Eötvös Loránd elektromossági
egyetemi jegyzetei

dass sie ihr Vorzeichen verändert indem einer seiner Variabeln in das entgegengesetzte übergeht; so verschwindet, das erwähnte Integral. – Es ist nicht schwer diese Behauptung zu rechtfertigen. – Ich betrachte ξ, η, ζ als Cosinuse der Winkel, welche der Leitstrahl mit den Coordinatenaxen bildet – dann besteht zwischen ihnen die Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, in Folge deren F als Function nur der Variabeln ξ und η angesehen werden kann. – Ich kann nun das Integral zerlegen, wie folgt:

$$\iint F dk = \iint_{-\xi_0}^{\xi_0} F dk + \iint_{\xi_0}^{-\xi_0} F dk$$

wenn F die genannte Eigenschaft hat, so ist da das Oberflächenelement dk bei diesen Veränderungen sein Vorzeichen nicht ändert:

$$\iint F dk = \iint_{-\xi_0}^{\xi_0} F dk - \iint_{-\xi_0}^{\xi_0} F dk = 0$$

Um diesen Beweis zu führen zerlegt Stickelberger das ganze Integral in die Summe von 8 Integralen, deren jedes über eine der 8. Octanten zu integriren ist – und auch Hertz hat seine eigene mir unbekannte Methode. –

~~Ist~~ Derselbe Schluss ist auch dann richtig, wenn ~~alle drei Variabeln~~ F auch für den Fall in's negative übergeht, dass alle Variabeln negativ werden. –

Mit Hülfe dieser Bemerkung vereinfachen wir den auf dem angedeuteten Wege zu bildenden Ausdruck:

$$\xi\varrho = -\frac{\xi Q}{R} + \frac{\xi\sqrt{Q^2+PR}}{R}$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes hat die Eigenschaft das Vorzeichen zu wechseln, wenn die 3 Variabeln ξ, η, ζ das negative Vorzeichen annehmen. Also ist dieses Glied bei der Berechnung von (42) verschwindend — so dass in Bezug auf dieses Integral

$$\xi\varrho = -\frac{\xi Q}{R}$$

ist, also:

$$\xi\varrho = -\frac{1}{R}\left(\frac{a\xi^2}{A^2} + \frac{b\xi\eta}{B^2} + \frac{c\xi\zeta}{C^2}\right)$$

Wenn nun eines dieser Variabeln in's negative übergehen, so verschwinden auch noch die zwei letzten Glieder. – Also ist in Bezug auf (42):

$$\xi\varrho = -\frac{1}{R}\cdot\frac{a\xi^2}{A^2}$$

Dies in (42) gesetzt giebt demnach:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial a} &= -\frac{a}{A^2}\iint\frac{\xi^2}{R}\cdot dk \\
&\text{ebenso findet man} \\
\frac{\partial\Omega}{\partial b} &= -\frac{b}{B^2}\iint\frac{\eta^2}{R}\,dk \\
\frac{\partial\Omega}{\partial c} &= -\frac{c}{C^2}\iint\frac{\zeta^2}{R}\,dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(45)$$

Wo für R, der in (43) ausgedrückte Werth zu setzen ist. – Es zeigt sich so dass diese Componenten lineare Functionen der Variabeln a, b, c sind – und somit wird auch die Behauptung gerechtfertigt, dass das Potential einer ~~gleichmässig~~ ~~ma~~ mit der gleichmässigen Dichtigkeit 1 in einem Ellypsoide verbreiteten magn. Masse in Beziehung auf einen innerhalb desselben gelegenen Punkt eine Function zweiten Grades seiner Coordinaten ist. – Zur Ergänzung können wir noch hinzufügen, dass diese Function eine homogene Function zweiten Grades ist. –

§ 13. –

Da wir bewiesen haben, dass ein Ellypsoid von weichem Eisen, unter dem Einflusse einer constanten magnetisirenden Kraft gleichmässig magnetisirt wird; so wollen wir jetzt die Berechnung der magnetischen Momente, und des Potentials wirklich ausführen. –

Setzt man in (45):

$$\xi = \cos\vartheta$$

$$\eta = \sin\vartheta\cos\omega$$

$$\zeta = \sin\vartheta\sin\omega$$

So wird das Element der Kugelfläche

$$dk = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

Da nun das Doppelintegral in (45) über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist, so werden wir es in Bezug auf ω, von 0 bis 2π, in Bezug auf ϑ von 0 bis π integriren. – Es wird so:

$$(46) \ldots\ldots \iint \frac{\xi^2}{R}\, dk = \int_0^{\pi} d\vartheta \cos^2\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\omega}{B^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\omega}{C^2}}$$

Ich setze:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2} \\ N &= \frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{C^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47)$$

Das nach ω auszuführende Integral ist dann:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{M\cos^2\omega + N\sin^2\omega} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{M + N\,tg^2\omega}$$

Gesetzt $tg\,\omega = u$ so wird dasselbe Integral:

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{du}{M + Nu^2}$$

Also wenn $u\sqrt{\frac{N}{M}} = v$ gesetzt wird:

$$= \frac{4}{\sqrt{MN}} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2}$$

So ergiebt sich das gesuchte Integral:

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{MN}}$$

Dies Resultat verwandelt (46), wenn wir für M und N die Werthe aus (47) setzen in:

$$\iint \frac{\xi^2}{R}\,dk = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2}} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{C^2}}}$$

Dies Integral lässt sich in folgendes umwandeln:

$$\iint \frac{\xi^2}{R}\,dk = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{2A^2 \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}tg^2\vartheta}\sqrt{1+\frac{A^2}{C^2}tg^2\vartheta}}$$

Gesetzt
$$u = A^2 tg^2\vartheta$$
also
$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{u}{A^2}}}$$
$$+\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\cdot\frac{du}{\sqrt{1+\frac{u}{A^2}}}$$

Also:

$$\iint \frac{\xi^2}{R}\,dk = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}}$$

Dies in (45) gesetzt ergiebt ~~den~~ Werth von $\frac{\partial\Omega}{\partial a}$, ganz in derselben Weise lassen sich auch die Ausdrücke für $\frac{\partial\Omega}{\partial b}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial c}$ ableiten, ja diese letzteren ergeben sich durch symmetrische Vertauschung der ~~Buchstabe~~ Zeichen a, b, c und A, B, C aus dem ersteren. –

Setzt man:

(48)
$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{2\pi}{A^2}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}} \\ B_0 = \dfrac{2\pi}{B^2}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_0 = \frac{2\pi}{\mathcal{C}^2}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{\mathcal{C}^2}\right)\sqrt{\quad '' \quad '' \quad '' \quad ''}}$$

So ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial a} &= -A_0 a \\ \frac{\partial \Omega}{\partial b} &= -B_0 b \\ \frac{\partial \Omega}{\partial c} &= -C_0 c \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (49)$$

Um Ω selbst zu finden, müssen wir vor allem ~~den~~ den Werth feststellen den dieses Potentials in Bezug auf ~~einen~~ ~~bei~~ den Mittelpunkt des Ellypsoids besitzt — also den Werth welchen es annimmt für $a=0$, $b=0$, $c=0$. — +)

In diesem Falle geben die Gleichungen (43):

$$P = 1$$

$$Q = 0$$

$$R = \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2}$$

+) Zur Bestimmung von Ω könnte man allerdings auch von dem allgemeinen Ausdrucke:

$$\Omega = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

ausgehen, und darin Polarcoordinaten einführen:

$$\Omega = \iiint r\,dr\,dk = \frac{1}{2}\iint \varrho^2\,dk$$

wo ϱ eine positive Wurzel der quadratischen Gleichung 43 ist ..... etc. Dieser Weg ist aber lang und uninteressant. —

In Folge des Ausdruckes:

$$\varrho = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + PR}}{R}$$

ist also in diesem Falle

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

und somit ist, wenn Ω_0 den Werth von Ω für $a=0$ $b=0$ $c=0$ bedeutet

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}\iint \frac{dk}{R}$$

Drückt man dk in Polarcoordinaten aus:

$$\Omega_0 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{MN}}$$

wo M und N durch die Gleichungen (47) definirt sind. – Ist dann wie früher

$$u = A^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta$$

so wird

(50) . . . . . $$\Omega_0 = \pi \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}}$$

~~Das Integral der Differentie~~

Die Summe der Integrale der ~~einzelnen Diff~~ einzelnen Differentialgleichungen 49 – ist nun:

(51) . . . . $$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{2}\left(A_0 a^2 + B_0 b^2 + C_0 c^2\right)$$

A_0, B_0, C_0 sind ellyptische Integrale. –

Dieselben Grössen haben auch die merkwürdige Eigenschaft dass sie nur von dem Verhältniss ($A : B : C$) der Hauptaxen, nicht aber von ihrer absoluten Grösse abhängig sind; so dass sie für ähnliche Ellypsoide dieselben Werthe haben. – Man kann sich hievon leicht überzeugen indem man in ~~§1~~ (48) statt A, B, C setzt nA, nB, nC, — dann ist nämlich statt u zu setzen n^2u, und die Ausdrücke verändern sich dadurch in der That nicht. –

§14.

Bis jetzt behandelten wir nur den Fall dass der Punkt auf welchen das Potential bezogen ist, ein ~~äusserer~~ innerer wäre. – Die Aufgabe das Potentials einer Masse, welche in einem beliebigen Ellypsoide mit constanter Dichtigkeit 1 verbreitet ist, in Beziehung auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt zu bestimmen, ~~war~~ ist eine der berühmtesten, ihre Lösung gelang nicht sogleich. – Sie gelang Ivory, und ist nun auch bekannt unter dem Namen des Ivory-schen Satzes. Wir wollen zunächst diesen Satz ableiten. –

Wir denken uns eine magnetische Masse verbreitet auf der Oberfläche eines dreiaxigen Ellypsoides, und nennen W das Potential derselben in Bezug auf einen Punkt dessen rechtwink. Coord. $a\,b\,c$ sind, und welcher ~~im~~ innerhalb sowohl als ~~im~~ ausserhalb des genannten Ellypsoides liegen kann. – Sind A, B, C die ~~Halb~~ Hauptaxen des Ellypsoides, so ist die Mittelpunktsgleichung der Ellypsoidoberfläche:

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

Bezeichnen dO ein Element der Oberfläche und q die Dichtigkeit der magnetischen Massen in demselben, so ist W durch folgendes über die ganze Oberfläche auszudehnendes Integral bestimmt:

$$(2) \ldots\ldots \quad W = \int \frac{q\,dO}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

Unsere Aufgabe ist nun dieses Integral so zu transformiren dass es dieselbe Form behält. – D. i. dass es nach der Transformation auch das Potential einer ~~Ellypsoid~~ Masse darstellt, welches auf einer Ellypsoidoberfläche verbreitet ist. – Wir werden dies durch eine einfache Transformation erreichen können – wir führen nämlich die Variabeln x', y', z' ein. –

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\frac{A}{A'} \\ y &= y'\frac{B}{B'} \\ z &= z'\frac{C}{C'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

wo A', B', C' Constanten sind, über welche wir im Laufe der Untersuchung noch zu verfügen haben werden. – Diese Werthe (3) in die Gleichung 1, substituirt, ergeben:

$$\frac{x'^2}{A'^2} + \frac{y'^2}{B'^2} + \frac{z'^2}{C'^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

D. h. wenn wir x', y', z' als die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes betrachten; so liegt dieser Punkt auf einem Ellypsoid dessen Axen dieselben Richtungen haben, als die des ursprünglichen Ellypsoids, und die Längen A', B', C' haben. (4) ist also die Gleichung dieses 2ten Ellypsoids. – In demselben Sinne wie jedem Punkte x, y, z der ursprünglichen Ellyps. Fläche ein

Punkt x', y', z' der zweiten Oberfläche entspricht, so entspricht auch jedem Oberflächenelemente dO auf der zweiten Fläche ein Element dO'. — Was die Dichtigkeit (q') in diesem Oberflächenelemente dO' anbetrifft, so definire ich sie durch die Gleichung:

(5) ...... $q\,dO = q'\,dO'$

Das in (2) dargestellte Potential W ist also, transformirt, durch folgendes über die Oberfläche des neuen Ellypsoides auszudehnende Integral bestimmt:

$$W = \int \frac{q'\,dO'}{\sqrt{\left(a - x'\frac{A}{A'}\right)^2 + \left(b - y'\frac{B}{B'}\right)^2 + \left(c - z'\frac{C}{C'}\right)^2}}$$

Unsere Absicht war diese Transformation so durchzuführen, dass der transformirte Ausdruck, auch das Potential einer auf einer Ellypsoidfläche verbreiteten Masse sei. — Wir haben diesen Zweck erreicht, wenn wir die im Nenner stehende Quadratwurzelgrösse, als die Entfernung des Punktes $x' y' z'$ von einem festen Punkte ansehen können. — Gesetzt es wären a', b', c' die rechtwinkeligen Coordinaten eines solchen festen Punktes; so werden wir den Ausdruck (6) in der That als das Potential einer auf der Ellypsoidfläche verbreiteten Masse in Bezug auf diesen Punkt ansehen können; in dem Falle dass die Gleichung erfüllt ist:

$$(a'-x')^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2=\left(a-x'\frac{A}{A'}\right)^2+\left(b-y'\frac{B}{B'}\right)^2+\left(c-z'\frac{C}{C'}\right)^2$$

Soll unsere Absicht erreicht sein, dann muss diese Gleichung bestehen für alle Werthe von x', y', z' welche sie innerhalb der Grenzen der nach ~~der~~ ihnen ausgeführten Integration annehmen können; die Gleichung muss also bestehen für alle Punkte welche auf der zweiten Ellypsoidfläche liegen, welche also der Gleichung (4) derselben genügen. Diese zwei Bedingungen für x', y', z' können wir zusammenfassen, und können also sagen, dass die Transformation in der gewünschten Weise geschehen ist, wenn die dabei neu eingeführten Variabeln x', y', z' der Gleichung genügen:—

$$(a'-x')^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2=\left(a-x'\frac{A}{A'}\right)^2+\left(b-y'\frac{B}{B'}\right)^2+\left(c-z'\frac{C}{C'}\right)^2+$$
$$+M\left(\frac{x'^2}{A'^2}+\frac{y'^2}{B'^2}+\frac{z'^2}{C'^2}\right)\ldots(7)$$

Bei dieser Transformation haben wir 7, bis jetzt unbestimmt gelassene Grössen A', B', C' $a', b' c'$ und M eingeführt – Die Gleichung (7) bietet uns ein Mittel dieselben zu bestimmen, und folglich die Transformation wirklich durchzuführen. – Auf beiden Seiten von 7 stehen nämlich ~~eine~~ Functionen zweiten Grades von x', y', z', welche nur Glieder enthalten, welche mit x'^2, y'^2, z'^2 und mit x', y', oder z' behaftet sind – oder in Beziehung auf diese Variabeln constant sind. – Die Gleichstellung der auf ~~bei~~ den zwei Seiten der Gleichung vorkommenden Coefficienten gleicher Potenzen dieser Variabeln ~~auf beiden Seiten der Gleichung~~ liefert demnach die 7 Gleichungen:

$$(8) \ldots \quad \frac{a'}{A} = \frac{a}{A'} \,,\quad \frac{b'}{B} = \frac{b}{B'} \,,\quad \frac{c'}{C} = \frac{c}{C'}$$

$$(9) \ldots \quad A'^2 = A^2 + M \,,\quad B'^2 = B^2 + M \,,\quad C'^2 = C^2 + M$$

$$(10) \ldots \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - M$$

Diese Gleichungen, welche die zu bestimmenden Grössen vollständig ausdrücken, führen uns zu merkwürdigen Schlüssen. –

Die Gleichungen (9) sprechen aus dass das neue

Ellypsoid confocal ist mit dem gegebenen. – Zwei Ellypsoide nennt man nämlich confocale Ellypsoide, wenn die Brennpunkte ihrer Hauptschnitte dieselben sind. – Die Quadrate der Excentricitäten der drei Hauptschnitte des gegebenen Ellypsoids sind:

$$A^2 - B^2 \quad , B^2 - C^2 \quad A^2 - C^2$$

und die Quadrate der Excentricitäten des neuen Ellypsoids:

$$A'^2 - B'^2 \quad , \quad B'^2 - C'^2 \quad , A'^2 - C'^2$$

da diese in Folge der Gleichungen (9) gleich sind so folgt, dass diese zwei Ellypsoide confocal sind. –

Setzt man nun in (10) die Werthe von a', b', c' aus (8) ein, und berücksichtigt die Gleichungen (9), so gelangt man zur Gleichung:

$$-M = -a^2 \frac{M}{A'^2} - b^2 \frac{M}{B'^2} - c^2 \frac{M}{C'^2}$$

also zu:

$$\frac{a^2}{A'^2} + \frac{b^2}{B'^2} + \frac{c^2}{C'^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

der Punkt a, b, c ist demnach ein Punkt der Oberfläche des zweiten Ellypsoides. Hierdurch ist dieses Ellypsoid vollständig definirt; es ist nämlich das dem gegebenen confocale Ellypsoid, welches durch den Punkt a,b,c hindurch gelegt ist. – (Diese Definition ist vollständig denn es giebt nur ein diesen Bedingungen genügendes Ellypsoid) –

Setzen wir dagegen statt den Werthen von a',b',c' die Werthe von a,b,c aus (8) in die Gleichung (10) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{a'^2}{A^2}+\frac{b'^2}{B^2}+\frac{c'^2}{C^2}=1$$

d.i. der Punkte a',b',c' auf welchen das Potential des 2ten Ellypsoides bezogen ist, liegt auf der Oberfläche des ersten Ellypsoides. – Der Punkt a,b,c liegt demnach auf der Ellypse A'B'C', der Punkt a'b'c' auf der Ellypse A,B,C. – Der Punkt a'b'c' entspricht also ganz in der Art dem Punkte a,b,c; wie der Punkt x,y,z dem Punkte x'y'z' entspricht. Die Gleichungen (8) werden demnach geltend sein, wenn man (in ihnen) setzt statt a',b',c'; x,y,z und statt a,b,c; x',y',z'. – (Dies führt übrigens zu nichts neuem, denn dieselben Gleichheiten wurden der ganzen Betrachtung zu Grunde legt)

Die in den so gebildeten Gleichungen noch un-
bekannten A', B', C' geben die Relationen (9),
und M bestimmt sich schliesslich aus 10. –
Hiermit haben wir das Potential W einer auf
einer Ellypsoidoberfläche verbreiteten Masse in Be-
ziehung auf einen Punkt a, b, c so transformirt;
dass es sich als das Potential einer Masse darstellt,
welche auf der Oberfläche eines andern Ellypsoids
verbreitet ist, ~~in Beziehung~~ bezogen auf einen Punkt, der
~~gegebenen~~ in der Oberfläche des gegebenen Ellypsoids
liegt. – Diese beiden Ellypsoide sind confocal und
das neu eingeführte geht durch den Punkt a, b, c
während der gegebene durch $a'\, b'\, c'$ geht. –
Da confocale Ellypsoide in einander liegen müs-
sen, so liegt der Punkt a', b', c' im Innern des
zweiten Ellypsoides, wenn a, b, c ausserhalb
des ersten gelegen ist. –
Diese Betrachtungen lehren uns, wie das Po-
tential ~~von~~ der auf einer Ellypsoidoberfläche ver-
breiteten Masse, in Bezug auf einen äusseren
Punkt sich ausdrücken lässt, durch ein
Potential ~~ähnlich~~ in derselben Art verbreiteter Massen, ~~bezogen~~
auf einen inneren Punkt. –

§15.

Wir wenden uns nun daran das Potential eines Ellypsoides, welches mit ~~wa~~ Masse von der Constanten Dichtigkeit 1 gefüllt ist, in Bezug auf einen äusseren Punkt zu bestimmen. – Nennen wir dasselbe Ω, so wird es durch folgendes Integral, welches über den ganzen inneren Raum des Ellypsoides auszudehnen ist, dargestellt:

(1) $$\Omega = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

wo r die Entfernung des Punktes x, y, z vom Punkte a, b, c ist. – Hieraus:

(2) . . . $$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

wo gesetzt wurde ~~statt~~ $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$

Mit Benützung des Green-schen Satzes kann dieses auf ein Oberflächen Integral zurückgeführt werden

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\int \frac{d\mathcal{O} \cos(N_i, x)}{r}$$

Also auch:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = +\int \frac{dO \cos(N_i, x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Es wird dies Integral mit dem in §14 mit (2) bezeichneten identisch, wenn man setzt:

$$q = \cos(N_i, x)$$

Ich kann dann diesen Ausdruck gerade so transformiren, wie ich es in §14 mit Gl. (2) that, ich kann also (3) durch ein anderes Oberflächen Potentials ersetzen, welches sich auf einen anderen Punkt a', b', c' ~~befinde~~ bezieht.–

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \int \frac{q' dO'}{\sqrt{(a'-x')^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2}} \quad \ldots \quad (4)$$

Dieses Integral hat nach §13 eine ganz bestimmte Bedeutung, ~~ist~~ es ist das Potential einer Masse, welche die Oberfläche eines durch a, b, c ~~dem~~ mit gegebenen confocalen Ellypsoides mit der Dichtigkeit q' bedeckt. Diese Dichtigkeit ist definirt durch die Gleichung:

$$q\,dO = q'\,dO'$$

also:

$$q'\,dO' = \cos(N_i, x)\,dO$$

$\cos(N_i, x)\, dO$ ist die Projection des Oberflächenelementes dO auf die YZ Ebene, dieselbe ist positiv oder negativ je nach dem $\cos(N_i, x)$ positiv oder negativ ist, also je nachdem der Winkel (N_i, x) ein spitzer oder ein stumpfer ist. Ich kann also setzen

$$q'dO' = \cos(N_i, x)\, dO = \mp\, dy\, dz$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist in der Hälfte des Ellypsoides in welcher x positiv ist, und das untere in der Hälfte wo x negativ ist. –

In Folge dieser Transformation ist:

$$y = y'\frac{B}{B'} \qquad \text{also} \qquad dy = dy'\frac{B}{B'}$$

$$z = z'\frac{C}{C'} \qquad\qquad dz = dz'\frac{C}{C'}$$

so dass:

$$q'dO' = \mp\frac{BC}{B'C'}\, dy'dz'$$

wo die Zweideutigkeit nach derselben schon angegebenen Regel gehoben wird – man nimt das obere Zeichen, wenn $x'(+)$, das untere wenn $x'(-)$. –

Bezeichne ich mit N_i' die Normale des Elementes dO' am zweiten Ellypsoide, so ist:

$$\cos(N_i', x)\, dO = \mp dy'dz'.$$

wo das obere Zeichen für die Hälfte des Hülfsellypsoides zu gebrauchen ist, in welcher x' positiv ist, – das untere dagegen in der Hälfte der negativen x'. –

Die Vorzeichen dieser zwei Ausdrücke correspondiren derart dass ich setzen kann:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{BC}{B'C'} \int \frac{\cos(N_i', x)\, dO}{\sqrt{(a'-x')^2 + (b'-y')^2 + (c'-z')^2}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Führen wir jetzt das Potential einer Masse in die Rechnung ein, welche den ganzen Inhalt des Hülfsellypsoides mit gleichmässiger Dichtigkeit 1 erfüllt, bezogen auf einen Punkt $a'b'c'$. – Diese Punkt liegt nach vorangegangenen Betrachtungen auf der Oberfläche des gegebenen Ellypsoides ist, also bezüglich auf das Hülfsellypsoid ein innerer Punkt. – Dieses Potential, welches wir mit Ω' bezeichnen ist:

$$\Omega' = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{\sqrt{(a'-x')^2 + (b'-y')^2 + (c'-z')^2}} \quad \ldots \quad (6)$$

Das in (5) als Factor auftretende Integral ist nach Betrachtungen mit Hülfe des Green-schen Satzes $= \frac{\partial \Omega'}{\partial a'}$

Also ist:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial a'}$$

(7) .... Auf ähnlichem Wege ergeben sich auch:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b}=\frac{CA}{C'A'}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial b'}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial c}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial c'}$$

Diese Gleichungen drücken den Ivory-schen Satz aus; sie zeigen wie man die Componenten der Kraft, mit welcher eine in einem Ellypsoide mit gleichmässiger Dichtigkeit verbreitete Masse auf einen äusserhalb desselben gelegenen Punkt einwirkt, finden kann; wenn man die Componenten der Kraft berechnet hat, mit welcher ein mit dem ersteren confocales durch den erwähnten äusseren Punkt ~~gehender~~ gelegtes Ellypsoid, erfüllt mit Masse von gleichmässiger Dichtigkeit 1, auf einen inneren Punkt einwirkt. –

Nicht allein die Componenten der ausgeübten Kraft, sondern das Potential Ω selbst ist also bekannt, wenn nur $a'b'c'$ und $A'B'C'$ bestimmt sind. – Wie diese Bestimmung zu machen ist haben wir in §14 angedeutet. –

Die Ausdrücke (7) wollen wir jetzt einer ähnlichen Transformation unterwerfen, wie §13 ein Beispiel dafür liefert. – Wir setzen nämlich:

$$A_0' = \frac{2\pi}{A'^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{u}{A'^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A'^2}\right)\left(1+\frac{u}{B'^2}\right)\left(1+\frac{u}{C'^2}\right)}}$$

$$B_0' = \frac{2\pi}{B'^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{u}{B'^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A'^2}\right)\left(1+\frac{u}{B'^2}\right)\left(1+\frac{u}{C'^2}\right)}} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$C_0' = \frac{2\pi}{C'^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{u}{C'^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{}}$$

Diese Ausdrücke, welche im allgemeinen ellyptische Functionen sind reduziren sich, im Falle das, das Ellypsoid ein durch Rotation entstandenes ist, auf logarithmische und Kreisfunctionen. –

Mit Hülfe dieser Substitution wird:

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial a'} = -a'A_0'$$

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial b'} = -b'B_0'$$

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial c'} = -c'C_0'$$

Dies in (7) gesetzt ergeben sich in Folge der Relationen zwischen a, b, c und a', b', c':

$$
(9)\ldots\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\Omega}{\partial a} = -\dfrac{ABC}{A'B'C'}\cdot A_0'\,a \\[2ex]
\dfrac{\partial\Omega}{\partial b} = -\dfrac{A.B.C}{A'B'C'}\cdot B_0'\,b \\[2ex]
\dfrac{\partial\Omega}{\partial c} = -\dfrac{ABC}{A'B'C'}\cdot C_0'\,c
\end{cases}
$$

Man soll sich in diesen Gleichungen, ja nicht verrennen, und so wie ~~bei~~ im Falle dass a, b, c die Coordinaten eines inneren Punktes sind den Schluss ziehen, dass diese Componenten Constanten sind; denn A', B', C' hängen von den daselbst Werthen von a, b, c ab. —

§ 16

Dirichlet gab im 32ten Bande von Crelle's Journal eine höchst elegante Form des Potentials einer magnetisch gewordenen Eisenkugel an. — Wir fanden in § 14 $\frac{\partial\Omega}{\partial a} = -A_0 a$ etc., setzen wir da die Werthe von A_0, B_0, C_0 ein, und berücksichtigen den daselbst gefundenen Ausdruck für Ω_0, so folgt:

$$\Omega_i = \pi \int_0^\infty \frac{1 - \frac{a^2}{A^2+u} - \frac{b^2}{B^2+u} - \frac{c^2}{C^2+u}}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}} \cdot du$$

Dirichlet fand auch:

$$\Omega_a = \pi \int_{u=\sigma}^\infty \frac{1 - \frac{a^2}{A^2+u} - \frac{b^2}{B^2+u} - \frac{c^2}{C^2+u}}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A^2}\right)\left(1+\frac{u}{B^2}\right)\left(1+\frac{u}{C^2}\right)}} du$$

wo σ die einzige positive Wurzel folgender kubischen Gleichung ist:

$$\frac{a^2}{A^2+\sigma} + \frac{b^2}{B^2+\sigma} + \frac{c^2}{C^2+\sigma} = 1$$

Wir begnügen uns mit der Angabe dieses Resultates. –

§ 17.

Unter den Anwendungen, welche diese Betrachtungen über das Potential eines magnetisch ~~ge~~ gewordenen Eisenellypsoids haben können tritt uns vor allem die Frage nach dem Magn. Zustande eines Ellypsoids entgegen, welches unter der Einwirkung einer constanten magnetisirenden Kraft steht. – Wir wissen schon dass unter Einwirkung einer solchen Kraft das Ellypsoid gleichmässig magnetisirt sein muss. –

Es ist also:

$$V = D - Xa - Yb - Zc$$

wo X, Y, Z die Componenten der magnetisirenden Kraft, also Constanten sind; und auch:

$$\kappa\varphi = \delta + \alpha a + \beta b + \gamma c$$

wo α, β, γ die innerhalb des ganzen Eisenellypsoids Constanten auf die Volumeinheit bezogenen Magnetischen Momente bedeuten.

Es ist ferner auch die Gleichung erfüllt:

$$Q = -\left(\alpha\frac{\partial \Omega_i}{\partial a} + \beta\cdot\frac{\partial \Omega_i}{\partial b} + \gamma\frac{\partial \Omega_i}{\partial c}\right)$$

da ja Ω_i d. i. das Potential einer Magn. masse, welche das ganze Ellypsoid mit der gleichm. Dicht. 1 erfüllt, der von dieser Gleichung vorausgesetzten Bedingung (Ω_i eine Funct. 2ten Grades von a, b, c) genügt. –

Der Grundgleichung

(I) $$0 = V + Q + \varphi$$

wird man dann genügen können durch passende Bestimmung der Constanten – wenn man also setzt:

$$\delta - \kappa D = 0$$

$$\alpha = \frac{\kappa X}{1+\kappa A_0}$$

$$\beta = \frac{\kappa Y}{1+\kappa B_0}$$

$$\gamma = \frac{\kappa Z}{1+\kappa C_0}$$

Bei dieser Wahl der Constanten genügen wir auch der Grundgleichung:

$$Q = -\kappa \int \frac{dO}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{III})$$

Wir gelangen also in der That zum voraus bekannten Resultate, dass nämlich eine ~~gleichmässig~~ Ellypsoidförmige Eisenmasse unter dem Einflusse einer constanten magnetisirenden Kraft gleichmässig magnetisirt wird. — (A_0, B_0, C_0 sind in den am Abschn. §12, 48, angegeben) Die Richtung der magnetischen Intensität fällt aber in diesem Falle nicht unbedingt mit der Richtung der magnetisirenden Kraft zusammen, wie es bei der gleichmässig magnetisirten Kugel der Fall war; es wird das beim Ellypsoid nur geschehen können wenn die Constante magn. Kraft in der Richtung einer seiner Hauptaxen wirkt. — Nach einer in §2 abgeleiteten mit (10) bezeichneten

Gleichung, welche sich auf das Potential einer beliebig gestalteten gleichmässig magnetisirten Eisenmasse in Bezug auf einen äusseren Punkt bezieht, kann ich für das soeben behandelte Ellypsoid setzen:

$$Q_a = -\left(\frac{kX}{1+kA_0}\cdot\frac{\partial \Omega_a}{\partial a} + \frac{kY}{1+kB_0}\cdot\frac{\partial \Omega_a}{\partial b} + \frac{kZ}{1+kC_0}\cdot\frac{\partial \Omega_a}{\partial c}\right)$$

wo Ω_a das Potential einer Masse bedeutet, welche den ganzen inneren Raum des Ellypsoids mit constanter Dichtigkeit 1 erfüllt. –
Die für die Magn. Momente aufgestellten Ausdrücke zeigen dass dieselben proportional sind mit den Componenten der magnetisirenden Kraft. –

§18.

Nach der Poisson'schen Theorie kommt diese Eigenschaft nicht nur einem ~~gleichmässig magnetisirten~~ ~~Eisenkörper~~ Ellypsoid zu ~~sondern~~, welches unter dem Einflusse einer constanten magnetisirenden Kraft steht; – es ~~aber~~ lässt sich aus derselben folgern, dass bei einem beliebig gestalteten Körper, auf welchen eine beliebige magnetisirende Kraft wirkt, die Componenten der letzteren proportional sind

mit den Magn. Momenten. —
Es lässt sich diese Folgerung folgendermassen erklären. — Bei der magnetischen Einwirkung der erwähnten Art müssen nach der Poissonschen Theorie die Gleichungen I und III erfüllt werden; aus denselben ist ersichtlich, dass wenn V zu nV wird, dann auch φ n-mal so gross wird — und dann werden in Folge der Gleichungen II auch die magnetischen Momente n-mal so gross. — Also sind ~~in der That~~ niemals die Componenten der magn.tisirenden Kraft proportional mit den Magn. Momenten. —
Diese Folgerung der Poisson-schen Theorie, welche sich auf die 2te seiner Annahmen begründet, ist mit der Erfahrung in Wiederspruch. — Wenn sie richtig sein sollte, so müsste die magnetische Intensität auch proportional mit der magnetisirenden Kraft wachsen. — Es ergiebt sich aber experimentel dass die magnetische Intensität mit der magnetisirenden Kraft nicht proportional ist, jedenfalls muss sie aber eine Function der letzteren sein. —
Gesetzt man kennte diese Function; so würde

man die den Gleichungen I und III ~~entsprechenden Gleichungen~~ der Poissonschen Theorie, entsprechenden Gleichungen aufstellen können. – Dies that Kirchhoff, und legte seinen Betrachtungen gewisse Versuche zu Grunde, welche Weber mit einem Eisenstäbchen von kreisförmigem Querschnitt ausführte. – ~~Dieses~~ Ein solches Eisenstäbchen ist annäherungsweise als ein Ellypsoid zu betrachten, unter dem Einflusse einer constanten magnetisirenden Kraft wird dasselbe gleichmässig magnetisirt, und dies bietet eine Erleichterung zur Bestimmung der erwähnten Function. – Auf diese Betrachtungen, welche sich im 48ten Bande von Crelle's Journal befinden will ich nicht näher eingehen. –

Auf der Grundlage der Poisson-schen Theorie, welche auch wir bei unseren weiteren Betrachtungen als richtig annehmen wollen, untersuchte Neumann den magnetischen Zustand eines Rotationsellypsoides, welches unter dem Einflusse einer beliebigen magnetisirenden Kraft steht. – Er that dies mit Hülfe einer ähnlichen Entwickelung, wie die nach Kugelfunctionen. — Ohne jedoch auch auf diesen Gegenstand näher einzugehen, gebe ich nur an, dass N. die erwähnte Untersuchung in dem 37ten Bande von Crelle's Journal veröffentlichte. —

§19.

Die Aufgabe welche wir uns noch stellen wollen, ist die ~~den magnetischen Zustand~~ die magn. momente eines Ellypsoides zu berechnen, unter der Voraussetzung dass die magnetisirenden Kräfte von einem in endlicher Entfernung gelegenem Pole ~~Puncte~~ herrühren. — Durch diese Untersuchung ~~wird~~ dann auch die Einwirkung eines endlich entfernten, endlichen Magneten bekannt werden; da man diese als die Summe der Einwirkungen ansehen kann, welche die unendlich vielen Pole, aus welchen der Magnet zusammengesetzt gedacht wird, einzeln auf das Ellyps. ausüben. —

Um aber diese Aufgabe lösen zu können ist, uns die Kenntniss folgenden Satzes nothwendig:

Wenn eine beliebige Eisenmasse magnetisirt wird durch einen Pol (1); so ist ihr Potential in Bezug auf einen zweiten Pol (2), genau so gross, als das Potential derselben Eisenmasse, wenn sie durch den Pol (2) magnetisirt wird in Bezug auf den Pol (1). –

Beweis. Ich will die Grössen V, Q und φ mit V_1, Q_1, φ_1 bezeichnen, wenn auf die Eisenmasse der Pol (1) magnetisirend einwirkt; dagegen bezeichne ich sie mit V_2, Q_2, φ_2 wenn (2) magnetisirend wirkt. Ferner sollen f_1 und f_2 die ~~m~~ mg. Fluss.. mengen bedeuten, welche die Pole (1), resp. (2), enthalten; und es sei r_1 die Entfernung von (1) von einem variabeln Punkte a, b, c im Innern der Eisenmasse; r_2 dagegen die Entfernung des Poles (2) von demselben Punkte. –

Es ist dann

$$V_1 = \frac{f_1}{r_1} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{f_2}{r_2}$$

Auf ~~die mit~~ den durch (1) magnetisirten Körper angewendet sind also die Gleichungen (I) und (III),

$$\frac{f_1}{r_1} + Q_1 + \varphi_1 = 0$$

und

$$Q_1 = -\kappa \int \frac{dO}{r} \cdot \frac{d\varphi_1}{\partial N_1}$$

Die 2te dieser Gleichungen bestimmt das Potential der magnetisch gewordenen Eisenmasse in Bezug auf einen Punkt dessen Entfernung von dem variablen Oberflächenelemente dO gleich r ist, und in welchem die Menge 1 magnetisch. Fl. concentrirt ist. – Beziehen wir dieses Potential auf den Pol (2, in welchem die magn. Fl. menge f_2 enthalten ist; und bezeichnen dieses Potential mit Q_{12} so ist dasselbe:

$$Q_{12} = -k\int \frac{f_2}{r_2} dO \frac{d\varphi_1}{dN_i} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Wir bezeichnen ferner mit Q_{21} das Potential des durch (2, magnetisirten Eisenkörpers bezogen auf den Pol (1, , und wollen beweisen, dass:

$$Q_{12} = Q_{21}$$

Für den Fall dass der Körper durch (2, magnetisirt ist gestalten sich die Grundgleichungen I und III:

$$\frac{f_2}{r_2} + Q_2 + \varphi_2 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$Q_2 = -k\int \frac{dO'}{r} \cdot \frac{d\varphi_2}{dN_i} \quad \ldots \quad (3)$$

Es soll nun (2) in (1, gesetzt werden, dabei ist aber zu beachten, dass da in (1, $\frac{f_2}{r_2}$ auf das Pol (das Pol) Oberflächenelement dO bezogen ist, die statt die-dem eingeführten Potentiale sich auch auf dieses Element beziehen; führt man diese Substitution aus, so ist:

$$Q_{12} = k\int dO\,\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + k\int dO\,Q_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}$$

Und setzt man Q_2 aus (3) ein:

(4) ....
$$Q_{12} = k\int dO\,\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} - k^2 \iint \frac{dO\,dO'}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i}$$

Die Integrationen sind über die Oberfläche der Eisenkörper auszudehnen, was das 2^te^ derselben anbetrifft, so ist dieselbe 2mal nach derselben Fläche zu integriren. – r ist die Entfernung ~~bei~~ der Flächenelemente dO und dO'. –

Ganz analog verfahrend findet man:

(5) ....
$$Q_{21} = k\int dO'\,\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i} - k^2 \iint \frac{dO'\,dO}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}$$

Der Greensche Satz beweist daß:

$$\int dO'\,\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i} = \int dO\,\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}$$

und somit ist dann bewiesen, daß

$$Q_{12} = Q_{21}$$

§ 20.

Wir suchen noch die magn. Momente eines Eisenellypsoids auf welchen ein Pol magnetisirend wirkt der von ihm endlich entfernt ist. –
Wir betrachten zwei Pole (1) und (2), ~~beide die Magn. Flüss. m~~, es seien die Coordinaten von (1) a, b, c und es soll darin enthalten sein die m. Fl. m. 1 — der Pol (2) dagegen liegt ~~in der~~ unendlich weit entfernt. – Es seien X, Y, Z die Componenten der Kraft mit welcher der Pol (2) auf das Eisenellypsoid einwirkt – dann ist, wie wir in §17. angegeben haben:

$$Q_{21} = -\left(\frac{kX}{1+kA_0} \cdot \frac{\partial \Omega_a}{\partial a} + \frac{kY}{1+kB_0} \cdot \frac{\partial \Omega_a}{\partial b} + \frac{kZ}{1+kC_0} \cdot \frac{\partial \Omega_a}{\partial c} \right) \quad \ldots (1)$$

Bezeichne ich die Magnetischen Momente des ganzen Ellypsoides mit $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ (d.i. ~~nenn~~ ~~ich~~ verstehe ich unter diesen ~~Zei~~ Zeichen die Momente α, β, γ der Volumeinheit multipl. mit dem Volum) so ist, nach Betrachtungen die wir in § 1 dieses Abschnittes anstellten:

$$Q_{12} = -\left\{ (\alpha) X + (\beta) Y + (\gamma) Z \right\} \quad \ldots (2)$$

wo X, Y, Z dieselbe Bedeutung wie in (1) haben; da aber

$$Q_{12} = Q_{21}$$

sein muss, so ergeben sich:

$$(3) \quad \begin{cases} (\alpha) = \dfrac{k}{1+kA_0} \cdot \dfrac{\partial \Omega_a}{\partial a} \\[2ex] (\beta) = \dfrac{k}{1+kB_0} \cdot \dfrac{\partial \Omega_a}{\partial b} \\[2ex] (\gamma) = \dfrac{k}{1+kC_0} \cdot \dfrac{\partial \Omega_a}{\partial c} \end{cases}$$

IV. Magnetische Einwirkung durch electrischen Strömen. –

Wenn die magnetisirende Kraft, welche auf einen Eisenkörper einwirkt, ~~statt~~ nicht wie bei den bis jetzt betrachteten Fällen von Magnetpolen sondern von electrischen Strömen herrührt, so können wir direkt die ~~bisher~~ gewonnenen Resultate in Folge des Ampère-schen Satzes in den meisten Fällen ~~[illegible]~~ anwenden. – Zu allen Fällen nämlich, in welchen man durch die magnetisirende Stromescurve eine Fläche legen kann, welche durch den Eisenkörper nicht durchgeht; ist die Aufgabe auf Probleme zurückgeführt, die in dem vorangegangenen schon behandelt wurden. –

Einer speciellen Behandlung bedarfen nur die Fälle in welchen, keine Fläche mit der erwähnten Eigenschaft zu finden ist – solche Fälle sind ~~es sind deren zwei~~

1) wenn ~~der~~ ein ringförmiger Eisenkörper durch einen Strom umwunden wird und

2) wenn der Strom durch den Eisenkörper selbst geht. –

1. Der magnetische Zustand eines Eisenringes unter dem Einflusse eines ihn umschlingenden electrischen Stromes. –

In diesem Falle haben wie wir sehen werden die magnetisirenden Kräfte ein Potential, welches aber vieldeutig. – Es bestehen dann auch die im III Abschnitte abgeleiteten Grundgleichungen, auf ~~der~~ welche die erwähnte Eigenschaft von V von keinem Einflusse ist. –

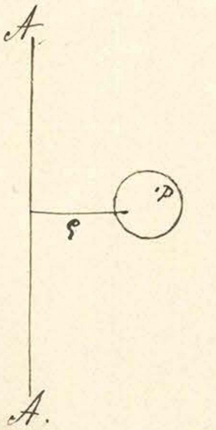
(I) .... $V + Q + \varphi = 0$

(III) .... $Q = -\int \frac{d\mathcal{O}}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$

II
$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ \beta &= \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial b} \\ \gamma &= \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{aligned} \right.$$

Da V vieldeutig ist, so muss auch φ vieldeutig sein; wie wir aber sehen werden sind Q, α, β, γ doch eindeutig.–

Es soll der zu betrachtende Ring ein Ring von kreisförmigem Querschnitt sein; welchen wir uns durch Rotation eines Kreises um die in dessen Ebene gelegene Axe AA entstanden ~~denken~~ vorstellen.–



Um diesen Ring denken wir uns in Ebenen welche durch AA hindurchgehen unendlich viele Kreisströme geschlungen, welche alle dieselbe Intensität i haben, und gleichweit von einander abstehen.– Es sei der Winkel zwischen den Ebenen je zweier oder benachbarter Kreisströme ε, ~~da~~ ~~Ebenen~~ dies ε ist unendlich klein.–

Es ist das eine Einrichtung, der wir in der Wirklichkeit sehr nahe kommen können, wenn wir

einen Eisenring mit ~~so~~ einem feinen mit Seide iso-
lirten Kupferdraht dicht umwinden. –
Unsere Aufgabe sei den Magnetischen Zustand des
Eisenringes unter diesen Verhältnissen zu unter-
suchen, – vor allem suchen wir die Kräfte
mit welchen das System von Kreisströmen einwirkt ~~auf~~
den Punkt P im inneren des Ringes, in welchem
die Menge 1 magn. Flüss. vorhanden ist. – Diese
Kräfte haben wie wir sehen werden ein Po-
tential, und zwar ist dieses V. –
Aus der unendlichen Zahl von Kreisströmen
können wir einige unbeachtet lassen, ohne
dadurch die von diesen ausgeübten Wirkungen
merklich zu verändern. – Wir schliessen so
~~al~~ die Kreisströme aus unseren Betrach-
tungen aus, welche die nächsten zu P sind. –
Für alle anderen Kreisströme substituiren wir
dem Ampère-schen Gesetze gemäss magn. Flüss.
Wir denken uns durch die Kreisströme Ebenen
gelegt, dann auf Ebenen welche auch durch
Axe gehen, und um die Winkelgrösse $\frac{\varepsilon}{2}$ von der ~~ersten~~ Ebenen der Kreisströme abstehen
oberhalb und unterhalb derselben liegen ~~magn.~~ Fl.
~~verbreitet~~ ~~substituirt~~. – Auf diesen Flächen denke wir uns

die Magn. Flüss. verbreitet. – Die Substitution müssen wir ~~da~~ so durchführen, dass wir die durch die Kreisströme gelegten Ebenen in unendlich viele unendlich kleine geschlossene Ströme zerlegen, und für jedes derselben ein magnetisches Mole cül substituiren, welches aus zwei zu dem Strome parallelen Ebenen besteht, deren gegenseitige ~~deren~~ Entfernung $\varrho\varepsilon$ ist, und ~~auf~~ welchen die Magn. Flüss. mit der Dichtigkeit $\frac{i}{\varrho\varepsilon}$ resp. $-\frac{i}{\varrho\varepsilon}$ verbreitet ist. – Wir bezeichnen ~~zeichneten~~ hier mit ϱ den senkrechten Abstand irgend ~~eines~~ Punktes einer ~~der~~ Stromebenen von der Rotationsaxe AA. –

Von den statt den Strömen auf diese Weise substituirten auf ~~Ebe~~ oberhalb und unterhalb derselben gelegenen Magn. Flüss. Massen, fallen je zwei zusammen; welche, da die Kreisströme die gleiche Intensität und die gleiche Richtung haben sollen, ihre Wirkungen gegenseitig aufheben. – Wirksam bleiben nur zwei zu P unendlich nahe gelegenen Flächen deren eine ~~die~~ positive, die andere aber negative Magn. Flüssigkeiten enthält. – Die Wirkung die wir zu untersuchen haben ist also die Wirkung dieser Flächen auf einen zwischen denen gelegenen

Punkt. – Die von diesen Flächen auf P ausgeübte Kraft hat die Richtung ihrer Normale, sie ist nach Folgerungen zu welchen wir im I Abschn. über das Oberflächenpotential gelangten:

$$-4\pi\frac{i}{\varrho\varepsilon}$$

Das ist also die Kraft die das ganze System von Kreisströmen auf P ausübt. –

Wir übergehen zum Potentiale dieser Kraft. –

Die Oberflächen gleichen Potentials stehen senkrecht zur Richtung der Kraft – bezeichnen wir den Winkel den die Ebene eines bel. Kreisstromes mit einer fixen durch Axe gelegten Ebene bildet mit ϑ; so ist in unserem Falle die Gleichung der Oberflächen gleichen Potentials $\vartheta = \text{const.}$ – Das Potential V der soeben betrachteten Kraft ist also einzig und allein ~~die~~ von ϑ abhängig – und die Kraft wird das neg. Diff. Quot. dieses Potentials nach der Normale sein müssen; d. i.:

$$= -\frac{dV}{\varrho\, d\vartheta}$$

wo $\varrho\, d\vartheta$ die Länge des ~~Zu~~ Zuwachses $d\vartheta$ bedeutet, welchen ϑ erleidet, während V um dV wächst. –

Es ist also:

$$4\pi\frac{i}{\varrho\varepsilon} = -\frac{dV}{\varrho\, d\vartheta}$$

$$V = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\vartheta + \text{Const.}$$

Wenn man die Ebene, von welcher der Winkel ϑ gerechnet wird, so wählt dass für $\vartheta = 0$ auch $V = 0$ so ist:

(1) .... $$V = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\vartheta$$

Die magnetisirende Kraft hat also in der That auch in diesem Falle ein Potential, dasselbe ist aber vieldeutig, da wir zu demselben Punkte zurückkommen, wenn wir ϑ um 2π, 4π, etc. wachsen lassen, dabei aber das Potential seinen Werth verändert. –

Führen wir statt ε die Zahl der Windungen n in die Rechnung ein, benützen also die Relation

$$n\varepsilon = 2\pi$$

so ist:

(2) .... $$V = -2ni\vartheta$$

Wir müssen den Grundgleichungen I u. III der Theorie des Magnetisirens von weichem Eisen, genüge leisten; dies können wir indem wir setzen:

$$\varphi = -V$$

und

$$Q = 0$$

Diese Werthe welche dem I genügen, genügen da in Folge derselben $\frac{\partial\varphi}{\partial N_i} = 0$ ist auch der Gl. III. – Sehen wir zu welcher, der diesen Bedingungen genügende Magn. Zustand des Eisenringes ist. – Da $\varphi = -V$, also ~~ein~~ allein von ϑ abhängig ist, so folgt dass die Magn. Axe des Ringes in jedem ihrer Punkte senkrecht steht auf die Ebenen der Kreisströme; die magn. Intensität in einem Punkte welcher von der Axe Act um ϱ absteht erhalten wir also, indem wir den Diff. Quot. von φ nach der Richtung seiner Normale in ϱ bilden, und diesen Diff. Quot. mit k multiplizieren, wie dies II erfordert – diese ist also:

$$= \frac{k\,2\pi i}{\varrho}$$

Was nun die Wirkung auf einen Punkt ~~in~~ ausserhalb des Eisenringes anbetrifft so wird diese in Folge von $Q = 0$ auch $= 0$ also:

$$Q_a = 0$$

Nichts desto weniger ist es gelungen den magnetischen Zustand des Eisenringes experimentell zu prüfen. –

Dies ist möglich durch Beobachtung des Inductionsstromes, welches in einer in der Nähe des Ringes befindlichen geschlossenen (L) Leitung dadurch erregt würde, dass ~~der umwindende Strom plötzlich unterbrochen wird der Eisenring~~ der magnetische Zustand des Eisenkörpers plötzlich aufgehoben wird. – Es kann dies dadurch bewirkt werden dass die umwindenden Kreisströme plötzlich unterbrochen werden. – ~~Der inducirten Leiter~~ Wie wir wissen ist die electromotorische Kraft des inducirten Stromes gleich dem Potentiale des inducirenden Eisenkörpers bezogen auf einen Strom, der die inducirte Leitung mit ~~einer~~ der Intensität 1 umfliesst. –

Das Potential eines Magnetpols enthaltend die Magn. Flüss. Menge ±1 auf eben beschrieb einen Strom ist die scheinbare Grösse desselben vom Pole aus gesehen. – Diese scheinbare Grösse ist eine zweideutige Grösse deren Änderung aber eindeutig ist. – Ich will einer der Fläche Stücke welche ~~ein~~ die durch einen Punkt x, y, z des Eisenringes und die Contour der inducirten Leitung (L) gehende Kegel aus der um x, y, z mit Rad. 1 beschriebenen Kugeloberfläche ausschneidet mit K bezeichnen. Und will ferner die magnetischen Momente der Volumeinheit in x, y, z α, β, γ nennen, dann ist das Potential dieser Volumeinheit in Bezug auf die mit Intens. 1 durchflossenen Leitung (L):

$$= \alpha \frac{\partial K}{\partial x} + \beta \frac{\partial K}{\partial y} + \gamma \frac{\partial K}{\partial z}$$

Das Potential des ganzen magnetischen Eisenringes bezogen auf diesen Strom ist hiernach folgendes über das ganze Volum des Eisenkörpers auszudehnende Integral:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial K}{\partial x} + \beta \frac{\partial K}{\partial y} + \gamma \frac{\partial K}{\partial z} \right)$$

dieses Integral ist wie wir schon erwähnt haben die Electromotorische Kraft des in (L) entstehenden Inductionsstromes, wenn der magnetische Zustand des Ringes plötzlich aufgehoben, oder plötzlich erregt wird. – Nennen wir diese Electromotorische Kraft E und benützen die Relationen $\alpha = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\beta = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ...etc. so wird:

$$E = \kappa \iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \right) \quad \ldots \quad (3)$$

Wenden wir auf dies Resultat den Green-schen Satz an; so ~~können wir~~ fällt das ~~sen~~ darin vorkommende $\Delta\varphi$ Raumglied fort, da ja ~~nach~~ den Erfordernissen unserer Theorie gemäss:

$$V = -\varphi$$

also

$$\Delta\varphi = 0$$

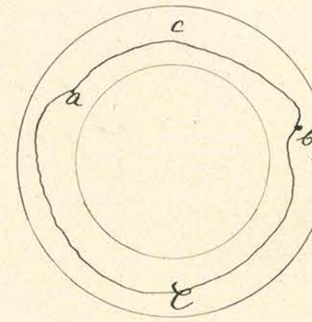
sein muss. – Es wird so:

$$(4) \ldots\ldots \quad \mathcal{E} = -k\int dO\, K \frac{d\varphi}{dN_i}$$

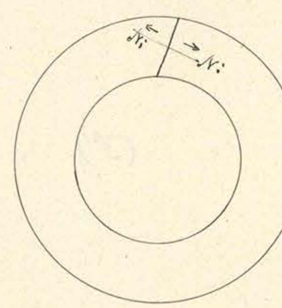
Wir haben hier den Greenschen Satz angewandt trotzdem dass wir wissen dass φ und K innerhalb des Eisenringes vieldeutige Functionen von x, y, z sind. – Diese Vieldeutigkeit hängt wesentlich damit zusammen dass der innere Raum des Eisenringes ein vielfach zusammenhängender Raum ist – wir werden diese Schwierigkeit dadurch aufzuheben suchen dass wir ~~ihn~~ den Raum in einen einfach zusammenhängenden umwandeln. –

Man versteht unter einem einfach zusammenhängenden Raum einen ~~Rau~~ solchen Raum, in welchem eine beliebige innerhalb desselben gezogene Linie, welche zwei innerhalb gelegene Punkte verbindet, in eine jede andere zwischen denselben Punkten innerhalb gezogene Linie ~~all~~ durch allmähliche Änderungen übergeführt werden kann, ohne dabei über ~~den Raum~~ ~~die Grenzen~~ den Raum hinausgereicht zu haben ~~sein~~. –

Ein vielfach zusammenhängender Raum ist dagegen ein solcher, bei welchem die soeben beschriebene Überführung nicht möglich ist ohne bei irgend einer Zwischenstufe aus demselben hinaus zu reichen.



Ein Ring ist ein vielfach zusammenhängender Raum, ~~wenn~~ denn wenn wir ~~können~~ die Linie acb in aCb überführen wollen; so kommen wir bei der allmähligen Überführung zu Linien welche theilweise ausserhalb des Ringes liegen. –

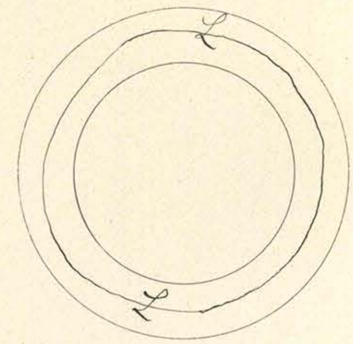


Mit dieser Eigenschaft des ringförmigen Körpers hängt die Vieldeutigkeit von φ und K zusammen; wir können aber den Raum zu einem einfach zusammenhängenden, und folglich auch φ und K zu eindeutigen Functionen von x ~~und~~ y z machen, wenn wir durch den Ring einen Querschnitt legen (wie es beistehende Fig. zeigt). –

Unter dieser Voraussetzung ist die Ableitung von (4), eine richtige, nur muss das Integral über die ganze Fläche des Eisenringes und somit auch auf die beiden Seiten des Querschnitts ausgedehnt werden. – Bei dem magnetischen Zustande des Ringes, wie wir denselben ableiteten ist $\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}=0$ für die ganze wirkliche Oberfläche des Ringes; so dass es gleichgültig ist ob wir sagen dass (4) über die ganze Oberfläche auszudehnen ist, oder ob wir sagen dass man dasselbe nur über die beiden Seiten des Querschnittes auszudehnen hat. – Auf den beiden Seiten des Querschnittes ist $\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$ gleich aber entgegengesetzt; nicht so ist es mit den Werthen von K. – Bezeichnen wir also mit K' den Werth von K auf der einen Seite, mit K'' dagegen den Werth desselben auf der anderen Seite des Querschnitts, so folgt:

(5) ..... $$\mathcal{E} = -k\int d\mathcal{O}\,\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}(K'-K'')$$

wo dann die Integration nur über die eine Seite des Querschnitts auszudehnen ist. – Der Werth von $K'-K''$ hängt von der ~~Art~~ Gestalt und Lage der inducirten Leitung ab. – Wenn die inducirte Leitung den Eisenring nicht umschlingt, und sich an denselben etwa wie in der Figur durch LL dargestellt ist anschmiegt so ist:



$$K' = K''$$

und in Folge dessen auch $E = 0$. –

Wenn L dabei den Eisenring einmal umschlingt so ist dagegen

$$K' - K'' = 4\pi$$

und bildet er zwei Windungen, so kann man ihn durch ~~es~~ continuirliche Änderungen in zwei Kreisströme überführen, in welchem Falle

$$K' - K'' = 8\pi$$

wird. – Bildet also der inducirte Leiter ν Windungen um den Eisenring, dann kann man denselben in ν Kreisströme allmählig überführen und es wird:

$$K' - K'' = \nu 4\pi$$

Demnach ist:

$$E = -k\nu 4\pi \int d\Theta \frac{\partial \varphi}{\partial N} \quad \ldots\ldots (6)$$

Bis jetzt blieb die Lage des Querschnitts ganz willkürlich, wir wollen jetzt denselben eine bestimmte Richtung geben, wir wollen nämlich annehmen, dass ihre Ebene durch die Axe AA gehe. – Nach den zu prüfenden theoretischen Schlüssen über den magn. Zustand des Eisenringes ist dann:

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{2\nu i}{\varrho}$$

Dieser Ausdruck welcher von ϑ unabhängig ist, zeigt uns auch dass es vollk. gleichgültig ist an welcher Stelle des Eisenringes wir den gedachten Querschnitt durchlegen. – Es ist somit

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{E} = -K\, 8\pi\nu n i \int \frac{dO}{\varrho}$$

wo ϱ wie früher die senkrechte Entfernung eines variablen des Querschnitts von der Axe AA bezeichnet. –
Das Integral $\int \frac{dO}{\varrho}$ lässt sich für den Fall dass der Querschnitt eine Kreisfläche ist leicht berechnen, von dieser speciellen Voraussetzung, welche wir zwar an die Spitze unserer Betrachtungen gestellt haben, haben wir gar keinen Gebrauch gemacht. –
(7) stellt also die Electromotorische Kraft des inducirten Leiters dar, welcher auch der Querschnitt des Eisenringes sei. –

Durch Messung dieser Grösse E wäre es nun möglich
unsere theoretischen Schlüsse über den magne-
tischen Zustand des Eisenringes zu prüfen, — es
stellt sich aber noch ein Hinderniss in den Weg
einer solchen Untersuchung. — Wie wir schon er-
wähnt haben, wird die plötzliche Änderung des
magnetischen Zustandes dadurch bewirkt dass
der Strom der die n-mal umwindende Leitung
umfliesst plötzlich erregt oder aufgehoben wird. —
Neben dem Eisenringe wirkt also auch noch das
System von Kreisströmen (n), auf die inducirte Lei-
tung (v) inducirend ein. — ~~Wie uns~~ Unseren
directen Messungen können will also nur die Summe der Electro-
motorischen Kraft des durch den Eisenring inducirten
Stromes + der electr. mot. Kr. des durch das System n
inducirten Stromes unterwerfen; ich will angeben
wie man auch diese letztere finden kann. —
Statt dem Systeme der n Kreisströme substi-
tuiren wir, in derselben weise wie wir es bereits gethan magn.
Flüssigk. — Durch diese Substitution haben wir
dann die Aufgabe zurückgeführt auf die schon
behandelte Aufgabe der Best. der Electromo-
torischen Kraft eines in dem Leiter L, durch

plötzliche Änderung der Magn. Zustände eines ringförmigen Körpers zurückgeführt. – Auch hier werden wir finden:

$$E' = \iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial K}{\partial x} + \beta \frac{\partial K}{\partial y} + \gamma \frac{\partial K}{\partial z} \right)$$

In diesem Falle ist die magnetische Intensität, welche die Richtung der Normalen der Kreisströmen hat:

$$= \frac{ni}{2\pi\varrho}$$

es werden daher

$$\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

sein, wenn:

$$\varphi = \frac{ni}{2\pi}\vartheta$$

ist. – Da φ hier die Rolle von ψ vertritt, so werden hier ganz dieselben Betrachtungen anstellen können, welche wir bei der Ableitung von E anstellten. Wir werden den Greenschen Satz anwenden nachdem wir die Vieldeutigkeit von K und φ durch einen durch den Ring und die Axe AA gelegten Querschnitt aufgehoben haben. – So ergiebt sich:

$$\mathcal{E}' = -2n\nu i\int\frac{dO}{\varrho} \quad \ldots\ldots (8)$$

Bezeichnen wir also jetzt mit $\mathcal{E}$ die ~~Summe der~~ gesammte electromotorische Kraft der gleichzeitig von dem Eisenringe und von dem n-mal umschlungenden ~~Ei~~ electr. Strom inducirten Ströme; so ist dieses $\mathcal{E}$ welches wir ~~sich unserer~~ durch directen Messungen bestimmen können:

$$\mathcal{E} = -\left(k + \frac{1}{4\pi}\right)8\pi\nu n i\int\frac{dO}{\varrho} \quad \ldots\ldots (9)$$

wo das Integral über einen Querschnitt des Eisenringes — welcher zugleich ein Querschnitt der sich fest anschmiegenden Kreisstromsystems ist, auszudehnen ist. —

2. Der magnetische Zustand eines Eisenkörpers unter dem Einflusse eines durch ihn fliessenden electrischen Stromes. —

§1. — In diesem Falle haben die magnetisirend einwirkenden Kräfte kein Potential — und somit können auch die Grundgleichungen I und III der Poisson-schen Theorie nicht angewendet werden. —

Bezeichnen wir mit a, b, c die ~~Coor~~ rechtw. Coordinaten eines Punktes des Eisenkörpers, über dessen Gestalt wir gar keine beschränkende Annahme machen wollen, und mit A, B, C die Componenten der auf den Eisenkörper ~~diesen Punkt~~ magnetisirend einwirkenden Kräfte in dem Punkte a, b, c. — Die magnetischen Momente α, β, γ der Volumeinheit in dem Punkte a, b, c ergeben sich in Folge schon angestellter Betrachtungen (III. Abschn. §5) aus den Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = k\left(A - \dfrac{\partial Q}{\partial a}\right) \\[2ex] \beta = k\left(B - \dfrac{\partial Q}{\partial b}\right) \\[2ex] \gamma = k\left(C - \dfrac{\partial Q}{\partial c}\right) \end{cases}$$

~~Wenn also~~ Es ist ferner:

$$(2) \ldots \quad Q = \iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

wo man über das Volumen des ganzen Eisenkörpers zu integriren hat; und α, β, γ die magn. mom. der Volumeinheit in (x, y, z), ferner ~~und~~ r die Entfernung von (x, y, z) und (a, b, c) bedeuten. — Bei dem im III Abschn. behandelten Falle, wo A, B, C die part. Diff. Quot. eines Potentials waren, haben wir Q in ein Oberflächen Potential transformirt, dasselbe werden wir auch hier, wenn auch nur auf Umwegen thun können. –

Wir nehmen an dass die ~~componenten~~ magnetisirende Kraft, deren Componenten A, B, C sind, von stationären Strömen herrühren, welche durch ~~einen~~ irgend Körper von drei Raumdimensionen fliessen. – Die Aufgabe, welche wir uns stellten ist dann nur ein specieller Fall dieses allgemeineren Falles. – Die schon genannten Kraftcomponenten ABC bezogen auf die Einheit magn. Flüssigk. (in welcher Bedeutung sie ja in den Gl. (1, vorkommen) können wir aus den Gesetzen über die Einwirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol ableiten. – Die Ausdrücke zu welchen wir so gelangen stellen wir durch Einführung gewisser Hülfsgrössen in vereinfachter Form dar. – Es seien:

$$\left.\begin{aligned} U &= \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot u \\ V &= \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot v \\ W &= \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot w \end{aligned}\right| \cdots (3)$$

Hierin bedeuten x, y, z ~~eine~~ die Coordinaten eines Punktes des Leitersystems, mithin $dx\,dy\,dz$ ein Raumelement desselben, r die Entfernung dieses Punktes x, y, z von dem Punkte a, b, c, auf welchen sich A, B, C beziehen — endlich u, v, w die Componenten der Strom~~intensität~~dichtigkeit in dem Punkte x, y, z. — u ist demnach die Menge positiver oder negativer Electricität, welche durch eine im ~~x~~ Punkte x, y, z senkrecht zur x-Axe gestellte der Einheit gleiche Fläche in der Zeiteinheit fliesst. Analog ist die Bedeutung von v und w. — Die Integration ist über das ganze Volum des Leitersystems auszudehnen. — Wenn U, V, W diese Bedeutung haben, so ist:

$$(4) \ldots\ldots \quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial V}{\partial c} - \dfrac{\partial W}{\partial b} \\[2ex] B = \dfrac{\partial W}{\partial a} - \dfrac{\partial U}{\partial c} \\[2ex] C = \dfrac{\partial U}{\partial b} - \dfrac{\partial V}{\partial a} \end{cases}$$

Differentiiren wir A, B, C der Reihe ~~mit~~ nach a, b, c, und addiren dann diese Diff. Quot. so erhalten wir:

$$(5) \ldots\ldots \quad \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0$$

In Folge dieser Gleichung gestaltet sich die Summe der partiellen Diff. Quot. von α, β, γ resp. nach a, b, c. (1) folgendermassen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} = -\kappa \Delta Q \quad \ldots \ldots (6)$$

Das Integral (2) transformiren wir in die Summe eines Oberflächen und eines Raum Integrals. — In diesem Falle, da ja α, β, γ keine Diff. Quot. sind können wir den Green-schen Satz zur Ausführung dieser Transformation nicht anwenden — wir können aber zu diesem Resultate durch partielle Integration gelangen. — (Als Beisp. einer solchen Transf. siehe die Ableitung des Greenschen Satzes). — So wird:

$$Q = -\overset{I}{\int \frac{dO}{r}\left(\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)\right)}$$
$$- \overset{II.}{\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)} \quad \ldots \ldots (7)$$

I ist über die ~~vol~~ Oberfläche, II über das Volum des Eisen Körpers auszudehnen. —

Hiegegen könnte man den Einwand machen dass ~~das Integr~~ die beiden Integrale I und II zwischen den Grenzen der Integration ∞ werden; dass dies aber nicht der Fall ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man ~~aus~~ die Betrachtungen mit Ausschluss einer unendlich kleinen um den Punkt (a, b, c) beschriebenen Kugel aus der Masse des Eisenkörpers anstellt, und dann zusieht wie viel zu dem Potentiale Q diese unendl. kleine Eisenkugel selbst zuträgt. – Führt Polarcoordinaten ein, deren Anfangspunkt (a, b, c) ist, so gelangt man zu dem Schluss dass auch der Erwähnte Beitrag unendlich klein ist. – (Eine derartige Betrachtung stellten wir im $\underline{\text{I}^{\text{ten}}}$ Abschnitte an).

Aus dem Integrale II, welches ein Raumpotential ist, folgt dass die Dichtigkeit im Punkte x, y, z

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

sei. – Da aber a, b, c ebenso gut wie x, y, z ein innerer Punkt sein soll so ist seine Dichtigkeit:

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}$$

wo dann natürlich α, β, γ die magn. Momente der Vol. Einheit in a, b, c bedeuten. –

Nach dem Satze

$$\Delta Q = -4\pi . \text{Dicht.}$$

ist also:

$$\Delta Q = -4\pi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial b} + \frac{\partial\gamma}{\partial c}\right) \quad \ldots (8)$$

Der Wiederspruch in welchem diese Gleichung mit (6) steht erfordert, dass:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial b} + \frac{\partial\gamma}{\partial c} = 0 \quad \ldots (9)$$

sei. – Vertauschen wir nun in (7) die Zeichen x, y, z mit den Zeichen a, b, c, so wird in diesem Ausdruck $\text{II} = 0$; führen wir dann noch statt der Grössen α, β, γ ihre in (1) dargestellten Werthe so ergiebt sich:

$$Q = -k\int\frac{dO}{r}\left(A.\cos(N_i,x) + B\cos(N_i,y) + C\cos(N_i,z)\right) + \int\frac{dO}{r}.\frac{\partial Q}{\partial N_i} \quad \ldots (10)$$

Zur Vereinfachung des zweiten Integrals benütze ich die Relation:

$$\frac{\partial Q}{\partial a}\cos N_i,x + \frac{\partial Q}{\partial b}\cos N_i,y + \frac{\partial Q}{\partial c}\cos N_i z = \frac{\partial Q}{\partial N_i}$$

(1) und (10) bilden die Grundgleichungen der verallgemeinerten Theorie des Magnetisirens von weichem Eisen; dieselben sind frei von der Voraus-

setzung, dass die magnetischen Momente proportional seien mit der magnetisirenden Kraft. — (10) dient dazu Q zu bestimmen, und führt somit zur Kentniss der Einwirkung des Magneten auf einen äüsseren sowohl als auf einen inneren Punkt, und (1) liefert dann die Werthe der Magn. Momente in jedem Punkte des Magneten. —

§2. Ich will noch an einige Relationen zwischen U, V, W, α, β, γ und A B C aufmerksam machen. —

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (3) bilden wir:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c} = -\iiint dx\,dy\,dz \left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

wo statt $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}$ etc. gesetzt wurde $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}$ etc.

Die Integration ist dabei auszudehnen über das ganze System der Leiter. —

Bis jetzt haben wir still schweigend angenommen dass das System der Leiter von homogenen Körper gebildet sei — wir wollen uns von dieser Beschränkung frei machen — und angenommen dass beliebig viele heterogene Leiter da sind, schreiben:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c} = -\sum \iiint dx\,dy\,dz \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

Wo die Integration über einen homogenen Leiter, und die Summation über die ganze Anzahl der verschiedenen Leiter auszudehnen ist – welche zu dem erwähnten Systeme angehören. – So wie früher Q kann ich jetzt dies Integral in die Summe zweier transformiren, deren eins sich auf das Volum, das andere auf die Oberfläche des Leitersystems bezieht. – Die Transformation giebt:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c} = \sum \left\{ \overset{\mathrm{I}}{\iint \frac{dO}{r} \left(u \cos N, x + v \cos N, y + w \cos N, z \right)} + \overset{\mathrm{II}}{\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)} \right\} \qquad (11)$$

Soll die Ströme wirklich ~~ein~~ stationäre sein, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Somit ist $\mathrm{II} = 0$.

Man kann nach einem Satz auch die Summe von I gleich 0 ist. – Es ist nämlich:

$$u \cos N_i x + v \cos N_i y + w \cos N_i z$$

die Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch das Oberflächenelement dO eines Leiters in den Leiter hineinfliesst; dividirt durch dO. – Fassen wir irgend einen homogenen Leiter des Systems in's Auge; so wissen wir dass durch seine freie Oberfläche keine Electricität fliesst, so dass das Integral I in Bezug auf jeden derselben nur über seine Trennungsflächen auszudehnen ist. –
Bilden wir aber die Summe so kommt jede dieser Trennungsflächen zweimal vor; aber die in beiden Fällen zu beachtenden Electricitätsmengen sind gleich und entgegengesetzt, so dass sie die Summe $= 0$ geben. – Somit haben wir also nachgewiesen dass auch $I = 0$ ist, und so folgt:

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c} = 0$$

Eine zweite wichtige Relation ergiebt sich, wenn wir auf Grund der Gleichungen (4) bilden:

$$\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial U}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial b^2}\right)$$

Oder wenn wir $\frac{\partial^2 W}{\partial c^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial c^2}$ zu der rechten Seite diese Gleichung addiren:

$$\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c}\right) - \Delta W$$

berücksichtigen wir aber (12) so ergiebt sich:

$$\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a} = -\Delta W$$

Bilden wir ~~mit Hülf~~ aus (3, die ΔW, so erhalten wir die Dichtigkeit der Massen auf welche sich das Potential W bezieht ~~an~~ im Punkte a, b, c gleich: $-\frac{\Delta W}{4\pi}$; also ist:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a} = 4\pi w \\ \text{und ebenso:}\quad &\frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = 4\pi u \\ &\frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c} = 4\pi v \end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

Vorausgesetzt dass die Stromintensität im Punkte a, b, c nicht = 0 ist, ~~in welchem Falle ja kein magnetisirenden Kräfte von ihr herrühren könnten~~, zeigen diese Gleichungen dass A, B, C keine partiellen Diff. Quotienten ~~eine~~ derselben Function von a, b, c nach a, b, c sind. –

~~Ganz auf demselben~~ Auf ganz ähnlichem Wege als der auf welchem wir die Relationen (13) ableiteten, gelangen wir auch zu folgenden:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial b} - \dfrac{\partial\beta}{\partial a} = 4\pi K w \\[2ex] \dfrac{\partial\beta}{\partial c} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial b} = 4\pi K u \\[2ex] \dfrac{\partial\gamma}{\partial a} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial c} = 4\pi K v \end{cases}$$

Wo α, β, γ die Magn. Momente der Volumeinheit in dem Punkte a, b, c und u, v, w die Componenten der Stromdichtigkeit in demselben Punkte bedeuten. – Vorausgesetzt dass diese letzteren von 0 verschiedene Werthe haben – können demnach auch α, β, γ keine part. Diff. Quot. derselben Function sein. –

__§3.__ Die Gleichungen (1) und (10) welche die Grundlage der verallgemeinerten Theorie bilden, wollen wir auf einen einfachen Fall anwenden. – Es sei der Stromleiter ein kreisförmiger Cylinder, dessen Länge wir als unendlich gross betrachten, in welchem sich aber ein Theil von weichem Eisen befindet dessen Länge l ist, und der durch zwei auf die Axe des Cylinders senkrechten Ebenen begrenzt ist. – Über die Beschaffenheit der anderen Theile des Leiters ~~soll~~ brauchen wir nichts näheres zu verfügen. – Durch dieses Leitersystem soll ein stationärer Strom von der Intensität i geleitet werden, wobei der Eisencylinder magnetisch wird. – Um jede andere Einwirkung als die des in der Richtung des Pfeiles wirkenden stat. Stromes zu vermeiden, muss darauf geachtet werden dass die Rückleitung überall in os Entfernung von dem Fe. Körper geführt werde. – Ich wähle die Axe des Cylinders, welche zugleicher Zeit die Richtung des Stromes ist zur Z Axe des rechtw. Coord. Systems, dann ist:

$$u = 0 \quad , \quad v = 0$$

und wenn R den Radius des Querschnittes des Cylinders bezeichnet:

$$w = \frac{i}{\pi R^2}$$

In Folge der Gleichungen (3) ist also:

$$U = 0 \quad , \quad V = 0$$

$$W = \frac{i}{\pi R^2} \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} \qquad \ldots\ldots (15)$$

Dies in (4) gesetzt, giebt:

$$A = -\frac{\partial W}{\partial b}\ , \quad B = \frac{\partial W}{\partial a}\ , \quad C = 0$$

Um also zur Kenntniss von A und B zu gelangen müssen wir noch W zu berechnen, das in 15 als Factor auftretende Integral ist das Potential ~~eine~~ von Massen welche den ganzen unendlich langen Cylinder mit der Dichtigk. 1 erfüllen, bezogen auf einen Punkt dessen Entferng von x, y, z durch r bezeichnet ist. – Das Integral ist auf die ∞ Länge des Cylinders ausgedehnt auch = ∞; diese ihre Eigenschaft rührt aber, wie wir zeigen werden nur von einer ∞ ~~Co~~ additiven Constante her. – Wir berechnen nun W auf folgendem indirecten Wege. – Es ist W jedenfalls eine Funktion ~~von~~ der Coordinaten a, b, c des Punktes auf welchen es bezogen ist. – Da aber der Strom ein stationärer und ~~der~~ Cylinder unendlich lang sein soll, so ist W für alle Werthe von c dasselbe, d.i. es ist von c unabhängig. – Da ferner in Bezug auf seine Axe in dem Cylinder alles symmetrisch ist, so wird W allein von ρ d.i. von der Entferng des betreffenden Punktes von der Axe abhängig sein.

Die Grösse ϱ ist definirt durch die Gleichung:

$$\varrho^2 = a^2 + b^2$$

In Folge dieser Eigenschaft von W ist:

$$\Delta W_{a,b,c} = \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dW}{d\varrho} \qquad {}^{+)}$$

Bedeuten a, b, c die Coordinaten eines innerhalb des Leiters gelegenen Punktes so ist aus (15)

$$\Delta_{abc} W = -4\pi w = -\frac{4i}{R^2}$$

Also:

$$\frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dW}{d\varrho} = -\frac{4i}{R^2}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$W = -\frac{i}{R^2}\varrho + D + E\log\varrho$$

Wo D und E zwei Constanten sind. –
Dieser Ausdruck von von W kann dazu dienen A und B zu berechnen. – Da aber diese Kraftcomponenten für $\varrho = 0$, nicht ∞ werden dürfen" so muss $E = 0$ sein, – es ist somit:

+) In diesem Falle ist nämlich:

$$\Delta_{a,b,c} W = \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial c^2}$$

Es ist aber $\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{dW}{d\varrho}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial a} = \frac{a}{\varrho}\cdot\frac{dW}{d\varrho}$ $\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dW}{d\varrho} - \frac{a^2}{\varrho^3}\cdot\frac{dW}{d\varrho} + \frac{a}{\varrho}\cdot\frac{d^2W}{d\varrho^2}\cdot\frac{a}{\varrho}$

und $\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial b^2} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dW}{d\varrho} - \frac{b^2}{\varrho^3}\cdot\frac{dW}{d\varrho} + \frac{b}{\varrho}\cdot\frac{d^2W}{d\varrho^2}\cdot\frac{b}{\varrho}$

die Summe giebt dann obigen Ausdruck. –

$$W = -\frac{i}{R^2}\varrho^2 + \mathfrak{D}$$

wo $\mathfrak{D}$ die erwähnte ∞ additive Constante ist. –

Es ~~ist somit~~: ergibt sich aus diesem Ausdruck

(16) $$\mathfrak{A} = \frac{2i}{R^2}b \quad , \quad \mathfrak{B} = -\frac{2i}{R^2}a \qquad \mathfrak{C} = 0$$

Diese Werthe haben wir in (10) zu setzen um Q zu bilden, dabei verschwindet das erste Integral, wie es ~~durch~~ folgende Betrachtungen zeigen: – Dieses Integral ist über die ganze Oberfläche des Fe körpers auszudehnen, ~~denn~~ diese ist zusammengesetzt aus der Mantelfläche desselben und aus seinen Endflächen. – Für jedes Element der Mantelfläche ist:

$$\cos N_i x : \cos N_i y = a : b$$

$$\cos N_i x \cdot b = \cos N_i y \cdot a$$

Also:

$$\mathfrak{A}\cos N_i x + \mathfrak{B}\cos N_i y + \mathfrak{C}\cos N_i z = \frac{2i}{R^2}b\cos N_i x - \frac{2i}{R^2}a\cos N_i y = 0$$

Dieselbe Summe ist auch in Bezug auf die Endflächen $= 0$, denn es ist $N_i z = N_i y = \frac{\pi}{2}$

Hiedurch vereinfacht sich (10), wie folgt:

(17) .... $$Q = k\int\frac{dO}{r}\cdot\frac{\partial Q}{\partial N_i}$$

Es ist das eine in Bezug auf Q lineär homogene Diff. Gleichung deren einzige Lösung

$$Q = 0$$

ist. – Demnach werden in (1) gesetzt:

$$\alpha = \kappa A \quad , \quad \beta = \kappa B \quad , \gamma = 0$$

„oder aber":

$$\alpha = \kappa \frac{2i}{R^2} b \quad , \quad \beta = -\kappa \frac{2i}{R^2} a \quad , \quad \gamma = 0 \quad \ldots (18)$$

Hieraus ziehen wir den Schluss dass die magnetische Axe in jedem Punkte des Eisencylinders senkrecht steht auf die Ebene, welche durch die Axe des Cylinders und diesem Punkte gelegt ist. – Die magnetische Intensität ist ferner in demselben Punkte:

$$= \kappa \frac{2i}{R^2} \varrho$$

Also hängt diese nur von der senkrechten Entfernung des Punktes von der Cylinderaxe ab, sie ist proportional mit dieser Entfernung, ist für Punkte die in der Axe selbst liegen = 0 und erreicht ihr Maximum in der ~~Nähe der~~ Oberfläche. – Die Kräfte, welche dieser Fe. Körper nach aussen –

hin ausübt sind $= 0$; denn ~~ist~~ ~~sind a, b, c~~ ~~die Coordinaten einer ausserhalb der Ea(?)~~ es besteht nämlich (die Gl. (17), auch in dem Falle, ~~das~~ wenn der Anfangspunkt von r in einen ausserhalb gelegenen Punkt verlegt wird; und auch in diesem Falle ist die einzige Lösung dieser Gleichung:

$$Q_a = 0$$

§4. So wie wir es bei den Betrachtungen über den Eisenring thaten, werden wir auch hier den magn. Zustand unseres Eisencylinders experimentell prüfen können. – Wir thun dies ~~mit~~ durch Messung der electromotorischen Kraft der inducirt. Ström, welche in der Leitung, deren einen Theil der Eisencyl. selbst bildet dadurch erregt werden, dass der magn. Zust. desselben plötzlich aufgehoben oder erregt wird. –

Es muss ein Satz über Inductionsströme, welche in einem nach 3 Dimensionen ausgebildeten Leiter erregt werden, vorangeschickt werden. – Derselbe ist eine Folge des Gesetzes der Induc. Str. in linearen Leitern. –

Denken wir uns einen Magneten, in welchem

die Magn. Momente α, β, γ der Volumeneinheit in
dem Punkte a, b, c ~~sich~~ sich mit der Zeit t
ändern, also ~~sin~~ Functionen derselben sind;
und denken wir uns jene einen in sich zu-
rückkehrenden räumlichen Leiter, von dem
der Magnet einen Theil ausmacht oder auch nicht;
so werden auf die ~~Mengen~~ ~~Ele~~ Electrischen Flüss.
welche sich in ~~dem~~ einem Punkte x, y, z dieses Leiters
befinden gewisse Kräfte ausgeübt, wenn sich
α, β, γ mit der Zeit ändern. — Die Kräfte
~~sind auf~~, welche in diesem Falle auf die
pos. elect. Flüssigkeiten in x, y, z wirken; sind
gleich aber entgegengesetzt den Kräften welche
auf die daselbst befindlichen neg. electr. Flüss.
ausgeübt werden — sie bewirken also eine Ver-
schiebung der electr. Fluss. d. i. die Induction. —
Es seien X, Y, Z die Componenten der Kraft, welche
auf die Einheit pos. Elect. in x, y, z wirkt d. i. st
die negativen Componenten der Kr. welche auf die
1heit neg. Elect. in x, y, z wirkt. —
X, Y, Z, welche man auch die Componenten
der in der Längeneinheit des Leiters wirksamen inducirten Electromo-
torischen Kraft nennen könnte, werden, wie

ich es nur angeben will, durch folgende Ausdrücke bestimmt:

(19)
$$\begin{cases} X = \dfrac{\partial B}{\partial z} - \dfrac{\partial \Gamma}{\partial y} \\ Y = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial z} \\ Z = \dfrac{\partial A}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial x} \end{cases}$$

wo A, B, Γ durch folgende Integrale, die über das ganze Volum des Magnetes auszudehnen sind, definirt werden:

(20)
$$\begin{cases} A = \iiint \dfrac{da\,db\,dc}{r} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \\ B = \iiint \dfrac{da\,db\,dc}{r} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial t} \\ \Gamma = \iiint \dfrac{da\,db\,dc}{r} \cdot \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} \end{cases}$$

worin r die Entfernung des Punktes a, b, c von dem Punkte x, y, z auf welchen sich X, Y, Z beziehen, bedeutet. –

§ 5. Diese ~~Aus~~ Ausdrücke werden wir zur Prüfung der in § 3 abgeleiteten Schlüsse anwenden. – In diesem Falle ist die Bewegung der Electr. theilchen nur in der Richtung der Axe des Cylinders, also in der Richtung der Z Achse möglich. – Demnach stellt auch Z die ganze in dem Punkte x, y, z auf die Einh. Electr. Flu. wirksame electromotorische Kraft dar. – Diese Kraft Z ist für verschiedene Punkte eines Querschnittes verschieden gross; die electromot. Kraft ist von ihrem mittleren Werthe abhängig. – Es ist die electr. mot. Kraft in der Längeneinheit

$$=\frac{1}{\pi R^2}\iint dx\,dy\,Z$$

wo die Integration über den Querschnitt des Leiters ausgedehnt werden soll. –

Die in der ganzen Länge des Leiters zur Zeit t inducirte electromotorische Kraft ist also:

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cdot \frac{1}{\pi R^2}\iint dx\,dy\,Z$$

Die electromotorische Kraft des inducirten Stromes welcher beim ganzen Verschwinden der Magn. Wirkung des Eisencylinders erregt wird, erhalten wir durch Multiplication mit dt, und Integration nach t zwischen beliebigen Grenzen, welche über die Zeitdauer dieses inducirten Stromes hinausreichen. – Es ist somit:

$$\mathcal{E} = \int dt \int dz \frac{1}{\pi R^2} \iint dx\, dy\, Z$$

Diesen Ausdruck will ich ordentlicher schreiben wie folgt:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi R^2} \int dt \iiint dx\, dy\, dz \,.\, Z$$

(Das 3fache Integr. ist über das Volum des ganzen Leiters auszudehnen). –

Setzt man hierin den Werth von Z, wie er sich aus den Gleichungen (19) und (20) ergiebt, so wird:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi R^2} \iiint da\, db\, dc \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial b} \iiint \frac{dx\, dy\, dz}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial a} \iiint \frac{dx\, dy\, dz}{r} \right\}$$

Die Integration in Bezug auf a, b, c ist über das Volum des Eisencylinders, die Integration nach x, y, z dagegen über das Volum des unendl. langen Leiters auszudehnen. Nach Betrachtungen die wir in § 3 anstellten ergab sich:

$$\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} = -\pi\varrho^2 + \text{Const.}$$

wo:
$$\varrho^2 = a^2 + b^2$$

und $\text{Const.} = \infty$ ist. –

Somit ergiebt sich:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{R^2}\iiint da\,db\,dc\,(\alpha b - \beta a)$$

Setzen wir dann aus (18) die Werthe α und β ein:

$$\mathcal{E} = -\frac{4ki}{R^4}\iiint da\,db\,dc\,\varrho^2$$

Wenn ich dann die Länge des Eisencylinders mit l bezeichne, so wird:

$$\mathcal{E} = 2\pi k i l$$

Ein merkwürdiger Schluss, welcher zeigt dass die ~~axialen~~ inducirte electromotorische Kraft unabhängig ist von dem Radius des Cylinders, aber proportional mit der ~~dann~~ Länge derselben, ferner mit der Intensität des Stromes der den magn. Zustand des Eisencylinders erregt, und ~~ferner~~ schliesslich auch noch proportional mit der Constante k. –

V. Vereinfachung der Poisson-schen Theorie des Magnetisirens, durch die Annahme, dass k unendlich gross sei. –

§1.

Wir wollen in diesem Abschnitte Fälle betrachten, in welchen die Poissonschen Grundgleichungen richtig sind; also den Fall, dass die magnetisirende Kraft von einem durch den Eisenkörper selbst fliessenden elect. Strom herrührt ausschliessen. – In den genannten Grundgleichungen I, II, III spielt die Constante k eine wesentliche Rolle; ihre Bestimmung auf experimentellem Wege (welche auf einem Wege wie wir ihn am Schluss des vorigen Abschnittes angegeben haben ausgeführt werden könnte) liefert sehr schwankende Resultate. – Es ist das eine Folge der Abweichung der Experimente von der Poissonschen Theorie; es ergiebt sich nämlich der Werth von k kleiner wenn man zu seiner Bestimmung Ströme von grosser Intensität anwendet, dagegen grösser, wenn die Intensität der angew. Ströme eine kleinere ist. — ~~Nach g~~ Weber fand nach zwey Experimenten die er an einem Eisenstäbchen anstellte, bei den intensivsten angewandten Strömen $k = 5$, und bei den schwächsten $k = 25$. —

Aus der Gleichung III der Poissonschen Theorie sieht man dass k eine reine Zahl ist, welche unabhängig welche unabhängig ist von den Einheiten mit welchen die ~~von der eingeführten Längeneinheit und von der Gattung der Körper ist und Q ist~~. — anderen in dieser Gleichung vorkommenden Grössen gemessen werden. —

Ich will nun zeigen, dass man ~~keine~~ in vielen Fällen $k = \infty$ setzen kann, ohne dadurch einen sehr grossen Fehler zu begehen. —

Vor allem ist dies bei der magnetisirten Eisenkugel der Fall. —

Das Potential V der äusseren magnetisirenden Kräfte ist ~~in~~ bei dieser Aufgabe in Kug. Functionen zu entwickeln. — Also zu setzen:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots$$

dann ergiebt sich:

$$-k\varphi = V_0 + \frac{k}{1+\frac{4\pi}{3}k} V_1 + \frac{k}{1+\frac{8\pi}{5}k} V_2 + \ldots\ldots + \frac{k}{1+\frac{4n\pi}{2n+1}k} V_n$$

oder:

$$-k\varphi = V_0 + \frac{1}{\frac{1}{k}+\frac{4\pi}{3}} V_1 + \ldots\ldots + \frac{1}{\frac{1}{k}+\frac{4n\pi}{2n+1}} V_n$$

Setzen wir hierin den kleinsten aus den Experimenten sich ergebenden Werth von k also $k=5$ ein; so sehen wir ~~dann~~ schon dann ein, dass der Fehler den wir dadurch begehen, dass wir die mit k behafteten Glieder vernachlässigen sehr klein ist. – Mit einem Worte wir werden annähernd richtige Schlüsse über den magnetischen Zustand einer magnetisirten Eisenkugel erhalten können wenn wir $k=\infty$ setzen. –

Dasselbe werden wir auch in Bezug auf anders gestaltete Eisenkörper sagen können, deren Dimensionen aber nach den drei Richtungen von gleicher Ordnung sein müssen, und deren Gestalt nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweichen darf. – So werden wir z. B. bei den Betrachtungen über einen ringförmigen Körper k <u>nicht</u> $=\infty$ setzen können. –

Unter der Voraussetzung, dass $k=\infty$ gesetzt werden kann, vereinfachen sich die Poissonschen Endgleichungen wesentlich. –

Ist $k=\infty$ so muss der Gleichung ~~$d\varphi$~~ III gemäss $\frac{d\varphi}{dN_i}$ unendlich klein sein, widrigen Falls müsste ja $Q=\infty$ gesetzt werden; wenn nun $\frac{d\varphi}{dN_i}=0$

wäre so müsste φ = const. auf der Oberfläche sein, in diesem Falle also, in welchem $\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$ unendlich klein ist, kann auch φ nur unendlich wenig von einer Constante verschieden sein, so dass die Poissonsche Grundgleichung I, hier ersetzt wird durch:

$$V + Q = \text{Const.} \quad \ldots \quad \mathrm{I}$$

Ich definire jetzt eine Function ψ welche im ganzen Inneren des ~~Leiters~~ Eisenkörpers der Gleichung genügt:

$$\Delta\psi = 0$$

und für welche an der Oberfläche:

$$\frac{\partial\psi}{\partial N_i} = k\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$$

ist; hierdurch ist dann ψ bis auf eine additive Constante bestimmt; es ergiebt sich nämlich $k\varphi = \psi$ + der erwähnten Constante. – Es werden demnach die Poissonschen Grundgleichungen II und III

$$\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial a}, \quad \beta = \frac{\partial\psi}{\partial b}, \quad \gamma = \frac{\partial\psi}{\partial c} \quad \ldots \quad \mathrm{II}$$

und:

$$Q = -\int\frac{d\omega}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N_i} \quad \ldots \quad \mathrm{III}$$

Es ist ψ das Potential von Massen die auf der Oberfläche oder ausserhalb der Eisen~~ringes~~ körper liegen, es wird demnach nach einer im I Abschn. (§5 Seite 31) gemachten Bemerkung:

(IV) $$\int dO \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial N_i} = 0$$

sein. – Aus dieser Gleichung ~~ergiebt sich~~ kann Ψ aus der Gleichung III Q berechnet werden, und so wird auch die in I vorkommende Constante bestimmt werden können. –
Fasse ich die Gleichungen IV und III in's Auge so zeigt sich, dass Q das Potential von Massen ist, die auf der Oberfläche des Eisenkörpers verbreitet sind, und deren Summe = 0 ist. –
Die Bedeutung der Gleichung I ist also ganz dieselbe, als die der Gleichung zu welcher die ~~Bestim~~ Aufgabe der Vertheilung der Electricität in einem Leiter führt: – Ganz auf dieselbe Art wie da wird es dann möglich sein das Potential Q ~~für~~ bezogen auf irgend einen äusseren Punkt zu berechnen. –
Die Aufgabe der ~~Theo~~ Theorie des Magnetismus hat hiebei noch eine Operation durchzuführen,

welche in der Theorie der Electricität kein Analogon hat, es ist dass die Bestimmung der magnetischen Momente α, β, γ, welche die Berechnung der Function φ erfordert und in manchen Fällen zu bedeutenden math. Schwierigkeiten führt. –

§2.

Aus dieser Analogie welche zwischen den Aufgaben der Vertheilung der Electricität, und der Verth. der Magnetismus besteht, wenn man $k = \infty$ setzt; lassen sich merkwürdige Schlüsse über die Vertheilung des Magnetismus in Hohlkörpern ziehen; welche eben so weit richtig sind, als man $k = \infty$ setzen darf. –

Gesetzt es wären die Einwirkung eines electrischen Leiters, auf welchen von aussen Kräfte einwirken vollkommen bekannt; so kann man ein Stück des Inneren der Leiter ausschliessen d.h. aus demselben einen Hohlkörper machen, ohne dass dadurch etwas an den Schlüssen über die genannte Einwirkung geändert werden müsste. –

Es wird nämlich dadurch an dem Gleichgewichtszustande der Electricität nichts geändert, es wird ~~das Potential der Gesammtmenge~~ das Gesammtpotential in jedem Punkte der Leiter dieselbe Constante, und die ~~Summe~~ Gesammtmenge der Electricität = 0 bleiben. – Hieraus folgt: 1) dass der hohle Körper sich nach aussen hin gerade so verhält wie der volle Körper, und 2) dass auf Punkte im Inneren der Höhlung keine electrischen Kräfte ausgeübt werden. – Für einen vollen Eisenkörper, dessen Gestalt es möglich macht $k = \infty$ zu setzen, ohne zu grosse Fehler zu begehen, kann man dieselbe Betrachtung ausführen. – Es ergiebt sich so dass 1) der hohle Eisenkörper nach aussen gerade dieselben Kräfte ausübt wie ~~ein~~ der volle Körper, und 2) dass derselbe auf Punkte in seiner Höhlung keine magnetisirende Wirkung hat. –

Eine wesentliche Bedingung dieser Schlüsse welche aber nur den magnetisirten nicht aber den electrisirten Körper zukommt, ist die, dass die Dicke der Schale eine grösse derselben

Ordnung sei, wie die zwei andern Dimensionen der Hohlkörper. — Man kann sich davon überzeugen, dass je geringer die Dicke der Kugelschale, der Fehler um so grösser ist der begangen wird indem man $k=\infty$ setzt. —

§ 3. —

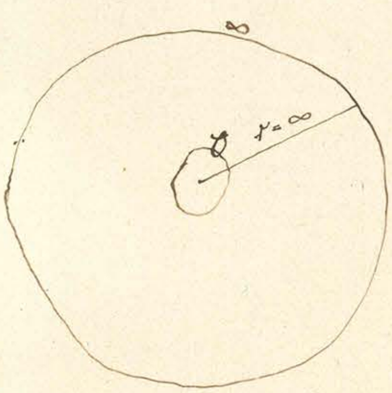
Diese vereinfachte Theorie wollen wir jetzt zur Untersuchung der Wirkung anwenden, welche ein hohler Eisenkörper, in dessen Höhlung magnetische Pole liegen, ~~deren~~ die die Summe $=0$ magnetischer Flüssigkeit enthalten, (also etwa einem wirklichen Magneten angehören), auf ausserhalb sowohl als auf innerhalb seiner Höhlung gelegene Punkte ausübt. — Wir werden sehen dass der gedachte Hohlkörper auf äussere Punkte keine Kräfte ausübt, dass sich also die Kräfte welche von den Magnetpolen und die Kräfte welche von der Körperschale herrühren sich aufheben. — Um zu diesem Resultate zu gelangen bedarfen wir folgenden Hülfsatzes:

Wenn innerhalb einer geschlossenen Oberfläche O sich Massen befinden, deren Summe $=0$ ist, und wenn diese Massen so angeordnet sind, dass das Potential auf der Oberfläche O einen constanten Werth annimmt; so muss dieser constante Werth $=0$, und auch das Potential im ganzen unendlichen Raume $=0$ sein. –

Ich erinnere an den bereits schon erwähnten Satz der I Abth. §5., nach welchem, wenn U das Potential von ausserhalb eines begrenzten Raumes gelegenen Massen ist, dann das über die Oberfläche des begrenzt. Raumes ausgedehnte Integral:

(1) $$\int dO \cdot \frac{\partial U}{\partial N_i} = 0$$

ist. – Diesen Satz will ich auf den Hohlraum anwenden welcher ~~zwischen~~ durch die gedachte Oberfläche O, und einer in der Unendlichkeit gelegenen Fläche begrenzt ist. – Die Massen liegen innerhalb O also ausserhalb dieses ∞ begrenzten Raumes.



Verstehe ich unter U das Potential der ~~in~~ innerhalb von O gelegenen Massen; so kann ich den Satz (1) anwenden, habe aber das Integral 1) über die Oberfläche O, dann 2) über die ∞ Oberfl. auszudehnen – bezeichne ich ein Element dieser letzteren mit dO', während ein Element des ersteren das Zeichen dO behält; so kann ich U in die Summe zweier Integrale zerlegen, und somit schreiben:

$$0 = \int_{I} dO \frac{\partial U}{\partial N_i} + \int_{II} dO' \frac{\partial U}{\partial N_i} \quad \ldots \quad (2,$$

Ist r der Radius vector der ∞ Fläche so kann ich in II setzen

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Wenn diese Fläche eine Kugel oder wenigstens eine von dieser nicht zu sehr verschiedene Figur ist, so wird $r = \infty$ sein. –

Entwickelt man U nach absteigenden Potenzen von r, so ergiebt sich für U eine Reihe deren erstes Glied $= \frac{M}{r}$ ist, wo M die Summe der Massen ist, von welchen das Potential U herrührt. – Wie wir sehen werden ist nur dieses erste Glied zu berücksichtigen. – Es ist nämlich:

$$dO' = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega$$

setze ich für

$$U = \frac{M}{r} + \text{u. s. w.}$$

also in II:

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} = \frac{M}{r^2} + \text{u. s. w.}$$

so sehe dass das Glied $\frac{M}{r}$ der Reihenentwickelung etwas endliches zum Werthe von U beiträgt, während die nächstfolgenden Glieder nur unendlich kleine Größen beitragen – also dieselben vernachlässigt werden können. – Wenn man nun die Integration von II ausführt, so ergiebt sich:

$$II = 4\pi M$$

also:

$$(3) \quad \ldots \quad 0 = \int dO \frac{\partial U}{\partial N_i} + 4\pi M$$

somit:

$$(4) \ldots \quad \int dO \frac{\partial U}{\partial N_i} = -4\pi M$$

Wendet man nun auf denselben zwischen der Oberfläche O und der unendlichen Kugelfläche gelegenen Hohlraum, den Green-schen Satz an, indem man beide innerhalb desselben eindeutige Functionen = U setzt, so ergiebt sich:

über das Volum des Hohlraums. Über beide Oberfl. des Hohlraums.

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right) = -\int dO\, U \frac{\partial U}{\partial N_i}$$

da ja $\Delta_{xyz} U = 0$ ist:

Oder aber:

$$= -\int^{\text{über die Oberf. }O} dO\, U \frac{\partial U}{\partial N_i} - \int^{\text{über die } \infty \text{ Oberf.}} dO'\, U \frac{\partial U}{\partial N_i}$$

entwickelt man in dem 2ten dieser Integrale U in derselben weise wie früher, so ergiebt das ganze Integral = unendlich klein — wir werden daher dasselbe gegen das erstere vernachlässigen. —
Wenn nun die in unserem Satze vorausgesetzte Bedingung, dass $\overline{U}$ = const. ist, in Betracht gezogen wird, so ergiebt sich:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right) = -\overline{U}\int dO \frac{\partial U}{\partial N_i}$$

setzen wir hiefür den Werth aus (4_1) ein, so ist:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\qquad\qquad\right) = 4\pi M \overline{U}$$

da aber nach der zweiten Bedingung des Satzes $M = 0$ sein soll, so folgt dass:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right) = 0$$

ist, was offenbar nur möglich ist, wenn

im ganzen unendlichen Raume:

$$U = \text{const}$$

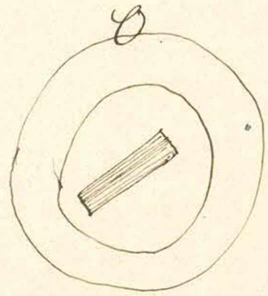
ist; und hiermit ist der zu beweisende Satz bewiesen; denn damit $U = \text{const}$ sein soll, muss es im ganzen unendlichen Raume $= 0$ sein, da es ja in der Unendlichkeit diesen Werth annimmt. – Also

$$U = 0$$

und auch

$$\overline{U} = 0$$

Wir wenden nun diesen Satz an auf einen Hohlkörper von weichem Eisen, in dessen Höhlung sich ein wirkl. Magnet befindet, so dass wirklich $M = 0$ ist. –



Ich nenne O die äussere Fläche des Hohlkörpers, dann sind die Bedingungen des soeben bewiesenen Hilfsatzes wirklich erfüllt. – Es ist nämlich dann $M = 0$ (M zusammengesetzt aus den magn. Flüssigkeiten des Magneten und des Hohlkörpers); ferner nach der vereinfachten Poissonschen Theorie auf der Oberfläche O

$$V + Q = \text{const}.$$

Also, dann was wir ~~für~~ im Hilfsatze $\overline{U}$ nannten

$$\overline{U} = \text{const}. –$$

es ist also auf der Oberfläche und im ganzen unendlichen Raume:

$$V+Q=0$$

der gedachte Hohlkörper übt also auf äussere Punkte keine Kraft aus. –

Die Gleichung $V+Q=0$ oder auch $U=0$ gilt sowohl für ausserhalb des ~~Kugel~~ Hohlkörpers als für innerhalb desselben gelegene Punkte. –

Für Punkte der Oberfläche O gilt also:

$$\frac{\partial U}{\partial N_i}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial N_a}=0$$

d. i.

$$\frac{\partial U}{\partial N_i}+\frac{\partial U}{\partial N_a}=0$$

Also folgt dass auf der Oberfläche O nichts von den Massen liegt deren Potential U ist. –

Dieses Potential ist aber aus zwei Theilen nämlich aus Q und V zusammengesetzt, ~~somit~~ da also von den Massen deren Pot. V ist nichts auf O liegt, so folgt dass auch von den Massen deren Pot. Q ist nichts auf derselben Oberfläche verbreitet ist. –

Und hieraus kommen wir zur merkwürdigen Folgerung, dass man die Oberfläche O beliebig ändern kann, ohne dadurch die Vertheilung der magn. Fluss. in dem gedachten Hohlkörper zu beeinflussen. –

Diese Schlüsse welche in Beziehung auf die Vertheilung der Electricität vollkommen strenge sind; können bezüglich der Verth. des Magnetismus nur als annähernde Resultate betrachtet werden, welche eben so weit richtig sind als es erlaubt sein kann $k = \infty$ anzunehmen. –

VI. Analogie des allgemeinen Problems der Vertheilung des Magnetismus in einem Eisenkörper, mit einer Aufgabe über Vertheilung der Electricität in einem Leiter. –

Ist V das gegebene Potential ausserhalb des Eisenkörpers gelegener Massen, so sind die Grundgleichungen von Poisson:

$$(I) \quad \ldots \quad 0 = V + Q + \varphi$$

und:

$$(III) \quad Q = -k\int \frac{d\Omega}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$$

Also ist Q das Potential von Massen die auf der Oberfläche des Eisenkörpers mit der Dichtigkeit

$k\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$ verbreitet sind. — Daraus folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial N_i} + \frac{\partial Q}{\partial N_a} = 4\pi k \frac{\partial\varphi}{\partial N_i} \quad \ldots\ldots (1)$$

In Folge von I ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N_i} = -\frac{\partial V}{\partial N_i} - \frac{\partial Q}{\partial N_i} \quad \ldots\ldots (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$(1+4\pi k)\frac{\partial Q}{\partial N_i} + 4\pi k\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial Q}{\partial N_a} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Da aber V das Potential von Massen ist, die ausserhalb des Eisenkörpers liegen, deren Dichtigkeit demnach auf der Oberfläche derselben = 0 ist, so folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Addirt man aber (3) und (4):

$$(1+4\pi k)\frac{\partial(V+Q)}{\partial N_i} + \frac{\partial(V+Q)}{\partial N_a} = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

In dieser Gleichung bedeutet V das Potential von ausserhalb des Eisenkörpers gelegenen Massen, Q dagegen das Potential von Massen die auf der Oberfläche derselben verbreitet sind — und die Gleichung besteht sowohl für innerhalb als auch für ausserhalb gelegene Punkte. —

Die electrische Aufgabe, welche zu derselben Gleichung führt ist folgende:–

Es sei der ganze ∞ Raum ein Leiter, dessen Leitungsfähigkeit λ_a ist, und in diesem befinde sich ein ebenfalls leitender Körper (C), von der Gestalt des früher betr. Eisenkörpers, dessen Leitungsfähigkeit wir mit λ_i bezeichnen. – Die electrisierende Einwirkung, welche auf den ~~inneren~~ Körper (C), rühre nicht von electrischen Polen her, sondern von Einströmungspunkten der Electricität welche in dem äusseren leitenden ~~Ra~~ Raum liegen.– Ein solcher Einströmungspunkt vertritt in gewisser Beziehung einen electrischen Pol mit der Fluss. μ, ~~so~~ wenn seine Intensität J der Gleichung genügt:

$$\mu = \frac{J}{4\pi \lambda_a}$$

Da $\sum \mu = 0$ sein kann, so wird auch $\sum J = 0$ sein können, d.i. es wird in diesem Falle ein stationärer electrischer Strom möglich sein.– Die Aufgabe ist nun die Bedingungen auf zu suchen, welche erfüllt werden müssen, damit dieser Strom wirklich stationär sei.–

Diese Bedingungen finden sich in der theor. Physik

II Abschn. §1. ; sie sind folgende. –

Bezeichnen wir mit P_a das Potential der gesammten wirksamen Kräfte ~~auf~~ für einen ausserhalb von C gelegenen Punkt, mit P_i dagegen dasselbe Potential für einen innerhalb von C gelegenen Punkt so, muss damit der Strom ein stationären sein kann:

1)
$$\Delta P_a = 0$$
und
$$\Delta P_i = 0 \quad \text{sein.} - \qquad \ldots \; (6)$$

Dann muss 2) für alle Punkte der Oberfläche von C die Gleichung bestehen:

$$\lambda_i \frac{\partial P_i}{\partial N_i} + \lambda_a \frac{\partial P_a}{\partial N_a} = 0 \qquad \ldots \; (7)$$

3) muss auf derselben Grenzfläche die elect. diff.

$$P_i - P_a = \text{Const.} = C \qquad \ldots \; (8)$$

sein.

Da nun innerhalb C keine Einströmungspunkte sein sollen, so wird P_i für alle Punkte auf welche es sich bezieht endlich bleiben; nicht so ist es mit P_a, denn dieses Potential wird für alle Punkte die in den Einströmungsstellen liegen $= \infty$. – Es ist dies der Fall, weil für diese Punkte das Potential der äusseren electrisirenden Kräfte, welches wir ja $V = \sum \frac{\mu}{r}$ nennen können unendlich gross wird. –

All diese Bedingungen bestimmen Q_i und Q_a bis auf eine additive Constante. –

Angenommen, dass Q_a für Punkte die unendlich weit von dem Körper C liegen $=0$ wird, ~~aber~~ schlagen wir zur Bestimmung von Q_a und Q_i folgenden Weg ein. – Wir setzen:

$$Q_i = P_i + V$$

$$Q_a = P_a + V$$

Wo P_i und P_a zwei noch unbestimmte Functionen sind, welche innerhalb des Raumes in welchem Q_i und Q_a endlich sind auch endlich sein müssen, und der Bedingung zu genügen haben:

$$\Delta P = 0$$

~~Indem~~ Für Punkte der Unendlichkeit werden Q_a und $Q_i = 0$, für solche müssen auch P_i und P_a verschwinden; so dass P_i und P_a als Potentiale von Massen angesehen werden können, welche auf die Oberfläche des Körpers C verbreitet sind. –

Mit Berücksichtigung der Gleichung (8) folgt für Punkte der Oberfläche C

$$P_i - P_a = c$$

woraus zu sehen ist, dass P_i und P_a zwar die Potentiale von Massen sind die auf derselben Oberfläche verbreitet sind, dass aber die diesen zwei Potentialen entsprechenden Massenvertheilungen verschieden sind. – Setzen wir ferner noch:

$$P_a = Q_a$$

$$P_i = Q_i + c$$

dann können auch Q_i und Q_a als Potentiale von Massen angesehen die an der Oberfläche verbreitet sind – die Vertheilung der Massen aber die in diesem Falle einem jeden der Potentiale entspricht ist dieselbe; denn es zeigt sich dass, für Punkte der ~~Q_i~~ Oberfläche:

$$Q_i = Q_a$$

Um nun Q_i und Q_a bestimmen zu können müssen wir der Gleichung (7) genügen. – Da $\frac{\partial Q_i}{\partial N_i} = \frac{\partial Q}{\partial N_i}$ so ist demnach:

$$(9) \quad \ldots \quad \lambda_i \frac{\partial(V+Q)}{\partial N_i} + \lambda_a \frac{\partial(V+Q)}{\partial N_a} = 0$$

Diese Gleichung wird mit der Gleichung (5) zu welcher uns die magnetische Aufgabe führte, vollkommen identisch, wenn λ_i und λ_a so gewählt werden dass:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_a} = 1 + 4\pi k$$

sei. –

Den electrischen Strömungslinien in der zweiten Aufgabe entsprechen in der ersten die magnetischen Kraftlinien. – Die Strömungslinien stehen senkrecht auf die Oberflächen gleichen Potentials; durch diese Eigenschaft ist auch der Begriff ~~die~~ der magnetischen Kraftlinien definirt. –

VII. Betrachtung einiger specieller Fälle der Gleichgewichtsanordnung der Electricität in Leitern.—

1.– Gleichgewichtsanordnung der Electricität auf einem dreiaxigen Ellypsoid.—

Der Leiter auf welchen sich unsere nächsten Betrachtungen beziehen sollen, sei frei von jeder Einwirkung ausserhalb derselben gelegener Massen.— Das Potential U einer solchen Leiter genügt im Gleichgewichtszustande in Bezug auf alle innerhalb derselben gelegene Punkte der Gleichung

$$U = Const.$$

und dabei sind die Electr. Flüss. auf der Oberfläche der Leiter in ~~ein bestimmen~~ gewisser Weise verbreitet.— Ist der Leiter eine Kugel, so ist die Dichtigkeit der Electr. in jedem Punkte der Oberfläche dieselbe, sie ist proportional mit $\frac{E}{R}$, oder bei passender Wahl der Constanten $= \frac{E}{R}$; wenn E die gesammte Electricitätsmenge und R den Radius der Kugel bedeuten. –

Wir suchen nun die Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf einem dreiaxigen Ellypsoide, welche die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllt. –

Das Potential eines dreiaxigen Ellypsoides, in welchem ~~eine~~ die Kraft ausübende Masse mit der const. Dichtigk. 1 verbreitet, in Bezug auf einen innerhalb gelegenen Punkt a, b, c fanden wir schon auf Seite 140 (Gl. 51). – Dies ist:

$$(1) \qquad \Omega = \Omega_0 - \tfrac{1}{2}\left(A_0 a^2 + B_0 b^2 + C_0 c^2\right)$$

wo Ω_0 dasselbe Potential bedeutet bezogen auf den Anfangspunkt der Coordinaten, welcher zugleicher Zeit der Mittelpunkt des Ellypsoides ist; und A_0, B_0, C_0 Constanten sind, deren Bedeutung sich aus den Gleichungen (48) Seite 138 ergiebt. Eine Eigenschaft dieser Grössen von welcher wir Gebrauch machen werden ist die, dass A_0, B_0, C_0 allein von dem Verhältnisse der Hauptaxen A, B, C des Ellypsoid, abhängig sind während, Ω_0 ~~dagegen~~ auch von den absoluten Werthen derselben abhängt ~~sind~~. –

Denken wir uns aus diesem Ellypsoid, ein zweites kleineres dem ersten ähnliches Ellypsoid, dessen Hauptaxen mit denen des ersteren zusammenfallen, herausgenommen; dann bleibt eine ellypsoidische Schale zurück, welche mit Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt ist. — Das Potential dieser ellypsoidischen Kugelschale in Bezug auf einen in seiner Höhlung gelegenen Punkt, aufzusuchen ist unsere nächste Aufgabe; es ist dasselbe gleich der Differenz der Potentiale des grösseren und des kleineren Ellypsoides. — Das Potential des mit Dichtigk. 1 erfüllten kleineren Ellypsoides, wird durch einen dem (1) ähnlichen Ausdrucke bestimmt, — das was dieses Ellypsoid von dem grösseren unterscheidet sind die Längen seiner Hauptaxen A', B', C'; da aber:

$$A' : B' : C' = A : B : C$$

so haben die Grössen A_0, B_0, C_0 dieselben Werthe für das kleinere als für das grössere Ellypsoid, und der Ausdruck 1) für diesen ersteren unterscheidet sich dann nur durch einen verschiedenen Werth von Ω_0, welchen wir mit Ω_0' bezeichnen wollen. — Bedeutet also jetzt Ω das Potential der genannten ellypsoidischen Schale, so ist:

(2) ... $\Omega = \Omega_0 - \Omega_0'$

Wir fanden:

$$\Omega_0 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{C^2}}}$$

ein ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für Ω_0', nur muss man in demselben die Buchstaben A, B, C mit A', B', C' vertauschen. – Diese Werthe in (2) gesetzt, ergeben:

(3) ... $$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{A'^2}{A^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{C^2}}}$$

das Potential ist also constant in der ganzen Höhlung der ellypsoidischen Schale. –

~~Bedeutet M die Menge~~ Es ist vortheilhaft statt des Potentials das Verhältniss desselben zu den Massen einzuführen, von welchen es herrührt. – Die Masse deren Potential Ω ist, ist da die Dichtigkeit $= 1$ ist, gleich dem Volum der Ellypsoidischen Schale, also:

$$M = \frac{4\pi}{3}(ABC - A'B'C')$$
$$= \frac{4\pi}{3}ABC\left(1 - \frac{A'^3}{A^3}\right)$$

Ich nehme nun an, dass die Dicke der Schale unendlich klein sei, dass also A', B', C' nur unendlich wenig von A, B, C verschieden sei; für diesen Fall ist

$$\frac{\Omega}{M} = \frac{1}{ABC} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2}} \sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{C^2}}} \quad \ldots\ldots (4).$$

(Man gelangt zu diesem Ausdr. durch Bestimmung des Ausdruckes $\frac{0}{0}$, welcher als Factor vor dem Integr. auftritt) Eine in einer unendlich dünnen Schicht verbreitete Masse, ist gleichbedeutend mit einer auf der Oberfläche einer vollen Leiters verbreiteten; wir haben demnach hier eine Vertheilung gefunden, welche den Bedingungen des Gleichgewichts der Electricität auf Leitern genügt. – Es ist nämlich bei dieser Vertheilung das Potential für innere Punkte constant, und die Massen sind auf die Oberfläche beschränkt. – Man nennt das Verhältniss $\frac{M}{\Omega}$ die electrische Capacität des Leiters – die Gl. 4, stellt also die reciproke Capacität dar. –

Wir stellen es uns noch zur Aufgabe die Dichtigkeit an verschiedenen Punkten der Ellypsoidoberfläche zu untersuchen. – Dieselbe ist proportional mit dem Abstande beider Ellypsoidflächen an dem betreffenden Punkte; also mit dem unendlich kleinen

Stücke der Normale eines der Ell. Flächen, ~~welche~~ zwischen beiden Ellyps. Flächen liegt. – Diese bezeichne ich mit N. –
Die Gleichung der einen Ellypsoidoberfläche ist:

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1$$

dann kann ich die Gl. der 2ten Ell. Fl. schreiben:

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1 + 2\varepsilon$$

wo ε eine unendl. kleine Zahl derselben Ordnung ist, wie die Differenz der Hauptaxen beider Ellypsoide ~~ist~~. –
Sind nun x, y, z die Coordinaten des Anfangspunktes des erwähnten Stückes N der Normale, und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Coordinaten seines Endpunktes; so müssen diese Coordinaten den Gleichungen genügen:

(5) ... $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

und

(6) ... $$\frac{x\,dx}{A^2} + \frac{y\,dy}{B^2} + \frac{z\,dz}{C^2} = \varepsilon$$

Da aber:

$$dx = N \cos N,x$$

$$dy = N \cos N,y$$

$$dz = N \cos N,z$$

also:

$$dx = \mathcal{N} \cdot \frac{x}{\mathcal{A}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mathcal{A}^4} + \frac{y^2}{\mathcal{B}^4} + \frac{z^2}{\mathcal{C}^4}}}$$

$$dy = \mathcal{N} \cdot \frac{y}{\mathcal{B}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mathcal{A}^4} + \frac{y^2}{\mathcal{B}^4} + \frac{z^2}{\mathcal{C}^4}}}$$

$$dz = \mathcal{N} \cdot \frac{z}{\mathcal{C}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mathcal{A}^4} + \frac{y^2}{\mathcal{B}^4} + \frac{z^2}{\mathcal{C}^4}}}$$

so ergiebt sich diese Werthe in (6) gesetzt:

$$\mathcal{N} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{x^2}{\mathcal{A}^4} + \frac{y^2}{\mathcal{B}^4} + \frac{z^2}{\mathcal{C}^4}}}$$

Die Dichtigkeit im Punkte x, y, z ist wie wir schon bemerkt haben mit $\mathcal{N}$ proportional, bei passender Wahl der Constanten werden wir aber setzen können:

$$\mathcal{D} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{x^2}{\mathcal{A}^4} + \frac{y^2}{\mathcal{B}^4} + \frac{z^2}{\mathcal{C}^4}}} \quad \ldots\ldots (7)$$

wo eben $\mathcal{D}$ die genannte Dichtigk. bedeutet. Hiebei haben wir die Bedeutung der Constante ε verändert, dieselbe müsste nach ihrer ersten Definition unendlich klein sein; diese Bedingung ist aber keine nothwendige für das ε der Gleichung 7 – da ja diese nur proportional mit einer unendlich kleinen Grösse sein muss. –

Wir wenden diese Resultate auf die Gleichgewichtsanordnung der Electricität auf einer elliptischen Scheibe an. — Eine solche ist ein dreiaxiges Ellypsoid dessen eine Axe $= 0$ ist — wenn wir aber ohne weiteres in den Ausdruck $\mathfrak{D}$ setzen

$C = 0$ und folglich auch $z = 0$

so erhalten wir in der Summe unter dem $\sqrt{\ }$ eine unbestimmte Grösse $\frac{0}{0}$. — Um diesen Übelstand zu vermeiden transformiren wir $\mathfrak{D}$, wie folgt:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{1}{C^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right)}}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon C}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4}\right)C^2 + \left(1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right)}}$$

Setzen wir nun C = unendl. klein, so wird doch, wenn ~~überh.~~ die Dichtigkeit eine endliche ist εC = einer endlichen Constante sein müssen; so dass sich in diesem Falle ergiebt:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{D} = \frac{\text{Const.}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}}}$$

Diese Gleichung zeigt dass die Punkte gleicher Dichtigkeit auf Ellypsen liegen, welche ähnlich sind der ellyptischen Begrenzung der Scheibe; sie zeigt ferner dass die Dichtigkeit der Electricität am Rande der Scheibe $= \infty$ ist. – Dass aber einer endlichen Electricitätsmenge auf einer Scheibe der beschriebenen Art ein endliches Potential entspricht, sehen wir, wenn wir den Ausdruck der reciproken Capacität bilden. – Setzen wir nach passender Umformung derselben in den Ausdr. (4) $C =$ unendl. klein, so ergiebt sich:

$$\frac{\Omega}{M} = \frac{1}{AB}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{A^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{B^2}}}$$

oder aber:

$$\frac{\Omega}{M} = \frac{1}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{A^2-B^2}{A^2}\sin^2\vartheta}}$$

x hierbei werden die Bezeichnungen A und B vertauscht, damit unter A die grössere Axe verstanden werden kann.

Setze ich:

$$\frac{A^2-B^2}{A^2} = \lambda^2$$

dann wird:

$$\frac{\Omega}{M} = \frac{1}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\vartheta}}$$

es ist dies ein ganzes ellyptisches Integral 1te Gattung für den Modul 1. –

Wenn die Scheibe eine kreisförmige also:

$$A = B = R$$

ist; dann wird:

$$D = \frac{Const.}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}$$

Demnach liegen die Punkte gleicher Dichtigkeit auf concentrischen Kreisen – und am Rande der Kreisscheibe ist $D = \infty$ ..

Es ist dann

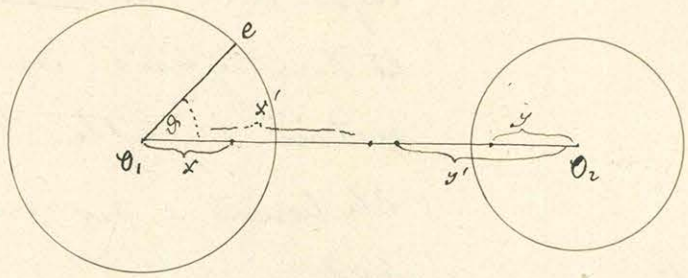
$$\frac{Q}{M} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{R}$$

Die Capacität ist wie wir an diesem Beisp. sehen eine Länge. –

Da wir dass Potential von Massen, die in einem Ellypsoid mit der constanten Dichtigkeit 1 verbreitet sind, auch in Bezug auf äussere Punkte untersucht haben – so könnte man aus den da gefundenen Resultaten das Potential einer Kreisscheibe auf äussere Punkte finden – wir wenden diese Aufgabe bei einer andern Gelegenheit lösen. –

2. Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf zwei Kugeln, welche durch isolirende Medien getrennt aufeinander einwirken.-

§1. Es ist dies ein interessantes von Poisson gelöstes Problem. Kirchhoff giebt eine „äusserst elegante" Ableitung desselben im 59ten Bande von Crelle's Journal.-



Zwei Kugeln 1 und 2 deren Radien a und b sind, beide electrische Flüssigkeiten enthaltend, sind von einander isolirt.- Die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte $O_1O_2 = c$, das ist ihre Centrale muss wenn die Aufgabe eine physikalische Bedeutung haben soll, der Bedingung genügen

$$c > a+b$$

es ist also im Grenzfalle:

$$c = a+b$$

Vor allem untersuchen wir das Potential der Kugel 1 für sich genommen, in Bezug auf einen auf der Centrale innerhalb dieser Kugel gelegenen Punkt, dessen Abstand von dem Kugelmittelpunkte 1 gleich x sei. – Dies Potential, welches, wie ich es stärker betonen will, nur von der einen Kugel herrührt also beim Gleichgewichte nicht constant zu sein braucht, ist eine Function von x, welche ich mit $f(x)$ bezeichne. –

Ich ziehe nun alle Radiuse die von der Centrale um den Winkel ϑ abstehen; dieselben liegen in einem Kegel und schneiden die Kugel 1 in einem Kreis; die Dichtigkeit der Electricität ist wegen der Symmetrie in allen Punkten dieses Kreises dieselbe, ich bezeichne sie mit e. – Der Umfang dieses Kreises ist:

$$= 2\pi a \sin\vartheta$$

und die Fläche der unendlich dünnen Ringfläche, deren Breite ~~a~~ $d\vartheta$ ist:

$$= 2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Es ist also das Potential dieses Ringes in Bezug auf den von O_1 um x entfernten Punkte:

$$= \frac{2\pi a^2 e \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\vartheta}}$$

Es ist also:

Das Potential der Kugel 1 in Bezug auf einen innerhalb derselben auf der Centrale gelegenen Punkt x (wobei also $x < a$)

$$= f(x) = \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 e \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\vartheta}} \quad \ldots (1)$$

Wenn der Punkt auf welchen das Pot. bezogen sein soll auf der Centrale ausserhalb der Kugel (1) ~~zwischen bei~~ liegt, also von O, um x_1 entfernt ist derart dass $x_1 > a$; so wird das Potential der Kug. 1 in Bezug auf diesen Punkt sein:

$$= \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 e \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x'^2 - 2ax'\cos\vartheta}}$$

Wir hatten ja bei der Ableitung von (1) keinen Gebrauch der Eigenschaft $x < a$ gemacht. – Dieses selbe Potential lässt sich auch so schreiben:

$$= \frac{a}{x'} \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 e \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\frac{a^4}{x'} + a^2 - \frac{2a^3}{x'}\cos\vartheta}}$$

Dieses Integral übergeht in den Ausdruck (1), wenn man setzt:

$$\frac{a^2}{x'} = x$$

Dadurch wird:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Das Potential der Kugel 1 in}\\ \text{Bezug auf den ausserhalb derselben}\\ \text{auf der Centrale gelegenen Punkt } x' \text{ (wo } x' > a)\end{array}\right\} = \frac{a}{x'}\cdot f\left(\frac{a^2}{x'}\right) \qquad (2)\ldots$$

Da $\frac{a^2}{x'} < a$ ist, so haben wir hiermit den Vorzug erreicht, die Aufgabe der Bestimmung des Potentials der Kugel 1 in Bezug auf äussere Punkte, auf die Aufgabe der Best. derselben Pot. auf innere Punkte der Centrale zurückgeführt zu haben. – Kennen wir das Pot. für alle innere so können wir es auch für alle äussere Punkte der Centrale. –

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch in Bezug auf das Potential der einzeln wirkenden Kugel 2 anstellen. – Es sei dasselbe für Punkte die innerhalb derselben, auf der Centrale, von dem Mittelpunkte O_2 um y entfernt liegen (wobei $y < b$):

$$= \mathfrak{F}(y)$$

Dann ist dasselbe Potential für Punkte (y') ausserhalb der Kugel zwei auf der Centrale, also für Punkte für welche $y' > b$ ist, durch den Ausdruck gegeben:

$$(3) \ldots\ldots \quad = \frac{b}{y'}\cdot \mathfrak{F}\left(\frac{b^2}{y'}\right)$$

wodurch derselbe Vorzug erreicht ist.–

§2. Wählen wir nun y' so dass

$$x + y' = c$$

d. i.

$$y' = c - x$$

sei; so erhalten wir das gesammte auf den Punkt x der Kugel 1 wirksame Potential:

$$\frac{b}{c-x}\mathfrak{F}\left(\frac{b^2}{c-x}\right) + f(x) = h \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wo h den Constanten Werth des Potentials in der Kugel 1 bedeutet. – Die Gleichung (4) besteht für alle Werthe von x, die zwischen $-a$ und $+a$ liegen.– Ebenso erhält man das Gesammtpotential g in einem Punkte der 2ten Kugel.– Man wählt x' derart dass

$$x' + y = c$$

also

$$x' = c - y$$

sei – dann ist das Gesammtpotential:

$$\mathfrak{F}(y) + \frac{a}{c-y} f\left(\frac{a^2}{c-y}\right) = g \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die Gleichung besteht für Werthe von y zwischen $-b$ und $+b$.– Aus den Gleichungen (4) und (5) kann eine der unbekannten Functionen f und $\mathfrak{F}$ eliminirt werden.– Für Werthe von x die zwischen $+a$ und $-a$

liegen; liegt der Werth von y

$$y = \frac{b^2}{c-x}$$

zwischen $-b$ und $+b$; so dass derselbe die Gleichung (5) erfüllen muss. – Wenn dass nun so ist, so wird man nach der Ausführung dieser Substitution, als Differenz der Gleichungen (4) und (5) erhalten:

für Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$: $$f(x) - \frac{ab}{c^2-b^2-cx}\, f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x}$$

Oder wenn wir ohne dadurch die Allgemeinheit unserer Betrachtungen zu beschränken setzen $a=1$ so ist:

(6) . . . für Werthe von x zwischen -1 und $+1$: $$f(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx} \cdot f\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x}$$

Es ist dies eine Functionalgleichung enthaltend die Werthe derselben Function für zwei Argumente, die in ~~ein~~ gewissen Beziehungen zwischen einander stehen. – Wir werden sehen dass sie zur Bestimmung dieser Function ausreicht, und werden nachdem wir sie wirklich bestimmt haben, das gesuchte Potential für alle innere Punkte des Centrals, dann auch ~~für~~ überhaupt alle innere Punkte aufsuchen können; – und schliesslich auch die äusseren Punkte behandeln. –

– §3. Für einen Werth von x, nämlich für den Werth, durch welchen die Argumente der Function f in beiden Gliedern der Gleichung (6) dieselben werden, können wir diese Function ohne besondere Schwierigkeiten berechnen; – wenn nämlich dieser Werth von x der Bedingung der Functionalgleichung dass $+1 > x > -1$ ~~ist~~ genügt. – Die Gleichheit der Arg. ist durch die Gleichung ausgesprochen:

$$x = \frac{c - x}{c^2 - b^2 - cx}$$

oder:

$$x^2 - \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right)x + 1 = 0 \qquad \ldots \quad (7)$$

Genügt aber eine Wurzel dieser Gleichung der Bedingung $+1 > x > -1$? – Es ist der linke Theil ~~der~~ der Gleichung (7)

für $x = -1$

$$\frac{c^2 + 1 - b^2}{c} = \text{posit.}$$

für $x = +1$

$$\frac{b^2 - c^2 - 1}{c} = \text{negat.}$$

Also liegt eine der Gl. (7) genügender Werth von x zwischen $+1$ und -1. –

Man kann die Grenzen ~~da~~ zwischen welchen dieser Wurzel der Gl. (7) liegt noch näher bestimmen. – Es wird die linke ~~Theil~~ Seite der Gleichg (7):

für $x = 0$:

$$1 = \text{posit.}$$

für $x = \frac{1}{c}$:

$$\frac{b^2}{c^2} = \text{posit.}$$

Die Wurzel ist also positiv und liegt zwischen $\frac{1}{c}$ und 1; sie soll im Folgenden mit ξ bezeichnet werden — die zweite Wurzel der Gleichg (7) ist dann $-\frac{1}{\xi}$; mit dieser werden wir es aber nicht zu thun haben da ja sie die Bed. der Gl. (6) nicht erfüllt. –

Setzen wir in (6) für x den Werth ξ, so wird:

$$(8) \cdots\cdots \quad f(\xi) = \frac{h - g\dfrac{b}{c-\xi}}{1 - \dfrac{b}{c^2 - b^2 - c\xi}}$$

hiermit ist die Function f für einen best. Werth von x bekannt. –

§ 4.

Pótlék electricitás 187 oldalhoz. (1878 ból)

Két párhuzamos összekötő egyenesre merőleges folyamelem által egymásra gyakorolt taszító erő a Weber féle törvényből levezetve.

$$r^2 = (\xi' - \xi)^2 + b^2$$

ebből $2r\frac{dr}{dt} = 2(\xi' - \xi)\left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi' - \xi}{r}\left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)$$

$\frac{d\xi'}{dt}$ és $\frac{d\xi}{dt}$ absolut értékei u' és u ezek $\pm$ től függetlenek..

ds' és ds végtelen kicsinyek és így $\frac{dr}{dt}$ elenyésző kicsiny.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\xi'}{dt} - \frac{\partial\xi}{dt}\right) - \left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}$$

de mivel $\frac{dr}{dt} = 0$ lesz.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

Már most.

ds-ben	ds'-ben	$\frac{dr}{dt}$	$\frac{d^2r}{dt^2}$	Taszító erő
$+e\,ds$	$+e'ds'$	0	$\frac{(u'-u)^2}{r}$	$2\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{1}{c^2}(u'-u)^2$
$-e\,ds$	$+e'ds'$	0	$\frac{(u'+u)^2}{r}$	$-2\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{1}{c^2}(u'+u)^2$
$+e\,ds$	$-e'ds'$	0	$\frac{(u'+u)^2}{r}$	$-2\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{1}{c^2}(u'+u)^2$
$-e\,ds$	$-e'ds'$	0	$\frac{(u'-u)^2}{r}$	$+2\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{1}{c^2}(u'-u)^2$

a + és − ds ben taszítják a + t ds'ben $-8\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{uu'}{c^2}$ erővel

a - - - - - − t ds'ben $-8\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}\frac{uu'}{c^2}$ erővel.

ds taszítja ds'-t egy erővel $= -\frac{16uu'}{c^2}\frac{e\,ds\,e'ds'}{r^2}$

$eu = J \quad e'u' = J'$

$= -\frac{16}{c^2}\frac{JJ'ds\,ds'}{r^2}\ldots$

Ampère törvénye szerint

$R = -ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' + 2\cos\varepsilon)$

$R = -\frac{2ii'ds\,ds'}{r^2}$

$R = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$