Ms 5097/16-19. Eötvös Loránd [illegible]
[illegible] jegyzetei

Analyse der Knyahinyaer Meteoriten.

Analyse des Knyahinyaer Meteoriten.

Abgewogen = 5,3738 Gramm. Mit 6 Gramm Jod und 10 Gramm Jodkalium ~~sammt~~ und etwas Wasser in eine Glasröhre gebracht – diese eingeschmolzen – und etwa 50 Stunden ~~in einem~~ ~~der Temperatur~~ im Wasser-bade gekocht. – Nach Verlauf dieser Zeit auf ein gewogenes Filter gebracht ergab sich ~~auf~~

Aufgelöst 0,5230 Gramm
Unaufgelöst 4,8508
Gelöst 9,74 % des Meteorsteines. – Man kann annehmen dass dieser aufgelöste Theil die metallischen

Bestandtheile des Meteoriten enthält. –

Analyse der in Jod gelösten Theile

Um Jod zu vertreiben eingedampft, dann mit HCl angefeuchtet – in Wasser gelöst – und die Spuren der Kieselerde filtrirt.

$$\underline{SiO_2 = 0,0087.}$$

Die Fällung der durch Lösung des Schwefels ~~gelösten~~ gebildeten SO_3 geschah durch $BaCl$ – Es war so:

$$BaO,SO_3 = 0,0562$$

hiernach

$$\underline{S = 0,0077}$$

Hernach wurde um das überschüssige $ClBa$ zu entfernen dasselbe mit SO_3 gefällt und

filtrirt. –
Dann wurde die Lösung in einem
Kolben sofort mit SO_2 gekocht –
hiebei schied sich ein eigenthüm-
licher Niederschlag ab – welcher
mit $BaOSO_3$ vielleicht auch
Au. Se Te enthält. – Der Ab-
gesonderte Niederschlag löste
sich in Königswasser – wurde
dann filtrirt – wobei $BaOSO_3$
von dem Filtrate gesondert
wurde – dann eingedampft –
– die von Bunsen vorgenommene
Untersuchung in Bezug auf Richtige
deutete – ungefähr auf Tellur hin. –
Nach dem Kochen mit SO_2
wurde die Lösung mit HS
gesättigt – Es entstand ein
eigelber Niederschlag. –

Untersuchung des HS Niederschlages

Der Niederschlag auf dem Filter gebracht behandelte ich mit Schwefelkalium – es wurden dadurch die basischen metalle am Filter, von ~~der~~ Filtrate enthaltend As Ant. Zinn gesondert. – ~~Diese basischen Metalle wurden~~ Das Filter wurde verbrannt geglüht gewogen & dann durch Flammenreactionen untersucht es zeigten diese auf Kupfer so war

$$CuO = 0,0064$$

$$\underline{Cu = 0,0058}$$

Das As Ant Sn enthaltende Filtrat ~~wurd~~ behandelte ich mit SO_2 hierdurch wurde Sn und Ant. gefällt während As in Lösung blieb. –

Der Niederschlag musste erst
durch Schwefelkohlenstoff von
Schwefel befreit werden – dann
würden die weiteren Bestandtheile
mit Flammenreactionen geprüft. –
Wahrscheinlich Zinn und Ant. da.

Durch das Filtrat leitete ich
HS – es bildete sich ~~ein~~ ein
gelber Niederschlag – ~~dan~~
das Gefäss wurde aber umge-
worfen – und jede nähere Un-
tersuchung auf gewiss vorhan-
denen Arsen wurde unmöglich
gemacht. –

Weitere Behandlung der Lösung.

~~Es~~ ~~Der~~ neutralisirten Lösung ge-
schah die Fällung des Eisens mit $NaOCO_2$ dann wurde in HCl gelöst und
(etwa auch Phosphors) – (mit
NH_3 Fe Pr. gefällt – der filtrirte, geglühte

Niederschlag wurde gewogen.

$$Fe_2O_3 = 0,6349$$

$$\underline{Fe = 4,4444}$$

Mit MoO_3, AmO wurde dieser Niederschlag behandelt – aber ohne Erfolg – es zeigten sich keine Spuren von Phosphor. –

Das Filtrat enthaltend eben Co Ni Mn – fällte sich neutral mit NH_4S. – Hierdurch wurden diese Bestandtheile von dem möglicher weise auftretenden Kalk und Mag. – getrennt. –

Der Niederschlag wurde in HCl gelöst dann mit KO gefällt – ~~gewogen~~ filtrirt geglüht, gewogen

Niederschl. = 0,0370

neuerdings in Königssäure ge-
löst, sättigte ich die Flüssigkeit
mit HS, es schied sich hiebei
ein brauner Niederschlag ab –
welcher am Platin rasch verbrannt
metallische Klumpen bildete –
die Flammenreactionen deuteten
etwas auf Cu hin also:

$$\underline{Cu = 0{,}0019} \quad ?$$

Es gab diese Masse in der Borax
probe die Farben – Oxyd: violet-
-braun – Reduct: undeutlich
bräunlich roth. –
Das Filtrat wurde ~~aufs Filter~~
~~gebracht~~ mit $NaOCO_2$ gefällt –
der Niederschlag aufs Filter gebracht
~~zeigte, dann~~ wurde mit Flam-
menreactionen untersucht.

XI.
Ms 5097/17

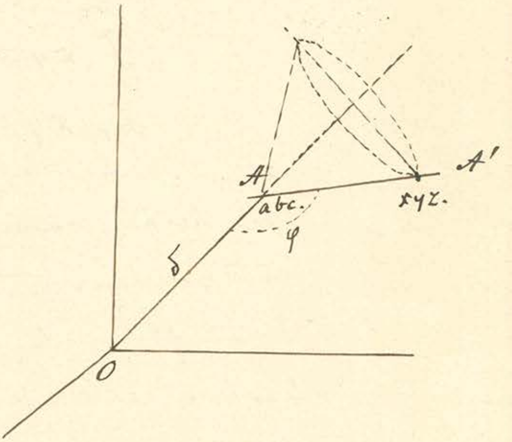
Analytische Uebungen.

Roland Eötvös

<u>Aufgabe.</u> Es soll die Gleichung der Ebene in ihrer Normalform als Gleichung des geometrischen Ortes einer Geraden hergeleitet werden. –

Ich will zuerst zur Gleichung einer Kegelfläche gelangen. –

Die durch den gegebenen festen Punkt abc durchgehende Gerade ist durch die Gleichungen bestimmt:



$$\left.\begin{aligned} \frac{x-a}{z-c} &= \frac{\alpha'}{\gamma'} \\ \frac{y-b}{z-c} &= \frac{\beta'}{\gamma'} \end{aligned}\right\} (1)$$

Worin $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ die Cosinuse der Winkel bezeichnet, welche die Gerade AA' mit den Coordinatenaxen bildet. – Diese Gleichungen bestimmen vollständig die Lage der Geraden, so lange $\alpha'\beta'\gamma'$ als constant betrachtet werden. –

Es sollen aber $\alpha'\beta'\gamma'$ nicht constant, sondern nur durch 2 Bedingungen bestimmt sein, so dass sie noch Veränderungen erleiden können. –

Durch eine solche Veränderung gehen die Gleichungen (1) oder:

$$F(xyz,(\alpha'\beta'\gamma'))$$

$$F_1(xyz,(\alpha'\beta'\gamma'))$$

über in

$$F(xyz,(\alpha'\beta'\gamma')')$$

$$F_1(xyz,(\alpha'\beta'\gamma')')$$

Wenn sich nun $\alpha'\beta'\gamma'$ stätig ändern, und der Reihe nach alle den 2 Bedingungen entsprechenden Werthe annehmen, nimmt auch die durch (1) dargestellte Gerade alle den Bedingungen genügenden ~~Werthe an~~ Lagen ein – sie beschreibt hiebei eine Fläche welche ihr geometrischer Ort ist. – Die Gleichung dieser Fläche erhalten wir durch Elimination von $\alpha'\beta'\gamma'$ aus (1) mit Hülfe der zwei Bedingungsgleichungen; sie ist immer dieselbe, welchen Werth auch $\alpha'\beta'\gamma'$ in

(1, haben mag. –

Eine Bedingungsgleichung zwischen $\alpha'\beta'\gamma'$ ist nun:

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1 \quad \ldots\ldots (2)$$

als zweite Stelle ich die Auf, dass die durch (1) dargestellte Gerade mit der Verbindungslinie des festen Punktes mit dem Coordinatenanfangspunkt einen constanten Winkel φ bilde – also:

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\cos\varphi \quad \ldots\ldots (3)$$

Worin $\alpha\beta\gamma$ die Cosinuse der Winkel bezeichnen, welche $OA=\delta$ mit den Coord. Axen bilden.

Diesen Bedingungen genügend kann die Gerade alle Lagen einnehmen, welche in der Fläche eines Kegels mit kreisförmiger Basis liegen, dessen Spitze der feste Punkt $a\,b\,c$ ~~ist~~ – und dessen Axe mit der Richtung OA zusammenfällt. – Diese Kegelfläche ist der geometrische Ort der Geraden, ihre Gleichung ergiebt sich durch Elimination von $\alpha'\beta'\gamma'$ aus (1, mit Berücksichtigung von (2, und (3). –

Setzen wir in (1, die Werthe

$$a = \delta\alpha \qquad b = \delta\beta \qquad c = \delta\gamma$$

so werden diese Gleichungen:

$$(a) \begin{cases} x\gamma' - \delta\alpha\gamma' = z\alpha' - \delta\alpha'\gamma \\ y\gamma' - \delta\beta\gamma' = z\beta' - \delta\gamma\beta' \end{cases}$$

die erste derselben mit α die zweite mit β multiplicirt, folgt:

$$\alpha\alpha' = \frac{\gamma'(\alpha x - \delta\alpha^2)}{z - \delta\gamma}$$

$$\beta\beta' = \frac{\gamma'(y\beta - \delta\beta^2)}{z - \delta\gamma}$$

diese Werthe in (3, eingesetzt:

$$(b) \qquad \gamma'(\alpha x - \delta\alpha^2) + \gamma'(y\beta - \delta\beta^2) + \gamma\gamma'(z - \delta\gamma) = \cos\varphi(z - \delta\gamma)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die Gleichung der Ebene, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird; es bedeutet dann δ den senkrechten Abstand vom Coordinaten Anfangspunkte; Also für die Ebene:

$$\alpha x - \delta\alpha^2 + y\beta - \delta\beta^2 + z\gamma - \delta\gamma^2 = 0$$

mit Benutzung des Verhältnisses

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=0$$

Handelt es sich um die Gleichung der Kegel-Oberfläche so hat $\cos\varphi$ einen von 0 verschiedenen Werth, und die Elimination von γ' aus (b) kann nur mit Hülfe der Gl. (2) erreicht werden. —

Aus (a) ist:

$$\alpha'=\frac{x\gamma'-\delta\alpha\gamma'}{z-\delta\gamma} \qquad \beta'=\frac{y\gamma'-\delta\beta\gamma'}{z-\delta\gamma}$$

diese Werthe in (2) gesetzt:

$$(x-\delta\alpha)^2+(y-\delta\beta)^2+(z-\delta\gamma)^2=\frac{(z-\delta\gamma)^2}{\gamma'^2}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (b) so ergiebt sich.

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=\cos\varphi\sqrt{(x-\delta\alpha)^2+(y-\delta\beta)^2+(z-\delta\gamma)^2}$$

Führen wir um eine übersichtlichere Gleichung zu erhalten eine neue Grösse; das vom Punkte xyz auf die Kegelaxe gefällte Loth $=r$ ein; so ist, da

$$\sin\varphi.\sqrt{(x-\delta\alpha)^2+(y-\delta\beta)^2+(z-\delta\gamma)^2}=r$$

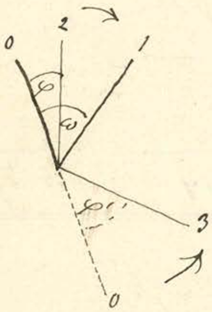
also:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot r$$

Die in der dargestellten weise rotirende Gerade beschreibt einen Kegel, die Gleichungen der beiden sind dieselben, sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Gliedes an der Rechten, da in dasselbe einmal φ, ~~einmal~~ dann aber 180 − φ zu setzen ist. –

Nov. 13.

Aufgabe.



Das bewegliche Ebenenpaar (2, und (3, soll zum festen Ebenenpaar (0, und (1, harmonisch sein; bewegt sich (2) von (0, zu (1, so bewegt sich (3, von der Verlängerung von (0, zu (1 — welche ist nun die Winkelgeschwindigkeit der Ebene (3; wenn die der Ebene (2, zwischen den Lagen (0, und (1, eine Constante ist?

Das harmonische Verhältniss von (0) und (1) zu (2) und (3) ist:

$$\frac{\sin 20}{\sin 21} = -\frac{\sin 30}{\sin 31}$$

Ich setze

$$\sin 20 = \sin\varphi \qquad \sin 30 = \sin\varphi'$$

$$\sin 21 = \sin(\omega-\varphi) \qquad \sin 31 = \sin(\omega+\varphi')$$

$$\sin 21 = a\cos\varphi - b\sin\varphi$$

$$\sin 31 = a\cos\varphi' + b\sin\varphi'$$

wenn $\sin\omega = a$ $\cos\omega = b$ gesetzt wird;

demnach

$$\frac{\sin\varphi}{a\cos\varphi - b\sin\varphi} = -\frac{\sin\varphi'}{a\cos\varphi' + b\sin\varphi'} \quad \ldots\ldots (1)$$

Betrachten wir φ und φ' als Functionen der Zeit, so ergiebt sich

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{(b\sin\varphi' + a\cos\varphi')^2}{(a\cos\varphi - b\sin\varphi)^2}$$

oder, da aus (1)

$$\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} = \frac{(a\cos\varphi' + b\sin\varphi')^2}{(a\cos\varphi - b\sin\varphi)^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\underline{\frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\varphi = \varphi'$ so folgt $\frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$

Zu demselben Resultate gelangen wir auch, wenn $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$; denn der Werth des unbestimmten Ausdrukes $\frac{0}{0}$ in (3), ist in Folge der Gleichung (2) gleich 1. – Hieraus folgt, dass welcher Art auch die Geschwindigkeiten seien, mit welcher die zwei Ebenen (3) und (2) ~~sich~~ von der Lage 0 ausgegangen, sich gegeneinander bewegen; ihre Geschwindigkeiten beim Antritt ihrer Bewegungen, und beim Zusammentreffen dieselben sind. – Aus dieser Bemerkung folgt auch, dass, wenn die Geschwindigkeiten der Ebene (2) eine Constante ~~ist~~, und der Winkel (20) kleiner als 90° ist, die Geschwindigkeit der Ebene (3) ein Maximum haben muss. Es soll die Bedingung dieses Maximums ermittelt werden. –

Wenn $\frac{d\varphi}{dt}$ eine Constante, so ist für das Maximum von $\frac{d\varphi'}{dt}$ nothwendig dass $\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}$ ein Maximum werde.-

~~Da man~~ Zwischen den Grössen φ und φ' besteht hier noch die Bedingung (1); das gesuchte Maximum ergiebt sich demnach aus den Gleichungen:

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{a}{(a\cos\varphi - b\sin\varphi)^2} + \left\{\frac{a}{(a\cos\varphi' + b\sin\varphi')^2}\right\}\frac{d\varphi'}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi} - \frac{\sin\varphi'}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = 0 \qquad (4)$$

~~hieraus~~ aus diesen beiden:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\cdot\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'} = -\frac{(a\cos\varphi' + b\sin\varphi')^2}{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2}$$

also ist im Falle eines Maximums oder Minimums

$$\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots (5)$$

d. i. ein Maximum oder Minimum findet statt, wenn

$$\cos\varphi' = -\sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \sin\varphi'$$

Dieser Fall tritt dann ein, wenn

$$\varphi = \frac{\omega}{2} \quad \text{und}$$

$$\varphi' = 90 - \frac{\omega}{2}$$

wo φ' von der Verlängerung von O gerechnet, also $\cos\varphi'$ negativ ist.–

Das Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit tritt also dann ein, wenn die Ebenen 2 und 3 aufeinander senkrecht stehen; also wenn sie den inneren und den äusseren Winkel des Ebenenpaares O1 halbiren.–

– Es ist noch weiter zu untersuchen, ob diese ~~Werthe~~ Beziehung zwischen φ und φ' einem Maximum oder ~~einem~~ Minimum der Geschwindigk. $\frac{d\varphi'}{dt}$ entspricht.–

Setzt man in (4, den gefundenen Werth ~~von~~ $d\varphi$

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}$$

so ergiebt sich

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'} = 0$$

differentiirt man nochmals nach φ und setzt den Werth von $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ein, so wird:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} - \frac{\sin^3\varphi'}{\sin^3\varphi}$$

So lange der Winkel ω kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$ ist dies ein wesentlich negativer Ausdruck; wenn aber $\omega > \frac{\pi}{2}$ so wird er positiv; im ersten Falle entspricht ihm ein Maximum, im zweiten Falle ein Minimum von $\frac{d\varphi'}{dt}$.–

Der ganze Vorgang ist nun folgender: Während sich die Ebene (2) mit constanter Geschwindigkeit von (0) bis (1) bewegt, durchgeht auch (3) alle Lagen zwischen der Verlängerung von (0) und (1); er beginnt seine Bewegung bei (0) mit der Constanten Geschwindigkeit von (2), erreicht in der Halbirungsebene der Winkels ($\bar{\omega}$) das Maximum oder Minimum seiner Geschwindigkeit, je nachdem dass $\omega < \frac{\pi}{2}$ oder $\omega > \frac{\pi}{2}$, und fällt dann in (1) mit (2) zusammen; wobei er wieder die Constante Geschwindigkeit dieses letzteren angenommen hat. –

Aufgabe.

Ein Kegel ist der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen festen Punkt und durch eine ~~gegebene~~ in sich zurückkehrende Curve geht. – Für einen variabeln Punkt x, y, z ~~desselben~~ desselben müssen also erstens die Gleichungen der Curve

$$F(x, y, z) = 0$$

und

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

und dann die Gleichungen der durch den festen Punkt x', y', z' ~~hin~~durchgehenden Geraden erfüllt werden; diese sind, wenn α, β, γ die Cosinuse der Winkel bedeuten welche die Gerade mit den Coordinatenaxen bildet:

$$\frac{x-x'}{z-z'} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\frac{y-y'}{z-z'} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Aus diesen 4 Gleichungen kann man die Variabeln x, y, z eliminiren, man erhält dann eine Gleichung zwischen den Variabeln $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, welche wenn die entsprechenden Werthe eingesetzt werden, die Form hat~~ten~~

$$\frac{x-x'}{z-z'} = \varphi\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)$$

oder die Form:

$$f\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right) = 0$$

der Kürze wegen sei $\frac{x-x'}{z-z'} = u$ und $\frac{y-y'}{z-z'} = v$ gesetzt, so dass:

$$f(u, v) = 0$$

Denken wir uns die Functionen u und v in Bezug auf z aufgelöst, so dass x und y von einander unabhängig werden, so folgt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\left(\frac{1}{z-z'} - \frac{x-x'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dx}\right) - \frac{df}{dv}\frac{y-y'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{df}{dy} = -\frac{df}{du}\left(\frac{x-x'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dy}\right) + \frac{df}{dv}\left(\frac{1}{z-z'} - \frac{y-y'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

Multiplicirt man die obere Gleichung mit $\frac{x-x'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dy}$ und die Untere mit $\left(\frac{1}{z-z'} - \frac{x-x'}{(z-z')^2}\frac{dz}{dx}\right)$, und addirt dann beide, dann kommt man zu dem Ausdruck:

$$\left(1 - \frac{x-x'}{z-z'}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\left(1 - \frac{y-y'}{z-z'}\cdot\frac{dz}{dy}\right) - \frac{(y-y')(x-x')}{(z-z')(z-z')}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 0$$

vereinfacht:

$$\underline{\frac{x-x'}{z-z'}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{y-y'}{z-z'}\cdot\frac{dz}{dy} = 1}$$

Es ist dies die Differentialgleichung aller Kegel. –

Determinanten.

Gleichungen.

1) Man nennt Determinante ein Aggregat von n Producten, welche aus dem Producte:

$$a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

durch Vertauschung der zweiten Indices auf jede mögliche Art abgeleitet werden können. – Somit ist die Determinante folgende Summe:

$$R = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} .$$

wo aber das Vorzeichen nach einer festen Regel bestimmt werden muss. – Es muss also zur vollständigen Definition der Determinante noch diese Regel angegeben werden. – Wir bezeichnen zu diesem Zwecke den zweiten Index der Grösse a_{1k} mit α_1, den zweiten Index der Grösse a_{2k} mit α_2 u.s.w; so dass diese Grössen in dieser Bezeichnungsweise mit $a_{1\alpha_1}$, $a_{2\alpha_2}$ etc. bezeichnet werden können. – Bilden wir nun das Product:

$$\Pi = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n-2})\dots(\alpha_n-\alpha_1)$$

dann sagt die Regel, dass jedes Glied der Determinante zu dem dieses Product gehört mit dem negativen Vorzeichen in diesem auftritt. –

2) Leitet man aus einem Gliede der Determinante ein anderes dadurch ab, dass man in demselben die Indices zweier Grössen mit einander vertauscht, so muss dieses abgeleitete Glied das entgegengesetzte Vorzeichen des ursprünglichen Gliedes erhalten. –

Es wird die Richtigkeit dieser Behauptung nachgewiesen sein, wenn gezeigt ist, dass in dem erwähnten Falle das Product Π sein Zeichen wechselt. –

Bezeichnen wir mit α_i und α_k zwei bestimmte ~~die~~ Indices ~~zweier bestimmten~~, mit α_l und α_m irgend zwei Indices, endlich mit ε einen der Werthe +1 oder −1, so ist:

$$\Pi = \varepsilon(\alpha_k - \alpha_i)\,\pi(\alpha_l - \alpha_i)(\alpha_l - \alpha_k)\cdot\pi(\alpha_l - \alpha_m)$$

wo π dem Π ähnlich gestaltete Producte bezeichnet. – Ersetze ich nun α_k durch α_i so verändert sich der Absolute Werth von Π nicht, die Producte

$$\pi(\alpha_l-\alpha_i)(\alpha_l-\alpha_k) \text{ und } \pi(\alpha_l-\alpha_m)$$

verändern sich auch in ihrem Vorzeichen nicht; da aber $(\alpha_k-\alpha_i)$ in $-(\alpha_k-\alpha_i)$ übergeht so folgt dass Π sein Vorzeichen wechselt. – Somit ist unsere Behauptung bewiesen. –

3) Hieraus sehen wir dass, wenn ein Glied der Determinante aus einem anderen durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen ~~Determinanten~~ abgeleitet wird, es dann das Vorzeichen dieses letzteren haben muss; während es das entgegengesetzte Vorzeichen bekömmt, wenn die Anzahl der Vertauschungen eine ungerade ist. – Dies Resultat sprach Cauchy noch in anderer Weise aus. –

Es kann nämlich aus jedem Gliede

der Determinante ein anderes Glied
derselben durch cyclische Vertauschung
gewisser Gruppen der Indices abge-
leitet werden. –
Es sei die Anzahl sämmtlicher Indices
n, die Zahl der Gruppen innerhalb
welcher die cyclische Vertauschung ge-
bildet wird p, endlich seien $b_1, b_2 \dots b_p$ die
Anzahl der in der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}} \dots p^{\text{ten}}$ Gruppe
enthaltenen Indices. –
Es wird, so die Anzahl der vorgenomme-
nen Vertauschungen:

$$= (b_1-1)+(b_2-1)+\dots+(b_p-1)$$

$$= n-p.$$

D.i.: Zwei Glieder der Determinante haben dasselbe Vorzeichen oder nicht, je nach dem $(n-p)$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. –

(Beispiele)

4) Vertausche ich in allen ~~...~~ Gliedern der Deter-

minante a_{mk} mit a_{ml}, so nimmt die ganze Determinante das entgegengesetzte Vorzeichen an. – Wir ~~oben sahen~~ wissen schon dass eine solche Vertauschung ~~der~~ zweier Indices in einem Gliede die Veränderung seines Vorzeichens zur Folge hat;*) ~~da aber sämmtliche Glieder der Determinante von dieser so ausgeglichen werden können~~, ~~so folgt dass auch sämmtliche Glieder~~ *) wir haben aber jetzt eine solche Vertauschung in sämmtlichen Gliedern vorgenommen, und somit ändert auch die Determinante ihr Vorzeichen. – ~~ändert~~. –

Wenn daher

$$a_{mk} = a_{ml}$$

ist so ist:

$$R = 0$$

Widrigenfalls müssten wir ja zur Absurdität $R = -R'$ geführt werden. –

5) Bildet man wirklich die 1.2.3...n Glieder der Determinante, so wird man sehen, dass manche derselben den Factor a_{1k},

andere den Factor a_{2k} etc. enthalten; da nun k als 2ter Index in jedem Gliede nur einmal ~~vorkommt~~, so folgt, dass das a_{1k} ~~als Factor~~ enthaltende Glied die Grössen $a_{2k}, a_{3k} \dots a_{nk}$ nicht enthält, dergleichen ~~ent~~ folgt, dass das a_{2k} enthaltende Glied $a_{1k}\, a_{3k} \dots a_{nk}$ nicht enthält; u.s.w. – Man kann also die Determinante in folgender Form ausdrücken:

$$(I) \quad R = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots \dots + a_{nk} A_{nk}$$

wo $A_{1k}, A_{2k} \dots A_{nk}$ Grössen sind, welche $a_{1k}, a_{2k} \dots a_{nk} \dots$ ~~etc.~~ nicht enthalten. – Mit ganz ähnlicher Bedeutung wird man auch:

$$R = a_{1l} A_{1l} + a_{2l} A_{2l} + \dots \dots + a_{nl} A_{nl}$$

setzen können. –

Wenn nun $a_{1k} = a_{1l}$, $a_{2k} = a_{2l}$ also allgemein $a_{nk} = a_{nl}$ gesetzt wird, so muss nach der in 4) angestellten Betrachtung $R = 0$ werden.

In diesem Falle müssen aber auch

$$A_{1k} = A_{1lk} \quad , \quad A_{2k} = A_{2lk} \quad \text{etc.}$$

werden; so dass die Gleichung besteht:

$$0 = a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \dots \dots a_{nl}A_{nk} \qquad \dots (\mathrm{II})$$

Wir haben die Richtigkeit dieser Gleichung nur für den Fall nachgewiesen, ~~dass~~ wenn $a_{ml} = a_{mk}$ ist; da sie aber a_{mk} gar nicht enthält, also von dem Werthe dieser Grösse unabhängig ist, so muss sie allgemein gültig sein, d.i. auch in dem Falle bestehen, wenn a_{mk} und a_{ml} verschieden sind. — Die Gleichungen I) und II) lassen sich in einer einfachen Form darstellen. — Es ist nämlich

$$A_{mk} = \frac{\partial R}{\partial a_{mk}}$$

Somit ist die Determinante darstellbar als folgende über alle m-s ausgedehnte Summe:

$$R = \sum a_{mk} \frac{\partial R}{\partial a_{mk}} \qquad (\mathrm{I})$$

desgleichen ergiebt sich:

$$(\text{II}) \ldots\ldots \qquad 0 = \sum a_{ml} \frac{\partial R}{\partial a_{nk}}$$

5) Diese zuletzt abgeleiteten Sätze (I) und II geben uns ein Mittel in die Hand ein System von beliebig vielen homogenen linearen Gleichungen, mit der gleichen Anzahl Unbekannten auf einen Schlag zu lösen. Es seien die Gleichungen gegeben

$$u_1 = a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n} t_n$$
$$u_2 = a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \ldots\ldots\ldots a_{2n} t_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = a_{n1} t_1 + a_{n2} t_2 + \ldots\ldots\ldots a_{nn} t_n$$

worin $t_1, t_2, \ldots t_n$ die Unbekannten sind, –

Behufs der Auflösung multiplizire ich diese Gleichungen der Reihe nach mit $A_{11}, A_{21}, \ldots A_{n1}$, und addire sie, dann erhalte ich mit Berücksichtigung der Sätze (I) und (II)

$$A_{11} u_1 + A_{21} u_2 + \ldots A_{n1} u_n = R t_1$$

D. i.:

$$t_1 = \frac{A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + \dots A_{n1}u_n}{R}$$

ähnlich erhält man

$$t_2 = \frac{A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + \dots A_{n2}u_n}{R}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t_n = \frac{A_{1n}u_1 + A_{2n}u_2 + \dots A_{nn}u_n}{R}$$

Sind die linken Seiten der Gleichungen, eine einzige ausgenommen, gleich Null, d. i. $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ etc. $u_k = C$ etc. $u_n = 0$; so ergeben sich:

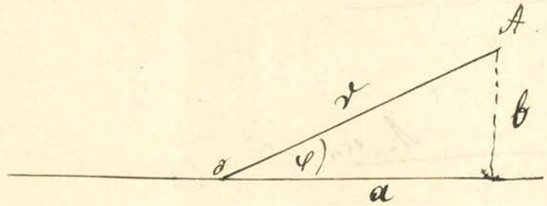
$$t_1 = \frac{A_{k1}C}{R} \qquad t_2 = \frac{A_{k2}C}{R} \qquad \text{etc.}$$

Wenn nun $C = 0$ gesetzt wird, so müssen entweder sämmtliche Unbekannte gleich Null sein, oder es muss die Determinante $R = 0$ sein. –

In diesem letztern Falle wird man die Unbekannten nicht bestimmen können, wird aber ihr Verhältniss erhalten:

$$t_1 : t_2 : \dots : t_n = A_{k1} : A_{k2} \dots A_{kn}$$

Complexe Grössen.



6) Jeder complexen Grösse

$$a+ib$$

entspricht ein Punkt in der Ebene, dessen Abscisse a, Ordinate b ist. – Ist ein solcher Punkt bestimmt so ist auch die entsprechende Complexe Grösse definirt. – In Polarcoordinaten ausgedrückt ist:

$$a+ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

welche Ausdrucksform auch die Normalform einer Complexen Grösse genannt wird. – Man nennt r ~~die Amplitude~~ den Modul, und φ die Phase der Compl. Grösse. –

Multiplicirt man 2 Compl. Grössen, so folgt:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = rr'(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi'))$$

D.i.: Das Product zweier, oder mehrerer Complexer Grössen ist eine Complexe Grösse, deren ~~Amplitude~~ Modul gleich ist dem Producte der

~~Amplituden~~ Moduln der einzelnen Factoren, und deren Phase gleich ist der Summe der einzelnen Phasen. –

Aus diesem Satze folgt auch:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

D.i. Bei der Erhebung einer Complexen Grösse auf die $n$te (ganze) Potenz, erhebt man ~~seinen~~ ihren Modul auf diese Potenz und multiplizirt ihre Phase mit n. –

Die Division Compl. Grössen ist dargestellt durch folgende Formel:

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\right]$$

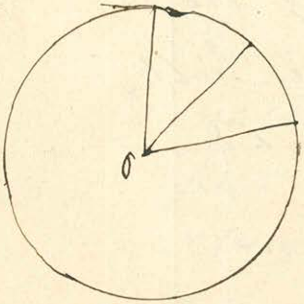
Handelt es sich darum aus einer Complexen Grösse die Wurzel zu ziehen, d.i. auf die $\frac{1}{n}$te Potenz zu erheben, so sehen wir leicht, dass wir die Aufgabe richtig lösten, indem wir

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

setzten. – Es ist aber dies nicht die einzige Wurzel, der compl. Grösse jene solche ist im allgemeinen:

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right)\right)$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet.— Nichts destoweniger können nicht mehr als n verschiedene Wurzeln da sein, wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man für m alle Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ einführt.— Man sieht leicht ein, dass für $m = n+1$ derselbe Werth sich ergiebt als für $m = 1$, für $m = n+2$ derselbe Werth als für $m = 2$, u. s. w.; genug es sind nur n verschiedene Wurzeln da.



Diese n verschiedenen Wurzeln können in der Ebene dargestellt werden.— Zieht man mit dem Radius r einen Kreis, und theilt den Umfang desselben, von einem willkürlich gewählten Nullpunkte ab, in n gleiche Theile, So stellen die Theilpunkte die Wurzeln dar. –

Interessant ist es die n-ten Wurzeln der Einheit zu kennen. – Zu diesem Zwecke hat man nur $r=1$ und $\varphi=0$ zu setzen, es ergiebt sich dann:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2m}{n}\pi + i\sin\frac{2m}{n}\pi$$

7) Wurzeln der Gleichung 3ten Grades.

Die allgemeinste Form einer Gleichung 3ten Grades, ist:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

Diese Gl. ist immer auf eine einfachere reducirbar, in welcher das mit x^2 behaftete Glied fehlt. – Setzt man nämlich:

$$x=y+\alpha$$

und bildet dann die allg. Gleichung 3ten Grades, so ergiebt sich:

$$y^3+y^2(3\alpha+a)+y(3\alpha^2+2\alpha a+b)+\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

Die eingeführte Substitution ~~bestimmt~~ lässt aber die Wahl von α frei, und wir wollen diese Wahl so treffen, dass:

$$3\alpha + a = 0 \quad \text{also} \quad \alpha = -\frac{a}{3}$$

sei. So erhalten wir die Gleichung

$$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

und gesetzt:

$$P = b - \frac{a^2}{3}, \quad Q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

$$\underline{\underline{y^3 + Py + Q = 0}}$$

Diese Form, auf welche ~~jede Glei~~ die allgemein Gl. 3^{ten} Grades reducirt werden kann, heisst die <u>reducirte Gleichung 3^{ten} Grades.</u>

Um die~~s~~ ~~ueda~~ Wurzeln dieser reducirten Gleichung auffinden zu können, setzt man:

$$y = u + v$$

(Wie wir sehen werden sind u und v die dritten Wurzeln aus den 2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung).

Durch diese Substitution erhält die reducirte Gleichung folgende Gestalt:

$$u^3 + v^3 + (u+v)(P + 3uv) + Q = 0$$

Da wir nun weder u noch v bestimmt haben, so können wir einer dieser Grössen einen beliebigen Werth ertheilen, also auch:

$$P + 3uv = 0 \quad \text{d. i.} \quad v = -\frac{P}{3u}$$

setzen. Dann ist:

$$u^3 + v^3 + Q = 0$$

oder

$$u^3 - \frac{P^3}{27u^3} + Q = 0$$

$u^3 = w$ gesetzt erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$w^2 + Qw - \frac{P^3}{27} = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$w_1 = -\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^2}{27}}$$

$$w_2 = -\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

In Folge der Gleichung $u^3 + v^3 + Q = 0$ erhalten wir, wenn $u^3 = w_1$ gesetzt wird $v^3 = w_2$, und umgekehrt. — Jedenfalls hebt sich also die Zweideutigkeit der Wurzel in der Summe $y = u + v$ auf. —

Es ist:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

Die Grössen u und v sind mehrdeutig, es ist ja

$$u = (1)^{\frac{1}{3}} U \qquad v = (1)^{\frac{1}{3}} V$$

also:

$$u = U \;\ldots\ldots\; v = V$$

$$u = \varepsilon U \;\ldots\ldots\; v = \varepsilon^2 V$$

$$u = \varepsilon^2 U \;\ldots\ldots\; v = \varepsilon V$$

Wo

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}$$

gesetzt wurde. —

Durch Combination dieser Werthe könnte man 9 verschiedene Werthe für y finden; es ist aber leicht nach zu weisen dass nur 3 solche Wurzeln da sind. —

Die Gleichung:

$$3uv = -P \pm ia$$

sagt nämlich dass, das Product uv eine reelle Grösse sein muss. –

Die Wurzeln U und V können immer reell gewählt werden; damit das Product uv reell sei ~~muss dann~~ kann aber jedem Werthe von u, nur ein Werth von v entsprechen. – Diese sich entsprechenden Werthe sind auf der vorangehenden Seite in einer Linie enthalten. .

Es giebt also wirklich nur 3 verschiedene Wurzeln der Gleichung 3ten Grades. –

Dass die Gleichung 3ten Grades 3 Wurzeln hat, folgt auch aus ihrer Darstellung als Product; nämlich:

$$y^3 + Py + Q = (y-y')(y-y'')(y-y''')$$

worin y', y'', y''' die Wurzeln bedeuten. –

Diese drei Wurzeln sind nun:

$$y' = U+V, \quad y'' = \cos\frac{2\pi}{3}(U+V) + i\sin\frac{2\pi}{3}(U-V)$$

$$y''' = \cos\frac{2\pi}{3}(U+V) + i\sin\frac{2\pi}{3}(V-U)$$

(2)

$R = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ $\qquad \underline{n-p}$

$a_{1m_1} a_{2m_2}$ $\qquad (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2})$

$(a_{n-1} - a_{n-2})$ $\qquad 1$

$i \quad k$

$a_2 - a_1$

$R = -R, \quad \frac{\partial R}{}$

$R = \sum a_{mk} \frac{\partial R}{\partial a_{mk}} = \sum a_{mk} A_{mk} \quad 0 = \sum a_{mk} \frac{\partial R}{\partial a_{ml}} = \sum a_{mk} A_{ml}$

$R = \quad \sum a_{mk} \frac{\partial R}{\partial a_{ml}} = 0.$

$a_{1k} = a_{1l} \qquad a_{nk} = a_{nl},$

$u_1 = a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \cdots \quad a_{1n} t_n$

$u_2 = a_{21} t_1 + \qquad a_{2n} t_n$

$u_n = a_{n1} t_1 + a_{n2} t_2 \qquad a_{nn} t_n$

$A_{11} u_1 + A_{21} u_2 + \cdots A_{n1} u_n = R t_1 + \cancel{R}$

$$t_1 = \frac{A_{11} u_1 + \cdots A_{n1} u_n}{R}$$

$s_1 = a_{11} r_1 + a_{21} r_2 - - - - a_{n1} r_n$

$s_n = a_{1n} r_1 + \qquad a_{nn} r_n$

~~~~23

$r_1 = A_{11} r_1 + \qquad A_{12} r_n$

R

$a_{mk} = a_{km} \qquad A_{mk} = A_{km}$
~~~~

$0 = a_{11} t_1 \quad - \quad - \quad a_{1n} t_n$

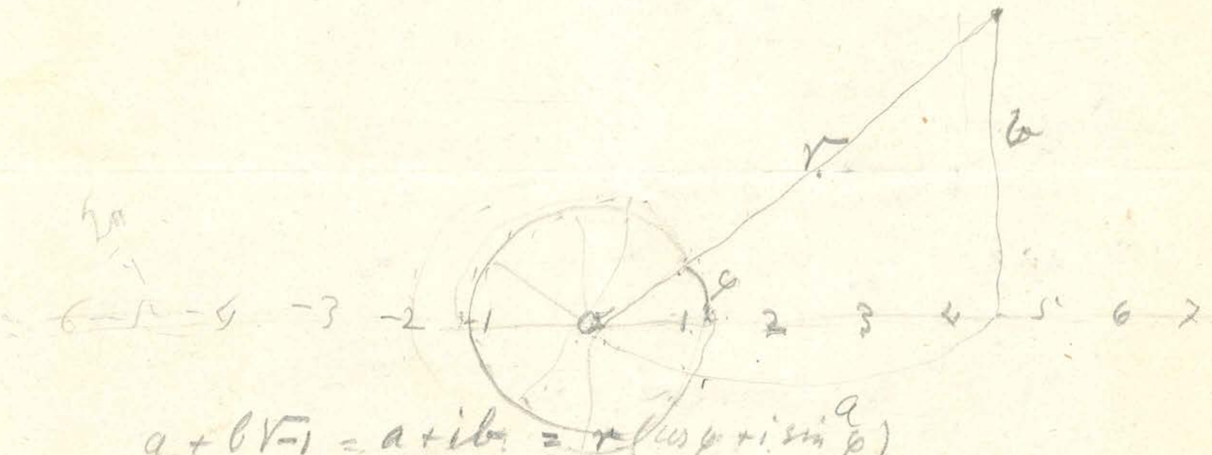
$0 = a_{n1} t_1 \quad - \quad a_{nn} t_n$

$C = a_{k1} t_1 + \quad - \quad - \quad a_{kn} t_n$

$t_1 = \dfrac{A_{k1} C}{R} \quad t_2 = \dfrac{A_{k2} C}{R} \quad t_n$

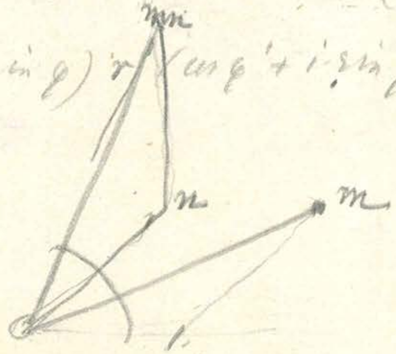
$t_1 : t_2 \quad t_n = A_{k1} : A_{k2} \quad A_{kn}$

$R = 0$



$a + b\sqrt{-1} = a + ib = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = rr'(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi'))$



$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

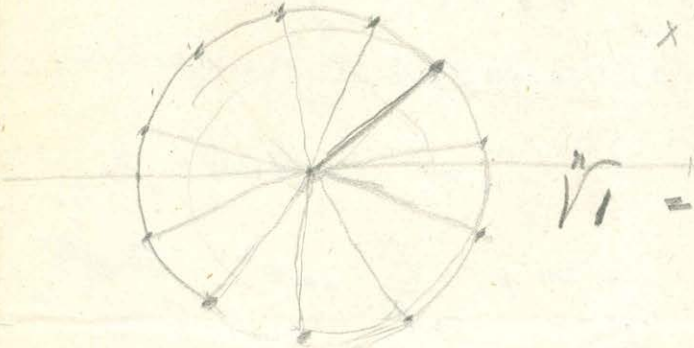
$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = s(\cos\psi + i\sin\psi) \quad r = s^{\frac{1}{n}} \quad \varphi = \frac{\psi}{n}$

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\right)$$

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(2m\pi+\varphi) + i\sin(2m\pi+\varphi))$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right)$$



$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

$$x^3 + \underline{ax^2} + bx + c = 0$$

$$x = y + \alpha$$

$$\begin{array}{ll} x^3 & y^3 + 3\alpha y^2 + 3\alpha^2 y + \alpha^3 \\ ax^2 & \quad + ay^2 + 2a\alpha y + a\alpha^2 \\ bx & \quad\quad by + b\alpha \\ c & \quad\quad\quad c \end{array}$$

$$3\alpha + a = 0$$

$$\alpha = -\frac{a}{3}$$

$$y^3 + y^2(3\alpha+a) + y(3\alpha^2 + 2a\alpha + b) + \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9}$$

$$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

$$\frac{a^2}{3} - 2\cdot\frac{a^2}{3}$$

$$y^3 + Py + Q = 0 \qquad y = u + v = \sqrt[3]{w_1} + \sqrt[3]{w_2}$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uvy \qquad u^3 + v^3 + y(P + 3uv) + Q = 0$$

$$Py = P(u+v) \qquad P + 3uv = 0 \qquad v = -\frac{P}{3u}$$

$$u^3 - \frac{P^3}{27u^3} + Q = 0 \qquad u^3 = w \qquad w^2 + Qw - \frac{P^3}{27}$$

$$w = -\frac{Q}{2} \pm\sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \qquad u = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \pm\sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \mp\sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

$$u^3 + v^3 + Q = 0$$

$y^3 + py + q = 0 \qquad y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

$\frac{y^3 + py + q - y'^3 - py' - q}{y - y'} = y^2 + yy' + y'^2 + p$

$y^3 + py + q = (y - y')(y - y'')(y - y''')$

U und V reell

$3uv = -p \qquad u = U \qquad v = V \qquad y = U + V$

$\varepsilon^3 = 1 \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad u = \varepsilon U \qquad v = \varepsilon^2 V \qquad y = \varepsilon U + \varepsilon^2 V$

$\varepsilon^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad u = \varepsilon^2 U \qquad v = \varepsilon V \qquad y = \varepsilon^2 U + \varepsilon V$

$y = \underline{U + V}, \quad y = \cos\frac{2\pi}{3}(U + V) + i\sin\frac{2\pi}{3}(U - V); \quad y = \cos\frac{2\pi}{3}(U + V) + i\sin\frac{2\pi}{3}(V - U)$

3 reelle Wurzeln $U = V \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, oder U und V komplex $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

$-\frac{q}{2} = r\cos\varphi \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -r^2\sin^2\varphi; \quad \frac{p^3}{27} = -r^2 \quad \cancel{p = 3\sqrt[3]{r^2}} \quad p = -3r^{2/3}$

$u = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \begin{cases} r^{1/3}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \\ r^{1/3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ r^{1/3}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3} \end{cases} \quad \cancel{= \sqrt[3]{\frac{p}{3}}\cos}$

$u = \sqrt[3]{\frac{p}{3}}\cos\left(\text{Arc}\cos\left[-\frac{q}{2}\cdot\left(-\frac{3}{p}\right)^{3/2}\right] + i\sin\text{Arc}\cos\left[-\frac{q}{2}\cdot\left(-\frac{3}{p}\right)^{3/2}\right]\right)$

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0 \qquad x = y - \frac{a}{3} = y + 3 \quad \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 2 \end{cases}$

$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} \qquad x^3 - 7x + 6 = 0$

$26 - 27 \qquad -24 + 78 - 54 \qquad -1 - 2 + 3 = -6$

$1\cdot 2 - 1\cdot 3 - 2\cdot 3 = -7$

$y^3 - y = 0 \qquad y = 0 \quad y = \pm 1 \qquad -2{,}88 \quad +3{,}11 \quad -2$

$x^3 - 7x - 6 = 0$

$-1 - 2 + 3$

9,6320
9,8160
9,4480
9,9257 37°42 10°54

9,9921
9,8161
9,5148

0,1761
9,9988 − 1

$$-\frac{Q}{2} = r\cos\varphi \qquad \sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}} = r i \sin\varphi$$

$$\frac{Q^2}{4} = r^2\cos^2\varphi \qquad r^2 = -\frac{P^3}{27} \qquad r = \left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\cos\varphi = -\frac{Q}{2}\left(-\frac{3}{P}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad u = \sqrt[3]{r\cos\varphi + r i \sin\varphi}$$

$$u = \left(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + i\sin\tfrac{1}{3}\varphi\right)\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases}\tfrac{1}{3}\varphi \\ \tfrac{1}{3}\varphi + \tfrac{2\pi}{3} \\ \tfrac{1}{3}\varphi + \tfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$$v = \left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\tfrac{1}{3}\varphi - i\sin\tfrac{1}{3}\varphi\right)$$

$$y = u + v = 2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\cos\tfrac{1}{3}\varphi \\ \cos\tfrac{1}{3}\left(\varphi + \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\tfrac{1}{3}\left(\varphi + \tfrac{4\pi}{3}\right)\end{cases}$$

$x^2 - A = 0$

$y = 0$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad x = y + \alpha \qquad \alpha = -\frac{a}{4}$$

$$\begin{aligned}
&y^4 + ay^3 \\
&+4\alpha y^3 + 3a\alpha y^2 \\
&+6\alpha^2 y^2 + 3a\alpha^2 y \quad by^2 \\
&+4\alpha^3 y \qquad +2b\alpha y \quad +cy \\
&+\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0
\end{aligned}$$

$$0 = y^4 + y^3(a+4\alpha) + y^2(b+3a\alpha+6\alpha^2) + y(c+2b\alpha+3a\alpha^2+4\alpha^3) + d + c\alpha + b\alpha^2 + a\alpha^3 + \alpha^4$$

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0$$

$$y = \pm\sqrt{u} \pm \sqrt{v} \pm \sqrt{w} \qquad (y-u)(y-v)(y-w) = y^3 - y^2(u+v+w) + y(uv+uw+vw) - uvw$$

$$y^3 - fy^2 + gy - h; \quad f = u+v+w \quad g = uv+uw+vw \quad h = uvw$$

$$y^2 = u+v+w+2\sqrt{uv}+2\sqrt{uw}+2\sqrt{vw}; \quad y^2 - f = 2(\sqrt{uv}+\sqrt{uw}+\sqrt{vw})$$

$$y^4 - 2y^2 f + f^2 = 4g + 8\sqrt{h}(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}); \quad y^4 - 2y^2 f - 8\sqrt{h}\,y + f^2 - 4g = 0$$

$$f = -\frac{A}{2}; \quad \sqrt{h} = -\frac{B}{8}; \quad g = \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}; \qquad y^3 + \frac{A}{2}y^2 + \left(\frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}\right)y - \frac{B^2}{64} = 0$$

$y = \pm\sqrt{u} \pm \sqrt{v} \pm \sqrt{w}$ $\qquad \sqrt{h} = \sqrt{uvw} = -\frac{B}{8}$

$B = +$ $\quad y = \begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w} \\ \sqrt{u}-\sqrt{v}+\sqrt{w} \\ -\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w} \\ -\sqrt{u}-\sqrt{v}-\sqrt{w} \end{cases}$ $\qquad B = -$ $\quad y = \begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w} \\ \sqrt{u}-\sqrt{v}-\sqrt{w} \\ -\sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w} \\ -\sqrt{u}-\sqrt{v}+\sqrt{w} \end{cases}$

$r+s+t+u = 0$ $\qquad rs+tu = u-v-w+2\sqrt{vw}$

$u-v-w-\dots$

$rs+rt+st+su+ru+tu = 2u-2v-2w$

$-2u-2v+2w$

$-2u-2v-2w$ $\qquad -2\sqrt{u}+2\sqrt{u}$

$rst+rsu+rtu+stu = -8\sqrt{uvw}$ $\qquad y^4+Ay^2+By+C$

$rstu = u^2+v^2+w^2-2uv-2uw-2vw$

$A = -2(u+v+w)$ $\quad B = 8\sqrt{uvw}$, $\quad C = (u+v+w)^2-4(uv+uw+vw)$

$y^3+\frac{A}{2}y^2+\left(\frac{A^2}{16}-\frac{C}{4}\right)y - \frac{B^2}{64} = 0$

$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots a_m = 0$ $\qquad x = \alpha_1$

$-(\alpha_1^m + a_1\alpha_1^{m-1} + \dots a_m) =$

$= (x-\alpha_1)\left(\frac{x^m-\alpha_1^m}{x-\alpha_1} + a_1\frac{x^{m-1}-\alpha_1^{m-1}}{x-\alpha_1}\right)$

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)$ $\qquad$ Gleiche Wurzeln.

$(x-p-qi)\quad(x-p+qi)$

$x = p+qi$
$x = p-qi$ $\qquad x^m+a_1x^{m-1}\dots = P+Qi = 0$
$\qquad P-Qi = 0$

$a_1 = A_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$, $a_2 = A_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$

$x^m - \sqrt{2}\left(A_1x^{m-1} + iA_2x^{m-2} - \dots A_m\right) = 0$ $\quad R$

$mx^{m-1} - \sqrt{2}\left(A_1(m-1)x^{m-2} + A_2(m-2)x^{m-3} \dots\right) = 0$

$x = r(\cos\rho + i\sin\rho)$

$x^m + a_1 x^{m-1} \;-\!- \; = r^m(\cos m\rho + i\sin m\rho) + A_1 r^{m-1}(\cos((m-1)\rho+\alpha) + i\sin((m-1)\rho+\alpha)) \ldots$

$= T + Ui.$

$=$

$T = \underbrace{r^m\cos m\rho + A_1 r^{m-1}\cos((m-1)\rho+\alpha) + A_2 r^{m-2}\cos((m-2)\rho+\alpha) \ldots}_{< r^m\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$r > R$

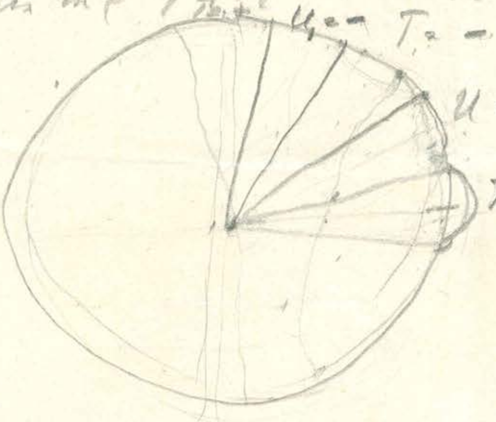
$\cos m\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}$

T hat das Vorzeichen von $\cos m\rho$

$U = r^m\sin m\rho + A_1 r^{m-1}\sin((m-1)\rho+\alpha) - -$

U das Vorzeichen von $\sin m\rho$

$\sin m\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}$



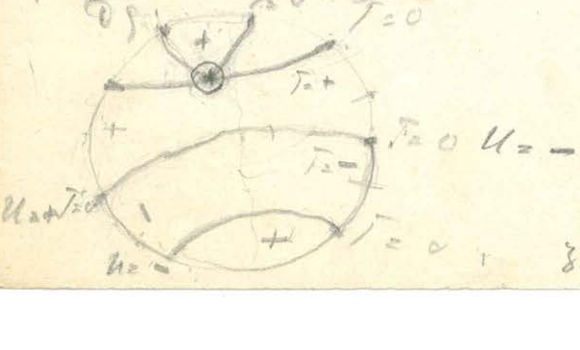
$4m$ Teile.

$-\frac{\pi}{4m}$ $\frac{\pi}{4m}$ $+\frac{2\pi}{4m}$ $\frac{3\pi}{4m}$ $\frac{4\pi}{4m}$ $\frac{5\pi}{4m}$ $\frac{7\pi}{4}$

~~$mx^m + (m-1)a_1x^{m-1} +$~~ $= mr^m(\cos m$ $< mr^m\sqrt{\frac{1}{2}}$

$-\frac{\partial T}{\partial\rho} = +mr^m\sin m\rho + (m-1)A_1 r^{m-1}\sin((m-1)\rho+\alpha) - - -$

$+\frac{\partial U}{\partial\rho} = mr^m\cos m\rho + (m-1)A_1 r^{m-1}(\sin((m-1)\rho+\alpha)$



$T = 0 \quad U = 0 \quad x^m + a_1x^{m-1} = 0$

$x^m + a_1x^{m-1} \quad = 0.$

$x = \zeta + \alpha$

$\zeta^m + a_1\zeta^{m-1} + \ldots a_k\zeta^k = 0$

k Wurzeln $\zeta = 0$ od $x = \alpha$

$\zeta = Z(\cos\zeta + i\sin\zeta) \quad A_k Z^k(\cos(k\zeta+\alpha) + i\sin(k\zeta+\alpha))$

$x^5 - A = 0$ $\qquad x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5$

$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5$

Wantzel

$x_1 = f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$

irrationalban ... 1 ... 2 ...

$x^2 - Ax + B$

$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$

$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2} \quad \frac{x_1 - x_2}{2}$

$x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2} \quad \frac{x_2 - x_1}{2}$

$\cancel{x_1 =} \; \varphi'(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$

$\alpha \varphi'(x_2 x_1 x_3 x_4 x_5)$

$\varphi'(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = \alpha \varphi'(x_2 x_1 x_3 x_4 x_5)$

$\varphi'(x_2 x_1 x_3 x_4 x_5) = \alpha \varphi'(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$

$\alpha^2 = 1$

$\varphi'(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = \alpha\beta\, \varphi'(x_2 x_3 x_1 x_4 x_5)$

$\varphi'(x_2 x_3 x_1 x_4 x_5) \quad \alpha\beta\, \varphi'(3\;1\;2\;4\;5)$

$\varphi'(x_3\;2\;1\;4\;5) \quad \alpha\beta\, \varphi'(1\;2\;3\;4\;5)$

$= \alpha^3\beta^3$

1

$\varphi''(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = \gamma\, \varphi''(x_2 x_3 x_1 x_4 x_5)$

$\varphi(x_2\;3\;1\;4\;5) = \delta\, \varphi(x_2\;3\;4\;5\;1)$

$\varphi(x_1\;2\;3\;4\;5) = \gamma\delta\, \varphi(x_2\;3\;4\;5\;1)$

$\gamma\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\delta = 1 \qquad \gamma^5\delta^5 = 1 \qquad \gamma\delta = 1$

$\gamma^3 = 1 \qquad \gamma^2\delta = 1$

$\delta^3 = 1 \qquad \gamma = 1 \quad \delta = 1$

$\varphi(x_2\;3\;1\;4\;5) = \gamma\delta\varphi(x_3\;1\;4\;5\;2)$

$\varphi(x_1\;2\;3\;4\;5) = \gamma^2\delta\varphi(x_3\;1\;4\;5\;2)$

1 2 3 4 5
3 1 4 5 2
4 3 5 2 1
5 4 2 1 3
2 5 1 3 4
1 2 3 4 5

$\varphi(x_1\;x_2\;x_3\;x_4\;x_5) = \gamma^2\varphi(x_3\;1\;2\;4\;5)$

$\varphi(x_3\;1\;2\;4\;5) = \delta\varphi(x_3\;4\;2\;5\;1)$

$\varphi''(x_1\;x_2\;x_3\;x_4\;x_5) = \gamma^3\delta\,\varphi(x_3\;4\;2\;5\;1)$

$\gamma^{10}\delta^5 = 1$

4

$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots \dots a_m = 0$

$f^m(x) \dots \dots f(x) \quad f(x)$

$x = -\infty \quad + \quad - \quad + \quad - \qquad \mp \quad \pm$

$x = \infty \quad + \quad + \quad + \quad + \qquad + \quad +$

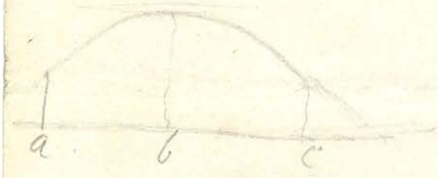
$f'' x \pm \quad x \ldots \mp$

$f' x \pm \quad 0$

$f x \pm \quad \pm$

	$f^{k+1}x$	$f^{k}x$	$f^{k-1}x$
a	$\pm$	$\mp$	$\mp$
b	$\pm$	0	$\mp$
c	$\pm$	$\pm$	$\mp$

0 Zeichenwechsel verloren



	$f^{k+1}x$	$f^{k}x$	$f^{k-1}x$
a	$\pm$	$\mp$	$\pm$
b	$\pm$	0	$\pm$
c	$\pm$	$\pm$	$\pm$

2 Zeichenwechsel verloren

l gerade

l ungerade

	$f^{k+l}x$	$f^{k+l-1}x$	$f^{k+l-2}x$	$f^{k+1}x$	$f^{k}x$	$f^{k-1}x$	$f^{k+l}x$			$f^{k}x$	$f^{k-1}x$
a	$\pm \mp$		$\pm$	$\mp$	$\pm$		$\pm \mp$	$\dots$	$\pm \mp \pm \mp$	$\pm$	
b	$\pm$ 0 0		0	0	0		$\pm$ 0 0		0 0 0		
c	$\pm \pm \pm$				$\pm$		$\pm \pm \pm$			$\pm_{l-1} \mp$	$\pm_{l+1}$

l Zeichenwechsel verl.

$(l-1)$ od $(l+1)$ Zeichenw. verl.

$$\frac{\partial^h \left[(x-b)^l \varphi(x)\right]}{\partial x^h} = 0 \qquad h = 0 \quad h = 1 \quad \dots \quad h = (l-1)$$

$x = b$

$l(l-1)\dots(x-b)^{l-h}\,\varphi x$

	$f''x$	$f'x$	fx
a	+	+	−
c	+	+	+

~~we~~

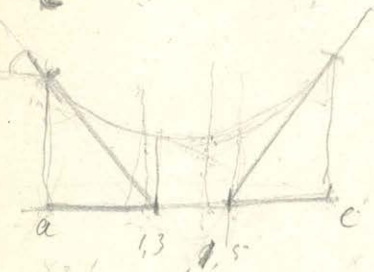
$f''x \quad f'x \quad fx$

a	+	−	+
	0	1	2
c	+	+	+

$f^x = 0 \quad f'x = 0 \quad x = 6$

$x^n \ldots = 0$

$x^{n-1} + \ldots = 0$



$\frac{fc}{f'c} - \frac{fa}{f'a} > c - a$ zimmg.

a + −

c Unterschied Zeichenwechsel 0 0 0 1 1 2 2 2 ...

Ableitungen $f^{k}x$

1 1 2 3 3 4 5 6 7 8 9 10 11 11 12 13

a + − − + − − + − + − + − + − − + −

c + − − − − − − − + − − + − − + − − +

1 1 1 1 1 1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8

δ. 0 0 1 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 4 5 5

Setzt daß erste Dem [illegible] auch welche ein 1 folgt für $f^k x$, so muß der Zeichenwechsel [illegible] erniedrigt werden, bis der Dem[illegible] $f^{k+1}x = 0$ ist, dann ist zu entscheiden ob die Wurzeln v. $f^k x$ reell od. imaginär sind [illegible] die imaginären [illegible] von der Zahl der verlorenen Zeichenwechsel (der δ) abzieht

Harriot 00121212

5

$a \cdot f''a \quad f'a \quad fa$ $\qquad f(a+\alpha) = fa + \alpha f'a + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} f''a$

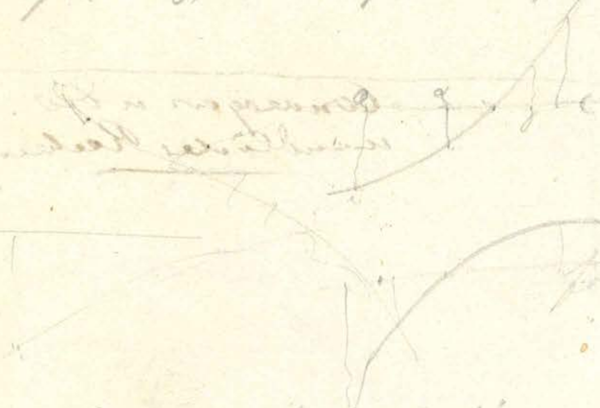
$c \cdot f''c \quad f'c \quad fc$ $\qquad f'(a+\alpha)$

$f''(a+\alpha)$

$f(a+\alpha) = 0 = fa + \alpha f'(a \ldots c) \qquad \alpha = -\frac{fa}{f'(a \ldots c)}$

$f(c-\gamma) = 0 = fc - \gamma f'(a \ldots c) \qquad \gamma = +\frac{fc}{f'(a \ldots c)}$

$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(c)} \qquad \gamma = \frac{fc}{f'(c)}$



fc und $f''c$

$f'c \gtrless f'(a \ldots c)$

$f(a+\alpha) = fa + \alpha f'a + \frac{\alpha^2}{2} f''a + \frac{\alpha^3}{6} f'''a \ldots$

$f'(a+\alpha) = \quad f'a + \alpha f''a \ldots$

$f''a \quad f'a \quad fa \qquad \frac{fa}{f'c} = + \quad \frac{fa}{fc} = -$

$f''c \quad f'c \quad fc \qquad \frac{fa}{f'a} = -$

$0 = fa + \alpha f'(a \ldots c)$

$0 = fc - \gamma f'(a \ldots c) \qquad \alpha = -\frac{fa}{f'(a \ldots c)} \qquad \gamma = \frac{fc}{f'c}$

$a+\alpha$

wenn $\frac{fa}{f''a} = +$ $\qquad$ wenn $\frac{fc}{f''c} = +$

$\alpha = -\frac{fa}{f'a} \qquad \gamma = \frac{fc}{f'a} \qquad \alpha = -\frac{fa}{f'c} \qquad \gamma = \frac{fc}{f'c}$

$\frac{f''a}{fa} = + \qquad \frac{f''a}{f'(a-c)} = -$ $\qquad$ α u. γ fallen zu klein wenn nimmt die ...

$x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

$c - a = i.$

$c - \gamma - a - \alpha = c - a - (\gamma + \alpha) = i - \frac{fc - fa}{f'a} = i - \frac{\cancel{fa} + i f'a + \frac{i^2}{2} f''(a..c)}{f'a}$

$= + \frac{i^2}{2} \frac{f''(a..c)}{f'a}$

$= i + \frac{fa - fc}{f'c} = \cancel{i} + \frac{\cancel{fc} - \cancel{i f'c} + \frac{i^2}{2} f''(a..c)}{f'c}$

$i \quad , \quad \frac{i^2}{2} \frac{f''(a..c)}{f'c}$

Convergenz u Div. unendlicher Reihen

1) $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 + a_4 \dots$

$> a_0 - a_1 \quad < a_0 - a_1 + a_2$

[illegible]

[illegible]

---

2 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad a_n < b_n$

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots \qquad b$ konv. konv. a

---

3) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$, konverg. a , konv. b.

divierg. b , diverg. a

$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} < \frac{b_{n+1}}{b_{n+2}} \qquad \frac{a_n}{a_{n+2}} < \frac{b_n}{b_{n+2}} \qquad \frac{a_n}{a_{n+3}} < \frac{b_n}{b_{n+3}}$ u/

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$b_n + b_n \frac{a_{n+1}}{a_n} + b_n \frac{a_{n+2}}{a_n} + \dots > b_n + b_{n+1} + b_{n+2}$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad a_1 + x a_x + x^2 a_{x^2} + x^3 a_{x^3} + \dots$

$a_1 + a_2 + \dots a_{x-1} + a_x > (x-1) a_x + a_{x+1} \qquad a_{x^2} \quad x(x-1) a_{x^2}$

$a_{x-1} < (x-1) a_1 \quad a_x \quad a_{x^2-1} < (x-1) x a_{x^2}$

$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \qquad 1 + (1+h)^{-1} + (1+h)^{-2} + \dots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

4)

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad a_1 + x a_x + x^2 a_{x^2} + \cdots$

$a_1 = a_1 \,;\; a_2 + a_3 + \cdots a_x > (x-1) a_x \,;\; a_{x+1} \cdots a_{x^2} > (x-1) x a_{x^2}$ etc.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots > \frac{x-1}{x} (a_1 + x a_x + \cdots)$

$a_1 + \cdots a_{x-1} < (x-1) a_1 \,;\; a_x \cdots a_{x^2-1} < x(x-1) a_x \,;\; a_{x^2} \cdots a_{x^3-1} < x^2(x-1) a_{x^2}$

$a_1 + a_2 \cdots < (x-1)(a_1 + x a_x + \cdots)$

$\frac{1}{1^{1+k}} + \frac{1}{2^{1+k}} + \frac{1}{3^{1+k}} + \cdots$

$\frac{1}{2(l.2)^{1+k}} + \frac{1}{3(l.3)^{1+k}} + \cdots$

$\frac{1}{2.l.2.(ll(2))^{1+k}} + \frac{1}{3.l3(ll3)^{1+k}} + \cdots$

$\sum \frac{1}{n^{1+k}} \,;\; \sum \frac{1}{n(l.n)^{1+k}} \quad \sum \frac{1}{n\,ln\,(lln)^{1+k}} \quad \sum \frac{1}{n\,ln\,lln\,(llln)^{1+k}}$

Konvergiren wenn $k >$ divergiren wenn $k = 0$

$\sum \frac{x^m}{(x^m)^{1+k}} \,;\; \sum \frac{x^m}{x^m (l\,x^m)^{1+k}} \quad \sum \frac{x^m}{x^m\, l.x^m (ll\,x^m)^{1+k}} \quad \sum \frac{x^m}{x^m\, l.x^m\, ll x^m (lll x^m)^{1+k}}$

$\sum \frac{1}{(x^k)^m} \sim \sum \frac{1}{(1+k)^m} \,;\; \frac{1}{(lx)^{1+k}} \sum \frac{1}{m^{1+k}} \,;\; \frac{1}{lx} \cdot \sum \frac{1}{m(lm + llx)^{1+k}} \,;\; \frac{1}{lx} \sum \frac{1}{(lm + llx)[l(lm+llx)]^{1+k}}$

$m.lx \qquad ll\,mlx$

$x = 2 \qquad > \sum \frac{1}{m(lm)^{1+k}} \qquad \sum \frac{1}{m\,lm.\,llm)^{1+k}}$

$x \gtrless 3 \qquad < \sum \frac{1}{m(lm)^{1+k}} \qquad \sum \frac{1}{m\,lm\,(llm)^{1+k}}$

$\sum \frac{1}{(1+k)^n} \,;\; \sum \frac{1}{(n\,ln)^{1+k}} \quad \sum \frac{1}{(n\,ln\,(lln)^{1+k}} \quad \sum \frac{1}{n^{1+k}} \,;$

$b_n \lessgtr a_n$ ist $\sum a_n$ konverg. / diverg. ; konverg. / diverg. $\sum b_n$

$\text{Lim}\; n.b_n \lessgtr 1 \quad (n\,b_n - 1)$ } konv. / div.

$\sum \frac{1}{(1+h)^n}$ $\sum \frac{1}{n^{1+k}}$ $\sum \frac{1}{n(ln)^{1+k}}$ $\sum \frac{1}{n\,ln(lln)^{1+k}}$

$\sum \frac{1}{n}$ divergens

$\sum \frac{1}{n^{1+k}}$ konvergens

$\lim n^k b_n \cdot n^k < \infty$ $\quad n\,ln\,b_n (ln)^k < \infty$ $\quad n\,ln\,lln\,b_n (lln)^k < \infty$

konverg

$\lim\limits_{n=\infty} n \cdot b_n > 0$ $\quad n\,ln\,b_n > 0$ $\quad n\,ln\,lln\,b_n > 0$

divergens

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ $\quad 1+k_n$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1+k} = 1 + \frac{1+k}{n}$$

$$\frac{n+1}{n}\left[\frac{l(n+1)}{l\,n}\right]^{1+k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{l(n+1)-ln}{ln}\right)^{1+k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ln}\right)^{1+k} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1+k}{n\,ln}$$

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{l(n+1)}{ln}\left(\frac{ll(n+1)}{lln}\right)^{1+k} = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\,ln}\right)\left(1+\frac{ll(n+1)-lln}{lln}\right)^{1+k} = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\,ln}\right)\left(1+\frac{l\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)}{lln}\right)^{1+k} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \frac{1+k}{n\,ln\,lln}$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = u_n \quad \mathrm{Lim}\,(u_n - 1) = \alpha \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \mathrm{Lim}\,(n\alpha - 1) = \beta \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \mathrm{Lim}\,(ln\,\beta - 1) = \gamma \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \mathrm{Lim}\,(lln\,\gamma - 1) \begin{matrix} > 0 \text{ konv} \\ < 0 \text{ div} \end{matrix}$$

$\frac{1+k}{n}$ $\quad \frac{1}{n} + \frac{1+k}{n\,ln}$ $\quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,ln} + \frac{1+k}{n\,ln\,lln}$ $\quad \beta \quad \frac{k}{1}, \frac{1+k}{ln}, \frac{1}{ln} + \frac{1+k}{ln\,lln}$

$\gamma \quad \frac{k}{1}, \frac{1+k}{lln}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad$ ~~divergens~~

$1 + \frac{1}{2^{\frac{5}{4}}} + \frac{1}{3^{\frac{5}{4}}} + \cdots$ $\quad$ konverg

$\sum \frac{1}{n^{2k}}$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$(1+a)^m = 1 + ma + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \cdots$$

$$l(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots$$

$$\frac{m-k+1}{k}\,a$$

$b_n < 0 \quad n a_n = \frac{1}{n^k} \quad \frac{1}{n^k}$ kann grösser sein als nb_n

$n b_n > 0 \qquad n a_n = \frac{1}{n^k}$

$b_n = \qquad a_n = \frac{100}{n^{1+k}} \qquad n b_n n^k < n a_n n^k < 100$

$n b_n > \frac{1}{4} \qquad \sum a_n = \sum \frac{1}{n\,l n}$ divergent.

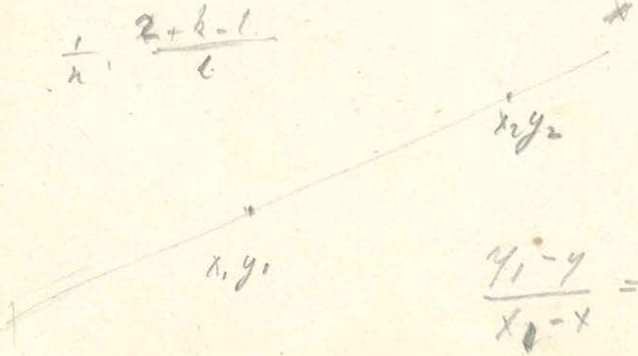
$n b_n > n a_n \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$\frac{l(n+1)}{l\,n} = 1 + \frac{1}{n\,l n} \qquad l\left(\frac{l(n+1)}{l n}\right) = \frac{1}{n\,l n}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+k} \qquad l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ convergent.

$$\frac{(1+k)\,k\,(k-1)(k-2)\cdots(2+k-l)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots l}\left(\frac{1}{n}\right)^l$$

$\frac{1}{n}\cdot\frac{2+k-l}{l}$



$y = ax + b$

$y = a'x + b'$

$y = a''x + b''$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \cancel{a}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x_2 - x_1) + y_1 \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + $$

$ax + by = 1$

$a'x + b'y = 1$

$a''x + b''y = 1$

$x(ab' - a'b) = b' - b \qquad a''(b'-b) + b''(a-a') = ab' - a'b$

$y(ab' - a'b) = a - a' \qquad a''b' + ab'' + ba' = a''b + b''a' + b'a$

 Project!

Ich suche die Erklärung derjenigen Phosphorescenz Erscheinungen zu geben — welche beim Erwärmen mancher Körper bis zu einem, unterhalb der Rothglühhitze gelegenen Temperaturgrad — hervortreten. Die Grundanschauung deren experimentellen Beweis ~~[illegible]~~ ich mir zur Aufgabe stelle ist die, dass Lichterscheinungen hervorkommen müssen, indem die unter anderen Bedingungen sich ins Gleichgewicht gesetzte Theilchen des Körpers, ~~sie~~ plötzlich ~~ein~~ Gleichgewichtslage annehmen — welche den eben obwaltenden Bedingungen entspricht. —

Ich unterscheide zwei Klassen. —

1) Körper die sich unter von 1 Atm. Druck verschiedenem (bei allen mir bekannten Fällen viel grösserem) Drucke gebildet haben. — Die also wenn die Beweglichkeit ihrer Theilchen eine grössere wird — eine neue

Gleichgewichtslage einnehmen können. –
Dies kann plötzlich und mit Licht-
erscheinungen vor sich gehen. –

2) Körper die sich zwar unter
dem gewöhnlichen Drucke aber bei
einer bestimmten Temp. gebildet haben
und Gemenge zweier Bestandtheile
sind – deren Ausdehnungscoefficienten
verschieden sind. – ~~solche Gemeng~~, Die
Theilchen solcher Gemenge können sie
einem gewissen Temp. Grad sich im
Gleichgewichte verhalten – die
müssen dagegen ~~bei~~ bei einem anderen
Temp. Grad – wo die Ausdehnungscoeff.
d. i. ihre Elasticität – eine andere
geworden ist – eine neue Gleichgewichts-
lage haben – sobald diese Elast.
grösser geworden ist, als die gegenseiti-
tige Reibung der Theilchen – müssen sie

Momentan in die neue Lage übergehen.
Und dies ist die Erscheinung der Phosphorescenz.

Untersuchungen:

I)

~~ist überhaupt nicht~~ Zeigen künstliche unter hohem Druck erzeugte Körper die Erscheinung?

– Ist die Grösse des Druckes von Einfluss auf die Farbe des angewandten Lichtes? oder auf den Grad der Temp. bei dem die Erscheinung eintritt?, oder auf die Intensität? ~~und die~~ oder auf die Dauer? der Erscheinung?

– Zeigen nicht etwa alle unter hohem Druck gebildeten festen Verbindungen oder krystallisirte homogene Körper die erwähnte Erscheinung?

– Können Körper die unter 1 Atm. Druck geglüht die Eigenschaft verloren, haben dieselbe nicht etwa noch bei kleinerem Drucke annehmen?

– Man müsste noch nachweisen dass vollkommen reine Körper die keine Spur von fremden Theilen enthalten unter 1 Atm. Druck geglüht, unter 1 atm. D. auch keine Erscheinung zeigen können

B. 1. 49

II

– Geschieht bei den Erscheinungen die bisher bekannt nur nicht etwa ein ähnl. Process.

– Ist die Menge der Bestandtheile von Einfluss auf diese Art der Erscheinung?

⊕ Oder ist nur das Verhältniss der Ausdehnungscoefficienten beider Bestandtheile dabei massgebend? – und zwar ~~gen gleich~~ gen nach demselben Verhältniss gebildete Menge, von Bestandtheilen deren Ausdehnungscoefficienten ~~auch~~ ~~dieselben~~ in demselben Verhältnisse zu einander stehen ~~nicht etwa~~ welcher Art auch die einzelnen homogenen Bestandtheile seien, nicht etwa dieselbe Erscheinung?

– Können nicht Körper die die Eigenschaft dieser Art von Phosphorescieren schon verloren haben, nicht dieselbe nach Verlauf der Zeit wieder erlangen – Indem man etwas die elastischen Nachwirkung analoges annimt.

– Ist diese Eigenschaft nicht etwa allgem. Eigenschaft aller Körper u. behandelt. oder wie weit ist diese Allgemeinheit

 Projet 2.

durch zu führen. —
— Schlüsse auf die Entstehung von Granit, Trachyt, — Aragonit, Kalkspath etc. —

I können phosphorescenz Erscheinungen I. Art nicht an Körpern hervorgebracht werden, während diese einem hohen Drucke ausgesetzt werden als etwa gepresst werden. — Erscheinung während des Pressens,

---

I) Untersuchung von Süsswasser und im Meer lebenden Muscheln. letztere zeigen — erstere nicht die Erscheinung? Geologischer Natur hieraus.

II Daß zwei verschiedene Gemenge, die von gleich großen Mengen von Bestandtheilen zusammengesetzt sind, deren Ausdehnungscoefficienten in beiden Körpern, in demselben Verhältnisse stehen, wohl die gleiche Erscheinung zeigen könnte, erläutert folgende Betrachtung:

Zur Erläuterung der zu untersuchenden Klasse von Phänomenen ~~kann~~ scheint die Annahme einer Widerstandskraft, die zwischen den Molekülen der Körper besteht, von Nutzen zu sein. — ~~Diese~~ Ist diese ~~[illegible]~~ Widerstandskraft überwunden, so tritt die Erscheinung ein. — Dieselbe Widerstandskraft muss aber auch bei dem Rothglühen der festen Körper thätig sein — und da das Rothglühen bei allen Körpern bei derselben Temperatur eintritt, so folgern wir dass diese Widerstandskraft bei allen Körpern ~~propor~~ in demselben Verhältnisse steht zu der Kraft welcher die Ausdehnung durch Wärme bedingt. — ~~Hieraus könnte man folgern~~ Wenn w. Widerstandskraft f = ausdehnende Kraft, so muss für alle Körper

$$\frac{w}{f} = c$$

dieselbe ~~sein~~ Constante sein.
Demnach müsste etwas wie in Φ ~~ähnliches~~ ausgesprochenen eintreten können. —

Wäre es aber nicht vernünftiger zu denken, dass diese zwei Gemenge wohl bei demselben Temperaturgrade phosphoresciren würden, dass aber die Farben verschiedene wären. – Und zwar so dass die Wellenlängen derselben sich verhielten, wie das Anordnungsverhältniss der Bestandtheile der ersten Gemenges, zu dem ~~entsprechenden~~ Anordnungsverhältniss der entsprechenden Bestandtheiles des zweiten Gemenges. –

Die wirksamen Kräfte, 1) ~~Wärme~~ Abstossungskraft 2) Anziehungskraft, 3) die erwähnte Reibung.

(I) Auch Petroleum zeigt eine Erscheinung, die ~~auch~~ zu der Klasse I zu gehören scheint. Dies wäre etwas sehr wichtiges, denn es könnten nicht die Theilchen die Lichtoscillation bewirken, von denen angenommen wird dass sie gegen einander verschiebbar sind, da ja wir bei diesen keine Reibung, also sogleich eine neue Gleichgewichtslage eintreten müsste. –

Dies erforderte die Annahme von kleinen
Theilen der Flüssigk. die sich als feste
Körper verhielten, und die etwa
Theile der sogenannten Flüss.-Molekeln
wären. – Somit gelangt man zu
etwas ähnlichem wie Tyndall in
seiner letzten Untersuchung. –
Dann könnte man auch annehmen,
Schallwellen beständen in den solchen
beweglichen Flüssigen Theilchen, während
Lichtwellen, durch die letzteren
fortgepflanzt würden.

Dass die Ursache der Erscheinung beim
Petroleum hoher Druck ist unter dem es gebildet
wurde, wäre erstens dadurch bewiesen,
wenn man einem schon ausgekochten
Petroleum, das die Eigenschaft des Phos-
phorescirens bereits verloren hat, dieselbe
dadurch wieder geben könnte, dass man es
hohem Drucke aussetzt, zweitens dadurch
einen Versuch unter niedrigerem Drucke als
1 Atmosphäre mit einem Petroleum, das
bei 1 Atm.-Druck die Erscheinung nicht mehr zeigt.

Ms 5097/19 Project 3.

II Es könnte als Beleg für die zweite Art der Erklärung dienen, wenn man durch Erfahrung nachweisen könnte, begünstigt wird, dadurch dass man die Bewegung bei niederer Temperatur entstehen lässt. Es stellt sich dann auch die Frage zu wie fern, ist dieser Temperaturgrad von Einfluss auf die Erscheinung?

II Ich stellte schon die Frage ob nicht die Art. II auch nochmaliger Körper zu Entstehen könnte die die Eigenschaft derselbe zu zeigen, bereits durch langes Erhitzen verloren haben. — Also ob nicht etwa durch eine Wirkung die der Last, Nachwirkung ähnlich wäre der Körper wieder in den ursprünglichen Zustand zurückkehren würde. — Man könnte aber auch auf den Gedanken kommen, dass ein Rückschlag auch plötzlich, beim Zusammenstossen eintreten könnte; und dass während den der Körper in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt, ein mal eine Erscheinung entreten könnte, die mit Phosphorescenz verbunden wäre. – (Dies könnte durch photographische Platten nachgewiesen werden) die das vollkommen dunkle Depositorium, in dem der Körper aufbewahrt wird von aller Seite schliessen müssten) – Könnte man aber nicht ein durch künstliches [illegible] eine solche Erscheinung hervorrufen. ?

Ein flacher Blei Ring
Zwei scharfe Cylinder
Ein Loth
Eine chemische Waage
Eine Kette

47