VII.

60

Electricitás

59

unabhängig von Z.

d. i. Cylinderflächen die sich bis in das ∞ erstrecken. –

All diese Flächen werden durch Linien in der xy Ebene dargestellt werden können. –

Es wird in diesem Falle:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

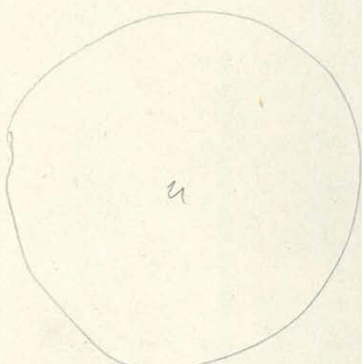
Die allgemeine Lösung dieser part. Gl. kann angegeben werden. – Es wird derselben genügt durch den reellen Theil irgend einer Function

$$F(x + iy)$$

Ich will nur den reellen Theil als Lösung betrachten. –

Wenn in irgend einem abgegrenzten Theile der xy Ebene u eine stetige und eindeutige Funktion von $x\,y$ ist, so kann ich u ansehen als Pot. von Massen auf der Grenzlinie. –

Wenn für einen Theil der Grenze $u = \text{const.}$ ist, so kann ich diesen Theil ansehen als eine leitende Linie. –



Wenn nun in dem gedachten Gebiete der $x\,y$ Ebene – die Funk.

$$w = u + iv$$

eindeutig und stetig ist, so ist allenfalls auch u eindeutig und stetig. –

Aber es wird u auch dann stetig sein können wenn es w nicht ist.

Auf Fälle von physikalischem Interesse kommt man, indem man für w

Functionen wählt, welche im allgemeinen vieldeutig sind — wenn man dann durch Beschränkungen dem u eindeutig sein — innerhalb eines beschränkten Gebietes. —

Es sei

$$z = x + iy$$

und sei etwa

$$w = \log z$$

Führe ich Polarcoordinaten ein.

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Dann ist

$$w = u + iv = \log r + i\varphi$$

der zweite imaginäre Theil ist vieldeutig.

Sehen wir den Theil

$$u = \log r.$$

als Pot. von Electricität an, so brauch

wir das Gebiet nicht mehr begrenzen —
als durch einen Punkt in $z=0$, oder durch
einen kleinen Kreis. —
Ausserhalb dieses ∞ kleinen ist u eindeutig
und stetig bis zu Zonen ∞
Es ist also $\log r$ Potential von Electricität
in diesem Punkte d. i. auf einer ∞ Linie
mit der z axe zusammenfallende.

Eine zweite Wahl ist

$$w = -i \log z$$

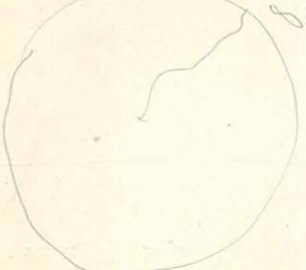
$u = \varphi$

φ ist vieldeutig wenn es das Pot.
von Elect. sein soll, so muss das Gebiet
eingeschränkt sein — um diese Vieldeutigkeit
aufzuheben. —

Ich muss eine Linie von der Nullpunkt

bis in die Unendlichkeit ziehen. —

Innerhalb dieser Flächen ist u eindeutig
also ist u Potential von
Massen auf der Fl.

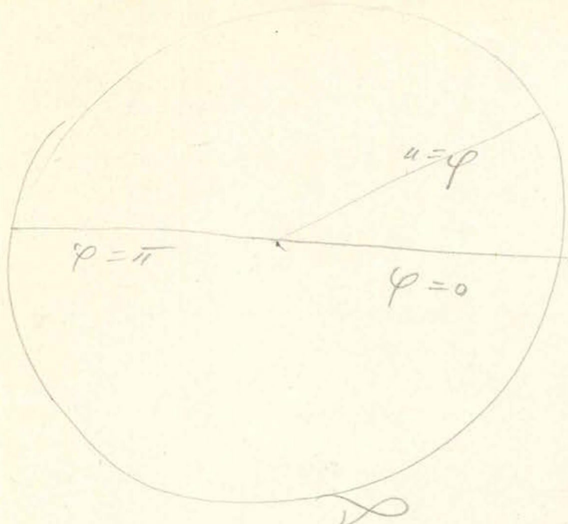


Dann ist u auf einer
Seite $\varphi = 0$ $u = 0$
und der andern
$\varphi = 2\pi$ $u = 2\pi$

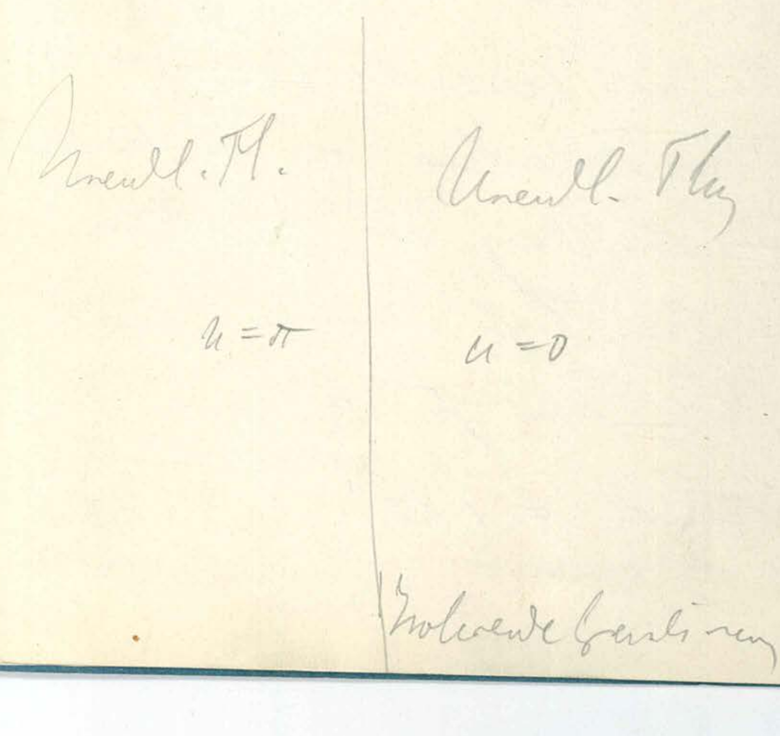
Ebenso gut kann ich durch zweien Begren.

Da habe ich zwei leitende
Linien welche zusammen-
stossen ohne in leitender
Verbindung zu stehen..

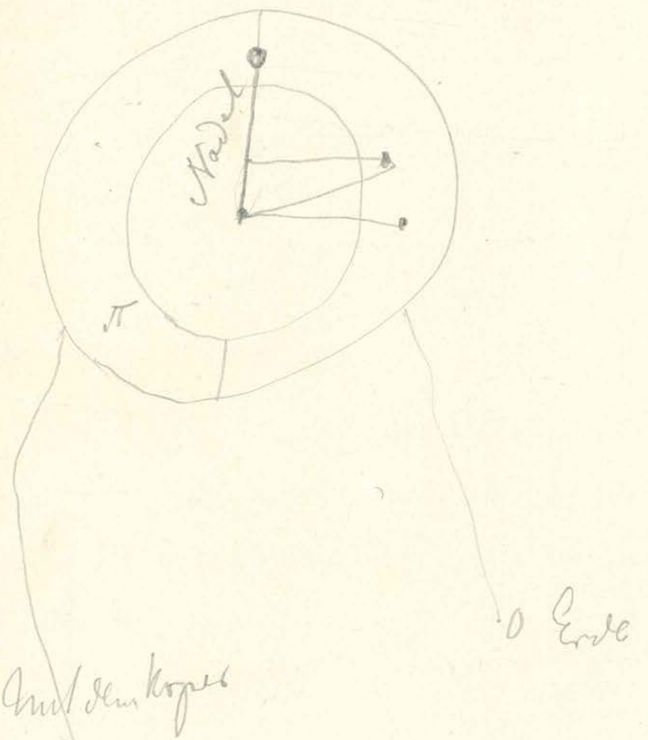
Auf jeden hat dann Pot. einen Constanten
Werth. — Bek darf α ganz beliebig
wählen also auch = 180°



Ich betrachte nur die eine Hälfte. – Dieser Fall hat auch ein gewisses prakt. Interesse. – Jede dieser Linien stellt eine Fläche dar. – Es sei die Zeichenebene senkrecht zur Ebene sein. – Der Trennungspunkt ist dann eine [illegible]



Da kann ich überall Potential. –
Hiervon kann man bei Thomson'schen
electrometer nutzen machen.



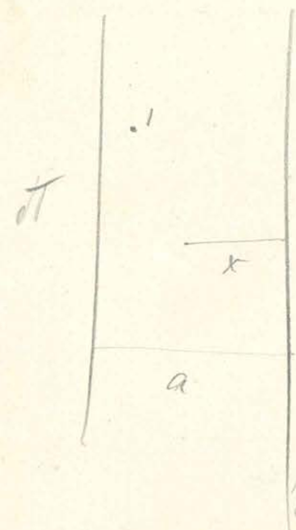
Die Nadel mit Leidener
Flasche.
Wir können die Ende
der Nadel ansehen
als einen elektri-
schen Pol.

Ich wende Näherungsweise des er-
sten Ordnung durch
die zwei Ebenen.

Es sei der Pol im absolute a und der
Pol habe die Ladung a. Dann ist das

Potential $= \frac{1}{a}$ · —

Vergleichen wir diesen Fall mit dem andern. – Nehmen wir zwei parallele Ebenen um a abstehend.



Das Potential wird nur von x abhängig. – Es muss dann V eine lineare Function sein.

$\frac{\pi}{a} x$

Unendlich grosse Pot. die bei $\frac{\pi}{a}$

So dass hier in beiden Fällen die Kräfte von derselben Ordnung sind $\frac{1}{a}$ der aber $\frac{\pi}{a}$

1) Zwischenraum.

Noch einige compliciertere Aufgaben. –

Dabei etwas über theorie complexer variabl. –

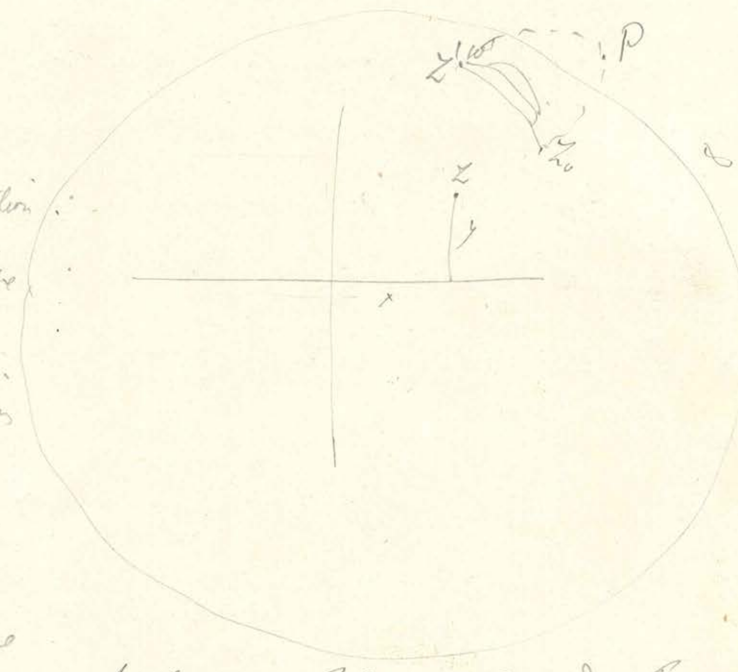
Das complexe Argument sei

$$z = x + iy$$

Dabei seien x und y die rechtw. coord. eines Punktes der Ebene – jeder Werth des Argumentes ist dann repräsentirt durch einen Punkt.

Es sei

$$w = F(z)$$



w eine mehrdeutige Funktion: Zu einem Punkte der xy Ebene wird dann w mehrere und zwar entweder endlich viele oder ∞ Werthe haben. – Im allgemeinen werden diese verschiedenen Werthe endliche Unterschiede haben. – Wenn also der Punkt z verrückt wird so ändert sich dieser endlich. Nur in einzelnen Punkten werden mehrere der Werthe von w einander gleich werden. –

2) Es werden ebenso auch andere Punkte geben in welchen sich w gezwungen ändern würde. Ich will diese Ausnahmepunkte 1) und 2) Art ausnehmen. –

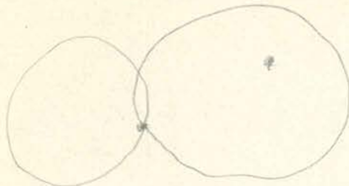
In dem Punkte z_0 sei ein Werth von w gewählt und es soll nun die Variable ändern, dann beschreibt z eine Linie – ich wähle diese Veränderung also diese Linie so dass ich nicht hindurchkomme durch einen Punkt der Art 1) oder 2). Bei dieser Bahn suche ich alle Werthe von w auf – bin ich so mit dem Punkt bei z' gekommen, so komme ich allmählich von ~~z_0 bis~~ den Werthe w_0 bis w'.

Ich komme so mit einem ganz bestimmten Werthe w' in z' an. – Ändere ich den Weg unendlich wenig aber wieder so dass ich zu z' komme, so werden sich die Werthe von w auf dem Wege nur unendl. wenig von den ersten verschieden sein. Dann wird auch w' nur unendl. wenig

von w verschieden sein. Ja da ich an keine Punkte 1) 2) gekommen bin so bin ich auch zu demselben Werthe w' gekommen. — Verändere ich nun die Bahn allmählig so komme ich immer zu demselben Werthe w' vorausgesetzt dass ich durch keine Punkte 1) oder 2) gegangen bin. —
Wäre P ein Punkt 1) Art. — So komme ich von z_0 ausgegangen in P mit einem bestimmten Werthe von w an — in P kann ich aber einen oder den andern Werth nehmen — so kann ich dann auch mit verschiedenen Werthen in z' ankommen. — So ist es beim 2) Art. —

Nehme ich also zwei Wege von z_0 zu z' deren ein innerhalb die andere ausserhalb der Ausnahmspunkte geht, so kann ich zu zwei verschiedenen Werthen von w in z' kommen. —

Wenn z_0 und z' zusammenfallen —



Wenn das einen Punkt umgiebt so komme ich mit anderem Werthe

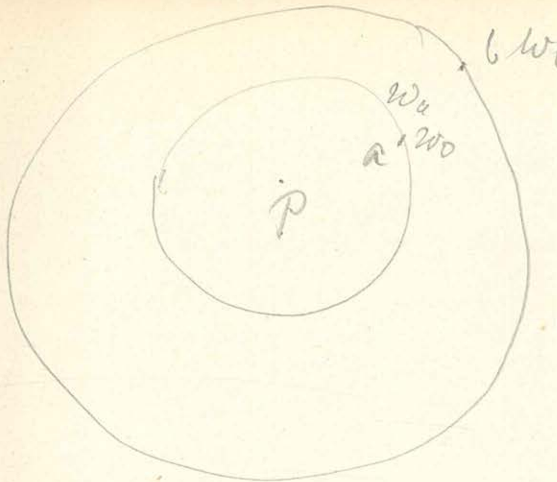
Einen solchen Punkt nennt man Verzweigungspunkt. —

Nicht jeder Ausnahmspunkt ist ein Verzweigungspunkt. —

Man kann entscheiden ob es ein solcher ist. —

Pkt. kein Verzweigungspunkt wenn es eine geschlossene Curve geben — — zurückkehrt.

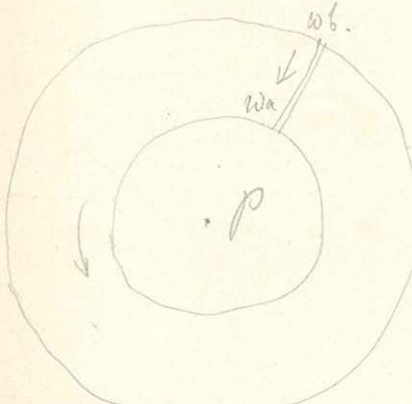
Beweis. Wäre P ein Ausnahmspunkt und dann wenn ich um w_0 ein gehe dann auch in w_0 zurückkehren.



Wenn das der Fall ist so kann ich von b ausgehend herumkreisend dann wieder zu demselben Werthe zurückkehren.

Ich will von b nach a gehen da um den Kreis herum und wieder zur.

Da komme ich mit dem Werth zurück.



Zu beweisen ist nun dass ich auch den grösseren Kreis umkreisen kann.

Continuierliche Überführung ohne einen Verzweigungspunkt zu passieren.

An Beispielen zeige ich dann.

Gesetzt es wäre

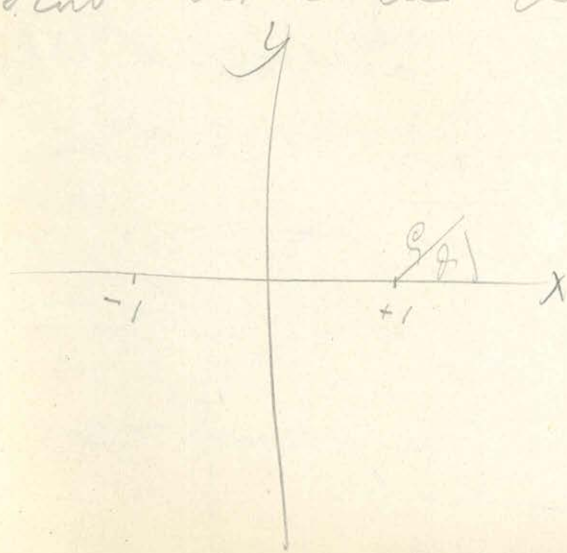
$$w = \sqrt{1-z^2}$$

Zu den Ausnahmepunkten gehören die Punkte für welche $w=0$ d. i.:

$$z=+1 \qquad z=-1$$

Solche Art giebt es nicht. –

Sind dies aber Verzweigungspunkte?



Gesetzt es sei

$$z = 1 + \varepsilon$$

wo ε eine complexe Grösse

Dann wird

$$w = \sqrt{2\varepsilon}$$

Ich setze

$$\varepsilon = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

Da sind ϱ und ϑ die Polarcoordinaten des Punktes z deren Anfangspunkt der Punkt 1 ist. Diesen Werth eingesetzt ist:

$$w = \pm\sqrt{2\varrho}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

wo $\sqrt{\varrho}$ ~~den~~ positiven Werth erhalten bedeuten soll.

Aus dieser Gleichung kann ich sehen ob ich wenn ich mit Radius ϱ einen Kreis ringsherum beschreibe wieder zu demselben Werthe zu w zurückkomme. Ich gehe aus von $\vartheta = 0$ also $w = +\sqrt{2\varrho}$

Nach dem Umlauf wird aber

$$w = -\sqrt{2\varrho}$$

Der Punkt ist also ein Verzweigungspunkt. –

Es ist klar dass auch der Punkt ~~[illegible]~~ – 1 ein Verzweigungspunkt ist. –

2) tes Beispiel

$$w = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Hierfür giebt es im endlichen keinen Werth von z für welche die beiden Wurzeln gleich sind. –

Dagegen 2ter Art Ausnahme für

für $z=0$

für einen $+0$ von z ist $w = \pm\infty$

für „ -0 von z ist $w = \pm i\infty$

$z=0$ ist also ein Verzweigungspunkt.

$$w = \pm \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Dies ändert nur aus, also ist [illegible] auch ein Verzweigungspunkt. —

3) tes Beispiel

$$w = z\sqrt{1-z}$$

$$z = 0$$

ist ein Ausnahmepunkt da dann die beiden Werte der Funktion = 0 sind

Ebenso ist

$$w = \frac{1}{z}\sqrt{1-z}$$

eine zweideutige Funktion.

Wo $z = 0$ ein Unendlichkeitspunkt

Da wird

$$w = \pm\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

~~zweite~~ andere $w = \pm\frac{1}{\varrho}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$

geht man von $d=0$ aus so kommt man wieder zu demselben Pu[nkt] zurück also ist d die Ausnahms-punkt kein Verzweigungs. –

Einen ~~Weg~~ System von continuirlich Werth der Function nennt man einen Zweig der Function. –

Jede Function hat verschiedene Zweige. –

Man kann solche Zweige durch Verzweigungsschnitte absondern. –

Die Bedingung ist erfüllt wenn alle Verzweigungsschnitte eine beliebige[?] ...

Linie ist welche von ein Punkt.
bis in die Unendlichkeit gezogen
wird. —

Durch welche Linien
wird ein Zweig abgesondert so wird
die Function innerhalb
derselben eindeutige
Werthe haben. —

Bei der zweideutigen Func[tion]
$\sqrt{z}$ oder $\sqrt{\frac{1}{z}}$
habe ich den Verzweigungspunct
$z=0$

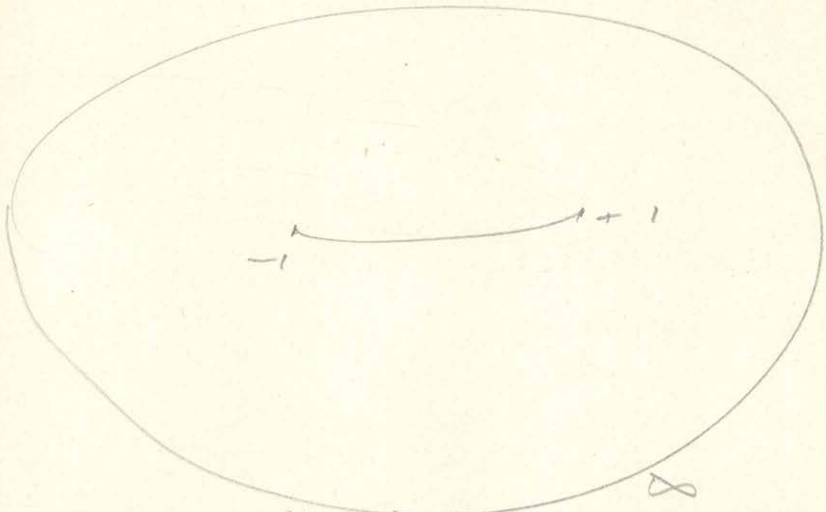
Dann ist die Function eindeutig
wenn ich noch für einen Punkt einen

Vorzeichen festzustellen. —

oder aber

Ich will jetzt beweisen dass ich
bei der Form $\sqrt{1-z^2}$ gezwungen
bin die beiden Punkte verbinde.
Ich habe dass bewiesen wenn
ich zeige dass es für einen Umgebung

bewiesen habe – dass man beim Umlauf zum ursprünglichen Wer- zurückkommt. –



$w = \sqrt{-z^2}$ da $z = \infty$ u. 1.

$$w = \pm i z$$

Ich denke einen Pkt z dargestellt

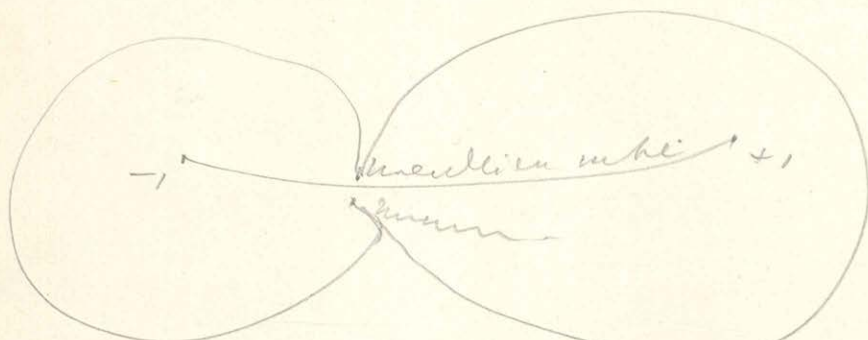
$$z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$w = \pm\varrho(-\sin\vartheta + i\cos\vartheta)$$

Lasse ich ϑ von 0 bis 2π wachsen, so komme ich immer zu demselben

Vorzeichen zurück. —

Das Beweise ich noch auf dem Wege. —



Bin ich unendlich nahe auf die Andere Seite gekommen, so habe ich auf dem entgegengesetzten Vorzeichen gehen. —

Wenn ich die ∞ Ähnliche herum kreise so komme ich zurück. —

Die kann ich überfahren Continuum in irgend eine Kreis also be—

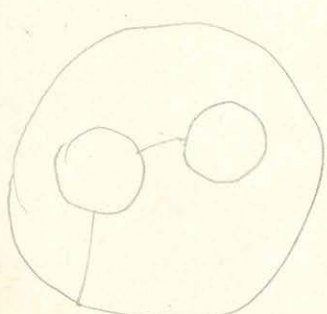
wieren,

Wähle ich einen solchen so ist

Einfach zusamm. durch jeden Querschnitt ~~[illegible]~~ in zwei zerstückt —

zweifach zusam. wenn er durch 1 Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird. —

3fach wenn sie 2 Schnitte erfordert. —



Wenn durch innere Fläche ein Zug wie (−1 + 1) gemacht wird, so wird diese

Raum zweifach zusammenhängend, etwa wie ein Ring. —

Allgemeine Bemerkung.

Wir nahmen bis jetzt an, dass ω durch einen Ausdruck gegeben ist — der unmittelbar berechenbar ist. Es sei statt dessen

$$\frac{d\omega}{dr}$$

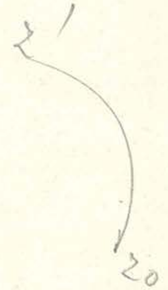
durch einen solchen Ausdruck gegeben sein. — Es sei $\frac{d\omega}{dr}$ eindeutig oder ein durch Verzweigungsschnitte abgegrenzter Zweig einer solchen tigen Funktion. —

Dann kann w unendlich mehrdeutig sein 1) wenn $\frac{dw}{dz}$ innerhalb der gewählt. Gebietes für einzelne Punkte ∞ wird oder 2) wenn durch Verzweigungsschnitte die T-fläche eine mehrfach zusammenhängende geworden ist.

In solchen Fällen ändert sich w bei verschiedenen Pfaden um mit Constanten. — Denn wäre dies nicht so müsste auch $\frac{dw}{dz}$ vieldeutig sein. —

Unsere nächste (folgende) Arbeit, Etwas sicheres über die Werthe dieser Constanten zu kennen. —

w_0 sei der Wert von w für z_0 und dann gehe ich nach z'



$$w' = w_0 + \underbrace{\int_{z_0}^{z'} \frac{dw}{dz}\, dz}$$

bei der Berechnung dieses Integrals tritt keine Unbestimmtheit ein falls nur $\frac{dw}{dz}$ auf dem Wege nicht ∞ ist: wenn dieser Fall ausgeschlossen ist so finde ich w' eindeutig aus w_0. —

Ändert man den Weg unendlich wenig — so kommt man doch zu demselben Werte von w' also ändert es sich nicht constanter. —

man wird also auch für endliche verschiedene Wege denselben Werth w' finden – wenn nur die Wege nicht einen Punkt wo $\frac{dw}{dz} = \infty$ wird einschliessen – oder keine Verzweigungspunkte sind. –

Wenn die geschlossene Linie solche umgeht, dann kann man zu einem anderen Werth als der ursprüngliche zurückkehren.

Wir wollen den Unterschied des Anfangs und Endwerthes untersuchen.

$z_0 = a$ P_0 endlich entfernt.

Die Änderung die W erhalten durch von a b zurückkehren [illegible]

$$\int \frac{dw}{dr}\, dr$$

Dieses Integral kann ich unmittelbar zertheilen in 3 Theilen.

$$\text{Änder. der Function } w = \underbrace{\int_a^b \overset{(1)}{\frac{dw}{dr}\, dr} + \int_b^{b'} \overset{(2)}{\frac{dw}{dr}\, dr} + \int_{b'}^{a} \overset{(3)}{\frac{dw}{dr}\, ds}}$$

(1) und (3) sind gleich und entgegengesetzt. –

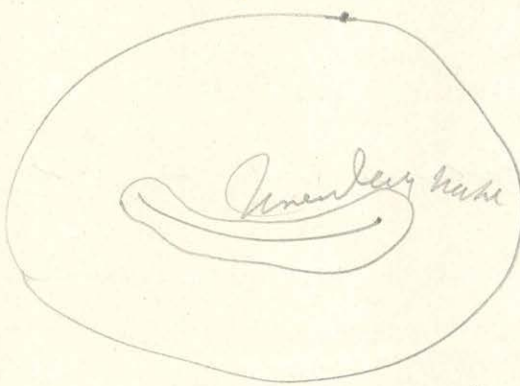
Also ist die Änderung

$$= \int_{[illegible]}^{\text{über} \infty \text{ kreis und } P} \frac{dw}{dr}\, dr$$

Ueberdeckung eines beliebigen endlich

hieran .. —

Ähnliche Ueberlegung mit einem Verzweigungs~~punkt~~ schnitt —



Umwendungsnaht zum Verzweigungspunkt.

Hat man die Fläche mehrere Verzweigungs~~punkte~~ schnitte und Randlinie

Die Unbes. Werthe sind Constanten.

die Werthe der Integrale ...

→ hieran — usw —

Will man den reellen Theil von w als Potential ansehen ansehen — so kann w noch vieldeutig sein — aber die Unterschiede müssen um imaginäre Constanten verschieden sein. —

Das war
Theorie einer mehrdeutigen Function einer complexen Arguments

Anwendungen auf electrostatische Aufgaben.

$$z = x + iy$$

$$w = f(z)$$

$$= u + iv$$

u reeller Theil. —

Ist u innerhalb des gewählten Gebietes eindeutig und stetig so kann es angesehen werden als Potential ~~an der~~ von Electr. an den Grenzen dieses Gebietes —

Strenge genommen müsste ich sagen den Cylinderflächen. —

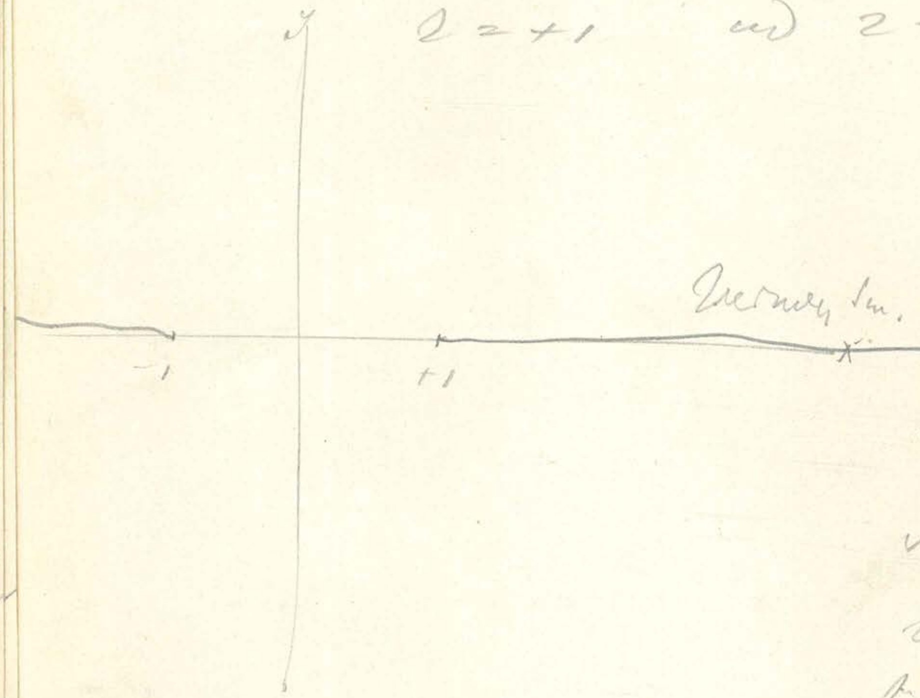
Wenn für einen Theil der Grenze $u = \text{const.}$ ist, so kann ich das ansehen als Gleichgewichtsvertheilung auf Leitenden Linien resp. Cylinderflächen —

§.

Es wäre $$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Diesen Fall behandelten wie wenn $\frac{dw}{dz}$ eindeutig ist. — Durch Verzweigungsschnitte kann ich es eindeutig machen — wozu ich vor allem die Verzweigungspunkte aufzusuchen haben. — Es sind dies Punkte in welchen Unstetigkeit stattfindet und zwar

$z = +1$ und $z = -1$



Ich habe ~~für~~ um einen Zweig von anderen ab zu sondern 2 immer an die ∞ Punkte und dem ihr entsprechenden Punkt einen Vorzeichen fest zu stellen. —

In diesem Gebiete ist $\frac{dw}{dz}$ eine eindeutige Function wenn für irgend einen Punkt das Vorzeichen gewählt ist.—

Ich habe noch zu zeigen dass unser Gebiet einfach zusammenhängend ist und dass in diesem Gebiete kein Punkte, und für welche

$$\frac{dw}{dz} = \infty$$

wird. – Unter solchen Umständen ist dann

$$w = \int_{0} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

eindeutig.—

Ich beschränke die Grenzen derartig dass

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Wir müssen noch ein Vorzeichen

fest stellen:

$$w = \arcsin z$$

$$z = \sin w$$

Da w eindeutig so ist nun auch u eindeutig.

Also ist u ein Potential von Elem. ist auf den Verzweigungsschnitten und dem Kreise in der Unendlichkeit.

Ich sage dann der Kreis trägt nichts endliches bei — dies soll später, bei einer anderen Gelegenheit ~~und~~ bewiesen werden.

u ist also in diesem Falle nur Pot. von Elem. auf Verzweigungsschnitten

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Auf reellem Wege z von 0 bis z=1 wachsen gelassen, wird dieses Integral

$$\underbrace{w = \frac{\pi}{2}} \qquad \underbrace{u = \frac{\pi}{2}}$$

Das w im andern Verzweigungspunkte findet sich ähnlich da es 1.

$$w = -\frac{\pi}{2} \text{ und ein}$$

$$\underbrace{u = -\frac{\pi}{2}}$$

Ich gehe nun ~~auf den~~ unendlich Kurve zum Verzweigungsschnitt weiter bis zu irgend einem Punkte.

Dieses Integral ist rein imaginär
und somit folgt daß ~~das Integral~~
~~für alle Punkte~~ der reelle
Theil des Integrals $= \frac{\pi}{2}$ für
alle Punkte des Verzweigungs-
schnittes rechts. – und ebenso
gilt dass sowohl für Punkte
die oberhalb als für sol-
che unterhalb der Linie liegen.
Links ist $u = -\frac{\pi}{2}$
Also ist auf beiden Verzwei-
gungsschnitten das Potential
Constant. – Somit ist die
Vertheilung im Gleichgewicht
auf Leiter. –

Wir gelangten so zur Lösung einer electrostatischen Aufgabe welche die Verallgemeinerung der schon früher behandelten ist, wo die Linien zusammengestossen sind. –

Wir können hier leicht die Linien gleichen Potentials finden. –

es ist $Z = \sin w$ also:

$$x + iy = \sin(u + iv)$$

$$= \sin u \cos iv + \cos u \sin iv$$

$$= \sin u \cdot \frac{e^{v} + e^{-v}}{2} + i \cos u \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}$$

Setzen wir auf beiden Seiten den reellen und imaginären Theile gleich so folgt:

$$x = \sin u \cdot \frac{e^{v}+e^{-v}}{2}$$

$$y = \cos u \cdot \frac{e^{v}-e^{-v}}{2}$$

hieraus lässt sich v eliminiren mit ein Satz.

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

hieraus lässt sich u unmittelbar berechnen. –
Curven gleichen Pot. haben die gleichen $u = \text{Const}$!
In diesem Falle sind dann Hyperbeln deren Brennpunkte die Verzweigungspunkte sind.
Wie man leicht beweisen kann sind die auf die Curven $u = \text{Const.}$ senkrecht

stehenden Curven, Curven deren Glei-
chungen

$$v = \text{const.}$$

ist. — Es sind das mit den genannten Hyperbeln confocale Ellipsen. — Es sind diese Ellipsen die sogenannten Kraftlinien.

§.

Betrachten wir noch einen ähnlichen ein wenig complicirteren Fall. — Es sei

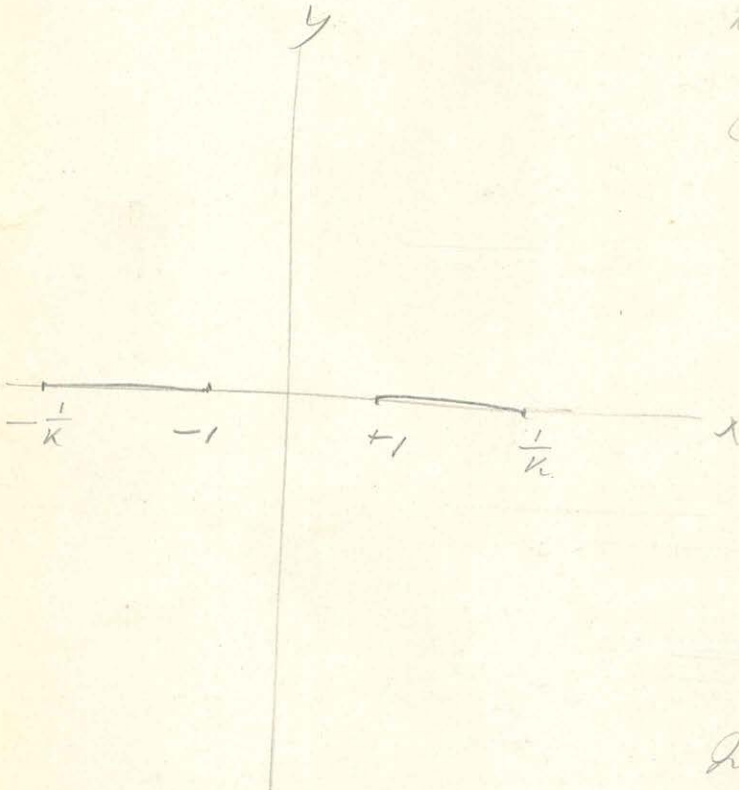
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \cdot 1-k^2z^2}}$$

es ist dies im allgemeinen eine zweideutige Function. — <u>k ein positiver echter Bruch.</u> Zunächst muss ich einen der beiden Zweige absondern. — Ich habe hierzu vor allem

die Verzweigungspunkte auf zu suchen.
Wir haben deren viere

$$z = \pm 1 \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{1}{k}$$

diese vier Werthe repräsentiren 4
Punkte der xy Ebene.



Da kein echter Bruch ist[?] nun die beiden letzten Verzweigungspunkte ausserhalb der ersten liegen.

Verzweigungsschnitte seien die Verbindungslinien von +1 und $+\frac{1}{k}$ und von $-\frac{1}{k}$ und -1.

Ich behaupte dass durch diese Schnitte

wirklich ein Weg abgesondert ist. –

Betrachtung mit ∞ form wie früher

Um die Function noch eindeutig zu mach[en]
ist das Vorzeichen zu bestimmen
in irgend einem Punkt des Gebietes. –

Wir nehmen uns das Gebiet wie-
der durch ∞ Kreis abgegrenzt denken.
Unser Gebiet ist jetzt ein
dreifach zusammenhängendes. –
Hieraus folgt dass das w also:

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2 \cdot 1-k^2 z^2}}$$

eine vieldeutige Function ist. –
Sobald dass die verschiedenen Werthe
von w in demselben Punkte
um Constanten von einander ver-
schieden sind. – Welche gleich sind
den Integralen und den Verzweigungs-

schitten. –
Wir werden nachweisen können
dass diese Integrale imaginär sind
daraus folgt dann wenn auch
w unbestimmt ist, es doch
nur ein Wert ist. – heraussagen
dass wir es ansehen können als
Potential von Electr. aufzufassen
seien –

Es sei für $z = 0$ $w = 0$ dann ist

$z = \sin am. w$ für den Modul k

Dass die Behauptung darin liegt dass die
Integrale an Verzweigungsp. imaginär
sind leicht einzusehen. –

Also ist u eindeutig.

$$2\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2\cdot 1-k^2z^2}}$$ auf selbem Wege

ist $= 2iK'$

nach Theorie elliptischer Integrale. —

Es ist in dem Punkte 1, auf selbständig gewonnen,

$$w = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2\cdot 1-k^2z^2}} = K$$

man pflegt dies best. Integral mit K zu bezeichnen — In dem Punkte

$z = +1$ ist also

$$u = K$$

in dem Punkte $z = -1$ ist aber

$$u = -K$$

zu irgend einem Punkte des Verzweigungs-
schnittes unterhalb oder oberhalb.

ist $= \int_0^1 + \int_1^2$ es ist aber

$\int^2$ imaginär, zu dem reellen

Theile trägt also das zweite

Integral nichts bei. —

So folgt dann für alle Punkte

des ersten Verzweigungsstückes

$u = K$ ist

und für den andern

$u = -K$,

Wir haben also zwei leitende

Linien auf welchen sich Elec

im Gleichgew. befindet. —

und etwa so dann auf einem er-
teilende Pot. welches K auf
den andern – K ist. –
Man könnte noch fragen ob
auf ∞ Kreis nicht merklicher
Einfluss des Potentials ist. –
Dass dies nicht der Fall ist
werden wir aus späteren Be-
weisen sehen. –

Ein anderer Fall

Math. Vorbemerkungen.

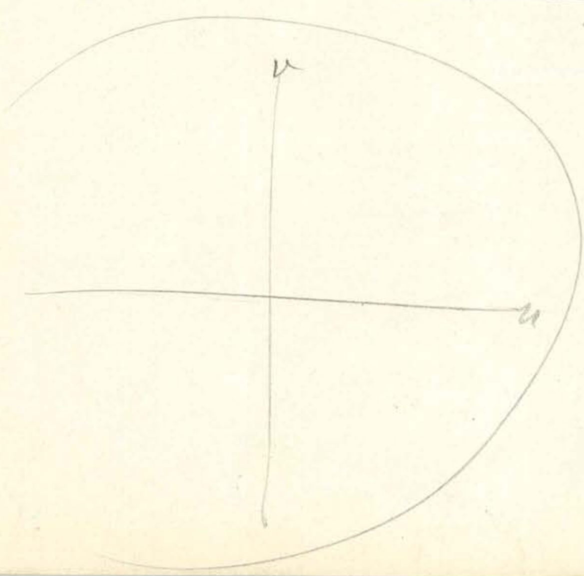
Ich zeigte wie d. rw. Schritte 1) wenn
w gegeben war 2) wenn $\frac{dw}{dr}$ gegeben
war — es soll jetzt weder w noch

$\frac{dw}{dz}$ gegeben sein; sondern es soll z als Function von w gegeben sein. –

Wir setzen wieder:

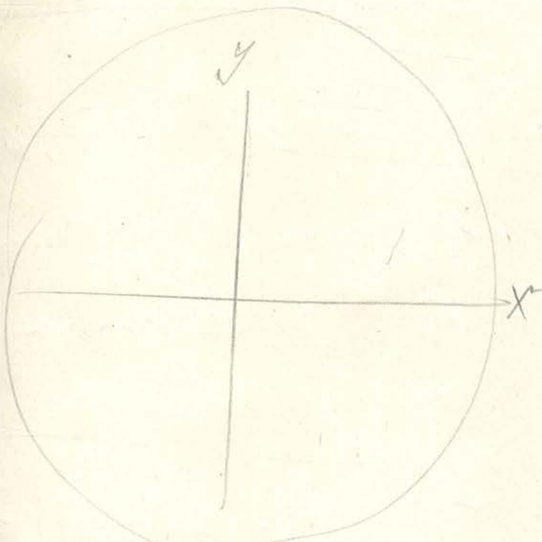
$$w = u + iv$$

u und v rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes der uv Ebene. Für jeden Werth von u und v sei innerhalb eines Gebietes z gegeben sein als eindeutige Function. –



Ferner soll innerhalb dieses Gebietes der uv Ebene z nicht $= \infty$ und $\frac{dw}{dz}$ nicht $=$ unstätig werden. –

Wäre dies der Fall so kann man diese Punkte durch Kreis ausschliessen. Da ist nun z als Function von x und y eindeutig gegeben. —



Die Grenze der yx Ebene besteht ausschliesslich nur von Punkten welche entsprechen den Grenzpunkten des uv Gebietes.

Innerhalb dieser Grenze können aber der uv Ebene Verzweigungspunkte sein. —

Man kann aber leicht die Punkte aufsuchen welche allein Verzweigungspunkte sein können. —

Es sei

$$z = z_0$$

der Werth von z für $w = w_0$

Ich kann dann schliessen daß

$w = w_0$ ein Werth ist für $z = z_0$

Für Werthe von z die unendlich nahe an z_0 stehen, kann man leicht Punkte finden die unendlich nahe an w_0 liegen.

$$dw = dz \cdot \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

Nach dieser Gleichung können wir ein- werden.

vorausgesetzt dass $\frac{dz}{dw}$ nicht $=0$ wird für $z=z_0$ — dann versagt diese Gleichung übereinstimmt. —

Hieraus folgt dass ein Punkt für welchen $\frac{dw}{dz}=0$ ist ein Verzweigungspunkt sein kann, aber kein anderer Punkt ein solcher sein kann. —

Hiervon wollen wir eine Anwendung machen. —

$$z = iw + e^{iw}$$

Es ist daher z eine eindeutige Funktion von w.

Das Gebiet der w wählen wir so dass u von $-\pi$ bis $+\pi$ und v von $-\infty$ bis $+\infty$

wandern soll. —

Helmholtz Über Flüssigkeitsbewegungen — Monatsberichte der Berl. Akademie. (aus der neueren Hefte.

Es sei

$$z = x + iy$$

$$w = F(z)$$

$$w = u + iv$$

Ist u eindeutig und stetig innerhalb eines Gebietes so können wir es als Pot. von Electricität auf Ebenen ansehen — wenn für einen Theil der Grenze u = const. ist, so ist dieser Theil ein Leiter. —

Wir wollen setzen.

$$z = iw + e^{iw}$$

Wir definieren das Gebiet in welchem

w liegen soll, dadurch dass wir festsetzen dass

$$u \text{ von } -\pi \text{ und } +\pi$$

$$v \text{ — — } -\infty \text{ und } +\infty$$

Beweis. —

z ist eine eindeutige Function von w die zwischen diesen Grenzen nicht unendlich wird, und eindeutig ist. —

Zunächst suchen wir das Gebiet zu z aufsuchen für welches w so definiert ist. — Das Gebiet von z

Es ist begrenzt durch Punkte die entsprechen der Grenze von w. —

Es ist für:

$$u = -\pi$$

$$z = -i\pi - v + e^{-i\pi - v}$$

$$= -i\pi - v + e^{-i\pi} \cdot e^{-v}, \;)(?)$$

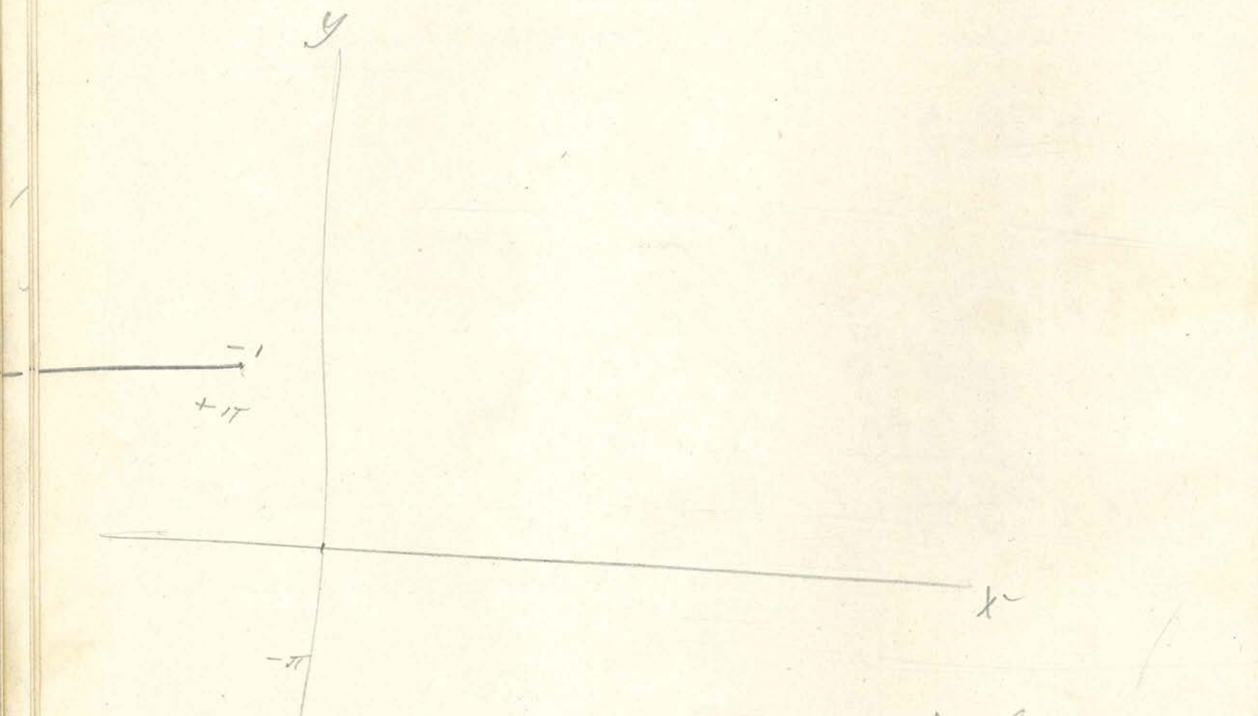
$$\underbrace{z = -i\pi - v - i^{-v}}$$

Also

$$x = -v - e^{-v}$$

$$y = -\pi$$

hieraus v eliminirt ergiebt sich die Gleichung einer Linie den die Grenze des zu betrachtenden Gebietes ... —



Diese Curve

$$x = -v - e^{-v}$$

besitzt gewisse Grenzen diese Gerade,

für $v = \infty$ und $x = -\infty$

" $v = 0$ " $x = -1$

Der Diff. Quot. von x nach v ist positiv.

$$\frac{dx}{dv} = -1 + e^{-v}$$

solange v negativ ist, ist der Diff. Quot. positiv, also während v von $-\infty$ bis 0 geht geht x von $(-\infty$ bis $-\infty)^2$

für

$v = 0$ ~~wird~~ $x = -1$

" $v = \infty$ " $x = -\infty$

Da der Diff. immer negativ ist, so v ~~positiv~~ so folgt - - -

Somit ist die Grenzen die Linie von -1 bis $-\infty$. —

Und zwar werden die die beiden

Seiten ~~von~~ diese gerade von hören

Wenn $u = +\pi$ ist so kommt den

da oben von $+1$ bis $-\infty$ – –

weitere Grenzen

$$x+iy = -v+iu+e^{-v+iu}$$

Setzen wir $v = +\infty$ so wird

$$x = -\infty$$

$$y = u$$

Setzen wir $v = -\infty$ so wird:

$$x+iy = e^{-v}(\cos u + i\sin u)$$

$$x = e^{-v}\cos u$$

$$y = e^{-v}\sin u$$

Hieraus ~~ff~~ u eliminirt wird:

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{-v} = \infty \quad \text{wenn } v = \infty$$

Dies ist ein Kreis mit den Anfangspunkt der Coordinaten mit Radius ∞ beschrieben. – Es ist

$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Also u der Winkel den der Radius nach $(x\,y)$ gezogen mit der x Axe bildet

(?)

Wir haben somit das Gebiet festgestellt – es ist das eine einfach zusammenhängende Fläche innerhalb dessen keinen Punkt giebt in welchem $\frac{dw}{dz} = 0$ wäre. – Hieraus folgt dann in diesem Gebiete w eine eindeutige Function ist. –

Denn es wirklich keinen solchen

Punkt giebt sehen wir nun folgendem

Die Gleichung $\frac{dw}{dz} = 0$ ist in diesem Fall

$$1 + e^{iw} = 0$$

es muss dann $v = 0$ und $u = \mp \pi$

Suchen wir zu dem die entsprechenden Werthe von Z; so bekommen wir

$$x = -1 \quad \text{und}$$

$$y = \pm \pi$$

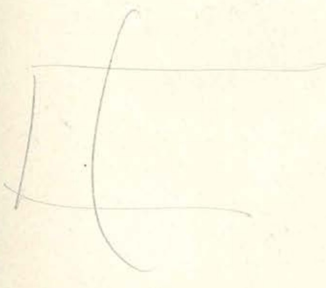
Das sind zwei Punkte der Ebene in welchen $\frac{dw}{dz}$ zu Null wird — Dann sind aber eben Punkte in der Grenze des Gebietes — welche beeinträchtigen aber die Eindeutigkeit der Function nicht. —

Also ist hier w — demnach eine

u eindeutig und es kann u angesehen werden als Pole von Electr.- auf den Grenzen. – —

Dabei ist u in allen Punkten der einen Linie $= -\pi$ für den andern $= +\pi$. – Diese beiden Linien sind also als Leiter anzusehen, auf welchen die Electr.- ~~auf~~ im Gleichgewicht ist. –

Es könnte ausserdem noch zwischen beiden



Dass die nicht endlichen Belegungen zu bewiesen werden —

§

Gesetzt es seien U und V Functionen von x und y, die ~~eindeu~~ innerhalb eines gewissen Raumes eindeutig und stetig sind, und für welche

$$\Delta U = 0 \quad \text{und} \quad \Delta V = 0$$

für solche gilt der Green'sche Satz. d. h.

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n_i} - V \frac{\partial U}{\partial n_i} \right) dO = 0$$

Wir setzen $V = \frac{1}{\rho}$

wo ρ Entfernung von xyz nach irgend einem festen Anfangspunkte. –

Diese Annahme genügt der Gl.

$$\Delta V = 0$$

und auch der Eindeutigkeit und Stetigkeitsbedingung, wenn der Anfangspunkt von ρ ausserhalb des Raumes ist. —

<u>Ich will aber das Gegentheil annehmen.</u>

Um den Anfangspunkt von ρ ∞ Kugel, die ich ausschliesse. Für den übrig bleibenden Raum ist V endlich stetig — ich

muss dann die Integration auf ∞ Kugel + ∞ Kugel ausdehnen.

Die letztere Integration giebt kein verschwindendes Resultat; –

Ist U der Werth von u für den Anfangspunkt von ρ so wird

$$\underbrace{4\pi U = \int dO \left(U \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial N_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial N_i} \right)}$$

~~Dieser Satz~~

Auch diesen Satz kenn ich. –

Es stellt dies nur das Pot. ~~Pot.~~ zweier Potent. dar. – herrührend von einer
(2tes Glied) (1tes Glied)
einfachen und einer Doppelschicht von Electricität.

(5)

Einen ähnlichen Satz kann man aussprechen für eine Fun[ction] u.

Wenn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist und u innerhalb eines gewissen Raumes continuirlich und stetig ist. — So findet man:

$$2\pi u = \int ds \left(\log \rho \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \log \rho}{\partial \nu} \right)$$

ρ Entfernung des Punktes von irgend einem Punkte des inneren. —

In der Ebene spielt die Funct. $\log \rho$ dieselbe Rolle, wie $\frac{1}{\rho}$ in dem Raume. (Es ist log. Pot.)

Auch hier ist also u dargestellt als Summe zweier Potentiale — das erste von einfacher das zweite von doppelter Schicht herrührend.

//

Noch eine Bemerkung — es sei u der reelle Theil einer Function

$$w = u + iv$$

Wenn für eine Linie $v = \text{Const}$ ist so ist für dieselbe

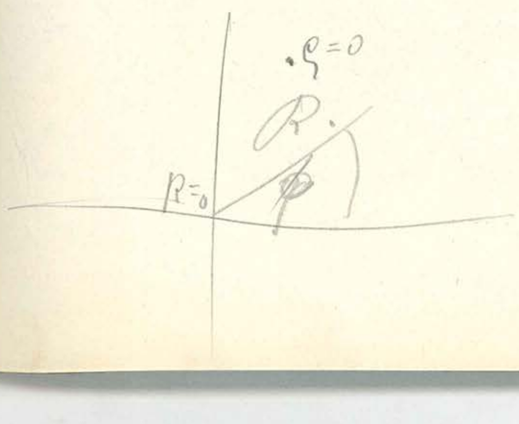
$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

es folgt das daraus dass die Curven $u = \text{Const}$ und $v = \text{Const}$ sich senkrecht schneiden. —

Für einen Theil in welchem $v = \text{Const}$ ist ist also $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$, d. i. die Dichtigkeit der <u>einfachen</u> Schicht verschwindet auf dieser Grenze.

ξ

Mit dem untersuche ich die Elektr.
auf $v = -\infty$ und
$v = +\infty$
d. i. auf dem Kreis ∞ und der
Geraden. – Also ist auf diesen Grenz[en]
nur eine doppelte Schicht.
Wir werden sehen dass dem
Pot. solcher Electricität auf Punkte
der Unendlichkeit $= 0$ ist. –
Es sei der Radius des ∞ Kreises
$= R$ ein Winkel des Radius Vec[tor]
hierin sei ϕ. –



Nach $\int$ ist dann

$$= \underbrace{\int_{\phi=-\pi}^{\phi=+\pi} R\, d\phi \cdot \phi \cdot \rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R}}$$

Das ist das Potential des Kreises

für den Anfangspunkt von ρ

der in unendlicher Entfernung vom

[illegible] Anfangspunkte sei. —

Erst. $\frac{\partial \rho}{\partial R} = 1$, $\frac{R}{\quad} \cdot \frac{1}{\rho} = \phi$ also

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi\,\phi = 0$$

Wollte ich mehr annehmen

so wüchse sich bei $R = \infty$ ~~[illegible]~~

nur unendlich kleinen Beitrag.

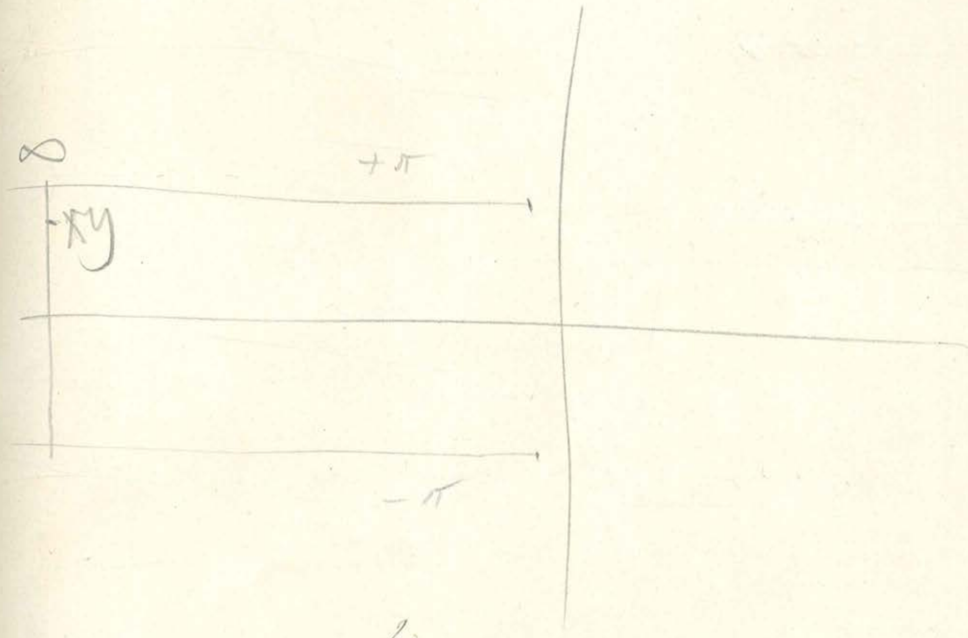
Ebenso werden wir zeigen dass

hier das Elect. auf dem Gerad

~~[illegible]~~ sehr wenig beiträgt.

Wir haben auch hier zu bilden

$$\int ds\, u \frac{\partial \log \varrho}{\partial x}$$



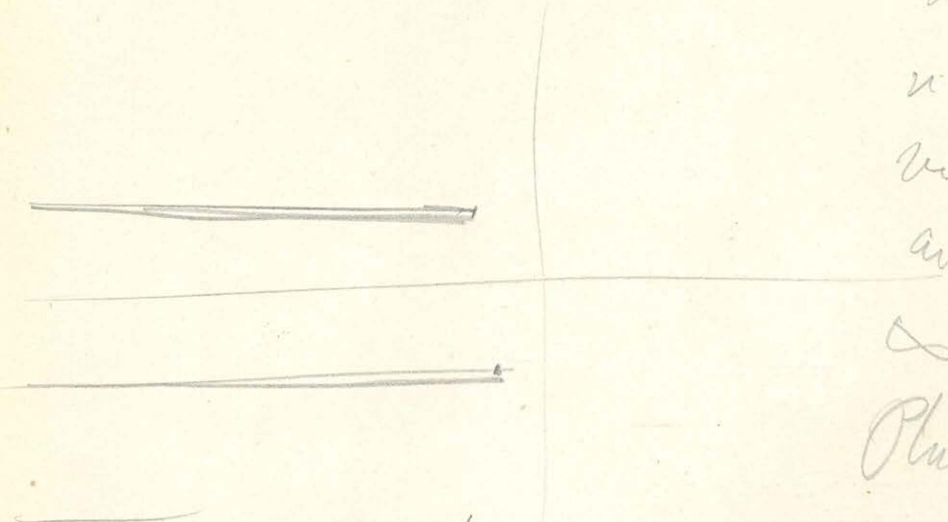
$$= \int_{y=-\pi}^{y=+\pi} dy \cdot y \cdot \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x^2}$$

Dieser Ausdruck ist = 0

Denn hier ist $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ um 0 von 1 verschieden

Denn dort ist ∞ also ist die Elen

allein auf den beiden Linien. –



Also ist
in Den Pct
von Elektr.
auf einen
∞ leitenden
Platten.

So wie ich hier bewiesen habe dass in ~~Haupt~~
Kreis ∞ nicht viel auf einen trägt
kann frühere angewendet werden. –

Diese Aufgabe erlaubt einen ähnl.
Condensator, oder Franklin'sche Platte
zu behandeln. –

Die Erste Annäherung finden wir nur
wie Dichtigkeit.

= Const. annehmen. – An den Rändern

aus sich die Dichtigkeit an dem . –
Unsere Formeln erlauben eine
Annäherung dieser Verbreitung aus

Noch ein Abschluss .

Wir haben ausschliesslich die Anordnung der Elektr. auf Leitern betrachtet. Es kann aber auch in Nichtleitern eine Vertheilung der Elektr. entstehen können. –
Dass dies so ist – zeigt dass der Isolator von Einfluss ist. –

Eine sichere Theorie die in einem

Isolatorsubstanz hat man nicht. —

Thomson stellte hierüber eine mit der Erfahrung übereinstimmende Hypothese. —

Die Hypothese ist die, dass ein Quantität der Elect., gegenüber ebenso verhält als welcher Quanten gegen Magnetismus. —

Nehmen wir diese Hypothese an so können wir die Grundgleichung des Thomsonschen Theorie unmittelbar übertragen auf diese Theorie. —

Ich verstehe jetzt unter V das Potential einer Elect. auf ein

Punkt des Isolators. — so wie da will ich nun

$$V + Q + \varphi = 0 \qquad (1)$$

$$Q = -k \int \frac{dO}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \qquad (2)$$

Dabei dO Element der Oberfläche des Isolators, k Constante von der Natur des Isolators abhängig. — Unter φ findet man die Werthe des Electrischen Theils. —

Q ist dann Pot. des electrisch gewordenen Isolators.

Diese Theorie lässt sich leicht auf Leydener Flasche anwenden, wenn man annimmt dass alles zwischen den Leitern isolator ist. —

Wir haben dabei keinen Fehler zu fürchten, denn die Kräfte die durch Luft ausgeübt werden sind sie schwächer gegen die der Glas wirkenden. —

Wir verstehen unter V das Potential der Electr. auf den beiden metallischen Belegungen.
Es sei gegeben das [illegible] Gesammtpotential in jeder dieser Beleg-
ungen —
in einer h in
zweiten g.

Ich will ferner die Werthe von V, Q und q bestimmt in einem Punkte der Grenze der 1ten Beleg. und des Glases, nenn

$\bar{V}$ $\bar{Q}$ $\bar{\varphi}$

Die Werthe derselben Grössen an der Berührungsfläche 2ten Belegs und Glas, benenne ich:

$\bar{\bar{V}}$ $\bar{\bar{Q}}$ $\bar{\bar{\varphi}}$

Dann kann ich zu (1, und (2, noch hinzufügen:

für alle Punkte der Oberf. der ersten Bel.

$$\bar{V} + \bar{Q} = h \quad \ldots \quad (3,$$

für alle Pun der Oberf der 2ten Bel.

$$\bar{\bar{V}} + \bar{\bar{Q}} = g \quad (4,$$

Dies mit (1,)

$$\bar{\varphi} = -h \quad \ldots \quad (5,$$

$$\bar{\bar{\varphi}} = -g \quad \ldots \quad (6,$$

Es konnte bei magn. φ angesehen werden als Pot. von magn. auf der Oberfl. —

Also hier Pot. der Elev. auf Oberfläche des Isolator-
(leitenden)
als 0 auf Oberflächen der leitenden.

~~An~~ In dem ganzen Raume zu

$$\phi \begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \text{in der } \infty = 0 \text{ sein} \\ \text{in } \bar{\varphi} = -h \\ \bar{\varphi} = -g \end{cases}$$

Dadurch ist φ vollständig bestimmt, denn kann dann aus

(2, Q und aus (1, U folgt

d. i. die Anordnung der Elect. in den metallischen Belegungen. —

Es lässt sich dann Q und V sehr einfach durch φ ausdrücken —

φ Elect. auf der freien Oberfläche des Glases — innerhalb jeder Belegung ist φ constant, da ja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = 0$$

ist, N_a in das Innere der Belegung hineingehend. — Da aber φ Pot. auf Oberf. so haben wir im allgemeinen:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dO}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a}\right)$$

Da hier $\frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = 0$ ist, so folgt:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dO}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \qquad (7)$$

Dies mit (2) verglichen, folgt:

$$\underbrace{Q = 4\pi k \varphi}\quad \ldots (8)$$

Wenn also φ gefunden ist, so ergiebt sich leicht Q, und aus (1, dann V,

$$\underbrace{V = -(1+4\pi k)\varphi}\quad \ldots (9)$$

Aus Φ folgt dann φ von k unabhängig ist — und daher wenn k variirt dann V proportional mit $(1+4\pi k)$ ist bei gegebenem Werth von h u.s.w. —

Ich ~~suche~~ bezeichne den Werth von V wenn $k = 0$ wäre dann ist wenn kein Electr. in Nichtleitern wäre so ist

$$V = (1+4\pi k)V_0 \quad \ldots (10)$$

Welches ist dann bei gegebenen Werthen von k und g die Electr.-Menge in jeder Belegung —

Da . . . .

so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = 0$$

Ferner ist V auch Pot. auf Oberfl.

so ist:

$$V_= = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dO}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial N_i}$$

Die Elect. Menge in einer Belegung ist daher:

$$= -\frac{1}{4\pi}\int dO\,\frac{\partial V}{\partial N_i}$$

Setze ich hierin (10) ein so ergiebt sich dass die Electr. Menge $= -\frac{1}{4\pi}(1+4\pi k)\int dO\,\frac{\partial V_0}{\partial N_i}$ ist.

$\mathfrak{V}_0$ ist von k unabhängig –
also ist die Electr. Menge in jeder
Belegung proportional mit

$$1 + 4\pi k$$

Hieraus sieht man wie die Elec
von k abhängt.

Bei gewöhnl. Kleydener Flasche
ist verbunden mit Erde also
ist.

$$\mathfrak{g} = 0$$

Man nennt (βh = Electr. Menge in der einen [?]) die Capacität der Flasche ~~[illegible]~~
diese nenne ich β also ist.

$$\beta = (1 + 4\pi k)\beta_0,$$

wo β_0 der Werth von β ist für
$k = 0$. –

Den Factor $(1+4\pi k)$ nannte man den Vertheilungscoefficienten des Isolators. —

Nach Schätzungen wäre dieser Vertheilungscoeffizient beim Glase nahe $= 2$ also ist die Capacität der Flaschen hierdurch ~~fast~~ Zirka auf das Doppelte gesteigert. —

Man kann ebenso auch p_0 nur annähernd angeben. — Wir erhalten p_0 aus

$$p_0 h = -\frac{1}{4\pi}\int_{\text{über Oberfl. der inneren Belegung}} d0 \, \frac{dV_0}{dN} \qquad (12)$$

Wären nun die zwei Belegungen zwei parallele unendlich lange Flächen, welche um δ abstehen niogen. —

Jede dieser Belegungen ist dann eine Fläche gleichen Potentials.

Im ~~Flamme~~ Zwischenraume liegen diese Flächen dicht gedrängt ausserhalb derselben weit entfernt.

$$V_0 = h\left(1 - \frac{x_i}{\delta}\right)$$

Dabei wird ∂

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_i} = -\frac{h}{\delta}$$

für den Aussenraum (12)

~~für (?) ist aber~~

Ich nehme an dass für die Punkte der äusseren Flamme

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_i} = 0$$

des

dann ein

$$p_0 h = \frac{1}{4\pi}\int dO\, \frac{h}{\delta}$$

Hiernach würde ~~wenn hier~~ die Capacität für $k = 0$.

$$p_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{\delta}$$

Wollen wir aber

$$p = (1 + 4\pi k)\frac{1}{4\pi}\frac{S}{\delta}$$

Hypothese läss. sich folgendermassen aussprechen —
Man denke sich eine Kugel auf den von aussen her eine Constante elektr. Kr. wirkt, so wird in allen Molec. der Kugel eine

Verbindung zu denken kann so-
dem Elektr. Axe parallel und
Elektr. Kraft. — Und Elektr.
Intensität proportional mit
elektr. Kraft. —

Ist diese ~~Wort~~ Hypothese für Gleichungen
auch richtig, so ist sie
doch unrichtig wenn man die
Vertheilung der Elektr. in der
Kugel ändert. —

Da ja der elektrische Zust.
auch von den Kräften abhäng
ist die schon früher einmal
gewirkt haben. —

Nehmen wir an es hätte an
der Kugel bis zur Zeit t=0

keine Kraft gewirkt — denn
hätte eine Kraft angefangen
zu wirken bis zu der $t = \infty$.
Für $t = 0$ wäre $k = 0$ also ~~die~~
Elektr. Moment $= 0$, ~~die Tritum~~
schliesslich muss es ein Ma-
ximum erreichen — man könnte
diese Tritum nennen —
Man kennt sie nicht man hat
aber allen Welthes ausmachen.
dass dieselben in Sekunden ihren Gen-
wicht fast erreicht — und dann
in Stunden weiter geht. —
Dieselbe langsame Änderung tritt bei
der Erholung des electrischen
Rückstandes zum Vorschein. —

Beschreibung.

Hieraus ist zu schliessen dass nur vorher wirksame Kräfte wirken. –

Hierüber aber Richtung

Kohlrausch 91 Band Pogg. Ann.