae ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

qu

gulis exposita repetatur oratio, dum nullum supersit Residuum, Radix e dato Numero accurate e eruta vid Exempl. III. Si quid vero remaneat Residui, indicio erit Numerum propositum non esse Quadratum, proinde Radicem habere Irrationalem vid Ex. IV.

V. Si inter operandum eveniat ut Duplum termini primi Radicis pro novo Divisore assumptum majus sit membro per ipsum Dividendo pro Quoto, seu pro Nova Radicis nova scribatur Zerus tunc eidem membro Dividendo adjiciatur a Dextris sequens propositi Numeri membrum. At Dextrum hujus membri nova relicta Numeri reliqui per Duplum Omnium Radicis notarum Factum inveniturum, ut ipsi instar minus Terminis considerarum diradatur, Denique quotus evascens scribatur pro nova Radicis nova et reliqua fiant more consueto vid Exempl. Ex. V.

VI. Si Numerus e quo Radix extrahenda sit Fractus tunc tam e Numeratore, quam etiam e Denominatore per Regulas superiores extrahatur. Ex gr. $\sqrt{\frac{16}{4}}$ est $=\frac{4}{2}$ $=2$. Demonstratio eadem est, quam addimus superius (§ 139.)

Exempla

	Exempl. Extract.	Radicum	Quadratum
I.	Potentiae 11,56	Radix	34
II	Numero 1,14	Radix	12 165 ℛ
		$= 12 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$ ℛ.	
III	Numero 3,16,12,84	Radix	1778
IV.	Numero 38,94,89.	Radix 624,0905 ℛ	$= 624 + \frac{9}{100} + \frac{5}{1000}$ ℛ
V.	Numero 25 20,04,00,	Radix	5020

Scholion. 1.

§§ 149. Claritatis Exemplum causa IV juxta praescriptas Regulas uberius explanabimus, Itaque si Ol-sidere Radix quadrata Numeri 389489, secere Ziffer juxta Reg. I.) interpositis virgulis in tria membra, quibus singulis Bonae notae respondeant, initio a Dextris facto (: uti debere in adjuncto Schemate.) tum quaerere (juxta Reg. II.) Radix quadrati primo membro 38 proxime aequalis quae est 6 et Ille scribatur a Dextris in Lunulam quae est Quadratum.

36. 38 94 (: 624, 09.) Subtrahatur a primo membro unde manet Residuum 2 cui adjungatur (juxta Reg. III.) membrum secundum

94

94, Et inventi Radicis duplo id est 12, pro Divisore ascripto, per 12 dividatur 29 Et Quotus 2 scribatur in lunulam, pro secunda nota Radicis, quae sit, qui primo ducatur in Divisorem, deinde in se ipsum, Et summa e Duobus factis emergens (juxta Reg. III) id est 244 sub scripta Numero 294 ex hoc auferatur, habebitur Residuum 50, cui (juxta Reg. IV.) Tertium conjungatur membrum 89. Et utraque nota 62. Inventus reperta considerentur tanquam pars prior Radicis Binomiae ideoque ejus Duplum 124 accipiatur pro novo Divisore, per quam Residuum tertio membro, auctum dempta nota Dextrima ÷ 508 dividatur Et Quotus obtentus 4 scribatur pro tertia nota Radicis, quae tertia nota recenter inventa jungatur a Dextris Divisori, Et sic ita auctus

Exemplum.

3894,89	(:624,09
36	I. Divis.
294	12
244	II Divisor
5089	124
4976	
11300	III Divisor
0	1248
1130000	
1123281	IV. Divi
6719	12480.

per eam

per eandem notam recenter inventam multiplicetur tumque factum exinde emergens 4976, auferatur ex 5089 relinquetur 113, Et quia nullum restat membrum Numeri proposita Juxta Residuo adjungatur Radix quadrata vel proximae 624 Numeri Dati 38,94,89 qui si Numero 113 numeretur, foret Numerus perfecte Quadratus; nempe quem Radix 624, semel in se ducta gignit, seu restituet. Scholion.

§ 150. Quando Calculus singularem accurationem non desiderat Residua, quae peracta, ut (§ praec.) exposuimus extractione supersunt negligi possunt; at si etiam eorum rationem habere oporteat, tum extractio Radicis per approximationem, ut vulgo vocatur continuanda est: Residua Radicis parsim in Fractionibus Decimalibus est inveniendo toties sese novis et ultima subtractione remanentibus novi membri instar ascriptis, Divisi Zeris, quot notarum fractio desideratur, atque Extractione (: juxta Reg. III. et IV.) continuata; notae enim exinde inventae, erunt totidem Decimales notis integris Radicis quaesitae adjungendae ex. gr. in Schemate (§ praec.) ultimo Residuo 113 adventur duo

Zeri

Zeri, et Radix reperta 624 spectetur tanquam Pars prima Binomii, adeoque ejus Duplum 1248 scribatur pro Novo, eoque tertio Divisore, per quem dividatur 1130, in quo tanquam minore non peragit Divisor, ideo (juxta Reg. v. § 148.) notis integris Radicis quaesitae factum inventis separatus indicans Residua Radicis in fractis nullam esse partem Decimam. Et quia Zerus tam in Divisorem, quam etiam in se ductus dat pro facto 0, quod subtractum ex 11300, ac integrum relinquit ideo novo tunc Residuo 11300, rursus adjungentur duo Zeri, ac Radix 6240, iterum pro prima parte Radicis Binomii habeatur, cujus proinde duplum 12480 erit novus Divisor per quem dividendo 11300 reperitur quotiens 9. qui notis inventis Radicis junctus, Radicis Residuae partem Centesimam inventam significabit, et tam in Divisorem, quam in se ductus gignit factum tot 1123281, quod ex 1130000 subtractum relinquit 6719, si jam Radicem inventam 624,09, pro satis accurata habere velit, negligendum est ultimum

Res

Residuum, ac si proprius ad Duo ad Radicem ce-
ram, accedere lubeat, rursus Duo Zeri ascribendi
sunt Residuo, atque eadem operatio est repetenda
donec tot habeantur notæ Decimales, quot vi-
sum fuerit. Problema XX.

§ 151. Rom. Edato quovis Numero Ra-
dicem Cubicam extrahere.

Resol. 1. Pro Numeris ultra tres notas non
exurgentibus extrahatur Radix Cubica ope
Tabellæ, quam supernis § 144. exhibuimus, si au-
tem Numerus major, quam trium notarum occur-
rat, is ante omnia in membra distinguatur, ita
quidem ut a Dextris incipiatur post ternas,
quasque ejusdem propositi notas inseratur
virgula, et quot erunt ejusmodi Membra vir-
gulis distincta (quorum sinistrum etiam du-
abus aut unica quoque nota constare potest) tot
erunt in Radice extrahenda notæ (§ 146. Num.
1.) ac proinde

II Adhibita formula generali atque Me-

Methodo (§ 141.) praescripta, primum quoque ex Membro sinistimo extrahatur Radix Cubica, ita quidem, ut cum in eodem Membro Cubus notae primae Radicis contineatur (§ 146 Num 2.), quaeratur in Tabella (§ 144.) Numerus Cubicus aequalis vel proximus minor membro illo sinistimo et Radix ejus scribatur post propositum Numerum in Lunulam tanquam primi Nota quaesitae Radicis, consequenter Cubus ejusdem subtrahatur e Membro illo sinistimo, et notetur Residuum primum si quod mansit.

III. Adjungatur ad Residuum, quod mansit Membrum sequens alias vero solum de Membrum ducta transversa subscribatur in quo (una cum Residuo; si quod mansit.) continetur debet.) triplum Quadratum ~~primi~~ terminii ductum in secundum ~~primum~~ # et secundi Cubus (§ 146 Num 2.) et quia ex his Elementis primum in nota antepenultima, secundum in penultima, ac tertium terminatur in ultimo vel relictis e Membro dividendo duabus postremis nominis reliquum dividatur per triplum Quadratum

Triplum Quadratum secundi ductum in primum

Ra

*quæ ducatur primum quidem in Divisorem, tum triplum ejus quadratum in Notam primam radicis

Radicis jam mientis erit Quotus secunda Nota Radicis *a Eodemque ex ea fiat Cubus, et Facta sese addantur, ita ut secundum una nota excurrat versus Dextram ultra primum, tertium vero factum seu Cubus notæ secundæ ultra Factum primum duabus notis excurrat, denique summa ex 2is factis colligenda subtrahatur, et numero infra lineam transversam existente, ac notetur si quod est Residuum secundum. Cui

IV. Adjungatur Membrum sequens et utraque Radicis nota jam mienta instar Unius spectata pro primo Radicis Terminio, dabeatur eademque operatio, quæ Reg. pr. III. exhibita est in hac quoque Divisione secunda repetatur, et reperietur tertia Divisoris nota. Quâ mientâ si post Subtractionem adhuc aliquid remaneat Residuum, tunc denuo adjungatur Membrum sequens. Ac tribus Radicis notis jam mientis instar unius consideratis eadem Lege, repetatur operatio atque ita

ita deinceps dum nullum supersit Membrum Dividendum. Et si operatione instituta nullum supersit Residuum Radix accurate est inventa. Si quod vero Etiam remaneat, indicio est propositum Numerum esse Cubum, habere proinde Radicem Irrationalem.

V. Si inter operandum eveniat, ut Triplum quadratum Termini Primi majus sit Numero per Seipsum Dividendo pro Quoto scribatur Zerus, ac eidem Dividendo adjiciatur sequens quoque Membrum Dati Numeri, operatioque more consueto continetur (per Ara Reg. III. Prae.)

VI. Si propositus Numerus sit Fractus extrahatur Radix Cubica tam e Numeratore quam Etiam e Denominatore. ex. gr. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ $x^{\frac{2}{3}}$) $x^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}$. Demonstratio eadem est quae (§ 141.)

Scholion 1.

§ 152 Unicum Exemplum adferemus mina

ra

minitatim juxta Præscriptas Art. præc. Regulas
exhibendum. V. gr. Sit extrahenda Radix Cubi-
ca e Numero 74618461. Dividens e ita est 2e
Numerus (juxta Reg. 1.) in rejectis unguibus in mem-
bra terni notis Constantia, initio a Dextris facto,
quemadmodum in adjecto schemate Divisus habe-
tur; Deinde juxta (Reg. 2.) Cum primi Membri
a Sinistris Radix Cubica sit proxime 4 scri-
batur 4 e latere in lunulam, quis Cubus 64 subtra-
batur e primo Membro 74. erit Residuum 10.
Hinc juxta Reg. III.) adscribatur Numeri Dati Mem-
brum sequens 618, ex quo et Residuo 10 com-
positus Numerus 10618, rejectis duobus notis Dexti-
mis, adeoque 106 dividatur per incentæ jam Radi-
cis 4 triplum Quadratum, quod est 48, et quod
inde emergens 2 priori Radicis parti 4 jungatur
simulque primum quoque ducatur in Divisorem 48
et factum 96 subtrahatur Dividendo 106 ita

ut

ut Unitates Unitatibus De-
cades Decadibus respondeant. Deinde 2º ejusdem
secundae 2 triplum quadra-
tum ÷ 12, ducatur in primam
notam Radicis ÷ in 4 erit
factum 48, quod priori facto
ita subscribatur, ut nota ver-
sus Dextram ultra factum
primi excurrat. 3º Denique
eadem nota 2. elevetur ad cu-
bum, qui est 8, ejus ita subscribatur facto secun-
do, ut hoc versus Dextram ab illo una excur-
ratur tandem facta colligantur in unam summam,
quae est 10088, haec autem est 10618, subtrata-
tur erit residuum 530, cui rursus (juxta Reg.
IV.) adjungatur Membrum, sequens 461, et qui ex
his componitur Numerus 530461 relictis ad Dextram
duabus notis adeoque 5304 dividatur per triplum
quadratum notarum 43, pro primo termino Ra-
di

$\sqrt[3]{(33,076,161)}$

$\sqrt[3]{(5,764,224,257)} = 1793$

$\sqrt[3]{(12,326,391)} = 231$

$\sqrt[3]{(30,371,328)} = 31$

dicis reputatarum, et per 5292 erit Quotus 1. qui pro-
nota tertia ponatur et primum quoque ducatur in Di-
visorem, qui unitate erit ipsum factum cum Uni-
tas non multiplicet, Secundo. ejusdem novæ ter-
tiæ triplam Quadratum, et tria ducatur in 42 priorem
Sele Terminum Radicis unde Factum Secundum e-
rit 126, tertio denique fiat Cubus ex 1. qui erit 1.
Tandem facta Sele (juxta Reg. III.) colligantur in unam
summam, quæ est 530461, Sele itaque cum sit æqualis
toti Dividendo in Silque proinde Residui ma-
neat et nec aliud supersit Membrum Numeri
propositi patet ex Numero 74618461 Radicem
Cubicam esse accurate Numerum 421, ut potest quæ bis
in se ducta accurate restituet, Numerum propo-
situm. Sc Johori 2.

§ 153. Si in Daro quoquam Exemplo ex
ultimo Membro Residuum, quod piam maneat atque
Calculi accuratio id poscat, ut etiam Residui
Sabeatur Ratio, tunc extractio Radicis sic quoque
uti (§. 150.) per Aproximationem, continuanda est

Ar

Hoc tamen Discrimine, quod sic non duo; sed tres semper Zeri instar novi Membri adjungendi sunt, et sic quidem toties, quot novae Decimales desiderantur cum prioribus integris. Continuata enim taliter operatione, et notis mentis spectatis instar primae partis Radicalis Binomiae, semper poterit alia nova tanquam pars secunda Radicis reperiri ex. gr. $\sqrt[3]{48} = 3 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100}$ &c. et $\sqrt[3]{474,676}$ $\sqrt[3]{14} = 780,068$ &c. $= 780 + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000}$ &c.

Scholion. 3.

§ 154. Examen vero recte mentis Radicis in potentiis imperfectis, tam Integris quam Fractis Pe; si inventa Radix elevata ad potentiam Datam, una cum adjuncto Residuo adaequet ex quo Radix extracta Pe, ut tentanti in adductis (§. prae.) Exemplis patet.

Scholion 4.

§ 155. Locus sic esset juxta Aut Zores Algebrae Elementalis agendi de Calculo Quantitatum

Radi

Radicalium (: ita autem vocantur Quantitates, quibus Signum Radicale præfigitur.), sed cum Problemate omnia, de iis quantitatibus earumque calculis sine Dispendio Doctrinæ nobis necessariæ prætermitti posse non ignoremus, nos ad res nobis magis necessarias properabimus. Neque quæ Sacrorum de Potentiis, et Radicibus a nobis dicta fuere, quicquam amplius adjiciemus.

SECTIO IV.

De Analysi, seu: Arte Resolvendi Problemata per Calculum Algebraicum et Aequationes.

CAPUT I.

De Natura Analyseos, Problematumque ac Aequationum.

Definitio XXVII.

§ 156. Analysis vocatur Ars sive Methodus Problemata ope Calculi Algebraici Resolvendi (cong. §3.)

Defini

Definitio XXVIII.

§. 157. Problematis autem Nomine, de loco venit quisquis Proo, qua petitur ut e Datis quibusdam Quantitatibus alia incognita Quantitas, una v. etiam plures detegantur ex. gr. si proponatur quaerendus Numerus, qui sibi additus et in se ductus det summam aequalem facto. Coroll.

§. 158. Cum itaque valor Quantitatum incognitarum, e Datis seu Cognitis eruendus sit (§ pr.) manifestum est inter Quantitates datas et quaesitas nexum quendam et Relationem intercedere debere; alioquin Das ex illis eruere foret impossibile. Qui nexus Relationes nuncupantur Conditiones Problematis v. c. Numero quaesito (§ praec.) Ille adducitur Conditio, ut quis sibi additi summa, et in se ducti factum aequalia sint. Conditio Problem:

Se Solution.

§. 159. In quavis autem Problematis Conditione involvitur aequalitas quaedam duarum quarundam quantitatum, quae Proinde conditionis seu aequalitatis in ipsa contentae, expressio Algebraica

vocatur Aequatio. Ex. gr. Si proponatur Problema de inveniendo Numero, qui una cum suo Dimidio efficiat 6, evidens est, in quo conditione involvi aequalitatem, quam Numerus iste suo dimidio auctus habet cum Numero 6. Definitio XXIX.

Aequatio?

§. 160. Est itaque Aequatio formula Algebraica ex libris per interpositionem signi = certas quantitates quomodocunque affectas esse sibi invicem aequales, vel etiam aequales in Zelo Ex. gr. $x + \frac{x}{2} = 6$ quae est Expressio Conditionis Problematis (§ praec.) allati.

Coroll. 1.

§. 161. Quodvis itaque Problema, in tot aequationes resolvi potest, quot adjectas habuerit Conditiones; si nempe singulae Conditiones singulis aequationibus exprimantur ex. gr. Si proponatur Problema de inveniendis duobus Numeris, quorum Summa sit = 10, Differentia = 2, Duae aderunt Conditiones, totidemque aequationes; si nempe prior Conditio resolvatur, in aequationem Summae cum Numero 10, posterior autem in aequationem Differentiae cum Nro 2, sic v. gr. Si Duo Numeri quaesi-

ti

ri, designentur per x & y. erit prior Equatio $x+y=10$, posterior aut $x-y=2$, sed ex his quae sequuntur Clariora ad hoc fient. Coroll. 2.

§ 162 Ex his consequens etiam est, quam libet Equationem, duobus debere constare membris signo = conjunctis, minimum Termini, qui sunt ex sinistra parte signi = dicuntur Primum Membrum Equationis, qui vero Dextram partem occupant Membrum Secundum constituunt, quae Duo Membra quoad valorem sunt Equalia. Coroll. 3.

Membrum Aequationis primum & Secundum.

§. 163 Quod si ergo unum Membrum Equationis constituant Positivae Quantitates, & Negativae sese destruentes, tunc alterum Membrum Equationis erit $=0$, ex. gr. $3a+5-2a-5-a=0$ Pariter si ex uno Membro Equationis omnes termini transponantur, ad aliud cum signis contrariis, tunc quoque alterum Membrum Equationis erit $=0$, sic cum sit $5+2=8-1$, erit $5+2+8+1$, $=0$

Scholion.

§. 164. Totum Artis Analyseos Artificium

in

in tribus iis se fundatur nimirum 1o. In inventione expressione primae aequationis, ac tandem 2do. In arte reducendi datam aequationem ad unum terminum incognitum, ita ut ex una aequationis parte obtineatur unus solus terminus incognitus liber ab omnibus + tam incognitis, quam etiam cognitis terminis, ex alia aequationis parte mere termini noti habeantur. Denique 3o. In resolutione Problematis sive aequationis ejusdem ad unum terminum incognitum reductae, substituendo videlicet in eadem aequatione pro literis numeros, aut vero construendo juxta Geometriam figuram prout exigit aequatio. Tribus itaque iis fundamentis innixum Problema seu aequationes solvendi artem ursam, nosque in quatuor operationes totidem Problematibus comprehensas distinguemus, in quibus si qui recte exercitati fuerint, nihil tam reconditum iisdem proponi poterit, cujus solutionem ope operationum quatuor sequentibus hoc capite Problematibus comprehensarum, daturi non essent ex iis autem Problematibus

+ aliis

Primum

Primum Complectatur operationem qua mediante primae cujusvis Problematis Aequationes inveniri, et exhiberi debent. 2dum: tandem Problema comprehendet operationem, per quam Aequationes Solitariae (: in quibus incognitus unus est vel si plures in sint Homogenei :) reducuntur ad unum Terminum incognitum et Solitarium, seu ad Aequationem cujus alterutro Membro, quantitas incognita sola continetur, in altero vero nisi quantitates cognitae. 3tium: exhibebit operationem qua Aequationes intermediae plures, in quas Problema Resolutum est. Consq. in quibus plures occurrunt Termini incogniti, Heterogenei reducuntur ad Aequationem Solitariam v. talem in qua reliquis eliminatis una tantum continetur quantitas incognita. Denique Problemate 4o: Aequationes ad unum incognitum atque ab omnibus notis reductae Resolutionem indicabimus, quibus etiam Problematibus Axiomata, quaedam de Aequalitate Quantitatum (: in quibus Reductionum Regulae fundantur :) praemittemus

Axio

Axiomata Aequalitatis.

§ 165. I. Quælibet Quantitas est æqualis sibimetipsi. ex. gra. $a=a$. Sic $4+2=8=2=3\times 2=\frac{12}{2}=6$. Si ex 4. & 2 Differentia inter 8 & 2 factum ex 3 in 2 Quotus ex 12 per 2. sunt inter se æqualia.

II. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt & iam æqualia inter se. ut: Si $a=x$ & $b=x$ erit propter $a=b$. Item si $4+2=6$ & $8-2=6$ erit & iam $4+2=8-2$ & sic.

III. Æquale pro æquali, aut æqualia pro æqualibus substitui & surrogari possunt quin turbetur æqualitas, ut si $x=y$ & $y=a$ erit propter $x=a$, sic cum $4+2=3\times 2$ & $3\times 2=\frac{12}{2}$ erit propter $4+2=4+=\frac{12}{2}$.

IV. Si æqualibus adveniat æquale vel æqualia aggregata erunt æqualia, ut si $a=x$, & parti utrique adveniat b erit $a+b=x+b$. Item si $a=x$, & $c=d$ erit & iam $a+c=x+d$.

V. Si ab æqualibus æquale aut æqualia auferantur aut subtrahantur Residua

ma

manent Aequalia. Ut si $a = x$, & ab utraque parte an-
ferato c, erit $a - c = x - c$, item si $a = x$, & $c = d$ erit
quoque $a - c = x - c$, item si $a = x$ & $c = d$, erit quoque
$a - c = x - d$.

VI. Si Aequalia per idem, aut Aequalia multipli-
ces facta erunt Aequalia, ut si $a = x$ & utraque
pars multiplicetur per b erit $ab = xb$, item si $a = x$
& $c = d$, erit $ac = xd$.

VII. Si Aequalia dividantur per idem vel Ae-
qualia, Quoti erunt Aequales, ut si $a = x$ utraque pars
dividatur per b erit $\frac{a}{b} = \frac{x}{b}$, item si $a = x$, & $c = d$
erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$.

VIII. Quantitates Aequales elevatae ad eun-
dem gradum, potentiae manent Aequales. ut si $a = x$
erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

IX. Ex Quantitatibus Aequalibus, elevatis
ad eundem gradum Potentiae extractae Radices ejus-
dem gradus erunt Aequales ut si $aa = xx$ erit
$\sqrt{aa} = \sqrt{xx} \therefore a = x$.

Problema XX.

§ 166. Ratio Datum Problema ad suas Aequatio-
nes

nes reducere, seu Dati cujusvis Problematis æquationes primarium inveniri et exprimere.

Resolvo I. Considerabit Analysta accurate
1.) a.) statum Quæstionis, seu quid perare inveniendum
2.) et b.) quæ conditiones sive circumstantiæ Proble-
3.) mati adjectæ, Deinde (3.) quænam Quantitates sunt cognitæ, seu Datæ, et quæ incognitæ seu quæsitæ
4.) quænam item d.) inter quæsitas sit illa, a cujus inventione seu notitia pendet solutio Problematis ac
5.) denique e.) quænam inter Datas et quæsitas intercedant Relationes, quibus rite intellectis.

Reg. II. Quantitates Datas seu cognitas
1.) primis Alphabeti Literis, quæsitas vero seu incognitas postremis denominet ita quidem, quod si plures occurrant quantitates (sive eæ sint cognitæ seu incognitæ.) quæ ob mutuam aliquam Relationem
+ Solent 2.) eadem litera designari, + tum tales quantitates non diversis sed eadem designentur litera juxta eam sese, quam habent Relationem, ut si v.c.

Dentur

Dentur duae incognitae Quantitates, clarum sit autem
mam earum esse duplam alterius, tum primi Denomi-
natio x altera aut non denominetur y. Sed potius 2x
ad facilitandam sese operationem Reductionis, de quam
inferius, Atque Denominationes taliter factae, ad latus 3.)
folii aliquod seorsim et distinctae (: ad scriptis etiam nu-
mimbus, in quaestione solvenda adductis signo = inter-
posito (: adnotandae erunt, ne sese excidat e memoria, quae-
nam Litera quis quantitatis loco usurpetur in Calculo.

Reg. III. Post probe cognitum Quaestio-
nis statum, institutosque singularum Quantitatum ad Pro-
blema pertinentium Denominationes, videndum accura-
te quaenam quantitates juxta Conditionis Problematis
vel simul v. seorsim acceptae, dicantur esse aequales atque
caeteris (: nihil respiciendo notae ne sint an ignotae :) juxta
Conditionis Problematis proxime, in aequationem, ordinan-
dae sunt, signum = (: aequalitatis :) inter quantitates ae-
quales interponendo, quae quidem aequationes semper tot
erunt, quot Problema habet Conditionis (§ 161.) seu
quot termini incogniti inveniuntur diversi excepto
casu quaestionum indeterminatarum de quibus infra.

Quod

Quod si vero aliqua Problematis (Quæstio) Conditio (id quod aliquando erit.) non Æquationem sed aliquam Proportionem in se continet quisquis proportio metodo suo loco tradenda in Æquationem reformetur.

Exempla

I. Detur Problema Syncus: Puellam quandam ambierunt tres Adolescentes, quorum primus ei donavit aliquot Aureos, secundus octavis plures quam primus, tertius autem tot quot duo priores simul accepit, quæ Puella adeo in Ursum 160 Aureos, quæ vero quantum quisque dederit.

1us 36
2us 44
3us 80
dederunt

In hoc Problemate 1o (quæstio Reg. 1.) patet dari summam a Puella acceptam nempe 160 Aureos, dari item Numerum 8, quæ vero singulorum Adolescentum oblatum, patet Præcæ mienti primi Oblato, Cæterorum oblata innotescere, siquidem oblatum secundi 8 Aureis, et plus oblato primi, oblatum vero tertii ex oblatis utriusque coalescit. Igitur.

2o (quæstio Reg. 2.) sit summa 160 = a et 8 = b Oblatum vero primi = x, erit tum quæstio Problematis Conditionem oblatum secundi = x + b, et oblatum

oblatum tertij $= 2x + b$. Ami

3º (: juxta Rg 3.) Cum oblata omnium trium simul efficere debeant $160 = a$, collectis omnium oblatis nascetur equatio $x - x + b + 2x + b = a$ seu $4x + 2b = a$.

II. Proponatur illud Problema Ancilla cum servo triticimetratas bajulans, sub pondere quaesita est cui servus non est nisi quod quaeraris, nam si unam a me acceperis, idem amborum futurum est omnis, sin autem et tuis metretam unam mihi deceris, omnis meum duplum erit tui. Et quot quisque metretas bajulaverit!

In hoc Problemate 1º Perspicuum est, quaeri duos Numeros, a se independentes, minorum Numerum Metretarum ab Ancilla, et Numerum Metretarum a servo bajulatarum, quarum duae dantur Relationes, una scilicet aequalitatis, et altera (ut sic loquar.) Duplicitatis. Quare 2º Numerus Metretarum per servum bajulatarum 10 cetur $= x$ et per Ancillam bajulatarum Metretarum Numerus $= y$. Ami 3º: si juxta priorem conditionem ex x ad y, accedat 1. erit $x - 1 = y + 1$. Si vero juxta conditionem posteriorem ad x ex y accedat 1. erit $x + 1$ duplum de $y - 1$. quare ut hoc illi aequale fiat, debet hoc puta x et y per 2 multipli

unde ipsi certe, erit quoque $x+1=2y-2$, atque mentis sunt Duae aequationes, et totidem Conditionibus Problematis erutae.

III. Sit Propositum sequens Problema: Invenire tres Numeros quorum primus cum secundo faciat 8 secundus cum tertio 13 et tertius cum primo 11. In 2o Problemate.

1o. Patet dari tres Numeros 8. 13 et 11. ac pulchri tres alios a se independentes. Itaque 2o sit $8=a$ $13=b$, $11=c$, et quia tres Numeri quaesiti a se non pendentia, ut numerus ex alio minus tescat, ideo singuli singulis Literis designandi sunt. Sit igitur primus $=x$, 2us $=y$ et tertius $=2$. Tunc 3o ex prima quidem Problematis Conditione nascitur Iste aequatio $x+y=a$. Ex secunda Iste $y+2=b$, et ex tertia Iste $x+2=c$.

Problema XXII.

§ 167. Pro. Aequationes primas simplices (in qua incognitus unus est, v. si plures ii sint Homogenei.) ad unum terminum incognitum et solitarium reducere

seu

Seu: Efficere ut in uno Membro aequationis incognita sola in altero vero merae Quantitatis cognitae sint.

Resol. Quoniam valor Quantitatis ignotae ex datis seu cognitis eruitur, ideo inventa per (§. praec.) primam cujuspiam Problematis propositi aequationem, in id incumbere debet Analysta, ut retenta semper membrorum aequalitate, ita praedecentem transformet aequationem, ut unum aequationis membrum sola Quantitas incognita (: cujus valor quaeritur.) constituat, liber ab omnibus aliis quantitatibus, tam cognitis, quam incognitis, in altero autem membro merae quantitatis notae, nullis incognitis permixtae habeantur, quod ut recte fieri queat, operatio sequentibus Legibus est peragenda.

Reg. I. Si in aliquo, vel etiam utroque aequationis membro occurrant fractiones, eae ante omnia tollantur; Et quidem si plures fractiones diversae occurrant, jurabit confusionis vitandae gratia unam post alteram tollere. Tollitur autem Fractio (1°: Si ejus Denominator deleatur et per eundem Denominatorem reliqui omnes utriusque terminis membri multiplicentur. (Ratio) tunc enim terminus ille, in quo deleatur Denominator erit per eundem Denominatorem multiplicatus simul et divisus Ratio.

(§29)

§. 29.) quare cum et reliqui utriusque membri Ter-
+retinetur mini per eundem Denominatorem multiplicantur membrorum
aequalitas (§ 165 ax VI.) Ex gr. si fuerit $\frac{ax}{2} - \frac{b}{c} = d$,
tum omnes terminos multiplicando primum quidem per
2, erit $ax - \frac{2b}{c} = 2d$ et rursus omnes terminos
multiplicando per c erit $acx - 2b = 2cd$.) Sed col-
2do: litur quoque Fractio (2o: Si omnes utriusque Termini
reducantur ad eundem Denominatorem, tunc omnia ac com-
munis ille singulorum Terminorum Denominator (Rad.
Ratio: Nam hoc quoque in casu idem fit per compendium ac
si omnes utriusque Membri termini multiplicarentur
per eundem communem Denominatorem per quem
divisi existunt (§ 29.) atque ita deleto hoc De-
nominatore communi manet aequalitas (§ 165 Axi.
VI.) Ex. gr. praecedens aequatio $\frac{ax}{2} - \frac{b}{c} = d$ erit
reducendo omnes terminos ad communem Deno-
minatorem $\frac{acx - 2b}{2c} = \frac{2cd}{2c}$ et delendo utriusque 2c
erit $acx - 2b = 2cd$ Hoc peracto.

Reg. II.) Videndum hoc an eadem Quantitas
incognita, in unico hoc aut in utroque aequatio-
nis membro reperiatur? Et si in utraque parte ~~aequa~~ tio

Et

~~[illegible]~~ Aequationis compareat, tunc minor ad partem majoris (: si major sit Positivus.) transferatur mutato signo in Contrarium. Ex. gr. si sit $5x = ab + 2x$ erit transferendo minorem ad partem majoris $5x - 2x = ab$ seu $3x = ab$. E contra si major Quantitas ignota sit negativa eadem, mutato in Contrarium signo transferatur ad partem minoris ignotae ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$ seu $6x = ad$.

Notandum hic est. Quod etiam si in unico solummodo membro compareat Quantitas incognita. Si tamen ea sit ibidem valoris negativi, mutato signo transferendum e in Membrum secundum aut alterum in quo demum valor ejus sit Positivus, et non negativus. Ex. gr. si sit $a - x = b$ initio statim transferatur x ad partem alteram, ut sit $a = b + x$.

Reg. III. Pari modo. Si ex parte Termini incognitam Quantitatem continentis, compareant quantitates cognitae, illis per signa + aut − juncta, sed omnes etiam quantitates signis in Contraria transferantur ad partem alteram Aequationis. Ex. gr. si sit $ax + b - c = bd$, erit juxta hanc Regulam $ax = bd - b + c$.

Ratio harum Regularum II. III. proxime praecedentium e, quod terminum minorem aliquem Rão IIXIII Regul.

(: si

(Si sit Positionis.) Ex uno membro in aliud cum signo contrario + seu transponere, idem est, ac illum ab utroque termino tollere, e contra Terminum Negationum ex uno membro in aliud cum signo contrario ÷ + idem est transponere, ac illum utrique membro adoere (: id quod in Exemplis quibuscumque experiri licebit.) Atque vero cum idem Qualibus adveniret deinde, Qualitas retinetur (§ 165 ss. Ax. IV. vel V.) Neque igitur instituatur in Utriusque membris Equationis alicujus ejusdem Termini Additio vel Subtractio, compendii Eam, terminis idem illic ubi existit omittitur, et in membrum alterum cum signo contrario transfertur. Et hunc modum operandi ad modum compendiosum Analystæ volunt Figuram Matheseos

nb: sive Transpositionis. Notandum dicere: Hac Figura Matheseos. promiscue uti Analystas, protrescumque terminos seu Cognitos, seu incognitos per signa Additionis, aut subtractionis affectos, ex una parte Equationis sublatos volunt, id quod nos etiam facimus.

Reg. IV.) Tandem si termino ignoro adjecerat

ter

terminus notus per Hypothesim Multiplicationis (§25.) is tollendus est per Divisionem, dividendo scilicet per Terminum notum ad Ichentem ignoro omnes Terminos utriusque partis Aequationis, seu b rerum (quod ramen eodem redit) Terminum notum delendo illinc ubi ignoro per Hypothesim multiplicationis ad Ichent, per eundem Terminum notum dividantur omnes reliqui Termini utriusque membri, ut si sit $2ax = b + c$, erit Inquisita Iam Regulam W. $x = \frac{b+c}{2a}$.

Ratio. Ratio Ignis Regulae est, quia terminus incognitus, qui per notum sibi ad Ichentem multiplicatus Iaberet; si per eundem dividatur, manet solus incognitus (§29.) Et ut incognitus Ut in casu a noto liberetur, sufficit Iam illinc delere reliquis per eundem Divisis; tunc enim terminis singuli per eundem terminum ignoro ad Ichentem divisi existent, et sic manebit aequalitas membrorum (§165 Ax. VIII.)

Reg. V.) Si vero Termino ignoro ad Ichent Terminus notus per Hypothesim Divisionis expressus is tollendus est per multiplicationem (juxta Reg. 1. Ignis Robl.) minorum delendo notum ab ignoro

cui ad

cui ad Scheet, ac per eundem reliquos omnes utriusque Membri Terminos multiplicando, ut si sit $\frac{x}{2}=6$ erit $x=\frac{6}{2}$.

Reg. VI.) Quod si autem occurrat Æquatio in qua omnes omnino Termini, per eandem aliquam Quantitatem multiplicati, vel omnes Divisi sunt, multiplicatoris, aut simpliciter Divisor deleri possit, ex. gr. si sit $ax+ac=ad$, erit $x+c=d$. Item si sit $\frac{x+c}{a}=\frac{b+d}{a}$ erit dum $x+c=b+d$.

Ratio. Ratio Nam Multiplicatorem delere idem est, ac per illum singulos terminos dividere, et delere Divisorem idem est ac singulos terminos per eundem multiplicare; manet vero utroque in casu Æqualitas (§ 165 Axiom. VI. et VII.)

Reg. VII.) Si porro Quantitas incognita a cognitis plene jam separata, ad potentiam aliquam vel secundam, vel tertiam et Cæt. sit elevata ex illa, ut et Cæteris terminis, qui alterum Membrum Æquationis constituunt, extrahenda est Radix ejusdem gradus, cujus est potentia; Quæquidem Extractio in quantitate incognita reapse perficienda est,

jus Ara

juxta Methodum (§). allatam at in altero membro quantitates cognitas complectente sufficit unus ad hunc eandem duntaxat indicare, praefixo scilicet Radicali signo. Ex. gr. si sit demum $x^2 = a - b$, scribatur $x = \sqrt{(a+b)}$. Qua transformatione manere membrorum aequalitatem patet (ex §. 165 Axiom. IX.)

Reg. VIII) Quod si autem ex adverso, quantitas incognita depraehendatur esse signo Radicali affecta, tum deleretur utrumque membrum, ad eandem Potentiam, quam indicat Exponens signi Radicalis. Id quod breviter efficietur si signum $\sqrt{\ }$ terminis ignoto praefixum omittatur, atque alterius Membri elevatio duntaxat indicetur. Ex. gr. si sit $\sqrt{x} = a + b$ erit hinc juxta hanc Regulam, haec Aequatio $x = (a+b)^2$.

Ratio hujus Regulae satis evidens; hoc enim pacto, utraque membra aequationis ad eandem potentiam elevantur, et sic manet Membrorum aequalitas (§ 165 Axiom VIII) Ratio.

Reg. IX.) Si pro termini sint, pro se invicem destruere juxta §16. vel per Additionem aut Subtractionem coalescere possunt termini per indiminen-

di

si sunt, ut si sit $x+x+b+x+c=a$ erit $3x+b+c=a$, item si sit $3x-x=a+b-b$ erit $2x=a$.

SCHOLION.

§ 168. Præspecificatæ Jæ Regulæ Generales memoriæ probè imprimendæ sunt, eodemq; quo propositæ sunt ordine dato cuivis Roblemati applicandæ, præter Reg. IX cui illico statim in serie operationis satisfieri poterit, ubi adverteris eidem locum esse. Nos Claritatis gratia Regularum (§ pr.) allatarum ad Roblemata applicationem in uno Exemplo instituemus. Inveniemus Sect. per (§ 166.) in Roblemate Exempl. I. Jam Æquationem primam $x+x+b+2x+b=a$. In qua Æquatione cum sit locus Reg. IX juxta quam transformatur in Jam $4x+2b=a$ quæ (: utpote in qua Reg. VII. non habet locum.) per Reg. III. abibit in Jam $4x=a-2b$ in qua terminus incognitus x. Solus in uno, in altero membro autem meri cogniti comparent juxta Roblema (§ præc.) ut adeo Regula quæq; V. VI. VII & VIII. Quæ non indigeamus, quibus tamen (Jure Jis non illis.) in aliis Roblematibus solvendis locus esse pu.

Roblema XXIII.

§ 169

§. 169. Rõo. Problematum in quibus plures occurrunt incogniti Heterogenei plures Aequationes primas reducere ad unicam talem in qua una ē contineatur Quantitas incognita.

Resolutio. Postquam Problema quodpiam plures quantitates incognitas continens in duas Aequationes primas, per (§. 166.) ut resolutum est, Ille enim inter sese ante omnia comparandae sunt, ut quantitates incognitae praeter unam omnes, siquidem id fieri pro sensu eliminentur, obtinetur autem eliminatio Ille 2s modis.

I. Per substitutionem Aequalis pro Aequali i. e. Si duarum Aequationum primarum una per (§. 168.) ad unum Terminum incognitum & solitarium reducatur, tunc valor ejusdem Terminii incogniti in altera Aequatione prima substituatur, tanquam Aequali Aequali per §. 165 Ax. III. ex. gr. Problema §. 168 Exempl. II.) Resolutum in duas Aequationes primas, minorum $x-1=5-1$. & $x+1=2y-2$. Quaeratur itaque in posteriori Aequatione per (§. 167.) valor incognitae x, qui reperitur $x=2y-3$; Ut ergo valor loco x substituatur in priori Aequatione

+ ita erutus loco ejusdem terminii ignoti, in

tunc

tumque loco $x-1=y+1$. Atque inde $2y-4=y+1$. in qua unica continetur ac incognita y.

Similiter. In Problemate (Exempl. III. §. 166.) tres innuentur sunt Equationes primæ puta $x+y=a$, secunda $y+2=b$ et tertia $x+2=c$. Quæratur itaque in hac tertia Equatione valor incognitæ x, per (§. 167.) et reperietur $x=c-2$; valor autem incognitæ y. per (§. ccc.) in Equatione secunda reperietur $y=b-2$, qui duo valores si in prima Equatione substituantur obtinebitur Equatio $(+b-2)=a$ in quo unica duntaxat est incognita 2.

II.) Alter Modus incognitas quantitates eliminandi est per Compositionem Duarum quantitatum, nimirum eidemque tertiæ Equalium, cum scilicet e duabus Equationibus primis totius valores ejusdem incognitæ eliciuntur per (§. 167.) ac demum in unam Equationem componuntur. Ex. gr. In priori Exemplo, pro Fed. Reg. 1. allato, si tam e priori quam et tam a posteriori Equatione, valor incognitæ x, eliciatur, erit

in

in Priori quidem $x = y + 2$, in posteriori vero $x = 2y - 3$ itaque duos sic valores, in unam Aequationem Componendo erit $y + 2 = 2y - 3$. Pari modo.

Si in Postremo per Reg. 1. Exempl. tam e prima, quam e tertia Aequatione eliciatur valor incognitae x erit in prima $x = a - y$ in tertia vero $x = c - z$ Unde $a - y = c - z$ (§ 165 Axiom. 11.) eliciatur deinde e nova sic Aequatione valor incognitae y qui e $y = a - c + z$, idemque eliciatur etiam e tertia ex propositis Aequatione, in qua reperitur $y = b - z$ erit igitur duos sic valores conferendo $a - c + z = b - z$ ubi unica ea est incognita z.

Observandum ut duo Diversi ejusdem incognitae valores in novam Aequationem componendi ex duabus diversis Aequationibus eruantur, quorum una non dependeat ab altera, seu quarum una in alteram ope Problematis superioris (§ 162.) transformari non possit, secus enim valores illos componendo ejusmodi Aequatio acquiretur, cujus membra postrariaque per (§ cit.) transformationem demum utrinque fient Aequalia

indi

in Zilo, cujusmodi Equatio solvendo Problemati apta prorsus non est, sic si quis ex 2is duabus Equationibus $a+2x=c-y$ et $\frac{a}{2}+x=\frac{c-y}{2}$ (quarum prior instituta per 2 Divisione in alteram transformatur.) duos diversos incognitae x, valores erueret, eosque in novam Equationem componere vellet, e qua sola valorem alterius incognitae y, detegat; irrito conatu laboraret, ut pariclitanti patebit.

III.) Praxis tertia incognitam eliminandi est, per Additionem aut Subractionem, totius Equationis unius a tota Equatione altera ex. gr. Si in aliquo Problemate sed duae Equationes reperiuntur $x+y=a$ $x-y=b$, tum addendo has duas Equationes sibi erit $x+y+x-y=a+b$ (§ 165.) Axiom IV.) Imo aut $2x=a+b$ (§ 164 Reg. IX.) in qua incognita y eliminata habetur. Pari modo. Si prima Equatio sit $x-y=a$ secundo vero $8x+4y=b$, cupiens aut eliminatum y. per Subtractionem puta prioris Equationis e posteriori, tum itaque in posteriori Equatione y. per 4 multiplicatum appareat, priorem quoque Equationem ad destructionem ejusdem Terminis ignoti y praeparare necessum erit, quod fiet eandem Equationem priorem per

Numerum

Numerum 4 multiplicando. tunc enim si a posterio-
ri equatione $8x + 4y = b$ prior equatio eiusmodi
praeparata, id est $4x + 4y = 4a$ subtrahatur id est idem
illi addatur $\overline{4x = b - 4a}$ mutatis signis. erit Re-
siduum in qua equatione y eliminatum habetur.

Observandum hic est. quod alias etiam in aperto est, nimirum tamen praxim eliminandi incognitum, non nisi tunc posse adhiberi, quando equationes primae solvendi Problematis, vel tales reperiuntur (ut in Exemplo priori.) vel saltem tales reddi queunt (ut in Exemplo posteriori factum est.) ut ex iisdem per Additionem aut Subtractionem, id obtineatur, ut quantitas incognita obcontraria sua signa, quorum unum in una alterum in altera equatione habuerat, sese elidat; alias sinempe hoc obtineri nequit.) non idem verum alterutra e duabus primis Rationibus erit adhibenda.

Scholiori.

§ 140. Quaenam eliminandi ratio ex praemissis sit adhibenda in casibus peculiaribus, id usus et crebra Exercitatio docebit. Hoc certum est praescriptis statim viis posse reduci semper plures equationes primas ad equationem, in qua unica est sit incognita, si videlicet Rob-

lem

sit determinatum vel vero si Problema fuerit indeterminatum ad Equationem cujus paucissimæ sunt incognitæ. Quid vero sit Problema Determinatum et quid indeterminatum? Cap. proxime sequenti §176 videri potest.

Problema XXIV.

§171. Pro Aequationem ad unum Terminum incognitum et Solitarium jam Reductam in Numeros, lineas, resolvere.

Resolutio. 1.) Si Equatio sit in Numeros literis, quæ in Expressione Equationis ad unicum incognitum, et Solitarium reductæ, cognitas Quantitates indicant, substituantur illæ notæ Numericæ, pro quibus designandis eædem literæ per (§166 ad Libitæ fuere, tum quoque incognitæ et iam quantitatis valor, in iisdem Numeris clare videbitur ex gr. in Problemate Ex 1. (§ cit.) Equatio ad unum Terminum incognitum et Solitarium per (§. 167.) reducta est sæc $x = \frac{a-2b}{4}$ (§168.) in qua $a = 160$, et $b = 8$ (§166 Exempl. 1.) Si itaque notis Numericis loco literarum in posteriori Equationis membro substi-

tutis

tutis erit $x = \frac{160-16}{4} \div x = 36$.

II.) Si vero Equatio resolvenda sit in lineas, faciendae est figurae constructio prout exigit Equatio quod quomodo fiat in Geometria docebitur.

III.) Inventio taliter valore terminum ignoti videndum est, an substituto eodem valorem mento loco terminum ignoti, videndum est ut conditionibus propositae quaestioni satisfiat? Si ita iudicio id erit rite peractam esse operationem, summum errorem se in operatione admisisse dependendet, nisi forte Problema ipsum fuerit impossibile. ex. gr. Inventus per Sq. 1. valor incognitae x est 36, jam vero (uti § 166 ex v. videre est.) x est oblatum primi Adolescentis, ieque primum ex Offerentibus dedit Puellae aureos 36, se cundus autem juxta conditionem Problematis dedit 36 + 8 ÷ aureos 44, Denique tertius juxta quidem Problematis Conditionem dedit 36 ⊖ 44 ÷ aureos 80, est ieque summa oblatorum 36 + 44 + 80 = 160 ÷ quae summa in Conditione Problematis opposita habetur, ut adeo tuto ex his concluditur rite factum esse propositae (§ 166 Exempl. 1.) Quaestioni per singula Problemata Operationem.

Sedo

Scholion

§. 172 Atque Idee Præmissa (§. 166 167 169 et 171) quatuor Problemata sunt, quorum tria minorum in (§ 166, 169, et 171.) tradita, docent Regulæ Ursales seu generales Analyseos operationes, quæ in quolibet Problemate solvendo locum habent; Problema vero 4tum (§ 167) exhibet Regulas particulares, seu eas operationes, quæ nonnisi in solvendis Problematibus plures quantitates incognitas Heterogeneas continentibus sunt observandæ, ut adeo cognitis iis quatuor Problematibus ac operationibus in iisdem præscriptis rite perspectis et observatis. Quæst. quasvis possibiles, tam Determinatas quam etiam indeterminatas, seu sint simplices seu Compositæ solvere haud erit difficile.

Scholion

§ 173. Postquam autem solutum est Problema quodpiam, num solutio ejus sit legitima exploratur modo sequenti, minimum singulis literis tam cognitis a b c &c quam etiam incognitis x y z &c sed jam ope (Reg. I. § 151.) detectis substituantur sui valores Numerici, tumque singulæ Problematis propositi conditiones ponuntur ob oculos et si iisdem conditionibus Numeri illi exacti satisfecerint legitima est solutio sui minus viciosa. Conf. Exem. Reg. III. § 171.

CAPUT

CAPUT II.

De Analysi Problematum Simplicium Determinatorum, Et quidem unico incognito affectorum.

Definitio XXX.

§. 174. Problema vel est Possibile, v. Impossibile. Possibile est cujus conditiones non pugnant inter se, ac proinde solutionem admittunt ex. gr. si quaeratur Numerus qui sit dimidium Numeri 6, Numerus enim ille est 3. Impossibile vero Problema est cujus conditiones inter se pugnant; ut si quaeratur dimidium de Numero 6 ac adjecta conditione, ut id dimidium sit par, cum enim dimidium de Numero 6, sit ad Numerus 3 qui par esse nequit, conditio adjecta Quaestionem reddet Impossibilem. Possibile. Impossibile.

SCIOLIONI

§. 175. Problematis Impossibilitas aliquando ex conditionibus in ipsa Quaestione appositis illico elucet aliquando vero per decursum operationis in solvendo Problemate necessariae sese manifestat.

Analysta suo Calculo ad manifestum absurdum deducitur. Ex. gr. Cum ex Calculo provenit ro-

tum

tum esse æquale, sive parti, aut si terminus ipsi otus
dum valor quis inveniatur, evadat æqualis in eris cogni-
tis negativis, vel si sit æqualis Radici imaginariæ.
ut si foret v.c. $x = -4$ aut $x = \sqrt{-aa}$ & simi-
lia. In talibus itaque casibus Analysta propositum
sibi problema pronunciabit esse practice impossibile.
Possibilia vero Problemata alia sunt Determinata. In-
determinata alia. Definitio XXXI.

Determinata quid sunt?

§ 176. Problemata Determinata dicuntur in
quorum solutione cujuslibet incognitæ quan-
titatis valor ex Aequationibus per calculum
eruitur, qui proinde vel unicam ad solutionem,
v. si plures etiam eas determinato aliquo Numero ad-
mittunt. Indeterminata vero sunt, in quorum solutione,

Indeterminata?

valor quantitatum incognitarum e formulis calculo aequi-
litis secus erui nequit, nisi prius alicui ex incogni-
tis Quantitatibus valor ab Analysta, pro arbitrio sta-
tuatur, quæ proinde Problemata innumeras admittunt
solutiones cum infiniti sint valores, qui ad arbi-
trium Analystæ, pro Quantitatibus incognitis
substitui, et sic Quæstioni satisfacere possunt.

Ex. gr. si quæreantur duo Numeri, puta x & y. Iis ad-
jectis conditionibus, ut eorum summa sit $= 15$, Differ-

ferentia vero = 3 Numeri 6 et 9. datae Quaestioni satisfacientes, ope Calculi determinate eruuntur, utpote praeter quos nulli alii sunt Numeri, qui datae Quaestioni satisfacere possunt (vid. infra §) Verum si quaerantur duo Numeri x et y, facta adjecta conditione, ut eorum Differentia sit = 3 erit tunc ex conditione Problematis $x - y = 3$ adeoque $x = 3 + y$ (§ 167 Reg. III in notis.) in quae aequatione ad eundem valorem x Calculus amplius continuari nequit, et tamen valor ejusdem incognitae x necdum patet, propterea quod ejus valorem nigredinatur, adhuc incognita Quantitas y; debet itaque Analysta Quantitati y, valorem statuere ad Arbitrium, pro facto valorem x, acquisita formula aequationis determinabit, si enim ponatur y esse v. c. = 4 erit $x = 3 + 4 = 7$; si ponatur $y = 7$, erit $x = 3 + 7 = 10$, si ponatur $y = 10$, erit $x = 3 + 10 = 13$, et sic pono. Coroll.

§ 177. Cum valor cujusvis Quantitatis incognitae Calculo mediante tunc demum eruitur, ubi aequatio eandem continens, eo reducta est, ut unum ejus membrum, solitaria quantitas incognita, reperiantur (§ 167 in Resol.) ut adeo ex unica aequatione duae incognitae Quantitates innotescere mi-

nu

Indicium Pr. Determinat.

minime possunt, Imo palam est Problematis Determinati certum indicium esse, si videlicet tot in eo habeantur conditiones, seu tot ex quibusdam conditionibus formari queant Aequationes primariae quot incognitae quantitates diversis literis expressae in Problemate continentur.

Indic. Probl. Indeterm.

Ex adverso vero si pauciores reperiuntur conditiones, diversis aequationibus exprimendae, quam sunt Quantitates diversae incognitae id erit indicio Problematis indeterminati. Sic ver. gr. in allatis (§. 9.) exemplis Problema primus est Determinatum, utpote in quo duo sunt incogniti, diversi x et y et duae possunt formari ex conditionibus, Aequationes primariae nempe $x + y = 15$, et $x - y = 3$ Ast in Problemate posteriori etiam duas incognitas Quantitates x et y continente non nisi unica est aequatio, puta $x - y = 3$ indicio, quod Problema idem sit indeterminatum.

Scholion.

Plusquam Determinat. Problema

§. 148. Est etiam Problema, quod dicitur Plusquam Determinatum, in quo sese plures conditiones apponuntur, quam sunt quantitates incognitae diversae, Et licet aliquando accidat in Problematibus talibus ut postquam ex necessariis, simulque sufficientibus conditionibus valores incognitarum Quantitatum erutae sunt, reliquae etiam superflue conditiones verificentur, plerumque tamen

Ingens

Ejusmodi Problema erit Impossibile ob pugnam conditionum, quae eo casu non raro adest. Sic si (§ 176) in exemplo priori ad eas conditionem tertiam, ut nempe major ex Numeris quaesitis, sit aequalis Quadrato Differentiae eorundem, Ille quidem conditio in repertis numeris 6 et 9. casu verificabitur, at si jam ex. gr. adores: ut ambo Numeri sint pares Problema repugnantiam involveret cum repugnet, ut duo Numeri pares efficiant summam imparem. Problemata vero tam Determinata quam Indeterminata alia sunt Simplicia, Composita alia.

§ 179. Problemata Simplicia dicuntur, in quorum aequationibus Quantitates incognitae ultra primam potentiam non assurgunt, ut si sit $x = ab$, Composita autem sunt in quorum aequationibus incognitus ad potentiam secundam tertiam &c. &c. elevatus, ut si sit $x^2 = ab$; vel $x^3 = ac$ &c. Simplicia Composita.

Sectio Iori.

§. 180. Nos hoc capite, o nisi de Problematum Simplicis acturi sumus, et quidem Speciatim de Problematibus Simplicibus Determinatis incognitam unicam quantitatem, aut si plures eas homogeneas continentibus, denique cap. 3. de simplicibus Determinatis plurium quantitatum incognitarum; ac denique cap. 4. de simplicibus indeterminatis. Sit itaque

Problema XXV.

Problema XXV.

§. 181. Ro. Resolvere Problemata simplicia determinata, in quibus unica occurrit Quantitas incognita vel si plures eæ sunt Homogeneæ.

Resolutio. Pro Resolvendis Juxta Generis Problematibus, tandem opus est Regulis, quam iis, quæ superius (§ 166 167 & 171.) sunt allatæ. Itaque ante omnia (1º ex dato Problemate eruitur, quam continet æquatio primum per (§ 166.) tum (2º Eadem æquatio reducatur ad unum Terminum, incognitum & solitarium, per Reg. 167 traditas. Denique (3º in Ista æquatione valorem incognitæ quantitatis, per cognitas exhibente, prout exigit æquatio, suus cuivis literæ numerus substituatur per (§ 171.)

Demonstro. Problema vice Resolvitur, quando Numeri tam cognitis, quam etiam incognitis, sed jam detectis quantitatibus literalibus substitui singulis conditionibus Problematis, dati exacte satisfaciunt (§ 140.) Atque per præscriptas statim Regulas id obtinetur (ut patebit Exemplis.) & per easdem Regulas Problematis Resolutio vice peragitur. quod e. demonstr. Scholion.

§. 182. Observari sic debet dictum esse in Resolutione (§ pr.), quod in æquatione ad unum Terminum incognitum

&

et solitarium, reducta literis numeri debeant substitui, cum sic loci de Resolutione Problematum per Numeros; equationes enim per lineas Resolutio in Geometria docebitur, sic autem loci agemus duntaxat de Resolutione Problematum per Numeros, quam etiam exemplis aliquot quae sequentibus illustrabimus.

EXEMPLA.

I. Lusor aliquis continuato per tres horas lusu, prima hora amisit tertiam partem pecuniae suae, sora altera quartam partem, sora denique tertia partem quintam, ut adeo ipsi remanerent solum 26. aurei, Quaeritur quantum pecuniae secum ad lusum attulerit. (N.B. Ut in resolvendo hoc Problemate via commonstratur Auditoribus, qua deinceps intellectum circa artem Analyticam in Quaestionibus etiam difficilioribus rationando exercere valeant, ea propter Exempl. praesentis facilime Resolutionem fuse deducemus, reliqua via breviori resoluturi. Igitur.

II. Aderuendum ex hoc Problemate equationem primam Statu Quaestionis, conditionibus etiam appositis quae ita (§ 166 Regl.) discussis intelligo (1º Quaeri sic, ut summa pecuniaria, quam lusor secum ad lusum tulerat, reperiatur (2º Video quantitatem cognitam unicam dari, nempe 26. aureos, reliquas autem omnes esse incogni-

tas

tas, ut summam ipsam quaesitam, ~~nec non partes ejus ter-~~
tiam quartam & quintam; ita tamen ut partes sic cognita
ipsa summa facile innotescant, quibus intellectis proceden-
dum jam est ad Denominationem, ejus conformiter (§. cit.
Reg. II.) peragenda venit, sit itaque quantitas data, seu pars
summae Residua i. e. Aurei 26 = a et quantitatibus autem incogni-
tis, summa ipsa quaesita sit = x
tum ob mutuam Relationem, quae summam inter
ejusque partes amissas, tanquam incognitas inter-
cedit, erit amissa.

pars tertia = $\frac{x}{3}$

pars quarta = $\frac{x}{4}$

& pars quinta = $\frac{x}{5}$

Facta itaque hac Denominatione progrediendum est
ad elocutionem Quaestionis Algebraicam i. e. ad for-
mandam (juxta §. cit. Reg. III.) Aequationem primam
quam Conditiones ipsiusmet Quaestionis suppeditant,
intelligo enim ex iisdem summae quaesitae partes
amissas, unica cum parte Residua in unam summam
collocatas adaequare debere totam summam quaesitam
id est amissa pars $\frac{x}{3}$ plus amissa parte quarta $\frac{x}{4}$ plus
amissa parte quinta $\frac{x}{5}$ plus parte Residua a, ade-
quat summam quaesitam totalem x, quam aequationem
unicam

in rectam eloquendo Algebraice sic exprimo $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + a = x$

2° Inventam tamen expressamus aequationem primam juxta (§. 167.) de Reductione ad unum Terminum incognitum Regulas datas tractando reducere tamdiu debeo, donec obtineatur formula aequationis in qua ex una ejusdem parte terminus incognitus omnino solus, ex altera vero parte mere cogniti, habeantur igitur eadem aequatio prima $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + = x$ per (Reg. 1. § cit.) juxta Numerum secundum reducendo, omnes utrinque terminos ad communem determinatorem, ac denique eundem utrinque omittendo, reducitur ipsa aequatio in tamen $20x + 15x + 12x + 6aa = 6ax$. Hoc autem juxta Reg. 9. § cit.) abit in tamen $47x + 60a = 60x$, quae per Metaphysicam juxta Reg. 11. § cit.) erit $60a = 60x - 47x$, sive per (Reg. 12 § cit.) $60a = 13x$, ex hac denique per (Reg. 14. § cit. obtinebitur $- 60a = \frac{x}{13}$. In qua cum habeatur x incognitum, reductum et solitarium ex una, ex altera vero parte mere cogniti ideo

3° Terminos notos aequationis ultimae juxta expressionem datam per (§ 175.) resolvendo

in nume

in numeros pro quibus substituere est literæ eæ-
dem erit $x = 60 \times 26$, s. e. $x = \frac{1560}{13}$ seu $= 120$. Quod
autem an ita sit

4° Examine juxta (1738.) instituendo
sic experimur, cum sit summa quæsita $= 120$ erit ainsi

Pars tertia seu $\frac{x}{3}$ - - - - - $= 120 = 40$
Pars quarta seu $\frac{x}{4}$ - - - - - $= 120 = 30$
Pars quinta seu $\frac{x}{5}$ - - - - - $= 120 = 26$
His accedit pars Residua seu a - - - $= 26$.

Igitur dos valores in æquatione pri-
ma præcedenti (nro 1.) expressa substituendo juxta
conditionem Problematis deberet esse $40 + 30 + 24 +$
$26 = 120$, atque reipsa quoque ita e, id quod solutionem
legitimam evincit.

Exemplum secundum sit Problema aliud:
Interrogatus quispiam quot Florenos
haberet respondit si ad dimidium ad-
das partem tertiam et quartam, summa
excedet numerum Florenorum quos habeo
quatuor Unitatibus.

Quæstio sæc præcedenti ferme in omnibus e similis
quare

quae discurso Statu quaestionis conditionibusque appo-
sitis, fiat ipsa Denominatio quantitatum in Quaestio-
ne mentionatarum sit. V. C.

Quantitas cognita id est Unitates 4 - - - = a
Summa quaesita Florenorum - - - - - - = x
Erit tum summae eiusdem pars secunda - - - = $\frac{x}{2}$
Pars tertia - - - - - - - - - - = $\frac{x}{3}$
Et pars quarta - - - - - - - - - - = $\frac{x}{4}$

Erit ergo ex Problematibus aequatio prima $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+a$.
Ex qua Regulam primam Numero 2 §. 167 sit Idem
$12x+8x+6x=24x+24a$. Hinc vero per Reg.
II. §. cit. prodit $12x+8x+6x-24x=24a$. Quae
per Reg. IX §. cit. nascitur Idem $2x=24a$. Quae per Reg.
IV. §. cit. abit in aliam nempe $x^2=\frac{24a}{2}$. Itaque in posteri-
ori membro aequationis quaesitae §. 141. Reg. I. Literis
numeros substituendo erit $x=\frac{24}{2}\times 4=\frac{96}{2}=48$, qui
si verus sit valor incognitae x debet esse quaesitae aequatio-
nem primam $\frac{48}{2}+\frac{48}{3}+\frac{48}{4}=48+4$ seu $24+16$
$+12=52$. At quia reapse ita est, unde patet Problema vere
solutum esse.

Pro Exemplo 3o Esto Problema III.

Quidam

Problema.

Gy Embernek, volt 12. Tlemet formitja. meg Salvan ezt el osztatta Jarom fete a Teleseginek fetet, a Tranak Jarmadat a Leanyanak negged reszet. Kerdes menyi pirattt.

A Teleseginek R. 5 + x 20
A Ti. 4 –
B Hoc Problema solet perfici per Di. a Lea. 2 + 40
Visionem in Æqualem. 60
12 00

Quidam Domum Empturus, habet vasa aliquot generosi Vini, & tunc in modum subducit Calculum, si pro singulis inquit vasis, acquirerem Quinque aureos, deessent mihi ad pretium Domus 30. aurei, at si sex aureis singula renderem, superessent ultra pretium 40. aurei

Quaeritur itaque Numerus Vasorum & pretium Domus Discussis Tuis Problematis conditionibus, Statuque Quaestionis Clarum Pe, pretium Domus facile posse determinari, invento Numero Vasorum, Sit itaque Numerus vasorum $= x$ & $5 = a$, $30 = b$ $6 = c$ $4 = d$, erit tum Aequatio prima $ax + b = cx - d$ (§ 166.) Hinc vero per § 167.) $x = \frac{b+d}{c-a}$, quae per (§ 171.) abit in Tanc $x = 70$, adeoque pretium Domus $= 380$.

Exemplum Quartum.

Operarius quidam habens in peculio suo Flor: 6, iisdem addidit mercedem 5. Septimanarum ex hac summa deductis post aliquot Dies expensis, remansit ei quarta pars; Verum ubi tunc quartae parti adjunxisset, mercedem duarum Septimanarum reperit, se habere Flor: 21.

Q.

Q. Mercesimus septimanæ. Exactis conditionibus, fit æquatio prima $\frac{6+5x}{4}+28=21$. Unde per art. 167. & 171. fit $x=\frac{78}{3}=6$.

Exemplum Quintum.

Juvenis quidam præteriens aliquot Puellas salutem inquit, omnes decem. Respondit una illarum, si essemus ad hunc rotidem quot nunc sumus, & insuper tertia pars, tum tot essemus infra triginta, quot jam sumus supra decem.

Quæstio. Virginum Numerus. Quem palam e pendere debeo, quoniam fuerint supra 10, sit itaque $10=a$ $30=b$ & Numerus Puellarum supra $10=x$ erit tum (§ 166.) prima æquatio $a+x+a+x+\frac{a+x}{3}=b-x$, quæ per art. 167 reducta.) dat $x=\frac{76-7a}{10}$ ex qua art. 171. enascitur ideo $x=\frac{90-70}{10}=\frac{20}{10}=2$ ut adeo fuerint Puellæ 10 & 2 seu 12.

CAPUT III.

Problema XXVI.

§ 183. Pro. Resolvere Problemata simplicia determinata, in quibus occurrunt incogniti Heterogenei.

Resolutio. Primo Edato Problemate per (§ 166) Eruendo

ernantur rotidem Equationes primae, quot illud continet ignotos seu incognitos, Heterogeneos, tumque

II° Eaedem Equationes primae (juxta §. 169.) reducantur ad unicam, in qua caeteris eliminatis, una una ra-xat continentur quantitas incognita. Haec autem Equatio

III. Ope (§. 167.) reducatur ad aliam, in qua cognitus solitarius compareat. Ubi tandem.

IV. Per (§. 171.) Literis pro Numeris ad-hibitis, notae ipsae Numericae substituantur, sicque Pro-blema resolvatur.

Demonstratio. Hujus quoque Problematis eadem est, quae praecedentis (§. 181.) ut ergo rem illustremus Se-quentia adferemus. Exempla.

Ancilla cum Servo Tritici Metretas Bajulans sub pondere quaesta est, cui servus: o est quod quaeraris inquit, nam si unam a me acceperis, idem amborum futurum est onus, si autem unam e tuis metretam dederis, onus meum duplum erit tui.

Quaeritur quot quisque Metretas Bajulaverit. Hoc exem-plo superius, quoque (§. 166.) Exempl. II.) usi sumus, ac itaque repetitis prius iis, quae ibidem loco cum attulimus mox ulterius quoque progrediamur, in ejusdem Pro-

ble

Problematis Resolutione, itaque discussis vere conditionibus juxta factam §. cit. Denominationem sit Numerus Metrarum Servi = = x
Numerus vero Metrarum Ancillae - - = y.
Erunt tum primae Aequationes, Et quidem una prima conditione $x-1=y+1$. altera vero Aequatio $x+1=2y-2$, cum ergo duae sunt Aequationes primae, quarum utraque duos incognitos, x & y. Heterogeneos continet, reduci debent ad Aequationem unicam, unicum incognitum continentem per Reg. §. 169. Sic licet quaerendo primum quoque valorem x in priori Aequatione nempe $x-1=y+1$. Erit is per Reg. I. §. 164.) $x=y+2$ quam Aequationem vocemus A, in rentum itaque hoc incogniti x valorem, substituamus loco x in posteriori Aequatione prima, erit tum posterior Aequatio $y+3=2y-2$. In qua quantitas x eliminata habetur, Ideo proinde Aequatio (per §. 164.) debet reduci, erit nempe juxta Reg. II.) $3=2y-y-2$ ac porro per Reg. IX $3=y-2$, Denique per Reg. III. $3+2=y \div y=5$. Ac itaque valor incogniti y juxta (171 §) debet eidem substitui in Aequatione A, erit tum $x=5+2$, Et sic Problema Resolutum est, ut adeo Nu-

me

mens Metretarum Servi ÷ x = 5 + 2 = 7.
Ancillae vero y = 3 + 2 ÷ = 5.

Nam in Vitato secundum Conditiones Problematis examinet. 1º Si a Servo Jabente 7. mensuras Ancilla portans 5 mensuras accipiat unam mensuram Servus Jabebit 7 − 1 = 6 et Ancilla 5 + 1. Etiam 6, seu numero aequales. Quod erat Primi Conditio. Si vero Ancilla portans Metretas 5, unam ex 2i dederit Servo portanti 7. Jabebit Servus 7 + 1 ÷ 8, Ancilla vero 5 − 1 ÷ 4, atque 8. Et duplum Numeri 4. ut adeo secunda quoque Conditio impleta Jabeatur.

Nota. Praemissi Jugis Problematis aequationes Primae ad unicam reduci possunt Etiam (per § 169 Ref. IV.) sese ex utrisque Aequationibus valorem ejusdem incogniti eliciendo, ac deinde duos valores in unam aequationem, componendo vid. §. cit. 168 Ref. IV. IIdum Exemplum est simile illi, quod est supernis § cit. 166. Exemplum III.) allatum numerum.

Mater quaepiam interrogata de trium Filiorum aetate respondit Primus cum secundo habet annos 18 et idem Primus cum tertio 22, secundus vero cum 3º 24

Quaeritur aetas singulorum, sit itaque 18 = a 22 = b 24 = c, ac aetas Primi = x, secundi aetas = y

tertii

tertii vero = z, erit tum æquatio prima ex prima Problematis conditione.

Prima nempe. $x + y = a$
Æquatio 2da $x + z = b$
Æquatio 3a $y + z = c$.

Quæritur, itaque in prima æquatione valor incogniti x erit is per Metatæsim $x = a - y$ quem valorem in æquatione secunda substituendo $a - y + z = b$, ex qua per Metatæsim fit $z = b - a + y$ ex hoc valore in æquatione 3a substituendo erit $y + b - a + y = c$ et

per Additionem $2y + b - a = c$ et
per Metatæsim $2y = c - b + a$ Denique
dividendo per 2. $\frac{y = c - b + a}{2}$ id est Lib.

Numeros substituendo $\frac{y = 24 - 22 + 18 - 20}{2} = 10$

Quum sit $x = a - y$ erit $x = 18 - 10$.
Et cum sit $12 = b - a + y$ erit $2 - 18 + 10 = 14$.
Inventus igitur hos valores pro Examine substituendo in primis tribus æquationibus erit $x + y = 8 + 10 = 18$
$x + z = 8 + 14 = 22$.
$y + z = 10 + 14 = 24$.

Unde siquidem singulis tribus conditionibus in Proble-

mate

mate appositis satis factum sit, clarum est Resolutionem rite peractam esse.

Exemplum III. Sit.

Auri-Faber quidam emit una vice massam, compositam ex tribus unciis auri, et quinque unciis argenti, pretio 318 grossorum, altera vero vice pro massa quinque unciarum auri, et septem unciarum argenti dedit 522. Grossos.

Quaeritur valor minus Unciae auri, et minus Unciae Arg.

Sit itaque uncia uncia Auri $= x$, et Arg. uncia una $= y$, sit porro pretium prioris massae Comp. $318 = a$, et massae alterius pretium $522 = b$, erit tum prior aequatio juxta conditionem Problematis $3x + 5y = a$, et per art. 164. $x = \frac{a - 5y}{3}$, quam vocemus A.

Aequatio vero ex secunda conditione Problematis Servata Jaec est $5x + 7y = b$, in quo loco $5x$ valorem ejus juxta aequationem subst. $(a - 5y.)\,x\,5$ Aequatio secunda abibit in Jaec $\frac{5a - 25y + 7y}{3} = b$.

Et per Art. 164. $-y = 5a - 3b$. Hinc per Art. 161 $y = 5 \times 318 - 3 \times 522 = \frac{24}{4} = 16$

et

Et per §. 171.) $x = 318 - 5 \times 6 = \frac{288}{3} = 96$.

Hinc prior Æquatio prima $3x + 5y = a$ Et substitutis Numeris $- 3 \times 96 + 5 \times 6 = 318$.

Et posterior Æquatio prima $3x + 7y = b$, Et substitutis Numeris $- 5 \times 96 + 7 \times 6 = 522$.

Clarum est vice esse Resolutum Roblema Propositum.

Exemplum IV.

Aurum cujus Uncia valet 8. Flor: Cum Arg. cujus Unc. valet 4. Flor. ita permiscendum est, ut habeantur Unciæ decem, quarum quævis valeat Flor. 6.

Quæritur Numerus Unciarum ex Auro, Et Numerus Unciarum ex Arg. accipiendarum. Sit Numerus ex Auro accipiendarum $= x$, Et ex Argento $= y$ erunt tum Æquationes primæ. $x + y = 10$

(§ 169). $x = 5$ $8x + 4y = 10 \times 6$ (171 §.) Et $y = 5$.

Hinc $x + y = 5 + 5 = 10$ Et

$8x + 4y = 8 \times 5 + 4 \times 5 = 40 + 20 = 60$ Ergo Resolutum.

Roblema Vtum.

Exemplum esto Roblema sequens: Cau

pro

uponel Praefectus Vini partim Generosi, partim debilioris urnas Complures Cellario suo intulit, Lucrum pistum fecturus, si urnas singulas, Vini quidem Generosi Grossis 42 debilioris vero Grossis 27 Venundaret ut Vinum Generosius, quia pretii majoris debilius vero, quia gustui minus gratum suis # distrahere nequit, Cupit itaque Vina sele commiscendo Vas 100. Urnarum, implere sac Conditione ut Urnam Vini mixti Gross. 30. pretio videlet inter Gross. 42 et 27. medio, venundando idem duorum reportaret, quod obtineret si utriusque Generis Vina pure suis pretiis distrahere potuisset.

pretiis

Idcirco ne vel se vel Emptores falleret serie desiderat quot Urnae Vini generosi, quotque debiliores accipiendae sint ut Urnae Vini mixti emergant 100, quarum singulae 30. gross. distrahantur. Sit itaque 42 = a 27 = b 30 = c 100 = d. Urnae accipiendae e Vino Generoso = x, e debiliori y. Ergo aequationes primae erunt et quidem prior. $x + y = d$

et posterior $ax + by = de$

Ex quibus

Ex quibus per (167 et 169 et 171 fit $x = 20$ et $y = 80$.
Cum $x + y = 20 + 80 = 100$
et $ax + by = 42 \times 20 + 27 \times 80 = 3$
indicio Rite Resoluti Roblematis.

Sed. §184. Hujusmodi Roblema, ut sunt in Exemplis IV. V. §. Praec. vocatur Mixtionis Alligationis, estque amplissimi usus et utilitatis in Oeconomicis Physicis, Pharmaticis Chimicis &c. et rursum in casu omni, quo duo miscibilia diversi valoris aut ponderis commiscenda sunt, ita ut emergat mixtum desiderati valoris, pretii virtutis probitatis, aut ponderis medii, ut si ve. gr. misci debeat Frumentum, Vina, Medicinae, Merces diversa aliquida, Chimica Metalla, ab abstinendum mixtum valoris medii. Caeterum plerique ex iis Roblematibus, quae vulgo, quae vulgo per duos incognitus Divisos, (: causa exercitii :) resolvuntur. Analysta exercitatus unico incognito plerumque solvere potest. Sit in proximo praecedenti Exemplo V. Si Numerus Urnarum Vini debilioris vocetur y Loco x,

numeri

Numeri nempe Urnarum Vini Generosioris ponitur $d-y$, id quod Attentum Analystam educet prior Aequatio, prima videlicet $x+y=d$, cum Idem per Metaphysicam sit $x=d-y$. Reliqua aut. Problemata Mixtioni, ad quae plura quam Duo miscibilia ingrediuntur Problemata indeterminata pertinent de quibus jam breviter.

CAPUT IV.

De Analysi Problematum Simplicium Indeterminatorum.

Problema XXVII.

§. 185. Rõo. Resolvere Problemata Indeterminata Simplicia.

Resolutio Problematum indeterminatorum solutio iisdem Legibus peragitur, quibus Determinatorum, ita ut postquam Problema per (§ 166.) in Suas Aequationes primas Resolutum est, Numerus Aequationum conferatur cum Numero quantitatum incognitarum, et ex hac collatio illico paroscet, quotnam Quantitatis possunt eliminari incognitae,

nam

nam si Numerus incognitarum, a se non pendentium, uno superet Numerum Aequationum, tum restabunt in Aequatione finali, duae incognitae nulla arte eliminandae, si duobus restabunt tres, si tribus quatuor &, itaque pro Iae notitia ex incognitis, tota, quot debent eliminentur (per §. 169.), tumque in Aequatione finali duae incognitae supersint, valor minus, si tres valor duorum, et si quatuor remanserint incognitae, (supersint:), valor trium assumatur ad arbitrium Analystae, atque tum demum reliquarum, quoque incognitarum, valores consuetis Analyseos operationibus detegantur. Res Exemplis clarior erit.

Exempla.

1. Invenire duos Numeros Inaequales, quorum factum sit aequale duplae Summae.

Sit igitur unus Numerus quaesitorum $= x$, et alter $= y$, eorundem factum erit $= xy$, et dupla summa $2x + 2y$, sicque e conditione Problematis erit Aequatio prima - - - $xy = 2x + 2y$. Et per

me

Metat Jesum $xy - 2x = 2y$. ac
Dividendo per 2.e $\frac{xy-2x}{2} = y$, quam rationem A.
Statuatur jam valor incognitae y ad arbitrium, ita etiam ut deinde valor x, in Numeris quantitatis positivae acquirantur. Ex. gr. si sit $y = 3$, tum aequatio abibit in hanc $\frac{3x-2x}{2} = 3$, et hinc $3x - 2x = 2 \times 3$ seu $x = 6$, si pono $y = 4$, erit juxta aequationem A $\frac{4x-2x}{2} = 4$ et hinc $4x - 2x = 2 \times 4$ id est $2x = 8$, seu $x = \frac{8}{2} = 4$:

x = 28
y = 20
z = 52
x = 19
y = 38
z = 46

II. Esto Problema. Habet Oenopolatria Vini Genera, quorum primi urna valet 5 Flor. Secundi 7. Tertij 10, Ille autem ita vult permiscere, ut habeantur 100 Urnae, quarum quaelibet constet Flor. 8.

Q. itaque Numerus Urnarum, tam e primo quam e secundo, ut et e vino tertio accipiendarum.

Sit ergo Numerus Urnarum Vini Mixti 100 = a Numerus Urnarum e primo Vino accipiendarum

accipiendarum, et 3° = 2, erunt itaque primae aequationes $5 = x + y + z = a$, quam vocemus A, tam 23.

$$5x + 7y + 10z = 8a$$

Hinc in Aequatione A per Metat. Jesuit. est $z = a - x - y$ Ideo vocetur C. cujus membrum posterius. Substituendo in Aequatione 23. erit $5x + 7y + 10a - 10x - 10y = 8a$ ex qua per Art. 167. Reg. 1. erit. $10a - 5x - 3y = 8a$ et per Metat. Jesuit. $10a - 8a - 5x = 3y$ seu $2a - 5x = 3y$. ac dividendo per 3. erit Aequatio finalis. $\frac{2a - 5x}{3} = y$, quae vocetur d, in qua duae sunt quantitates incognitae x et y quarum neutra potest eliminari, ut ergo valor solitarij y, determinetur, debet prius pro x incognito, alterius membri numerus, quispiam assumi. Ex. gr. si ponatur $x = 30$, erit juxta Aequationem D. $y = \frac{16}{3}$ et $z = 53\frac{1}{3}$ juxta Aequationem C. Si vero $x = 22$, erit $y = 26\frac{2}{3}$ et $z = 51\frac{1}{3}$. Si pono $x = 16$, erit $y = 40$, et $z = 44$ Si denique $x = 38$ erit $y = 3\frac{1}{3}$ et $z = 58\frac{2}{3}$ et sic pono.

$x = 16$
$y = 40$
$z = 44$

III. Urnae Vini 120 emendae St Flor 800. Et quidem e vino trium generum e quibus Urna Vini, unius valet Flor. 8. al

alterius 5, & tertij Flor. 3.

Quaeritur ergo Numerus Urnarum e primo, & secundo ut & e tertio, vino emendarum.

Problema hoc proximè praecedenti simile est totis Pe Clarum, ideo factis denominationibus quantitatum primas ex hujus Problematis, aequationes apponemus, industriae Auditorum relinquentes ulteriorem earundem Resolutionem. Sit itaque 120 = a 800 = b, pro Numero Urnarum emendarum, e primo vini Generi = x, e secundo = y & e tertio = z Erunt tunc Aequationes primae $x + y + z = a$, & $8x + 5x + 3z = b$

$x = 70$
$y = 45$
$z = 5$.

IV. Esto Problema sequens. Floreni 240, distribuendi sunt in Studiosios + pauperes, & quidem ita ut singuli Theologi acquirant Flor 8. Philosophi singuli Flor. 6. & Humanistae singuli Florenos 2.

+50

Quaeritur Numerus Theologorum Philosophorum & Humanistarum. Sit 240 = a 50 = b, Numerus Theologorum = x Philosophorum = y Humanistarum = z Erunt Aequationes primae duae nempe prior.

or $x + y + z = b$, quod vocemus A. Posterior $8x + 6y + 2z = a$, quam vocemus B. Sit itaque quaerendus valor incognitae x in aequatione A, per Metathesim erit $x = b - y - z$, quam vocemus Aequationem C. in aequatione B. erit $8x = a - 6y - 2z$. porro ad eliminandum x. Aequatio C. multiplicetur per 8 juxta (§. 169 Reg. 2.) $8x = 8b - 8y - 8z$. Et per Axio. III. (§. 165.) $a - 6y - 2z = 8b - 8y - 8z$ et per Metathesim $8z - 2z = 8b - a - 8y - 6y$. Hoc est per Reg. 1a (§. 167.) $6z = 8b - a - 2y$, Hanc vero dividendo per 6 erit $z = \frac{8b - a - 2y}{6}$, quam vocemus D. in qua valor z. necdum patescit, cum in alio membro, ad est, adhuc incognitum y. pro hoc itaque assumatur Numerus quispiam, pro arbitrio Ellico poterit valor quoque z determinari, qui tandem una cum assumpto valore y. in aequatione C. adhibiti et iam valorem x incogniti determinatum efficiunt. Si ponatur $y = 2$ juxta Aequationem D. erit

$$z = \frac{400 - 240}{6} - \frac{4 = 156}{6} = 26$$

Et juxta Aequationem C. erit quoque $x = 50 - 2 = 26 = 22$

Scholion §. 186

§ 186. Ut ostendatur Problemata Indeterminata plures Solutiones admittere, quae Conditionibus Problematis propositi satisfaciant, Tunc in finem Problematis (S. Ph. Exempl. V.) allati pro y diversos Numeros substituendo plures Solutiones, Exhibebimus Tabella sequenti

Tabella.

Exhibens in undecim Columnis verticalibus totidem Solutiones Problematis proxime Antecedentis.

Sisty =	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
Eritz =	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
Et x =	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

Et Tactenus de Resolutione Problematum simplicium.

CAPUT V.

De Analysi Problematum ~~simplicium~~ Compositorum 2di gradus

Definitio XXXIII.

§. 187. Cum Problemata in quorum Aequationibus ad secundam aut altiorem aliquam Potentiam Ee eleatus in Re

+ incognitus

in Genere Composita dicuntur (§ 179.) Hinc Clarum est Aequationem Compositam secundi gradus esse, in qua maximus Exponens quantitatis incognitae est 2, si vero dictus Exponens sit = 3, v. 4, et Aequatio est tertii aut quarti gradus seu ordinis. Ex gr. $x^2 = ab$ est Aequatio secundi gradus, seu quadratica et $x^3 = ab$ Aequatio Cubica est.

§ 188. Schol. Nos praetermissis aliorum graduum Aequationibus, quarum Resolutionem, Analysis sublimior pluribus pertractat, nonnisi methodum solvendi Aequationes quadraticas strictim exponemus, quae in plures distinguuntur Classes, Aliae a Completae in quibus sese nullus deficit terminus ad Expressionem quadraticam, requisitus ut si sit $x^2 + 2ax + a^2 = bc$ $x^2 = ab$. Ex adverso vero Aequationes Incompletae aut deficientes dicuntur, si terminus tertius (quadratum minus partis Radicalis.) deficiat, ut si sit $x^2 - 2ax = ab$, in qua deficit Elementum tertium, se terminus a^2, ut Consta ex § 141.), de utraque Classe nunc brevibus.

Completae quid?

Problema

Problema. XXVIII.

§. 189. Rõo Discernere an data quævis æquatio Quadratica sit Completa v. Incompleta.

Resolutio. I. Si in data æquatione incognitus quadratus solus habeatur (seu is sit affectus cognito seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in ullo Terminio ejusdem æquationis reperiatur ejusmodi æquatio Completa est. ut si sit. Ex gr. $x^2 + ac = bd$.

Rão: Quia quadratum ejusmodi est Monomium.

II. Si vero in data æquatione præter quadratum incogniti terminum inveniatur in aliquo Terminio idem incognitus simplex affectus cognito, id erit indicio eundem Terminum esse secundum Elementum quadrati, seu factum e duplo partis minus Radicalis, in partem alteram Radicalem, proinde ad Expressionem quadraticam Completam requiri quoque tertium Elementum id est terminum talem, qui sit quadratum partis secundi Radicalis, qui terminus nunc adsit

aut

aut deficiat ut e dictis agnoscat Tyro Analysta ante alia.

1º Reducet datam sibi Æquationem ad Æquationem in Tili juxta (§. 163.) id est omnes terminos tam cognitos, quam incognitos, ex uno membro Æquationis transferat per metathesim in membrum aliud, Et quidem in illud in quo incognitus quadratus eradat Positivus. Quo facto.

2º Censeat contemplando terminos an quadratum e secunda Radicali id est e ximio factore cognitis quo incognitus simplex affectus (a) ad sit inter terminos vel absit (b). Et si desit, id erit indicio datam Æquationem carere quadrato termini secundi Radicalis, ideoque esse incompletam (c). Si vero adsit, ejusdem termini quoque secundi quadratum. videat Analysta.

3º Nunc illud sit Positivum aut Negativum. Et si erit Positivum certum est Æquationem datam esse completam (d). Si vero quadratum illud sit Negativum sed signo — affectum.) Signum quadratum negativum nullum est nisi imagina-

rium

imaginarium (§ 113.) id erit + terminum eundem non pertinere ad expressionem quadraticam adeoque illam incompletam esse. Hujus Reg. Secundae. + indicio

Rat. Seu Fundamentum habetur (§ 141.) ubi enumerata habentur elementa Quadrati e Radice Binomia orti, quale est etiam illud, quod per hanc Reg. II. investigatur, ut adeo Demonstratione neque indigeant ex gr. completa est aequatio $x^2 + 2ax + a^2 = bd$. Incompleta vero est haec $x^2 + 2ax = cd$, in qua deficit quadratum a^2, ita in hac $x^2 + ax = bc$, deest quadratum ex $\frac{a}{2}$ hoc est a^2, si sit aequatio $x^2 - 2ax - aa + bd = 0$, in qua licet adsit Quadratum secundi Terminii Radicalis nempe aa, sed cum idem Negativum seu $-aa$ Aequatio ipsa non est completa, siquidem terminus $-aa$ non pertineat ad expressionem, ejusdem aequationis quadraticae. Nam si pertineret, tum deberet effici Positivum (ex § 14.) quod fieri quidem posset ope Matheseos, sed tum iterum incognitus Quadratus eraderet imaginarius, quotiescumque autem incognitus eradet imaginarius, aut ejus Radix Negativa

indi

indicat aut Problema ipsum seu Quaestionem, ex qua Du-
plicandi Aequatio emersit esse impossibilem, aut vero A-
nalystam errorem commisisse, in serie operationis.

Problema XXIX.

§. 190. Rōō. Resolvere Problemata Composita secundi gradus.

Resolutio. I. Dati ad solvendum Proble-
matis Aequationes primae ante omnia eruantur per (§. 166.)
atque eaedem, siquidem tales non essent inventae, ratis effi-
ci debeat, per (§. 169.), in quibus vel unica tantum con-
tineatur incognita, vel si plures eae sint Homogeneae,
Hoc facto. II. Si Aequatio prima aut per Regulas (§. 169.)
obtenta, unicam tantum incognitam, quadraticam contineat, eadem
per Leges (§. 167.) traditas ita transformetur ut in
uno eiusdem membro, solum incognitae, quadratum
habeatur, per nullam quantitatem multiplicatam, aut di-
visum reliquae vero quantitates omnes, aliud mem-
brum eiusdem Aequationis occupent, tumque nihil
aliud restabit faciendum, quam ut extrahatur Ra-
dix quadrata, ex utrisque membris juxta §. 167.)

Reg

Reg. VIII. Et quidem e quadrato incognitae Radix
reipsa extrahatur (per §. 131.) in altero autem aequatio-
nis membro extractio Radicis nunc ad hunc duntaxat
indicetur, praefixo signo Radicali. ex. gr. si foret
hic aequatio $x^2 = a^2 - b$, deberet in hanc commutari
$x = \sqrt{(a^2 - b)}$.

III) Si vero prima aequatio, aut per Regu-
las (§. 169.) obtenta plures incognitas homogeneas
contineat hoc est in tali aequatione quadratica, praeter
quadratum incogniti adsit in aliquo termino, idem
incognitus simplex affectus cognito, id erit in-
dicio aequationem Quadraticam esse Radicis Binomi-
nalis, ac proinde illico reducendo aequationem
ad aequationem in Zili, unde stigandum erit juxta
§ 9. Reg. II.) an sit Completa aut non? Et

IV) Si aequationem in Zilum reducta, quad-
ratum Comperiatur esse Completum, tum tria quae elemen-
ta, in parte sinistra aequationis, ita reservetur, ut quad-
ratum incogniti primum, locum, terminus autem

const

~~terminis aut~~ constans ex incognito simplici incogni-
tum, dicto locum secundum, quadratum vero ex facto-
re, ejusdem cogniti, pro incognitus simplex affectus
locum tertium occupet, ~~Pter~~ Ter aut tres terminos
omnes, alii ad partem dextram aequationis pro consti-
tuendo, altero membro per Metathesim transponendi re-
minet, pro facto e priori membro, quadratum incognitum
continente, reapse extrahatur Radix per (§. 139.) e poste-
riori vero membro, ejusdem Radicis quadratae extractio
solummodo indicetur, praefigendo signum Radicale, toti mem-
bro parenthesi prius incluso. Ex. gr. si sit aequatio
ad nihilum reducta $x^2+2ax+a^2-b+c=0$, erit pi-
xta jam Regulam $x^2+2ax+a^2=b-c$, et Radicem ex-
trahendo $x+a=\sqrt{b=c}$

V°) Quod si autem aequatione ad nihilum redu-
cta, minotescat eandem esse incompletam, tum duobus
terminis incognito affectis, in eadem parte aequationis
reservatis, reliqui transferantur per Metathesim ad
partem alteram aequationis, quo facto aequatio complexi
debe

bebit, addendo nempe utrique ejusdem parti quadratum de dimidio factore termini cogniti, quo incognitus simplex affectus debetur. # Radix ex utroque membro, ita pro uti Regula proxime praecedenti dictum est. Ex gr. si sit $x^2 + ax - b = 0$ erit $x^2 + ax = b$, Et utrique parti quadratum de $\frac{a}{2}$ id est $\frac{a^2}{4}$, addendo erit aequatio completa $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$ ac extracta Radice $x + \frac{a}{2} = \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$

Deinde extrahatur

VI.) Postquam ex Aequationibus completis Radix praevio modo seu per Reg. IV seu per Reg. V. proxime praecedentes extracta est, siquidem adhuc incognitae cognita adjeret, dele in membrum aliud per Metathesim transferenda, atque illi post parenthesim, signo contrario adjungenda est. Si v. gr. ultima aequatio (Reg. IV. praec.) $x + a = \sqrt{(b - c)}$ per Jane Reg. IV. abit in Jane $x = \sqrt{(b - c)} - a$. Aequatio autem (Reg. V. praec.) $x + \frac{a}{2} = \sqrt{(b + \frac{a}{4})}$ in Jane mutatur $x = \sqrt{(b + \frac{a}{4})} - \frac{a}{2}$ Quae ambae sunt aequationes finales, seu Resolutoriae. Ars peractis

VII.) Procedendum est ad Resolutionem ipsam quae in aequationibus quoque quadraticis ad finalem modo praevio reductis. more consueto juxta Leges

(S. VIII.)

(§ 171.) dictatas peragitur, minorum Literis cognitis numeros substituendo, nisi hoc unum novi hic accedit, quod ubi Literis numeri substituti fuerint, e numeris loco literarum parenthesi inclusarum substitutis radix ad hoc extrahenda venit per (§. 148.) cum ejusdem extractio hactenus indicata duntaxat erat in Reg. IV. v. § prec. et non consummata, atque radix numerica hoc modo obtenta, aut sola aut vero una, cum numeris si adsint, pro in Resolutione ipsa Literis extra parenthesim existentibus substituti fuerunt, valorem incognitae solitariae indicabit. Ex gr. in Aequatione $x = \sqrt{a^2 - b}$ si ponatur $a = 5$ et $b = 16$ erit $x = \sqrt{(25 - 16)} - a$ si sumatur $a = 2$ $b = 24$, et $c = 8$, erit $x = \sqrt{(24 - 8)} - 2 = \sqrt{(16 - 2} = 2$.

§ 191. Schol. Ex his intelligere jam licet 1° Quidnam sit quadratum incompletum? et 2° Illud quando? a 3° Quomodo compleri debeat? Etenim quoad primum: Quando in Aequatione secundi gradus ad Aequationem inhibili reducta, membrum ~~unum~~ per quadratum incognitae, continet propter terminum sui pro eadem incognita simplex, per aliquam cognitam multiplicata habetur, quadratum est dimi-

dia

dia cognita, quae in cognita simplex affecta habet, aut
non continet, aut vero si continet illud est negativum,
tum semper membrum illud, e, quadratum incompletum radi-
cis Binomiae, per ortum caret elemento tertio a quadrato
terminii secundi. Igitur quod ad. 2um. Hoc in ca-
su quisquis Quadratum debet compleri, ut ex eodem
Radix ad detegendum incognitae valorem necessaria ex-
tra dari possit, incomplet erit itaque quoad. 3um. Hujus-
modi quadrato, hoc ordini provocitur, minorum aequa-
tione inutili, per Reg. V. §. prae. in eam transfor-
mata, cujus unum membrum Quadratum incompleti ter-
minii, alterum vero terminii, qui ad quadratum non
pertinent, constituant, tumque in membro terminos
quadrati incompleti continente, per aerantur terminii Ra-
dicales, per orum unus in terminum Quadratum in co-
gnitum, continente facile reperietur ope (§. 131.)
per Tum autem dividendo, quisdem membri divid al-
terum terminum, in quo in cognita Radicalis (§. 122.)
consequenter quis dimidium sumendo, habetur ter-
minis Radicalis secundus, cujus proinde quadratum
completum, quin turbetur membrorum aequalitas, uti di-
ctum jam est prius (§. prae Reg. II. et V.

§. 192.

§ 192. Schol. Notandum quoque est, quo quemadmodum ad resolvenda Problemata quadrata utimur extractione Radicis, ita si occurrat Aequatio, cujus incognitus Radicalis est affectus, hoc in casu tota Aequatio elevari debet, ad quadratum ut si foret $\sqrt{x} = a + b$ elevanda utraque membra ad quadratum erit $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Item si sit $\sqrt{ax} = b$ erit $ax = b^2$, atque instituta per a. divisione $x = \frac{b^2}{a}$ et hoc est quod superius § 167 Reg. VIII, monuimus. Sed cum hanc, et omnes alias a nobis praescriptas praxes jugis Resolutionem exercitatio faciliores reddet, pro hac itaque in Problematibus Compositis Quadraticis juxta Leges Art. 190. traditas instituenda, uno atque altero ~~membro~~ Exemplo praelibimus Esto igitur. Exemplum.

(1. Invenire duos Numeros ejusdem Conditionis, ut quadratum primi cum Facto amborum efficiat Numerum SS.

Sit $SS = a$, Numerus Primus $= x$ Secundus $= y$ erit ex Conditione Problematis $x^2 + xy = a$, in qua Aequatione, liquet adesse, quadratum incogniti x, praeterea adest quoque xy

ubi

ubi incognitum x multiplicatum habetur per aliud incognitum nempe per y, verum de $\frac{y}{2}$ Quadratum dee, debet igitur ante omnia Complexi quadratum incompletum erit proinde $x^2 + xy + \frac{y}{4} = a + \frac{y^2}{4}$, ac extrahendo Radicem erit utrinque $x + \frac{y}{2} = \sqrt{(a + \frac{y^2}{4})}$ et transponendo $\frac{y}{2}$ unde clarum est Problema datum esse Indeterminatum, quare pro y assumi debet numerus arbitrium, Quisnodi tamen cujus quadratum divisum per 4, cum 55, efficiat perfectum Quadratum, sit itaque $y = 6$ erit tum $x = \sqrt{55 + \frac{36}{4}} - \frac{6}{2}$ $(\sqrt{55 + 9})$ $- 33$ $\sqrt{(64)} - 3$ id est $8 - 3 = 5$. Itaque $x = 5$ et $y = 6$, quibus in prima aequatione substitutis habetur $25 + 30 = 55$ Recte igitur solutum quaestio est.

Exemplum.

Aliquot Patresfamilias cum singuli suis servis ad perficiendum quodpiam opus confluxerunt singuli vero Patresfamilias totidem servos habuerunt, quot fuerunt omnes Patresfamilias simul Numerus autem Seriorum erat 625.

Quaeritur

Quaeritur Numerus Patrumfamilias. Sit $625 = a$ et Numerus Patrumfamilias $= x$, erit itaque per conditionem Problematis $x - x = a$ seu $x^2 = a$ igitur per Reg. II. (§ 190.) utrinque Radicem quadraticam extrahendo erit $x = \sqrt{a}$, sic $x = \sqrt{625} = 25$. Et cum $25 \times 25 = 625$ clarum est Divi Rite solutum esse Problema.

Exemplum III.

Quidam interrogatus quot nam haberet Nummos? Respondit se habere Nummos partim aureos partim vero argenteos, et si Numerus aureorum subtrahatur a quadrato argenteorum Residuum 395, si autem quadratum argenteorum addatur quadrato aureorum Summa est 425.

Quaeritur, quoniam aureos, quot argenteos nummos. Sit itaque $395 = a$. $425 = b$ Numerus Aureorum $= x$ Argenteorum $= y$ Est igitur e primi Problematis conditione $x^2 - x = a$ e

Secunda. $x^2 + y^2 = b$. In 2i cum duae sint, incognitae, alterum debebit ante omnia eliminari, quod facillime fiet per Reg. II. § 169.) est enim priori aequatione valor de $y^2 = a + x$ et

posse

e posteriori valor ejusdem $y^2 = b - x^2$. Igitur 2 suos valores, ejusdem incogniti y^2, componendo in unam Equationem, erit $a + x = b - x^2$ ac per Metaphesim $x^2 + x = b - a$, in cujus Equationis Sinistra parte adest, quadratum incogniti x, et praeterea Factum ejusdem incogniti simplicis x, ducti in Unitatem, verum deest, quadratum de dimidia Unitate, seu de $\frac{1}{2}$ Cujus itaque quadratum, utrique membro Equationis addendo erit $x^2 + x + \frac{1}{2} = b - a + \frac{1}{4}$ ac extracta utrinque Radice $x + \frac{1}{2} = \sqrt{(b - a + \frac{1}{4})}$ et per Metaphesim $x = \sqrt{(b - a + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2}$, hoc est Numeris substitutis e $x = \sqrt{425 - 395 + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2} = \sqrt{(30 + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2} = \sqrt{(\frac{120 + 1}{4})} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 5$. Qui valor si in Equatione Superiori nempe $y = a + x$ substituatur Loco x erit $y^2 = a + 5$, id est, $-y^2 = 395 + 5$ seu $y^2 = 40$, unde erit extrahendo Radicem $y = 20$

Itaque Numerus Aureorum $= x = 5$ } et Numerus Argenteorum $= y = 20$. Hinc instituto Examine cum sit $y^2 - x = 400 - 5 = 395$ et $x^2 + y^2 = 25 + 400 = 425$. Clarum e rite institutam esse

dati

dari Problematis solutionem.

§ 193. Schol. Sed haec tanquam primi Elementa de Resolutione Problematum summatim adduxisse sufficiat, atque ordine id exigente, ad sectionem nostri Regni instituti ultimam jam transeundum est, et eam quoque, utpote Doctrinam utilissimam summeque necessariam complectentem, ea qua par est brevitate pertractabimus. Erit autem haec.

SECTIO V.

De variis Quantibus et Relationibus.

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica quam Geometrica

Definitio XXXIV.

Definitio XXXIV.

§ 194. Ratio dicitur duarum quantitatum ejusdem Generis Comparatio seu modus iste, quo alter sese habet ad alteram.

§. 195. Schol. Instituitur autem Regnis modi Comparatio inter quantitates inaequales, cum videlicet in finem ut sciatur, quantum alteram altera excedat, aut vero quoties una in altera con-

tinet

continetur. Ex gr. pro comparari 4, comparari cum 12, ut detegatur, quantum 4 deficiat seu excedat a 12, aut quoties 4, in 12 continetur. Unde etiam, Jujusmodi Comparatio, sive Ratio duplex statuitur Arithmetica alia Geometrica.

Definitio XXXV.

§. 196. Dum quantitates comparantur quoad differentiam, ut innotescat quantum una deficiat vel excedatur ab altera Ratio vel Arithmetica, dum vero Comparatio fit, quoad Quotum ut nempe continetur quoties una continetur in altera Ratio Geometrica appellatur. Ex in Comparatione numerorum 4 et 12, si spectetur Relatio, quatenus numerus 4 deficiat a 12, seu ab hoc superatur Unitatibus 8, Ratio erit Arithmetica, si vero accendatur Relatio, quatenus numerus idem 4 continetur in 12 ideoque 3. Ratio vel Geometrica.

Definitio XXXVI.

§. 197. Quantitates autem quae comparantur tam in Ratione Geometrica, quam Arithmetica vocantur seu Generatim Termini. Atque in specie quan-

ti

Antecedens. titas, quae cum alia comparatur vocatur Antecedens
Et priori loco scribitur. Quantitas vero qua-
Consequens. cum comparatur vocatur Consequens. Et poste-
riori loco scribitur, interjectis inter utrumque
in Ratione quidem Arithmetica, uno comma-
te (:) in Geometria vero duobus punctis (:)

Porro Quantitas illa quae in Ratio-
ne Arithmetica Subtractione Antecedentis a Conse-
quente aut vice versa obtinetur vocatur Differen-
Differentia. tia, quoniam indicat Differentiam unius Quantita-
tis ab alia, id est quantum una deficiat aut supe-
retur ab altera. In Ratione vero Geometrica
Quantitas seu Quotus ille qui oritur Divisio-
ne per Antecedentis Consequentem v. vice versa
Exponens. vocatur Exponens Rationis Geometricae, quo-
niam exponit seu indicat, quoties Antecedens
in Consequente v. Ze in illo contineatur. Scri-
bantur autem Ice quantitates (: si exprimi de-
beant.) Differentia quidem supra virgulam,
Et exponens supra duo puncta, quae inter
quantitates comparatas componi solent ex

pr. R 4^8, 12 est Arithmetica, in qua Antecedens est 4 consequens e 12 et differentia 8. Ratio vero 4^3:12 est Geometrica in qua Antecedens est 4 consequens 12 Exponens.

§. 198. Coroll. Ex 21 (§§§ 196 197.) facile intelligitur 1° Omnem in genere Rationem, tam Arithmeticam quam Geometricam consistere in quantitate exprimente, modum quo Antecedens se habet ad consequens suum sequitur.

2° Specialiter Rationem Arithmeticam consistere in Differentia, quae obtinetur subtractione Antecedentis e consequente v. vice versa; Rationem vero Geometricam constituendam esse in quotiente, qui oritur Antecedente Rationis per consequens v. consequente per Antecedens diviso, ut adeo

3° Rationes quoque aequales majores vel minores dici debent Arithmeticae quidem relate ad differentias. Geometricae vero relate ad Exponentes Rationum, quae conferuntur, minorum aequales sunt rationes Arithmeticae, quarum Differentia e eadem, quae vero quoad tam differunt sunt. Inaequales, atque inter eas ~~Major~~ e, cujus Differentia e major. Minor vero cujus differentia e minor. Pari modo Ratio

nes

nes Geometricae Aequales sit quarum idem est Expo-
nens. Quae vero Exponentes diversi sunt Inaequa-
les (sit quarum idem est Exponens) inter quas Majo-
rem habet Majorem Exponentem. Minor est cujus Ex-
ponens est minor. Sic $3^4_3 = 2^4_6$, Item $4^3 : 12 = 2^3 : 6$
Verum $3^5_8 > 4^3_7$, ut et Idem $4^3 : 12 > 2^2 : 4 . 2^3 : 4$

Definitio XXXVIII.

§ 199 Si Differentiae v. Quantitates Aequales
duarum inter se Rationum, comparatarum eodem O-
perandi, vel si in utravis Ratione differentiae
fiant subtracto Antecedente a suo Consequente aut in
utravis Ratione subtracto Consequente ex Antecedente,
vel vero quotientes oriuntur in utraque Ratione, ex Di-
visione Consequentis per suum Antecedens, eae Ratio-
nes dicuntur Directae. Sic 3 est ad 7 in Ratione Di-
recta 2 ad 6, quia subtracto numero 3 a 7 obtinetur eadem
differentia, quae oritur subtracto numero 2 a 6. Item
4 est ad 12 in Ratione Directa 2 ad 6, quia divi-
so numero 4 per 12 obtinetur idem Quotus, qui fit
diviso numero 2 per 6 nempe $\frac{1}{3}$. At si Differentiae
vel Quoti Aequales fiant, per operationes Ordine in-

Rationes Directae

verso

verso institutas, ex gr: Subtracto in Una Ratione Antecedente ex Consequente, in altera verò subtracto Consequente ex Antecedente, vel Diviso ex Antecedente per Consequens, et in secunda Diviso Consequente per Antecedens, termini quismodi Rationum dicuntur esse in eodem quidem; ast tamen inversa seu Reciproca Ratione. Ex. gr: Numeri 12. et 4. cum Numeris 2. et 6. sunt in Ratione eadem, cum idem sit utriusque Rationis Quotiens 3; sed cum Quotus sic obtineatur, si in priori Ratione dividatur Antecedens per Consequens; in posteriori Consequens per Antecedens ideo termini earumdem Rationum dicuntur esse in Ratione inversa seu Reciproca, et Rationes ipsae Inversae v. Reciprocae.

§. 200. Corol. Hinc infertur: Rationes Reciprocas in Directas Converti, si termini alterutrius invertantur. Ex. gr: Si (§. praec.) in exemplo Ultimo fiat prior Ratio 12 ad 4. Posterior autem non 2 ad 6., sed inversè 6. ad 2. tum ex Ratione inversa fit Directa, idem enim Exponens 3. eodem Divisionis Gre obtinetur; nimirum dividendo Antecedens per Consequens in utraque Ratione.

Definitio XXXVIII.

§. 201. Ratio quam Tab et Factum ex Antecedentibus plurium Rationum ad Factum ex earundem Consequentibus vocatur Compositio; quae speciatim duplicata vr, si duarum; Triplicata, si trium Aequalium Rationum

trionum Antecedentes et Consequentes multiplicentur. Ex gr. ac:bd. est Ratio Composita e duabus Rationibus a:b et c:d, atque si hæ duæ Rationes sint inter se æquales, Ratio illa Composita erit simul duplicata respectu Rationis a:b v. c:d. Tarum vero quis respectu est Subduplicata.

Theorema X.

§. 202. Ratio Consequens cujusvis Rationis Arithmeticæ semper æquatur Antecedenti plus v. minus eorum Differentia, seu: (quod idem est) Quævis Ratio Arithmetica formula hac; a, a, +d vel. a, a−d sive repræsentari

Demonstr. Quodvis Rationis Arithmeticæ Antecedens sive appellari a, et quævis Differentia d (§§. 5. 6) jam vero Antecedens a, v. magis est v. minus suo Consequente (§. 195.) si magis? excedit tum summa Consequens Differentia d. (§. 197) Igitur hæc in casu Consequens erit a+d; si vero Antecedens a, minus sit suo Consequente ab hoc excedetur Differentia d. (§. cit.) adeoque hæc in casu erit Consequens a−d. Igitur in omni Ratione Arithmetica Consequens æquatur Antecedenti plus v. minus eorum Differentia (§. 5.) Designatur vero Plus. per +. et Minus per − (§. 10.) Et etiam quælibet Ratio Arithmet. ex Liberi sive hac Formula a, a+d vel. a, a, −d. q. e. demonst.

§. 203. Scholion Etiamsi quælibet Ratio Arithmetica seorsim considerata bene repræsentetur formula (§. præc.) allata; in hoc omnino ubi duæ Rationes Arithmeticæ Antecedentibus discrepan-

tes

tes debent inter se comparari (ut in Proportionibus.) tunc si una repraesentetur per eandem formulam, altera quemadmodum alterum habet Antecedentem, ita formulam aliis Literis constanter repraesentanda erit ex iis, quae supernis (§. 5.) accu-limus. Ex gr: alterius Rationis Antecedens si dicatur b. Differentia autem sit aequalis Differentiae prioris Rationis proinde erit d. tunc eam Rationem repraesentabit formula b. b+d vel. b, b−d. Si verò una Rationum ab altera praeter Antecedentem etiam quoad Differentiam discrepet, tunc tam Antecedens, quam Differentiae duarum Rationum diversis Litt. erunt exprimendae. Ex gr: si Unius Rationis Antecedens sit a, Differentia d. erit alterius antecedens b. Differentia c. Sicque Ratio prior per formulam (§. 7.) expositam, alia verò ex liberi per tam b. b. + c; vel b − c. (§ cit. 5.)

§. 204. Scholion. 2. Observandum ze est de Ratione Geometrica, quod pro ejusdem Exponente omnes omnino Aut Zres non unum eundemque Quotum accipiant, Aliqui enim sumunt eum quotum, qui acquiritur Antecedentem dividendo per Consequentem; Alii contra eum, qui oritur ex Divisione Consequentis per Antecedentem. Et profectò perinde est utrumlibet ex iis Quotis quis assumat, pro Exponente Radicis Geometricae, cum uterque perinde exprimat Rationem Geometricam Duarum quantitatum ad se invicem comparatarum, uti (§ 198.) vivimus. Verumtamen si alterutrum quis semel elegerit, eundem

dem deinceps modum constanter retineat. Nos quoque igitur constanter pro Exponente Rationis Geometricæ, cum Quotum habebimus qui ex Divisione Consequentis per Antecedentem enascitur. Sic in Ratione 4: 12, nobis Exponens est 3. Hoc posito Esto.

Theorema XI.

§. 205. Prop. In omni Ratione Geometrica Factum ex Antecedente in Quotientem sive Exponentem Rationis est æquale Termino Consequenti.

Demonstrao: In omni Ratione Geometrica Antecedens est Divisor. Consequens est Dividendus. Et Exponens est Quotus. juxta (§. 9.) Atque Factum ex Divisore in Quotum (si Divisio sit Legitima.) Semper æquatur Dividendo (§. 161. Arith. Rum.) Ergo in omni quoque Ratione Geometrica Factum ex Antecedente in Quotientem seu Exponentem est Termino Consequenti æquale. quod erat demonstrandum.

§. 206. Corol. 1. Cum igitur quivis Antecedens possit designari per a Et Exponens quivis per m. (§. 6.) quivis etiam Consequens pro exprimi per am (seu in Genere loco Consequentis semper pro substitui Antecedens Multiplicatus per Exponentem per ax m. (§. 165.) Hinc quævis Rao Geometrica pro ex Liberi Iac Formula a: am.

§. 207 Sc Vol.

§. 207. Quod superius (§. 203.) de Ratione Arithmetica diximus, idem etiam in Rationibus Geometricis locum invenit; nam licet quaelibet Ratio Geometrica seorsim considerata bene repraesentetur per a: am (§. 5.) nihilominus si duae Rationes Geometricae Antecedentibus Exponentibusque discrepantes repraesentandae sint, duae diversae Formulae erunt assumendae juxta tenorem (§. 5.) quantitates = Antecedentes et Exponentes prius determinando, ut si Antecedens unius sit = a, alterius b. et utriusque Exponens m. erit prior a: am et posterior erit b: bm. Schol. 2.

§. 208. Observari id quoque poterit: quod si supponeretur Quotientem Rationis Geometricae sem per oriri ex Divisione Antecedentis per Consequens tum ut Rationes Geometricae revocari possent ad Formulam (§. 206.) Allatam, necesse foret Quotientem sumere $\frac{1}{m}$, qua expressione non modo fracti, sed etiam integri Numeri designari possunt. Corol. 2.

209§. Si ergo Antecedens Major sit Consequente Exponens erit Fractio, si Minor. erit Quantitas integra v. sola v. cum Fractione. Ex. gr: In Ratione 4: 12. Exponens e = 3 et quia Antecedens e = 4. erit Consequens $4 \times 3 = am$. Sed in Ratione 12: 4. Est Exponens $= \frac{1}{3}$ Unde cum Antecedens sit = 12: erit Consequens Consequens $12 \times \frac{1}{3} = 4 = am$.

Theorema xii.

§. 210

§. 210. Proo. Valor Rationis Geometricæ (seu ipsa Rao.) non mutatur si utergue ejus Terminus id est tam Antecedens quam Consequens per eandem v. per easdem Quantitates multiplicentur v. dividantur.

Demonstrao: Quævis Rao Geometrica repræsentari pu. Iac formula $a = am$ (§ 206.) Et quivis multiplicator et Divisor pu. vocari n. (§. 6.) Atque Raones $a = amn$ et $a = \frac{a}{n} = \frac{am}{m}$ æquantur Raoni a, am cum in singulis idem sit Exponens m. (§. 198.) Nro 4.) Et a Multiplicaone am, aut Divisione Rao non mutatur.

Corollarium.

§. 211. Hinc sequitur Multipla æque Duorum Quantitatum i.e Dupla tripla etc. eandem inter se Iabere Rationem, quam simpla partes, item similes duorum Factorum, nempe dimidias tertias essent vera ipsa.

Theorema XIII.

§. 212. Proo: Ratio duplicata (seu e duobus æqualibus orta.) æqualis est Rationi, quam habent Quadrata Terminorum utriuslibet Rationis Componentis.

Demonstro: Quævis duæ Raones æquales Antecedentibus Differentes, atque Duplicatum Componentes possunt repræsentari 2is Formulis $a : am$ et $b : bm$ (§ 207.) Et 2i aut Rao erit duplicata $ab : abm^2$ (§ 201.) Atque Iæc Rao æqualis e Raoni quadratorum Terminorum utri

utriuslibet Rationis Componentis i.e. Rationi a^2, a^2m^2 vel. b^2, b^2m^2, cum utrobique idem fit Exponens m^2 (§ 198) &

Corollarium

§ 213 Eodem modo patet Rationem triplicatam aequari Rationi Cuborum 3morum quorumvis Terminorum, qui constituunt Rationem aliquam e Componentibus ex abc $abcm^3 = a^3$ $a^3m^3 = b^3m^3 = c^3c^3m^3$ (§ 198.) Cum idem ubique sit Exponens m^3. Imo inductione patet quamvis e pluribus aequalibus Compositam aequalem esse Rationi, quam habent Termini cujusvis Rationis Componentis elevati ad eam Potentiam, quam indicat Numerus Rationum Componentium.

Scholion.

§ 214 Praeter Modum superius (§ 200.) expositum est et alter, quo Rationes Reciprocae in Directas converti possunt, nimirum si servato eodem Terminorum ordine Termini alterutrius Rationis formâ Fractionum exhibeantur, quarum Numerator sit 1. vel quelvis quantitas eadem. Ex gr: Duae Rationes $a : am$ et $bm : b$. sunt Reciprocae ~~Rationes Directae~~ (§ 199.) Verum si prioris ambo Termini dicto statim modo formâ Fractionis exhibeantur erunt $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{am}$ et $bm : b$. sunt Reciprocae Rationes Directae ~~Rationes Directae~~, Erit enim utrobique Exponens idem m. Divisione Consequentis per Antecedens oriundus, sed haec de Rationibus dixisse sufficiat. Jamque ad Proportiones quae Rationibus transeamus

CAPUT.

CAPUT. II.

De Proportionibus in Genere.

Definitio XXXIX.

§. 215. Quando Quatuor Termini duarum Rationum sunt in Ratione Directa (seu quod idem est:) duæ Rationes directæ Proportionem constituunt, ut adeo Proportio nihil aliud sit quam æqualitas duarum Rationum. Hinc cum Rationes sint aliæ Arithmeticæ, Geometricæ, aliæ, Proportiones Arithmeticas & Geometricas optime distinguuntur; ita ut Arithmetica Proportio, sit duarum Rationum eandem Differentiam Tabentium Æqualitas. ut si sit a, b & c, f aut $5^3 2$ & $7^3 4$. Proportio vero Geometrica est duarum Rationum eosdem Exponentes Tabentium Æqualitas ut si sit $a^m b$ & $c^m d$ aut $4^3 12$ & $2^3 6$. Coroll. 1.

§. 216. Omnis itaque Proportio quatuor Tabet Terminos, duos nimirum Antecedens, & duos Consequentes ut patet Exemplis (§. 5.) Hypothesis.

§. 217. Cum Proportioni Pre Æqualitate duarum Rationum definiatur (§. 215.) Hinc nonnulli proportionem Exprimentes duas Rationes quæ illam constituunt signo Æqualitatis = ipsis Rationibus interposito jungere solent Ve modo a, b = c, f vel ab = cf. Verum nos in Expressione proportionum eos imitabimur, qui

loco Signi quatuor punctis, hoc modo (::) Situatis utuntur a quolibet, etiam Tyrone distingui possit Ex. gr: Proportionem Arithmeticam. Sic exprimis a, b:: c, f item 8, 5:: 17, 4 enunciantes autem dicemus a ad b sicut c differt ab f. Proportio autem Geometrica, a nobis sic exprimetur a: b:: c: f item 4, 12:: 2: 6. in cujus enunciatione omnes consentiunt dicentes a esse ad b. sicut c. ad f.

Corollarium. 2.

§. 218. Cum Proportio Arithmetica duarum Rationum Arithmeticarum inter se aequalium, una hac Formula a, a + d vel a, a − d altera autem hac b, b + d vel. b, b − d, semper possit designari (§. 203.) Hinc sequitur Formulam Generalem Proportionis Arithmeticae posse esse hanc a: a + d:: b, b − d, v. ero a a − d:: b, + d. Pari modo cum Proportio Geometrica, in aequalitate Duarum Rationum Geometricarum consistat (§. 215.) Ratio autem Geometrica quaevis hac formula a. am et alia illi aequalis hac b. bm vice repraesentetur (§. 207.) palam est formulam Proportionis Geometricae Generalem posse hanc esse a,: am;: b,: bm quare quidquid de his Formulis demonstratum in Genere fuerit, id universe in quavis Proportione particulari obtinebit.

Definitio XL.

§. 219. In Proportione qualibet tam Arithmetica quam Geometrica quatuor diversis Terminis constante, primus Terminus dicuntur Extrema. Et quartus,

(Termini

(: Termini Extremi.) Secundus, autem & Tertius Media seu Termini Medii nuncupantur Ex. gr. In hac Proportione 2 = 4 : 3 = 6. 2 & 6, Termini Extremi, Medii vero sunt 4. & 3.

Definitio XLI.

§. 220. Porro qualibet Proportio sive Arithmetica seu Geometrica v. e. Continua v. Discreta Proportio Continua vo, in qua prioris Rationis Consequens est simul Antecedens Rationis posterioris, Terminus autem ille, qui ita repetitur dici solet Medius Proportionalis. Ex. gr. 3. 6. 6. 12. Est Proportio Geometrica Continua estque in ea Terminus 6. Medius Proportionalis, quod si autem Consequens primus non sit idem cum Antecedente. Secunda Proportio vocatur Discreta, ut haec Arithmetica 5. 3. 8. 6.

Corollarium.

§. 221. Cum cujusvis Proportionis Continuae Terminus primus possit vocari a, Differentia autem d. aut Exponens m. (§. 6.) Formula Generalis Proportionis Continuae, & quidem Arithmeticae esse pro haec a, a+d :: a+d a, +2d, vel. a, a−d :: a−d a−2d. Formula autem Continuae Proportionis Geometricae vice designari potest per hanc a : am :: am, am² Conf. (§§. 202, 206 cum §. prec.)

Hypothesis.

§. 222. Proportio Continua designari quoque solet Arithmetica quidem ita ÷ a, b. c, quae (: aequivalet huic a, b :: b, c); Geometrica vero hoc modo ∺ a, b, c, quae aequivalet huic a : b :: b : c :) enunciantur autem utraque a e ad b. sicut b. e ad c.

Se Zohon

§. 223. Et tactenus de Proportionibus in Genere. Jam diluta tantisper Doctrina Proportionis Arithmeticae, utpote jam habita scientia Proportionis Geometricae facilius intelligitur Capite proxime sequenti, Proportionis ut et Progressionis Geometricae Doctrinam proponemus, qua in Ill. esse magis necessarium per Ursam Matthesim, Philosophiam Naturalem, in Ill. in omni vita humanae Commercio nemo, nisi ignarus inficiari potest.

CAPUT. III.

De Proportione et Progressione Geometrica.

Theorema XIV.

§. 224. Rõo. In omni Proportione Geometrica Factum Extremorum est aequale Factis Mediorum.

Demonstratur. Quaevis Proportio Geometrica potest repraesentari hac Formula a: am :: b: bm (§ 218), atque in hac factum Extremorum abm = amb Facto Mediorum (§ 42.) (Coll. cum §. 148. Arith. Pum.) Et etiam q. e. demonstrandum.

Corollarium.

§. 225. Quod si ergo Proportionis termini singuli diversis Lit. exprimantur (: ut si sit in Proportione Discreta :) v. gr: a, b, c, et d sive si ponatur a: b :: c: d erit in Ill. omnium ad = bc Consq. Signum evidens bonae Proportionis esse, si factum Extremorum sit aequale facto Mediorum.

Scho

Scholion.

§. 226. Notari Zimeretr: Theorema (§. 224.) expositum, esse Basim, omnium fere Theorematum ac Problematum Proportionis praecipuumque fundamentum inveniendarum primarum aequationum Analyticarum. Et hoc praeter caetera (: ope Analysis.) sequentia quoque tria Problemata utilissima reperta sunt, quorum primum, quod immediate sequetur, continet celebrem illam Regulam Trium. quae propter maximum eumque quotidianum, tam inscientiis, quam vita communi usum, Nomen Regulae Aureae tandem immerito obtinuit. Problema I.

§. 227. Prop: Datis tribus Terminis invenire quartum Proportionalem. (seu invenire Regulam Auream.

Resolvo. Sint e tribus Terminis primus = a, secundus = b, Tertius = c et quartus qui quaeritur = x. Erit tum Proportio haec a : b :: c : x ex qua prima aequatio per (§. 224.) e haec ax = bc ex qua per Reg. 11 §. 167) habebitur $x = \frac{bc}{a}$. Quae Ultima aequatio, utpote Resolutoria, hoc Problema eloquitur: Terminus quaesitus x. e aequalis Facto ex terminis secundo b in tertium c. diviso per Terminum primum a, Hoc: si vis invenire, tribus datis quartum Proportionalem, multiplica secundum e datis cum Tertio, et Factum divide per primum, erit notus quartus Proportionalis. Quae verba sunt ipsissima quibus Arithmetici Regulam Auream edocent, qui orantes Rationem Regulae, quam tradunt, nisi Analysim edocti sunt, cui Reg. suas Arithmetica repertas demonstratasque debet.

Problema

Problema. 2.

§. 228. Proo: Datis duobus Terminis invenire + Continuè Tertium + Proportionalem.

Resolutio. Terminorum Datorum primus sit = a, secundus = b, Tertius quaesitus = x. erit Proportio a:b::b:x, & Inde per (§. 224.) $ax = b^2$, ac per Reg. IV (§. 167 $x = \frac{b^2}{a}$. Hoc est: Si eloqui velis: Quadratum Termini secundi divisatur per primum erit Quotus Terminus Tertius Quaesitus Ex. gr: Si sit a = 2, b = 4, erit $x = \frac{16}{2} = 8$. Et revera stat Proportio 2:4::4:8.

Problema 3.

§. 229. Proo. Datis Terminis duobus, invenire medium continue proportionalem.

Resol. Sit e datis primus = a Tertius = b. & medius quaesitus = x erit proportio a:x::x:b Inde autem aequatio per (§. 224.) $ab = x^2$, Inde per Reg. VII. (§. 167. $x = \sqrt{ab}$. Hoc est. Ex Facto Terminis primi, in tertium Radix extrahatur Quadrata, erit Idem medius, quaesitus. Ex. gr. Si sit a = 2 & b = 8. erit $x = \sqrt{16} = 4$.

Theorema XV.

§. 230. Proo: Duorum Factorum aequalium Factores solvi possunt in proportionem Reciprocam.

Demonstrao. Duo Facta aequalia ad = bc, ex productis mediorum, & Extremorum proportionis a:b::c:d orta possunt resolvi in eandem proportionem, ex cujus Terminis mediis inter se, & extremis quoque inter se multiplicatis coaluerunt, Atque ita Resoluti Factores eorundem dabunt Proportionem

tionem Reciprocam; Cum igitur Duo quævis facta æqualia possunt repræsentari per ad=bc, s. e. pro duorum Factorum æqualium alterum considerari tanquam Factum Extremorum ad, et alterum Factum mediorum seu bc; Sequitur Factores unius Producti posse considerare tanquam Terminos Extremos proportionis, Factores vero alterius tanquam Medios, adeoque ex omnibus simul factoribus posse formari proportionem Reciprocam. q. e. d. Theorema. XVI. a:b :: c:d
a:b :: d:c

§. 231. Pro. Quatuor Termini proportionales multis modis possunt permutari manente semper Proportione.

Demonstratio. Quævis Proportio Geometrica pro repræsentari per Tanc a: am :: b: bm. (§. 218) Atque hæc varius admittit Terminorum Collocationes manente semper inter Facta Extremorum et Mediorum æqualitate (id quod e perspicuum de ex adjecta Tabella.) adeoque manente Proportione (§ 225.) Ergo cujusvis Proportionis etiam quatuor Termini varias admittunt permutationes, quin mutetur Proportio. q. e. d.

Ad Probam Minoris sit Proportio a: am :: b: bm.

	Quæ admittit sequentes Permutationes manente inter Facta Extremorum et Mediorum æqualitate.		
1.	Invertendo. ÷ Consequens loco Antecedentium et Anteced. loco Consequentium ponendo.	am: a :: bm: b	amb = abm
2.	Alternando. ÷ Antecedentes inter se et Consequentes inter se conferendo.	a: b :: am: bm.	abm = bam.
3	Componendo. ÷ Summam Antecedentis et Consequentis in utraque Ratione cum Consequente conferendo.	a+am : am :: b+bm : bm	abm+ambm=amb + ambm.

vel

	Vel summam eandem cum Antecedentibus conferendo.	$a+am:a::b+bm:b$	$ab+amb=ab+abm$
4.	Subtrahendo. ÷ differentiam quae inter Antecedentes quis consequens, vel cum consequente conferendo	$a-am:am::b-bm:bm$	$abm-ambm=amb-ambm$
	Vel eandem differentiam conferendo cum Antecedente.	$a-am:a::b-bm:b$	$ab-amb=ab-abm$
5	Convertendo. ÷ conferendo Antecedens, vel cum summa est Antecedens et consequens	$a:a+am::b+bm$	$ab+abm=ab+amb$
	Vel cum differentia quae est inter Antecedens et quis consequens.	$a:a-am::b:b-bm$	$ab-abm=ab-amb$
6	Miscendo. ÷ summam Antecedentis et conse-	$a+am:a-am::b+bm:b-bm$	$ab-ambm=ab-ambm$

Demonst. Manentibus Rationibus Proportionem Geometricam Constituentibus, Proportionem quoque ipsam manere necesse est. Atqui dum in proportione Geometrica Rationis alterutrius tam Antecedens quam Consequens per idem multiplicetur aut dividatur, non turbatur, sed manent eaedem Rationes si Ratio siquidem quaevis non mutatur si ejus tam Antecedens quam Consequens per idem multiplicetur aut dividatur §:210:) Et in Proportione quoque Geometrica si tam Antecedens quam Consequens unius ejusdemque rationis per idem multiplicetur aut dividatur, non mutatur ipsa Proportio. q.e.d.

Theor. XVIII.

§. 233. Propos. Si Proportionis Geometricae Antecedentes aut bini Consequentes per easdem Quantitates multiplicentur aut dividantur, perstabit eaedem Proportio. vid. Dem

	Vel summam eandem cum Antecedentibus conferendo.	$a+am:a::b+bm:b$	$ab+amb=ab+abm$
4.	Subtrahendo. ÷ Differentiarum quae inter Antecedentes ejus consequens, vel cum consequente conferendo.	$a-am:am::b-bm:bm$	$abm-ambm=amb-ambm$
	Vel eandem Differentiam conferendo cum Antecedente.	$a-am:a::b-bm:b$	$ab-amb=ab-abm$
5	Convertendo. ÷ Conferendo Antecedens, vel cum summa ex Anteced. et Conseq. ut	$a:a+am::b:b+bm$	$ab+abm=ab+amb$
	Vel cum Differentia quae est inter Anteced. et ejus Consequens.	$a:a-am::b:b-bm$	$ab-abm=ab-amb$
6	Miscendo. ÷ Summam Antecedentis et Consequentis cum Differentia earundem conferendo, ut:	$a+am:a-am::b+bm:b-bm$	$ab-ambm=ab-ambm$
	Vel ita aut vero sic	$a+b:am+bm::a:am$	$aam+bam=aam+abm$
		$a-b:am-bm::a:am$	$aam-bam=aam-abm$

Hae omnes Proportiones (: ne plura ex iis iterum, Alternando et invertendo formemus: satis ostendunt totidem in iisdem, quos ipsae sunt complecti Theoremata, ut adeo Theorema de praesens pro Fundamento Theoremata ac Problemata inveniendi, haud immerito habeatur. Theorema. XIII.

§. 202. Prop. Si Proportionis cujusvis Antecedens aut Consequens per easdem quantitates multiplicentur, aut dividantur, perstabit eorundem Proportio. #

Demon

Demonstr. Si in formula Generali $a : am :: b : bm$ Antecedentes multiplicentur per n. Consequentes autem per o stabit haec Proportio $an : amo :: bn : bmo$ (§. 224.) cum $Ambono = amobn$ et etiam Exponens utrobique sit $\frac{mo}{n}$ (§. 215.) Si autem in eadem formula Generali loco multiplicationis per easdem Literas habeatur stabit etiam haec Proportio $\frac{a}{n} : \frac{am}{o} :: \frac{b}{n} : \frac{bm}{n}$ ex § cui quod e. d. Coroll.

§. 234 Unde liquet: quod si simpla Proportionalia fuerint, erunt etiam eorum dupla, triplaque, ut et sub dupla, subtriplaque proportionalia (Conf. §. 210.) ubi cum demonstraremus rationem eandem permanere; si quis tam Antecedens, quam Consequens per eandem Quantitatem multiplicentur, aut dividantur, tuto id etiam concludere licebit: Neque Proportionem mutari; si vel alterius utriusque vel utriusque ejusdem rationis Termini per idem multiplicentur aut dividantur. Scholion.

§. 235 Hactenus de Transformationibus cujusvis Proportionis seorsim consideratae. Ea vero quae sequentur Theoremata continebunt Transformationes ex plurimum Proportionum Comparatione Oriundas.

Theorema XVIII

§. 236. Rõo. Quae sunt Proportionalia uni tertio, sunt etiam proportionalia inter se.

Demonstr. Sit ex. gr. $a : b :: c : d$
Et $e : f :: c : d$

Erit tum etiam $a : b :: c : f$ (§. 224.) id quod in Numeris loco Literarum rite substitutis evidenter declarari potest quod e. demonstrandum

Theore

Theorema. XVIII.

§. 236. Prop. Si duarum v. plurium Proportionum termini Correspondentes inter se, i.e. Antecedentes per Antecedentes, Consequentes per Consequentes multiplicentur aut dividantur erunt Facta v. Quoti proportionales.

Demonstr. Sit Ex. gr. juxta Generalem formulam (§ 218.) proportio multiplicanda

$a : am :: b : bm$

Proportio vero Multiplicans

$c : cn :: d : dn$ erunt tum ex

2i Facta quoque

$ac : acmn :: bd : bdmn$ proportionalia

(§§. 215. 224) $am : acbdmn = acmnbd$, et est quoque Exponens utrobique mn, similiter easdem ob causas terminis prioris proportionis per terminos alterius Correspondentes divisis erit quoque $\frac{a}{c} : \frac{an}{cn} :: \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$ quod e. demonstrandum. Coroll.

§. 238. Hinc quoque si Radices sint Proportionales, erunt Proportionalia earundem Quadrata, Cubi seu Universim earundem potestates, quae eaque similes, ac vice versa quadratorum quoque Cuborum, et Universim Potestatum similium Radices similes sunt Proportionales.

Theorema XX.

+ §. 239. Prop. Si sint duae Proportiones ejusmodi, ut Consequentes primae fiant in secunda Antecedentes, erunt tum termini reliqui, i.e. Antecedentes primae, Consequentibus secundae ex aequo ordinato, seu directe Proportionales.

Demonstrao. Sint id Genus Proportiones et quidem

Prima $a : b :: c : d$
Secunda. $b : f :: d : g$ } quae alternando erit { Prima $a : c :: b : d$
Secunda. $b : d :: f : g$.

Ergo per (§ 231.) alternando abit in Tanc $a : f :: c : g$. quod e. d.

In

In Numeris.

Sit 2: 4:: 3:6 } erit 2:8:: 3:12. ut patet ex (§. 224.)
Et 4: 8:: 6:12 }

Theorema XXI.

+ §. 240 Prop: Si sint duæ Proportiones ejusmodi, ut primæ primus Consequens fiat in secunda primus Antecedens; Et secundus Antecedens primæ, fiat in secunda Ultimus Consequens, erunt tum reliqui Termini ambarum Proportionum, ex æquo perturbate seu Reciproce Proportionales.

Demonstrao. Quævis id Genus Proportiones duæ possunt repræsentari 2is formulis {a: b:: c:d / b: e:: f:c} Est vero in prima ad = bc Et in secunda bc = ef (: per §. 224.) Ergo per (§. 165 Axio. II) Est quoque ad = cf, atque ideo resolvitur in 3am Proportionem a: c:: f: d. per (§. 230) Et quod erat demonstrandum.

Idem patet etiam Numeris. Ex. gr. si sit {12: 2:: 6: 2. / 2: 4:: 3: 6}

Erit tum 12: 4:: 3: 1. (§. 224).

Coroll. I.

+ §. 241 Si ergo in duabus Proportionibus vel bini Antecedentes, vel bini Consequentes æquales fuerint, erunt reliqui termini ex æquo seu directe Proportionales; si enim in casu primo (: quando bini Antecedentes sunt æquales:) primi proportio invertatur; in casu vero secundo (: quando

gr. ando bini Consequentes sunt æquales:) mutatur Coroll. 8. Lemmatis (§. 231.) Theo. 1. (Sabebitur casus Theorematis (§. 239.) tot. pr. Si sint $\begin{Bmatrix} a:b::c:d \\ a:f::c:g \end{Bmatrix}$ Invertendo $\begin{Bmatrix} b:a::d:c \\ a:f::c:g \end{Bmatrix}$. Ergo Inæst $b:f::d:g$. (Coroll. 1. Theor. Si vero sint $\begin{Bmatrix} b:a::d:c \\ f:a::g:c \end{Bmatrix}$ invertendo posteriorem erit $\begin{Bmatrix} b:a::d:c \\ a:f::c:g \end{Bmatrix}$ Ergo iterum $b:f::d:g$. (Coroll. Coroll.

+ §. 242. Si vero ni Proportionis Termi, vel Termini ex Termini v. Medii fuerint æquales, erunt reliqui ex æquo perturbato Inæ reciproce proportionales. Nam in casu priori proportionem non turbat, & in casu posteriori invertendo proportionem posteriorem, (Sabebitur casus Theorematis §. 240.) tot. pr. Si sint $\begin{Bmatrix} a:b::c:d \\ a:f::g:d \end{Bmatrix}$ priorem invertendo erit $\begin{Bmatrix} b:a::d:c \\ a:f::g:d \end{Bmatrix}$ Ergo $b:f::g:c$ (per §. 240.) Si vero sint $\begin{Bmatrix} b:a::d:c \\ f:a::d:g \end{Bmatrix}$ posteriorem invertendo fit $\begin{Bmatrix} a:b::c:d \\ f:a::d:g \end{Bmatrix}$ Ergo iterum $d:f::g:c$. (per §. 240. Schol.)

Theorema XLII.

§. 243. Hoc. Si sint Quotcunque Rationes æquales, seu Quotcunque Termini Proportionales, erit Summa Antecedentium, ad Summam omnium Consequentium, ut quivis Antecedens ad Suum Consequentem.

Demonstr. Sint id Genus Rationes æquales ponendo repræsentari per formulas $\begin{Bmatrix} a:am \\ b:bm \\ c:cm \end{Bmatrix}$ & autem ut per Summa Omnium Antecedentium ad Summam omnium Consequentium, ut quivis Antecedens ad Suum Consequentem i. e. $a+b+c : am+bm+cm :: a:am$, vel $:: b:bm$, vel $:: c:cm$

cm per (§. 224.) Factum enim Extremorum semper fore facto Mediorum æquale, ut periclitanti patebit, Veritas ergo Theorematis generatim patet. q. e. d.

Id Exemplis experiri licebit ex gr. $\left\{\begin{matrix}12:6\\16:8\\4:2\end{matrix}\right\}$ erit tum 12 – 16 4 : 6 – 8 – 2 :: 4 : 2 hoc est 32 : 16 :: 4 : 2. vel :: 16 : 8. vel :: 12 : 6. ut patet ex (§. 224.)

Definitio. XLII.

Progressio. §. 244. Si Proportio continua producatur ÷ plures quam tres Terminos continue proportionales contineat, non amplius Proportio potius vo Progressio. Est itaque hæc in Genere: Certa series Terminorum continue Proportionalium (: i. e. ejusmodi quantitatum, quarum prima est ad secundam, uti ad secunda ad tertiam, secunda vero ad tertiam uti tertia ad quartam, uti quarta ad quintam, sicque porro, et quidem si terminum in Progressione crescant Progressio, quoque Crescens, Decrescens autem si terminum decrescant dr. Hinc si series continua sint Terminum Geometricæ Proportionales Progressio. quoque speciatim Geometrica et quidem (: prout Terminum crescunt v. decrescunt :) Crescens. v. Decrescens vo. Hypothesis XIII.

§. 245. Progressio Geometrica, quoad Expressionem, nonnisi Nro Terminorum differt a Proportione continua Geometrica, cum in hac tres vo; ast in illa semper plures adsint Terminum, continue proportionales. Exprimitur itaque Progressio quoque Geometrica Crescens juxta §. 222) Ex. gr: Si sint Terminum Progressionis Geometricæ crescentis, sub Exponente m. erit hæc Expressio in Literis ÷ a^m b^m, c^m, d^m, d^m, e^m, f^m, g^m, ⁊ in Literis vero etiam Crescens

scens erit scie: ÷ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. et addendo vero Decrescens ex scie ÷ 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1.

Corollarium.

§ 246. Cum ex præcedente literali (§. 9.) sit Progressionis Geometricæ crescentis, pars eam per substitutionem Exponentium prodita (§§. 205, 206.) ex Formula Literali exprimi Minimum ÷ a. am. am². am³. am⁴. am⁵. am⁶. &c. cum sit b = am c = bm = am² & d = cm = am³, &c. ideoque (§. 206.) idem pari Omnino in Decrescente. Atque ita in sequentibus omnem Progressionem Geometricam per signa literalia in Tabula adjecta rite designari.

Tabula Progressionum Geometricarum in Literis.

Numeri Terminorum.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Crescens ÷	a	am	am²	am³	am⁴	am⁵	am⁶
Decrescens ÷	a	a/m	a/m²	a/m³	a/m⁴	a/m⁵	a/m⁶

Crescens ÷	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	&c. C.
Semper Expon. ÷	1	2¹	2²	2³	2⁴	2⁵	2⁶	&c. D.
Decrescens ÷	64/1	64/2¹	64/2²	64/2³	64/2⁴	64/2⁵	64/2⁶	&c. E
Semper Expon. ÷	64/1	64/2¹	64/2²	64/2³	64/2⁴	64/2⁵	64/2⁶	&c. F.
	64/1	64/2	64/4	64/8	64/16	64/32	64.	
id est ÷	64,	32,	16	8	4	2	1.	

Scholion.

§. 247. Haud parum juvabit Tyronibus Expressionem Vrsleyi (§. 9.) per Literas ob oculos positas serio contemplari, quum earum Formularum sola contemplatione plurima percipi queant advertenda, quæ absque hac contemplatione serium

Crescen

Crescentium A, C, & B. Sequentia Theoremata & Problemata facile deducuntur.

Theorema. XXIII.

§. 248 Proo: In Progressione Geometrica quotcunque Terminorum quiscunque prior Terminus sic se habet ad quemcunque Posteriorem, ut primus ad secundum, si horum uterque eleretur ad eam potentiam, quam indicat Duorum illorum Distantia mutua.

Demonstrao.

Quemadmodum Progressio pro designari formula Gratiali (§. 245.) sub A) nempe ∺ a, am¹, am², am³, am⁴ &c. At quia in hac Progressione est quilibet ad quemlibet ut primus ad secundum, si elevare ad potentiam quam designat duorum illorum Distantia. Ex. gr. a : am² :: a² : a²m², Et a : am³ :: a³ : a³m³. Sic a : am⁴ :: a⁴m⁴ &c. Eidem obtinet viam in omnibus aliis Proomibus Geometricis. q. e. d.

Corollarium.

§. 249. Si igitur Terminus primus vocetur A, secundus B. Numerus autem Terminorum continue proportionalium, qui primum inter ac alium, quemvis intercedunt vocetur N. erit Distantia primi, ab illo æquale = N+1. Et hic primus erit ad illum, ut $a^{N+1} :: b^{N+1}$

Theorema XXIV.

§. 250. Proo. In Progressione Geometrica Factum Extremorum est æquale Facto Terminorum quorumvis ab Extremis æque Distantium, ut & (: Si Termini sunt impares.) Quadrato Medii.

Demonstr.

Demonstratione Hic nihil opus est; patet enim ad Oculum Veritas Asserti e formula Generali Tabellae (§ 245.) Exhibitae. Ex. gr: In formula (§ 245.) Progressionis Crescentis Factum 1. & VII. 64. = Factum Extremorum 64 × 1 = 64. Sed etiam Factum Secundi 2. & VI. 32. qui sunt ab Extremis aequaliter distantes. Est 2 × 32 = 64. ita Factum Tertii & quinti, etiam ab Extremis aequaliter distantium, est 4 × 16 = 64. Denique cum sint Terminii impares; medii quoque 8. Quadratum 8 × 8. = 64. idem patet etiam e formula Generali A.

Theorema XXV.

§. 250. Ro. In Progressione Geometrica quilibet Terminus est Productum ex Termino primo, & Exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem; quam sit Numerus Localis Termini.

Demonstratione neque hic opus est, cum satis sit evidens ex A. (§. 245.) Terminum V. gr: VI. am^s. esse factum ex Termino primo A, & Exponente M. elevato ad quintam Potentiam 3. e m^s. sic & in Numeris sub C. Terminus Ex. gr: IV. 8. factum e termino primo 1. & Exponente 2 elevato ad potentiam tertiam 3. e 2 × 2. × 2 = 2^3. Hinc

Corollarium 1.

§. 252. Igitur dato Termino + & Exponente Rationis facile est invenire Terminum quemvis, si datus Exponens elevetur ad potentiam uno gradu inferiorem, quam sit Numerus Localis, quaesiti, atque Potentia ejusdem Exponentis

+ primo,

talis obtenta multiplicetur per datum Terminum Primum, Factum extinde enascens erit Terminus quæsitus. Sic v. gr: si Detur Terminus Primus 1. et Exponens 2, quæratur autem Terminus quartus erit (: 2×2×2) multiplicatum per 1 = 8. qui est Terminus quartus, ut patet ex Tabella (§ 245. sub Lin. C.)

Corollarium. 2.

§. 253. Hinc, cum Terminus quoque maximus expresso (§. p.) modo inveniatur, sequitur Terminum quoque minimum posse haberi, si nempe Terminus maximus per victa (§. p. inventus:) dividatur per Exponentem eleratum ad Potentiam uno gradu inferiorem, quam sit Numerus Localis Termini maximi: erit quotus Terminus Minimus, tanquam alter Factor Termini maximi (§ 164. Arith. Num.) Sic si detur Terminus maximus 32 qui (§. 245.) sub Lin. C. VI loco consistit, sitque datus Exponens 2. per quem eleratus ad quintam potentiam, dicit 2×2×2×2×2 = 32. Dividendo Terminum maximum 32. Quotus = 1. ÷ Terminus Minimus.

Terminus 1. invenitur si maximus dividatur p. expr.

Ratio: Quia dato Facto & Factore unio invenitur.

Theorema XXVI.

§. 254 Proo. In quavis Progressione Geometrica Terminus datus quilibet (: seu maximus) Divisus per Terminum Primum dabit Quotum ex quo extracta Radix potentiæ uno gradu inferioris quam sit Numerus Localis Termini Dati, e Exponens datæ Rationis.

Demonstratione nulla hic opus est, cum hoc quoque Theorema ex Contemplatione formulæ Gralis Progressionis Geometricæ

Crescentis

crescentis, quam sub Lin. A. (§. 245.) dedimus. Hinc autem facillimum erit resolvere, idem quod adfertur sequenti.

Problema.

§. 254. Datis Terminis primo et Ultimo, (seu maximo.), atque dato etiam Numerorum Terminorum seu Loco quem Terminus extremus occupat expresso, inveniri exponentem communem. Si enim §. 245.) sub Lin. C. datus Terminus primus sit = 1 et Ultimus = 16, atque datus Terminorum Numerus = 5 tum per (§) Terminum Ultimum dividendo 16, per primum qui est 1. erit quotus = 16, ex quo extrahendo Radicem potentiae uno gradu inferioris quam est Numerus Terminorum, sive Radicem potentiae quarta erit Radix = 2, qui est quaesitus exponens. Hinc porro sequitur.

Theorema XXVII.

§. 255. Rõo. Quod si in Progressione Geometrica primus Terminus subtrahatur ab Ultimo; et Residuum ita emergens dividatur per communem exponentem, Unitate mulctatum; atque quoto exinde obtento addatur Terminus Ultimus; habebitque summa Terminorum omnium.

Demonstrationis Loco videatur Tabella (§. 245) Ubi si in formula C. ab Ultimo Termino 64. subtrahatur primus 1. et Residuum 63. dividatur per communem exponentem Unitate mulctatum i. e. per 2 minus 1 = 1. erit Quotus 63 qui cum Termino ultimo 64 dat summam 63 + 64 = 127 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 Hinc itaque facile resolvitur sequens §157.

§. 256

§. 256. Problema. Dato Terminio primo et Ultimo datoque Exponente communi, invenire Summam Omnium Terminorum Progressionis Geometricae.

Ex. gr.: Ex. gr.: Si detur Terminus primus = a, Exponens = m, et Terminus Ultimus = am^6 erit juxta §. 9. Omnium Terminorum Summa = $am^6 - a$, Ideo si sit = a = 1 et $m^2 = 2$ erit tum Summa $\left(\frac{1 \times 2}{2-1}\right) 6$ $2 - 1 + am^6 - a + (1 \times 2.) 6 = \frac{64}{2} - \frac{1}{1} + 64 = 64 = \frac{63}{1} = 64 = 127$. Conf. (§. 245.) formula A et C.

Coroll. §. 257. Quotiescumque igitur quaeritur Summa omnium Terminorum Progressionis; notasse debent haec tria. a) Terminus primus. b.) Terminus Ultimus. et c.) Exponens communis. Atque ita quoque palam est, quod quotiescumque datur ejusmodi Problema resolvendum, atque ex his tribus deficiat Unum, in id primis debebit inquiri per superiora Problemata. Ex. gr.: Si primus Terminus cum Exponente daretur in Terminum Ultimum qui deest, inquirendum est per (§. 251.) datis vero Terminis primo et Ultimo Exponens qui deest debet primis inveniri per (§. 254.) Denique ex his liquet sequens.

Coroll.

§. 258. Problema. Datis duobus Terminis in mirum invenire quot cum quoque + Proportionales, nam cum semper detur Terminus primus, Terminus Ultimus et Numerus Terminorum,

+ medios

inveni

inveniet, ex Zi per §. 254. Exponens Communis, quo invento possunt formari quotcumque Termini per (§ 254.) id quod periclitanti patebit. Scholion.

§. 269. Quae de Progressione Crescente, quoque dicta sunt, eodem modo de Decrescente, vera esse applicanti patebit; nam ubi e Tabella §. 245.) in Numeris sola Contemplatione clarissime advertere licet. Omnis Progressio Decrescens erat Crescens, et vicissim Crescens mutatur in Decrescentem, modo quis serio consideret progredientem a Dextris sinistram versus, et contra, Itaque Zi visis, jam de Proportione, quoque et Progressione Arithmetica instat agamus. Verum de Zis quoque brevibus; nam Ursaliter, quae de Proportione et Progressione Geometrica demonstrantur ad Zibendum multiplicationem, Divisionem, item Elevationem ad Potentias v. Extractionem Radicis, ea omnia de Proportione quoque ac Progressione Arithmetica intelligenda sunt, ad Zibendo nimirum Loco Multiplicationis Additionem, Loco Divisionis Subtractionem, loco quadrati Multiplicationem per 2. Loco Cubi Multiplicationem per 3. et vice versa. Loco Extractionis Signum v. Divisionem per 2, et Loco Extractionis v. Divisionem per 3. Esto igitur.

CAPUT IV.

De Proportione et Progressione Arithmetica.

Definitio. XLIII.

§. 260. Arithmetica Proportio quid sit?

Superius

Progr. Arith. Superius (§. 215.) vidimus Progressionem autem Arithmeticam continuata serie plurium Terminorum Arithmeticæ Proportionalium posse definiri palam est ex (§. 243.) quæ speciatim vocatur Crescens si Terminus crescant, si autem Decrescentibus Decrescens appellatur. Sed si de Proportione Arithmetica pauca saltem præmittamus.

Crescens. Decrescens.

Theorema XXVIII.

†† §. 262. Proo. In quavis Proportione Arithmetica summa Extremorum est æqualis summæ Mediorum.

Demonstratio. Quævis Proportio Arithmetica quæ repræsentari hac formula Generali $a.\ a \mp d :: b.\ b \pm d$ (§. 218.) atque in hac Formula evidens est esse summam Extremorum $a \pm b \pm d + b$ id summæ Mediorum, quæ in quovis etiam

Corollarium 1.

§. 263. In continua itaque Proportione Arithmetica ex. gr. $a, b :: b. c$. Summa Extremorum id est $a + c = b + b = 2b$. id est Duplo Medio. Corol. 2.

§. 264. Hinc si quæratur quartus Arithmeticæ Proportionalis palam est ex (§. 260.) eundem inveniri, si a Summa Mediorum subtrahatur primus, tum erit Proportio ex. gr.: $a, b :: c, x$ quæ per (§. cit.) $a + x = b + c$ et per Metathesim $x = b + c - a$. Sic datis 3. 5. 7. si quæratur quartus x. erit. $3.\ 5 :: 7.\ x$, quæ (§. cit.) $3 + x = 5 + 7$ et per Metathesim $x = 5 + 7 - 3 = 9$.

Coroll. 3.

§. 265. Tertius autem continuæ Proportionalis obti

obtinebitur, subtrahendo Terminum primum a duplo secundi
ex. gr. Si datis 3. et 5. pro Aetate Tertius x. erit 3. 5 :: 5. x
Qui (§ cit.) 3 + x = 5 + 5 et per Metaphesim x = 10 − 3 = 7.

Coroll. 4.

§. 266. Si autem datis Primo 3. et tertio 7. pro Aetate Medius Proportionalis x, inveniatur summam primi et tertii dividendo per 2, est enim 3. x :: x. 7. Qui 3 + 7 = 7x. (§. 261.) et per Metathesim x = $\frac{3+7}{2}$ = 5.

Scholion.

§. 267. Ex iis itaque satis est evidens, quod (§ 260.) dictum est, minimum eodem modo Rationandum esse de Proportionibus quoque ac Progressionibus Arithmeticis, quemadmodum de Geometricis traditum est, Dummodo loco Multiplicationis Additio, et Loco Divisionis Subtractio adhibeatur &c. Igitur si sit Progressio Crescens Arithmetica a^d, b^d, c^d, f^d, g^d, &c. ex primis tribus sequentibus (§. 207.) Sequenti For.

In Literis.

Numerus Terminor.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Progressio Cresc.	a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d.	a+5d,	a+6d.	A.

Et in Numeris ponendo d = 2.

1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2 &c. 23

Ex iis formulis sola Contemplatione facile innotescunt Theoremata et Problemata sequentibus §, Corollariorum instar exposita et illustrata.

Theorema 1. Coroll. 1.

§. 268. Liquet minimum a formulis (§ pr.)

Hoc

Hoc Theorema primum Summa Extremorum est æqualis Summæ quorumvis duorum Terminorum ab Extremis æqz distantium, ut et (siquidem Termini sunt impares) duplo medio est formula A summo Extremorum primi et summa quoqz ab Extremis æqz distantia Denique duplum est et rami medii idem in Numeris æqz experiri licebit.

$$\begin{cases} a+a+6d = 2a+6d \\ a+d+a+5d = 2a+6d \\ a+2d+a+4d = 2a+6d \\ a+3d+a+3d = 2a+6d. \end{cases}$$

Theorema II. Coroll. 2.

§. 269. Non secus evidens est Theorema secundum, quivis Terminus Progressionis Arithmeticæ componitur ex Termino primo et tot Differentiis, quot sunt Numeri Terminorum dempto uno, seu quivis Terminus aggregatum ex termino primo, et tot Differentiis, quot sunt Termini Antecedentes earum ex. gr. in Serie A (§. 266.) Terminus quartus est $a+3d$, quæ summa constat e termino primo a, plus tribus Differentiis, quot nempe Termini antecedunt eundem Terminum quartum idem patet in Numeris. Ex his deducuntur quatuor Problemata tanquam totidem Corollaria sequentibus Art. comprehensa minimum quarum primum est.

Problema I. Corol. 3.

§. 270. Quod si nempe dentur Terminus primus et Differentia, possit inveniri Terminus quivis Progressionis Arith. Si enim Differentia data vocatur in Numerum Terminorum una Unitate mulctatum, atqz facto ita obtento addatur Terminus primus ex. gr: in formula

(§. 265.)

§. 265.) A cum Terminus primus sit = a, Differentia = d, si quaeratur Terminus quartus ponendo pro 2do Termino 4 = n. erit Terminus quaesitus $x = dn - d + a$, atque haec sunt esse formula Ursalis, pro quocunque Termino excepto primo; ut si in numeris formula 23. (§ cit.) sit Terminus primus $A = 1$. Differentia $d = 2$. et quaeratur Terminus quartus, erit numerus Terminorum $4 = n$, adeoque $x = dn - d + a = 2 \times 4 - 2 + 1 = 7$.

Coroll. 4.

§ 270. Cum itaque in data Progressione ad libitum poni possit Terminus quivis pro Ultimo seu maximo Termino, quin si Ultimus seu maximus Progressionis Terminus vocetur u. erit pro eodem Termino Generalis formula $u = dn - d + a$ Unde palam est Terminum Ultimum quoque vice maximum eodem modo reperiri ac alium quemlibet.

Problema 2. Corol. 5.

§. 272. Quod si ergo detur Differentia = d numerus Terminorum = n et Terminus Ultimus = u facile invenitur Terminus quoque primus, tunc enim formula Ursalis (§. pr.) exposita erit haec $u = dn - d + x$, et per metathesim $x = u - dn + d$. ex. gr. sit juxta (§ 265.) Seriem 23. $u = 13$. $d = 2 = n = 7$. erit $x = 13 - 14 - 2 = 1$.

Problema 3. Coroll. 6.

§ 273. Si vero dentur Terminus primus = a Terminus Ultimus = u, et numerus Terminorum = n, ad quaerendam Differentiam x. erit tum formula Ursalis (§ 269.) haec $u = xn - x + a$, et per metathesim $u - a = xn - x$, ac vi

videlicet

Confer. Theor. XXVI. (§. 253.)

videndo per $n-1$. erit $\frac{u-a}{n-1} = x$. Sic si ab Ultimo subtrahatur primus, et Residuum dividatur per Numerum Terminorum Unitate mulctatum, erit quotus quæsita Differentia $x = \frac{13+1}{7-1} = \frac{12}{6} = 2$. Conf. §. 261. formula 23.

Problema IV. Coroll. 7.

§. 274. Ex eadem Ursal. Formula (§. 269.) Numerus quoque Terminorum $= x$ facile invenietur ex datis Termino primo $= a$, et Termino Ultimo u. et Differentia $= d$ erit enim $u = dx - d + a$, et per Metathesim $u + d - a = dx$ ac dividendo per d erit $\frac{u+d-a}{d} = x$. Sic si ad Terminum Ultimum Differentia addatur, atque ex hac summa Terminus primus subtrahatur, Residuum dividendo per Differentiam obtinetur quotus, qui erit Numerus Terminorum quæsitus, si quidem formulam B. §. 265.) erit $x = \frac{13+2-1}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Theorema 3. Corol. 8.

§. 275. Ex Formula Generali Progressionis Arithmeticæ superius (§. 265.) exposita, rite etiam deduci illustrari pro hoc Theorema Tertium. Summa Totius Progressionis Arithmeticæ, est æqualis semi summæ Terminorum Extremorum multiplicatæ per Numerum Omnium Terminorum, nam summa totius Progressionis Arith. est æqualis (§. cit.) sub hac x est $= 4a + 21d$ summa vero Extremorum est $= 2a - 6d$, ideoque semi summa eorundem est $= \frac{2a+6d}{2} = a + 3d$, quæ multiplicata per Numerum Terminorum $= 7$. dat factum $= 14a + 21d$ Sic summam Omnium Terminorum

Schol

Scholion. I.

§ 275. Doctrina Progressionum quemadmodum tradita, locum habet etiam in quantitatibus Fractis, in quibus tamen, cum variae esse possint considerandi veniunt tam Numeratores quam Denominatores, si quidem Series tam Numeratorum quam Denominatorum, si seorsim considerentur, iisdem gaudent Regulis, quibus Series quantitatum incognitarum. His igitur omissis.

Scholion. II.

§ 276. Etiam de Proportione Harmonica, id duntaxat insinuabimus, quod ita vocetur Proportio et quidem Discreta, in qua (si sit Discreta) differentia Terminorum primi, a secundo ita se habet (Geometrice) ad Differentiam tertii a quarto, uti se habet Terminus primus ad quartum (aut si sit Continua) ita est Differentia primi a secundo ad Differentiam secundi a tertio prout est primus ad tertiam et quidem in Ratione Geometrica. Sic Harmonicae Proportionales sunt $12^2\ 14 :: 20^4 . 24$; nam $2 : 4 :: 12 : 24$. Item Continua est $10^6\ 16 :: 16^{24}\ 40$; nam est $6 : 24 :: 10 : 40$. quae si generaliter exprimuntur per Literas $a : b :: c : d$ erit $b - a . d - c :: a , d$ quae cum sit Proportio Geometrica Legibus Geometricis venit tractanda, ut qui ope quantus, tertius aut Medius Harmonicae Proportionalis inveniri possit.

Et tactenus de Proportione et Progressione proprie via dictis, verum cum ad Proportionem eamque Geometricam pertinet Celebris etiam illa Regula Trium quae propter insignem et quotidianum Usum in vitae humanae Commercio, etiam Aurea vel, haec

quoque

quoque peculiari quod sequitur capite pennis saltem pertractanda erit.

CAPUT. V.

De Regula Aurea. sive Trium.

§. 277. Regula Aurea v. Trium est Methodus inveniendi per antitatem Incognitam datis Geometrici Proportionalem. Et quidem si datis tribus terminis, per ceratur quartus Proportionalis, Regula Aurea vocatur Simplex; Composita si aut datis quinque, sextus, aut septem datis octavus proportionalis desideretur. ex. gr. Dum sciens Ulnas 2. Panni vendi Flor. 9. volo cognoscere pretium 6 Ulnarum ex eadem panni specie quotnam sunt Flor.? Regula Aurea Simplex adhibenda erit, Compositæ autem Exemplum præbet, dicere per æstio Flor. 1000 per Annos 4 aut Censum Flor. 200. Ergo Flor. 3,500 per Annos 6. per autem Censum dabunt. Corollari.

§. 278. Evidens quidem quamlibet Auream Regulam, tam Simplicem, quam Compositam constare debere ex meris Rationibus inter se connexis, quarum quælibet seorsim considerata terminos habeat Homogeneos, i. rem quidem gris sui Denominationis designantes sic in Exemplo posteriori (§. pr.) continentur in primis Ratio 1000 : 3500 cujus uterque Terminus designat Florenos Censum dantes, Deinde continetur Ratio 4 : 6. quæ est Annorum. Denique si Terminus per æsitus dicatur x, erit tertia Ratio 260 : x quæ est Florenorum Censum constituentium, male igitur quis ratiocinaretur, De modo Urna constat 4. grossis. Ergo decem Metretæ tritici quanti erunt, cum Urna vini, et Metretæ Tritici, non sint Homogenea sed res diversæ Denominationis

Scholion

§. 279. Schol. Ex Rationibus Auream Regulam constituendis illa quae terminum incognitum continet Ratio quaesita reliquae autem Rationes Cognitae dicuntur, quibus Denominationibus nos quoque deinceps utemur. Definitio XXV.

§. 280. Porro Regula Aurea tam Simplex, quam Composita solet distingui in Directam, Inversam, quas varii variomodo definiunt. Nobis autem Directa est in qua Ratio cognita respectu quaesitae est Directa. Inversa autem est in qua adest Ratio cognita respectu quaesitae inversa. Coroll.

§. 281. Unde palam est certum criterium discernendi Regulam Auream Directam ab Inversa cum habere, qui novit quomodo se habeat Ratio cognita respectu quaesitae, directe an inverse. Igitur ad cognoscendum esto.

Problema XXX.

§. 282. Proo. Investigare num Ratio cognita respectu quaesitae sit Directa, an inversa.

Resol. Cum una quaeque Ratio (: ut alias via etiam in Regula Aurea :) constat duobus Terminis homogeneis, et ratibus quae rei cuiusquam duas diversas magnitudines exprimunt (§. 270.) Ante respectum Rationis cognitae ad Rationem quaesitam cognoscere volenti id tantum sedulo expendendum erit, num ea res cuius diversas duas magnitudines exprimunt duo Termini Rationis quaesitae crescat an decrescat, crescente re illa cuius duas diversas magnitudines exprimunt duo Termini Rationis cognitae? Si enim hac re crescente, illa quoque crescat Ratio cognita respectu quaesitae est Directa; Inversa autem si re in

Recta

in Relatione cognita comprehensa, crescente altera quam Ratio quaesita continet Geometrica decrescat.

Demonstratio. Ratio Geometrica una alteri Directa tunc est, quando quotus in utrisque eorum Orationis Ordine (: juxta nos :) in utrisque Divisione consequentis per Antecedens obtinetur. Et adverso autem si idem quotus, e duobus Rationibus inverso operationis Ordine (: 3. e in una consequentis per Antecedentem, et in altera Antecedentis Divisionis per consequentem :) obtineatur, erunt Terminis earum Duarum Rationum inverse seu reciproce Proportionales, seu Ratio una respectu alterius dicetur inversa (§. 199.) Atque cum crescente Rerum Ratione cognita comprehensa, crescit quoque Res contenta in Ratione quaesita, tunc in utrisque idem quotus, eodem Divisionis Ordine obtinetur, si autem una Dictarum rerum crescente altera decrescat, ad eundem quotum ex utrisque obtinendum, diviso inverso Ordine, erit instituenda, ergo per datam Resolutionem, recte investigabitur, utrum Ratio cognita respectu quaesitae sit Directa an Inversa. q. e. d.

Minorem. Exemplis illustrabimus Ex. gr. si proponatur Problema sequens 6. Metretae Tritici, rendunt 13 Flor. et 18. Metretae ejusdem Tritici quot Florenis constabunt? Hos itaque Florenos quaesitos innuendo X. erit in hoc Problemate, quaesita Ratio. 13: X (§ 40. continens duas diversas quantitates Florenorum pro Metretis Tritici numerandum. Ratio autem cognita est 6: 18. continens Metretas Tritici pro quibus Flor. Sunt nu-

me

numerandi. Jam vero quo plures Metretae eminent, eo plures Flor. sunt pro iis Numerandi. Ratio cognita 6:18 est Directa respectu Rationis quaesitae 13:x. Seu duarum Ja-rum Rationum Terminis sunt Directe Proportionales id est 6:18::13:x. nam quaerendo valorem x. erit primo quoque 6 × x = 18 × 13 et Inde $x = \frac{18 \times 13}{6} = \frac{234}{6} = 39$. quem substi-tuendo in Proportione loco x. erit 6:18::13:39. in quaidem Quotus obtinetur dividendo in utrisque Rationibus Consequen-tem per suum Antecedentem.

Pari modo si detur sequens Problema: Certa pecu-niae summa pro Diurna 6. Operariorum ~~Mercede~~ Mercede suffi-cit per Dies 4. Ergo eadem pecuniae summa pro Diurna 12. Ope-rariorum mercede, quot diebus sufficient. Ponendo itaque vis dies quaesitos = x erit in hoc Problemate Ratio quaesita 4:x, cognita vero 6:n. Et quidem illa est Dierum, quibus Certa Die-rum summa pro Diurna Operariorum Mercede sufficit: Ratio vero cognita 6:12. est Operariorum illorum, pro quorum diurna Mer-cede, Certa illa pecuniae summa per aliquot Dies sufficit. Jam vero quorum Major est Numerus operariorum eo pauciori-bus Diebus sufficit eadem pecuniae summa pro Diurna ipsorum Mer-cede, adeoque Crescente Ratione cognita i.e. Numero operarior decrescit Ratio quaesita = dictus Dierum Numerus. Ergo Ratio co-gnita 6:12. est inversa comparate ad quaesitam 4:x, id quod vel ex inde patet, quod si alterius utriusque Rationis (v.c. 6:12.) termi-ni invertantur ponendo Antecedentem pro Consequente, et vi-ce versa, tum demum erunt duarum Rationum Terminis

directe

directè Proportionales, i. e. erit 12:6:: 4: x. Etiam sine 12 × x = 68 × 4. (§. 224.) Consequ. per Reg. IV. (§. 167.) $x = \frac{14}{12} = 2$ adeoque 12:6:: 4:2. Cum in utrisque Rationibus Divisione Consequentis per suum Antecedens obtinetur quotus $= \frac{1}{2}$ in Terminis minimis.

Coroll.

§. 283. Ex his itaque tuto infertur, quod ad Regulæ Aureæ Inversæ transformationem in Regulam Auream Directam, nihil aliud requiratur, quam quod Ratio cognita quæsitæ Reciproca invertatur ponendo Antecedentem illius Loco Consequentis, et vice versa, cum per hoc eadem Ratio cognita respectu quæsitæ cadit Directa, Consequ. Regula quoque Aurea non amplius erit Inversa, sed potius Directa. (§. 220. 272. 274.) Licet plerique Arithmeticorum Regulam Auream Distinguentes in Directam et Indirectam seu Inversam pro utrisque seorsim tradant Regulas, nos tamen Regulas pro qualibet Aurea Regula simplici in Uno Regulas vero pro qualibet Aurea Regula Composita seu sit Directa, seu Inversa in altero Problemate dabimus.

§. 284. Problema. XXXI. Proo.

Resolvere Problemata Regulæ Aureæ Simplicis.

Resolutio. Ante omnia Terminis quæsitus designetur per x tumque e Æquatuor Terminis, quos Problema Compositum continet efformentur duæ Rationes Continuæ Geometricæ, una cognita, quam e tribus datis, duo Termini inter se Homogenei et altera quæsita, quam e datis Terminis, cum quæsito sibi Homogeneo constituant, et quidem ita, quod in Ratione quæsita, Consequens sit Terminus Incognitus x in Cognita vero Ratione is scriba-

tur

tur pro consequente, qui adnectam habet sibi quaestionem, seu cui in Ratione quaesita Terminus incognitus X. respondet. Sic ex. gr. si sit Problema: Ex certa vini specie duae Urnae constant 3. Flor. & 6. Urnae quot Flor. constabant

In primis etiam quaesitum Flor. Numerum designando per X. erit ex Terminis datis cognita Ratio. 2: 6. Dicuntur sunt ex datis Homogenei inter se, cum utraque Urnas designat, ita ut quaestio sit adnexa Termino 6. qui proinde locum consequentis occupat. Porro quaesita Ratio erit 3: X cujus ambo Termini itidem sunt inter se Homogenei, cum utraque Florenos, et quidem Antecedens cognitos, consequens incognitos exprimat, quo pacto obtentae jam duae Rationes Geometricae. Igitur.

2° Si obtentis per Reg. 1. Duabus Rationibus in alterutra earum, v. etiam utraque Terminus aliquis fuerit compositus, ex diversae speciei ratoribus (ex. gr.) ex Flor. et Crucigeris.) is Terminus una cum sibi Homogeneo facilitandae operationis gratia, reducatur ad valorem speciei infimae. ex gr. si sit Problema Flor. 1+36 Crucigeris emuntur, duae Librae Saccari. & 10. Flor. quot possunt emi. Hic Ratio cognita est haec Flor. 1+36. Crucifer. Flor. 10. cujus Antecedens est compositus ex Flor. et Crucig. 96: 600. Si vero Problema sic proponeretur: 2. Librae Saccari renduntur Flor. 1+36 emuntur. & 5. Librae quot Flor. emendae erunt, nunc Terminus idem compositus ex Florenis et Crucigeris erit Antecedens, Rationis quaesitae in hac itaque loco Flor. 1 et Crucig. 36. debent scribi Crucigeri 96. ac Litera quoque deinceps. Numerum Crucif. designare intelligatur. Porro

(3º Investigandum erit (§ 283.) Num Ratio cognita respectu quæsitæ sit Directa, v. Inversa. Atque si illa respectu cujus deprehendatur esse Directa, connectantur ambæ Rationes in Proportionem interposito vidi et ipsius Signo (::) Et quidem Ratio quæsita Loco posteriori sive a Dextris ponenda est, ut sic Terminus incognitus x. semper sit quartus Proportionis Terminus. Ex. gr: In Exemplo priore Problemati (§ 283.) subnexo, Ratio cognita Metretar. 6:18. est Directa. respectu Rationis quæsitæ 13: x Flor. adeoque ambæ hoc modo connectendæ sunt in Proportionem 6: 18:: 13: x. Sin autem Ratio cognita respectu quæsitæ deprehendatur esse Inversa, eadem Ratio cognita invertenda erit ponendo Antecedentem ejus pro Consequente, et vicissim, ac tum demum, cum Ratione quæsita modo statim exposito connectatur ad efficiendam Proportionem. Ex. gr. Vivimus sic ea, In Exemplo posteriori, Rationem cognitam Operariorum 6: 12. esse Inversam. respectu quæsitæ 4: x. quæ est Dierum, ita quod invertatur prius Ratio illa cognita ut sit. 12:6. tum demum connectatur, cum quæsita 4: x ad efformandam tam Proportionem 12: 6:: 4: x

(IVº His peractis quæratur valor Termini Incogniti x, multiplicando scilicet Terminos Medios Proportionis, inter se et factum eorum dividendo per terminum primum; erit quippe Quotus exinde emergens Terminus quæsitus (§ 227.) Ex. gr. (Ref. præ) in Proportione 6: 18:: 13: x est $x = \frac{18 \times 13}{6} = \frac{134}{6} = 39$. Et in Proportione 12: 6:: 4: x. est $x = \frac{24}{12} = 2$.

Demonstratio. Tunc bene resolvuntur Problemata Ref. Aureæ Simplicis, quando invenitur valor incogniti datis tribus, Terminis Geometricæ Proportionatis (§ 278.) Atque per præ-

scriptum

Scriptam Resolutionem idem obtinetur (: id quod periclitanti Exempla comprobabunt :) Et per eandem Resolutionem rite resolvuntur Problemata Aureae Reg. Simplicis. Quod erat, de.

Exempla.

Imum 80. Vasa Vini simul constant Aureis 500. Et Vasis Unius pretium quot sunt Aurei.

Primo: juxta Reg. I. Vasis Unius quaesitum pretium nominando X, est Ratio Cognita Vasorum 80:1. et Ratio quaesita Aureorum 500: X Reg. vero II. in hoc Problemate non habet locum, neuter enim est Terminus Compositus. Et.

Secundo. Per Reg. III. Investigando, num Ratio Cognita Vasorum sit Directa respectu Rationis quaesitae? an Inversa? hoc modo erit Ratiocinandum 500: X est Ratio quaesita Vasorum emendorum. Jam vero crescente hac Ratione, i. numero Vasorum emendorum crescit etiam Ratio quaesita i. numerus Aureorum pro Vasis illis solvendorum, itaque Ratio cognita 80:1. est Directa respectu Rationis quaesitae 500: 1. Proinde ex his Rationibus erit Proportio 8:1::500:X. Hinc

Tertio. Per IV Reg. quaerendo valorem de X erit $X = \frac{500}{80} = 6\frac{20}{8} = 6\frac{1}{4}$ Hoc est pretium unius cujusque vasis sunt Aurei $6+\frac{1}{4}$.

IIdum: Certa pecuniae summa Militibus 125 sufficit diebus 10. Et eadem pecuniae summa Militibus 50. quot diebus sufficit.

Dies quaesitos nominando X erit juxta Reg. I. Ratio cognita Militum 125:50. et quaesita Dies 10: X (: Reg. II. neque in hoc Problemate est Locus.) itaque progrediendo ad Reg. III.

Video

Video crescente Militum numero debere decrescere numerum Dierum per quas iisdem eadem summa sufficere potest, ideoque Ratio cognita 125 : 50. et Inversa quaesita 10 : x.

Hinc invertenda est Ratio cognita, deleque formanda Proportio 50 : 125 :: 10 : x, Consequenter per Reg. II. $x = \frac{1250}{50} = 25$, hoc est eadem pecuniae summa, quae pro Militibus 125 per 10 Dies pro Militibus erit sufficiens per Dies 25. Scholion.

§. 285. Pro Reg. II (§. p.) Dedimus Exempla circa Regulae adnexa, porro. Notari quoque ac quod Ubi quod praeter tres priores (§. p.) Regulas pertractatum, atque in Proportionem resolutum fuerit, quivabit eandem Proportionem (: si quidem fieri possit, ad terminos simpliciores reducere, ad facilitandam Operationem, quae in exprimendo x. valore per Reg. IV. instituidebet. Quae Reductio fieri potest dividendo in primis utriusque prioris Divisorem Rationis Terminum per communem aliquem (: si adfuerint :) §. 232.). Deinde possunt etiam Antecedentes, utriusque Rationis per communem (: si habuerint :) Divisorem dividi, quin mutetur Proportio (§. 223.) Ex. gr. In Exemplo secundo (§. p.) Proportio per tres Regulas eruta, dele erat: 50 : 125 :: 10 : x, in qua uterque prioris Rationis Terminus potest dividi per 5. eritque tunc 2 : 5 :: 10 : 5. dele vero Antecedentes utriusque Rationis per 2. Dividendo demum abit in hanc simplicissimam: 1 : 5 :: 5 : x ex qua per Reg. IV. (§. p.) invenitur valor incogniti

Problema XXXII.

§. 286. Prob. Resolvere Problemata Regulae Aureae, Compositae.

Resolutio. Quoniam Regula Aurea Composita tunc uti

utimur quando datis 5 vel. 7. Terminis quaeritur 6. v. Octavus 21 (§. 284.) Hinc evidens in Problematibus Regulae Aureae, complures, quam duas adesse Rationes, unam nempe quaesitam, reliquas vero cognitas (§. 279. 280.) ut itaque singulae Rationes, commodius eliciantur, an vita semel accenti Problematis Proportione, quantitates in prima ejusdem (aequatione:) parte contenta sibi invicem subscribantur, quae erunt Antecedentes totidem Rationum, quot ipsi in priori parte Problematis rite propositi reperientur. His itaque tandem singulis quantitates Homogeneae in altera ejusdem Problematis parte contentae pro consequentibus adjiciantur Quantitatem quaesitam per x designando Ex. gr: si Proponatur sequens Problema Militibus 5. Lib. Carnis 100. sufficiunt per Dies 20. Et 15. Militibus Librae Carnis 600. quamdiu sufficiunt. Exprimendo itaque quaesitum Dierum Numerum per x. primam Problematis partem si in Chartam v. Tabellam Virgili.

Militibus 5.
Carnis Librae 100.
Dies. -- 20

Tum alterum ejusdem Problematis partem Et 15. Militibus exprime Complendo inequatas Homogeneorum Terminorum Rationes, ut totalis demum expressio sit=

Ecce. { Militibus 5: 15
Car. Libr. 100: 600
Dies -- 20: x

(2º Quodsi autem cujuspiam Rationis Terminis alterutrum, aut etiam uterque Compositus sit ex diversae speciei valoribus fiat utriusque Termini ejusdem Rationis reductio

ductio ad valorem specie infinite uti in Reg. II. (§. 285.) explicatum est in Regulae in assumpto exemplo non est locus.

3º Hic quoque non secus ac in Regula Aurea simplici (§. 205.) dictum est jubebit singulas Rationes cognitas si quidem fieri possit, reducere ad simplicem expositionem, videlicet utriusque Terminum Rationis, per idem dividendo. Sic ex. gr. per 5. secunda vero per 100. dividi, quo facto haec acquiritur Problematis haec expressio, jam simplicior minimum.

Militibus 1: 3.	Executa autem haec Regula quam Nonnulli negligunt.
Carnis Lib. 1: 6.	
Dies — 20: x	

4º Singulae Rationes cognitae conferantur successive cum Ratione quaesita ut innotescat ‡ aut Inversa juxta (§. 283.) et si quae forent Inversae respectu quaesitae ‡ tunque omnino Rationes cognitae componantur in unam, earum Antecedentes inter se, et Consequentes pariter inter se multiplicando, eritque haec Ratio ex omnibus cognitis Rationibus Composita aequalis sive Proportionalis Rationi quaesitae (§. 234.) proinde illa pro priore. Haec vero scribatur pro Ratione posteriore Proportionis. Ex. gr. In assumpto exemplo Ratio Militum 1: 3. est Inversa respectu Rationis quaesitae Dierum 20: x. certus enim Librarum Numerus quo Major sit Numerus Militum eo paucioribus Diebus erit pro iisdem sufficiens prior itaque Ratio cognita invertenda est sic. Ex. gr. ut sit 3: 1. Ratio vero Librarum Carnis 1: 6. est Directa respectu quaesitae 20: x. nam quo plures erunt Libra Carnis, eo pluribus Diebus

‡ quaenam sit directa

‡ prius invertantur

sufficiens

pro iisq. Militib. Rationes itaq. Cognitas Componendo, atq. cum quaesita conferendo erit Proportio $\left\{\begin{matrix}3:1\\1:6\end{matrix}\right\}$ :: 20: x. id est 3: 6 :: 20: x.

(50 Ultima tandem Proportio, quam Ratio ex Cognitis Composita, una cum Ratione quaesita constituit, poterit reduci (: si Termini id permittant.) ad Expressionem simplicem Methodo (§. 286.) praescripta tunq. quaeratur valor Incognitae x. Medios Terminos Proportionis multiplicando inter se, et Factum eorum dividendo per terminum primum, sic in allato Exemplo (: Reg. IV. §. 6.) Ultima Proportio 3: 6 :: 20: x. priorem Rationem per 3. dividendo, abit in Sane: 1: 2: 20: x, Unde facile mi otescit esse x = 40. Id est si 5. Militib. Lib. Carnis 100. sufficiunt per Dies 20. Militib. 15. Carnis Lib. 600 sufficient per Dies 40:

Demonstrao. Hic quoq. eadem (§. 285.) ad Liberi pu, facta ad Ve praesens Problema applicatione. Igitur duo a Exempla ad Referemus secundum praescriptas Resolutionis Regulas pertractanda

Exempla Regulae Aureae Compositae.

1mum Floreni 1000 per Annos 4. dant Censum Flor. 200. Et Floreni 3500. per Annos 6. quantum Censum dabunt.

1. Per Regulam 1mam Censum quaesitum vocando x. Exprimatur Problema Ve modo Flor. Censum dantes

$$\left\{\begin{matrix}1000 : 3500\\ \text{Anni } 4 : 6\\ \text{Census } 200 : x.\end{matrix}\right\} \text{ Ex 2i Rationes Cognitae.}$$

(2. Per Reg. III. Reducantur ad simpliciores Expressiones primam per 500 et alterum per 2 dividendo scribatur

Flor

Florenorum Cursum dantes: $\left\{\begin{matrix} 2:7 \\ 2:3 \\ 200:x \end{matrix}\right\}$

3. Per Regulam IV. Singulæ Rationes Cognitæ Successivi conferantur, cum secunda, ex qua Collatione satis est evidens, utraque esse Directam, quare erit Proportio $\left\{\begin{matrix} 2:4 \\ 2:3 \end{matrix}\right\}::20:x$. Imique priores Rationes Cognitas Componendo. $4:21:200:x$ ad eoque 4 per Reg. V. est $x=\frac{21.\times 200}{4}=\frac{4200}{4}=1050$.

II^dum. Messores 8. demetunt Jugera 50. intra dies 20. & Messores 16 Jugera 150 quot diebus demetunt.

1 Per Reg. I. Dies quæsitos designando per x ex primatur hoc modo

$$\begin{matrix} \text{Messores} \\ \text{Jugera} \\ \text{Dies} \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 8:16. \\ 50:150 \\ 10:x \end{matrix}\right\} \text{ Hinc}$$

2° Per Reg. II. ex Cognitis Rationibus priorem per 8. posteriorem per 50. dividendo erunt Rationes novæ

$$\text{Messores}\left\{\begin{matrix} 1:2 \\ 1:3 \\ 10:x. \end{matrix}\right.$$

3° Per Reg. IV. Conferendo Rationes Cognitas Successive cum quæsita, palam est quidem Jugerum Directam esse respectu quæsitæ, cum quo plura erunt Jugera, eo pluribus Diebus poterunt demeti. Verum Ratio Messorum inversa est respectu quæsitæ, nam quo plures erunt Messores eo paucioribus Diebus opus erit. Cæteris paribus ad demetienda etiam Jugera, itaque hæc Ratio Cognita Messorum invertatur manente altera Ratione Cognita Jugerum ad eoque scribatur $\begin{matrix} 2:1 \\ 1:3 \end{matrix}::10:x$. Hinc Rationes priores Componendo $2:3::10:x$.

4° Denique hæc Proportio juxta Reg. V. Antecedentes per 2. dividendo abibit ad hanc nisi simpliciorem tam nempe $1:3::5:x$ Unde Facto Mediorum per Terminum primum vi-

verso

viso $x = \frac{15}{1} = 15$. Hoc est si Messores 8. Iugera 50. Diebus 10. demetant, tum Messores 16. Iugera 150. Diebus 15. Caeteris paribus demetant.

Scholion I.

§. 287. Exemplo tam Iaec (§. praec.) quam Etiam pro priore Problemate (§. 185.) allata, et tam fuse pertractivimus, quo pateret magis attento cuilibet Auditori, quomodo in aliisquoque Regulae Aureae tam Simplicis, quam Compositae Exemplis secundum praescriptam Methodum proprio Marte Resolvendis sese exercere debeat at possit.

Scholion II.

§. 288. Solent Arithmetici dum de Regula Aurea agunt Speciatim tradere Etiam Regulam Societatis ita dictam propterea quod tunc ad Iberi potissimum soleat, quando Bini v. plures Societatem ineunt Lucri causa conferendo ad Lucrum pecunias particulares, ut dein eius solo certo tempore commune Lucrum v. Etiam Damnum inter se partiantur pro Ratione collatae Cujusvis pecuniae.

Unde satis est evidens Regulam Societatis consistere in applicatione Regulae Aureae toties repetita quot sunt Socii, inter quos Partitio Lucri v. Damni est facienda. Siquidem ita se Iabeat Summa Collatorum Omnium ad Collatum particulare Cujusvis ut se Iabet Lucrum v. Damnum Cujusvis particulare. Ex. gr. si proponatur Problema

Tres Mercatores Lucri gratia inita Societate Contulerunt Certam pecuniae Summam Flor. 250. Secundus 300. Et Tertius Flor. 450. id est simul 250 + 300 + 450 = 1000 sunt autem Ursi Lucrati

Flor

Florenos. 2000.

Quaeritur itaque quanta unicuique obveniat ex Lucro totali? erunt ergo Proportiones pro singulis Mercatoribus ordinandae.

1º Pro Primo igitur Mercatore quaesitum Lucrum part. designando per x. erit Proportio 1000 : 250 :: 200 : x. quae Antecedentibus per 1000. divisis abit in Tanc: 1 : 250 :: 2 : x. Unde est $x = \frac{250 \times 2}{1} = 500$ per Reg. IV. (§. 188.)

2º Pro Secundo Mercatore peculiare quis Lucrum quaesitum vocando y. Haec stat Proportio 1000 : 3000 :: 2000 : y. Seu dividendo utrumque Antecedentem per 1000 est: 1 : 300 :: 2000 : y et hinc $y = \frac{300 \times 2}{1} = 60$. Sicut.

3º Pro Tertio denique Lucrum quaesitum exprimendo per z erit Proportio 1000 : 450 :: 2000 z. Quae ambos Antecedentes dividendo per 100. abit in Tanc: 1 : 450 :: 2 : z. Unde est: $z = \frac{450 \times 2}{1} = 900$ Sicut.

Hoc est Primum Lucrum = 500.
Secundum = 600
Tertij = 900
Omnium Lucrum = 2000.

Schohon 3tium.

§. 289. Regula Societatis. Sic ergo expressa vel Simplex ideo quod in eadem solum Collocatum Singulorum est quod attendi debeat. Verum si praeter Collatum Singulorum, alia etiam adjuncta occurrant quae attentionem merentur v. c. Tempus pro quo singuli contulerunt, hoc in casu Regulam Societatis Compositam vocant.

Unde

Unde liquet in hac quoque eandem esse operandi Rationem quam (S. P.) exposuimus, hoc Uno notato Quod pro Collato cujusvis particulari summi debeat Collatum illud per suum tempus multiplicatum Ex. gr. si sit propositum

Problema

Tribus Lanionibus Locantur quaedam Pascua 60.
Primus eorum aluit in Pascuis Boves per Mens. 100 2
Secundus Boves 50. per Menses — — 4
Et Tertius Boves 400. per Mensem — 1.

Quaeritur quantumquisque Lanionum solvere debeat?

Attendenti satis e manifestum in hoc Problemate Boves minus cujusque in star collati ejusdem, summam vero Flor ab omnibus simul solvendam Lucri seu Damni posse considerari. Igitur antequam Terminis ad Proportionem Ordinem, Numerus Bovum unius cujusque Lanionis debet per tempus suum multiplicari, ut habeatur pro singulis secundus Proportionis Terminus, erit summa ex tribus factis praevio modo eliciendis emergens. Instituta ergo Multiplicatione pro Primo

Lanione 100 × 2 = 200
Secundo 50 × 4 = 200
Tertio 40 × 1. = 400

Ex his emergens summa — — = 800

1º Stat itaque Proportio pro Lanione Primo 800 : 200 :: 60 : x seu Terminis prioris Rationis

omni dividendo 200. 4 : 1 :: 6 : x Et hinc : x = $\frac{60}{4}$ = 15.

(2º Proportio pro secundo Lanione est 800 : 200 :: 60 : y. adeoque ut in praecedenti y = 15.

(3º Denique pro Lanione Tertio erit Proportio 800 : 400 :: 60 : z. Quae Terminos prioris rationis dividendo per 400 abit in hanc 2 : 1 :: 60 : z Hinc z = $\frac{60}{2}$ = 30.

Hoc Primus solvere debet Flor. 15.
Secundus quoque totidem Flor. 15
Tertius autem Flor -- 30.
Et simul omnes 15 + 15 + 30 = 60.

Scholion 4tum

§ 290. Cum Usus Regularum frequenti Exercitio addiscatur, nobis autem Prolixioribus esse non liceat, idcirco delectum primum quoque Exemplum, sedulamque in iisdem Exercitationem Dominorum Auditorum Industriae Committentes quale quale hoc de ELEMENTIS ALGEBRAE Opusculum Concludimus.

Titubante Calamo Scripsit
Stephanus Szekelly Ao 1784.

" " " Szekelly
" " "

Jam mea votivâ Puppis redimita Corona
Laeta tumescentes aequoris audit aquas.

Simplicia Indeterminata

I. Invenire duos Numeros inaequales quorum facto si addatur summa producat 34.

II. Invenire duos Nros inaequales quorum facto si addatur summa prod. 79.

III. Invenire duos Nros quorum unus in alterum ductus producat Cubum Perf. cujus Radix Aequet factum e Primo in quadratum secundi. Aequationes P. $xy = v^3$ et $xy^2 = v$. Ani valorem Prima. $x = \frac{v^3}{y}$ in secunda $x = \frac{v}{y^2}$ Ani. $\frac{v^3}{y} = \frac{v}{y^2}$

IV. Invenire Nrum qui multiplicatus per 12. et 3. semper gignat Nrum quadratum. Aequatio Prima quoniam $12 = a \cdot 3 = b$ erit minimum: $ax = v^2$ alia. $bx = y^2$ Ani valorem quaerendo $x = \frac{v^2}{a}$ et in alia $x = \frac{y^2}{b}$ et componendo. $\frac{v^2}{a} = \frac{y^2}{b}$ Ani liberando $bv^2 = ay^2$ Ani. $v^2 = \frac{ay^2}{b}$

$$80 \,)\, 500 \quad \left(6 + \frac{20}{80} = 6 + \frac{1}{4}\right.$$
$$480$$
$$-20$$

$$500 \,)\, \frac{6}{1} + \frac{1}{4} \,($$

$$\frac{24}{4} + 1 \quad \frac{25}{4}$$

$$\frac{500}{1} \cdot \frac{25}{4} : \frac{500}{4} = \frac{100}{2000}$$

A KOLOŽSVÁRI UNITÁRIUS FŐISKI KÖNYVTÁRA 1883

195,112,064 = Cont. si quaeris quantitas validiora
ptt Consideraci ut quantitas Binomia
etiam radix quadratica: pari modo etiam
Polinomia hoc Notamus pro facilitan-
da generatione. Rep. rer.

200
360
440
3000

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{8}$

90
40 57
90 14
270 71

Demonst. et Theseos alicujus excentis et indubitatis Principiis facta deductio.

Synt. Quae molestam veritatem alteri veritati ita nectit ut sint connexi anuli catenae et sic alteri demonstrat, tradit.

in modo quo tractant Mathematici Quantitates

Ut fundamentum posterior Divisio quantitatis

Theo. est veritas proprium Simul

[illegible]