Collegienheft für Richelot's Seminar.

$$\cos u : \sin u \cos v = a\cos\varphi : b \sin\varphi \cos\psi$$

$$\cos u = \frac{\sin u \cos v \cdot a\cos\varphi}{b\sin\varphi\cos\psi}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = a y_1 : b y_2 : c y_3$$

$$\begin{cases} x_1 : x_2 = a y_1 : b y_2 \\ x_2 : x_3 = b y_2 : c y_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = F a y_1$$
$$x_2 = F b y_2$$
$$x_3 = F c y_3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 b y_2 = x_2 a y_1$$
$$x_2 c y_3 = x_3 b y_2$$

Neue Aufgabe. — Juni 1 gegeben aus Juni 8.

Wir haben bis nun die Aufgabe gelöst

$\int \sin u\, du\, dv$ herübergetragen in

$$\int \sin u\, du\, dv = abc \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

es fragt sich in welchem Zusammenhange stehen diese ~~Vari~~ Coordinaten. — Wären in beiden Integralen die selben Grenzen unbedingt von so wäre bis nun zu machen. —

$$\cos u : \sin u \cos v : \sin u \sin v =$$
$$= a\cos\varphi : b\sin\varphi\cos\psi : c\sin\varphi\sin\psi$$

hieraus

$$\cos u = \frac{a\cos\varphi}{N}$$
$$\sin u \cos u = \frac{b\sin\varphi\cos\psi}{N}$$
$$\sin u \sin v = \frac{c\sin\varphi\sin\psi}{N}$$

Wo N

$$N^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u \cos^2 v}{b^2} + \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{c^2}}$$

$$= a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi$$

Hieraus folgt, dass

$du\,dv$ das alte Element –

wenn u und v Funktionen von φ und ψ sind:

$$\iint du\,dv = \iint\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)d\varphi\,d\psi$$

Hieraus folgt dann die Dichtigkeit ganz beliebig genommen werden kann

$$\iint \sin u\,du\,dv\,F(u,v) = abc\iint\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi\,F(\varphi,\psi)}{(\;)^{\frac{3}{2}}}$$

Neue Aufg.

~~Zu~~ oder statt

$\cos\varphi = \xi$

$\sin\varphi\cos\psi = \eta$

$\sin\varphi\sin\psi = \zeta$

$-\sin\varphi(\cos\varphi\cos\psi + \sin\ldots$

Dann kann ich doch sagen dass

$$\int \sin\varphi\,d\varphi\,d\psi = \frac{d\xi\,d\eta}{\zeta}$$

Wir haben die Frage wie können wir das auf n Variable übertragen. – . –

Ich gebe die Hauptformel, und überlasse deren Ableitung: –

Wenn sich verhält:

$\cos\psi = y_1$

$\sin\psi\cos\varphi = y_2$

$\ldots = y_3$

$$x_1 : x_2 : x_n = a_1 y_1 : a_2 y_2 : a_n y_n$$

Und wenn die Summe der Quadrate der x-e gleich $= 1$ ist, und die

Summe der Quadrate der y-s auch $=1$ ist, so soll das Integral:

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n}$$ transformirt

werden in eine die y-s enthält. –

Hier werden wir auch irrationale ($n-1$fache) Integrale ~~zu~~ in ~~rationale~~ rationale zu transformiren haben. –

Methode die Wurzeln mit z zu addiren und dz zu multipliciren und von 0 bis ∞ integriren

Aufgabe von 25 Mai.

$$F(u\,v) = \frac{abc}{\left(\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u \cos^2 v}{b^2} + \sin^2 \cos^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}$$

Also das Integral

$$= abc \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{3-n}}$$

~~Zu zweiten~~ Die zweite Aufgabe war

$$= abc \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)}$$

Eine Methode der Integration ist auch die zu setzen

$$\sqrt{(z + (a^2+z_1)\cos^2\varphi + (b^2+z_2)\sin^2\varphi\cos^2\psi + (c^2+z_3)\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

wo nach z ~~zu~~ zu differenziiren und nach ausgeführter Integration $z=0$ zu setzen ist. –

$$\iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + c^2}$$

Man setze $\cos\varphi = \cot\alpha\, \operatorname{tg}\chi$

$a > b > c$

$\frac{b^2}{a^2} = \cos^2\alpha \quad \frac{c^2}{a^2} = \cos^2\beta$

nun siehe Möller,

$$\xi = \frac{\pi}{2 \sin\alpha \cos\beta} \cdot F(\alpha, \varkappa)$$

$$\varkappa_1 = \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}$$

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{tg^2\beta}{tg^2\alpha}$$

In umgekehrter Reihenfolge integrirt: ergiebt sich aber; die von Legendre gefundene Formel:

=

finden sich in der von Legendre gegebenen ~~Formel~~ Tabelle für merkwürdige Integrale die mit den Elliptischen Integralen zusammenhängen –

Also ist;

Jetzt Vortrag:

~~Die meisten~~

Die Gleichung einer beliebigen Oberfläche in einem Punkte der keine Ausnahmepunkt ist, ist

$$z = \frac{1}{2}T_0 x^2 + 2U_0 xy + V_0 y^2 + \Omega$$

Ω von höherer Ordnung – und es ist nun klar dass das Glied [illegible] verschwindet und das Glied mit xy verschwindet auch, wenn die xy Ebene die Tangentenebene ist, –

Führt man nun statt xy andere Variable x' y' ein, so kann

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad (?)$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Dann wird das Glied mit $x'y'$ verschwinden wenn $tg\,2\alpha = \frac{2U_0}{T_0 - V_0}$ ist

Dann habe ich in den kleinen Coordinaten die Oberflächengl.

$$z = \frac{1}{2} T xx + \frac{1}{2} V yy + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Nehme ich darin $y = 0$ so bekomme ich einen Normalschnitt, und die Curve in ihrer Ebene Normalschnittscurve. – Deren Gl. an

$$z = \frac{T}{2} xx + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Den Krümmungshalbmesser dieser Curve finde ich $\frac{1}{T}$. –

So in dem ~~Punkte~~ Normalen senkrecht hierzu $z = \frac{1}{V}$. – Und in dem Normalschnitt, das den Winkel φ mit dem ersten bildet:

$z = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi) r^2 + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Der Krümmungshalbmesser für φ ist offenbar zwischen den beiden anderen enthalten. – $\frac{1}{T}$ und $\frac{1}{V}$ auf derselben Seite ~~und~~, wenn sie in $\frac{1}{T}$ und $\frac{1}{V}$ verschiedenen Stellen liegen, dann geben sie die größte Convexität und Concavität. –

Suchen wir endlich das Krümmungsmaass, so können wir dies ~~thun~~ durch

$$K = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\cdots}$$

Dies angewendet finden wir

$$\underline{K = TV}$$

also gleich dem reciproken Product der Krümmungshalbmesser. –

Da nun $d\sigma = dx\,dy$ ist, weil die

$$\frac{d\sigma}{ds} = TV$$

Dies steht im (8 S. Gauss)

Hieraus entspringt auch der Euler'sche Satz, dass die Summe der Krümmungshalbmesser constant ist

Wir haben also in

Über Bestimmung der Krümmungshalbmesser. —

Der Krümmungshalbmesser einer Curve doppelter Krümmung ist:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

Dieser Formel kann man die verschiedensten Formen geben —

Wir stellen uns nun die Aufgabe es ist die eine der gegebenen Oberflächengleichungen eine Ebene die durch einen Punkt x, y, z geht, die andere ist eine gegeben Oberfl. —

φ sei der Winkel den die Normale an der Oberfläche mit dieser Ebene bildet. —

Ich will nun φ ausdrücken durch die durch die Oberfläche und die Ebene gegebenen Grössen. —

Tangente an meine Curve habe die Determinanten Cosinusse α, β, γ,

die nächste $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$

Die cos. der Normale a, b, c

Die Cosin. ~~der~~ von ρ $\frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}$, $\frac{d\beta}{}$

$$\cos\varphi = \frac{a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$d\alpha = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}$$

also

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma a(ds\,d^2x - dx\,d^2s)}{\sqrt{\Sigma(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2}}$$

Der Nenner unter der Wurzel ist mit sehr kleinem Unterschiede

$$= (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 +$$

$\cancel{ds^2 = dx^2 +}$

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\Sigma a(ds\,d^2x - dx\,d^2s)}{ds^3}$$

Jetzt ist nur noch $a\ b\ c$ zu bestimmen

$$a = \frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}$$

(2)

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\Sigma F'_x d^2x^2}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\ d^2s}$$

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{F'_x d^2x + F'_y d^2y + F'_z d^2z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,(dx^2+dy^2+dz^2)}$$

Wir haben die Gleichungen:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F'_x d^2x = -\Sigma F''_{xx} dx^2 - \Sigma F''_{xy} dy\,dx$$

Endlich

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{11\xi^2 + 22\eta^2 + 33\zeta^2 + 2(23)\eta\zeta + +}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}$$

$$11 = F''_{xx} \qquad \xi = \frac{dx}{ds}\ \eta = \frac{dy}{ds}\ \zeta = \frac{dz}{ds}$$

Satz Wenn ~~ist~~ $\varphi = 0$ ist, dann wenn Krümmungshalbmesser $\frac{1}{r}$ = wird, es wird aber für alle Krümmungslinien die durch dieselbe Tangente gehen der Satz gelten:

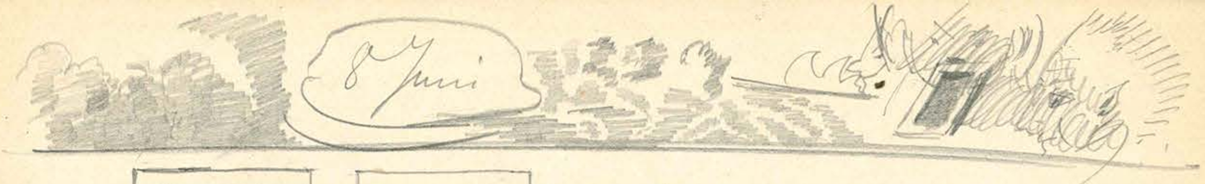
$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \qquad \rho = r\cos\varphi$$

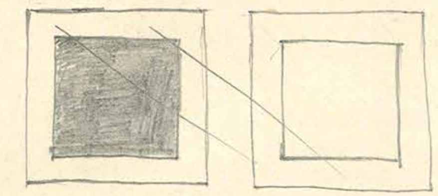
Der Satz heisst der Satz von Meusnier

Es stellt sich nun die Aufgabe, wann werden diese grösste und kleinste Werthe annehmen. –

Dann $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$

$$\xi F'_x + \eta F'_y + \zeta F'_z = 0$$





Auflösung der gegebenen Aufgabe.

Nehmen wir an

$$\int \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{x_4}$$

wo $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_1 y_1 : \dots : a_4 y_4$

$$\Sigma x_\lambda^2 = 1$$
$$\Sigma y_\lambda^2 = 1$$

$y_1 = \cos\varphi$

$y_2 = \sin\varphi \cos\psi$

$y_3 = \sin\varphi \sin\psi \cos\chi$

$y_4 = \sin\varphi \sin\psi \sin\chi$

$x_1 = \cos u$

$x_2 = \sin u \cos v$

$x_3 = \sin u \sin v \cos w$

$x_4 = \sin u \sin v \sin w$

Also I

Integral $= \int du\,dv\,dw\,\sin^3 u \sin v$

Zwischen u - und φ - besteht

1) $\cos u = \dfrac{a_1 \cos\varphi}{\sqrt{N}}$

2) $\sin u \cos v = \dfrac{a_2 \sin\varphi \cos\psi}{\sqrt{N}}$

3) $\sin u \sin v \cos w = \dfrac{a_3 \sin\varphi \sin\psi \cos\chi}{\sqrt{N}}$

4) $\sin u \sin v \sin w = \dfrac{a_4 \sin\varphi \sin\psi \sin\chi}{\sqrt{N}}$

wo N = Summe der Quadrate dieser Zähler.

Wenn ich 4) durch 3) dividire,

$$\operatorname{tg} w = \frac{a_4}{a_3} \operatorname{tg}\chi$$

Also hängt w allein von χ ab – in dem Integral ist also dw direkt durch $d\chi$ zu ersetzen

$$I = \frac{a_4}{a_3} \int \sin^2 u \sin v\, du\, dv \frac{\cos^2 w}{\cos^2\chi} d\chi$$

3) durch 2) dividirt

$$\operatorname{tg} v \cos w = \frac{a_3}{a_2} \operatorname{tg}\psi \cos\chi$$

da die Grenzen des Integrals in Bezug auf v unabhängig sind von denen von w, so folgt aus diesem gleich.

$$\cancel{dv = \frac{a_4 a_3}{a_2} \frac{\cos^2 v}{\cos^2\psi} \frac{\cos\chi}{\cos w} d\psi}$$

~~endlich ergiebt sich~~

$$\cancel{I} = \quad \cancel{I} = \frac{a_4}{a_2} \int$$

$$\cancel{I} = \frac{a_4}{a_1}$$

$$I = a_1 a_2 a_3 a_4 \int \frac{\sin^2\varphi \sin\psi}{\sqrt{N}^3} d\varphi\, d\psi\, d\chi$$

Resultat. Auflösung.

$$\frac{x_1}{x_n} = \xi_1 \quad \ldots \text{etc.} \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = \xi_{n-1}$$

dann lässt sich berechnen was $d\xi_n$ ist

Dann umformen

$$\frac{1}{x_n^2} \begin{vmatrix} x_n^2 + x_1^2 & x_2 x_1 & \ldots & x_{n-1} x_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1 & & & x_{n-1} x_n \end{vmatrix}$$

Multiplicirt und addirt, dann dividirt man,

$$\frac{1}{x_n^2} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ x_2 & & & \\ \vdots & & & \\ x_{n-1} & x_2 x_{n-1} & & x_n^2 \end{vmatrix}$$

Multipl. und addirt, und nimmt die Linie als 2te Reihe. –

$$\frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_3 & \ldots & x_{n-1} \\ x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_{n-1}^2 & & & & (x_{n-1})(1 - x_n^2) \\ \vdots & & & & \\ x_{n-1} x_{n-1} & & & & \end{vmatrix}$$

u.s.w.

$$\frac{1}{x_n^{3n-3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2^2 + \ldots x_{n-1}^2, 1 - x_1^2, & & & \ldots & (1 - x_1^2) \\ x_3^2 + \ldots x_{n-1}^2 & & & & \\ \vdots & & & & 1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots x_{n-1}^2 \\ x_{n-1}^2, & x_{n-1}^2, & x_{n-1}^2 & & \end{vmatrix}$$

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n^{n+1}} = \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{}$$

Gesucht:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{a_n}\eta_1 \\ x_2 = \frac{a_2}{a_n}\eta_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\eta_{n-1} \end{cases}$$

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1} = \frac{a_1 \ldots a_{n-1}}{a_n^{n-1}} \int d\eta_1 d\eta_2 \ldots d\eta_{n-1}$$

Das erste mit diesem vergleichen

$$\frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{\xi_n} =$$

$$\xi_1 = \frac{y_1}{y_n} \quad \xi_2 = \frac{y_2}{y_n} \quad \ldots\ldots \quad \xi_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n}$$

wo $1 = \Sigma y_i^2$

Dann folgt der Satz

$$\int \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = a_1 \ldots a_n \int \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}}{y_n} \left(a_1^2 y_1^2 + a_2^2 y_2^2 + \ldots a_n^2 y_n^2\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Directer Beweis ist ein allgemeiner Satz. —

Wir haben $(n+1)$ Variable $x, x_1 \ldots x_n$ ausgedrückt durch n andere Variable, durch $\xi_1 \ldots \xi_n$,

$$x = f(\xi_1 \ldots \xi_n)$$
$$x_1 = f_1(\xi_1 \ldots \xi_n)$$
$$\cdots$$
$$x_n = f_n(\xi_1 \ldots \xi_n)$$

Wenn die Gleichung $\Phi(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ identisch durch die griechischen Buchstaben erfüllt wird, so soll das Integral

$\int dx_1 \ldots dx_n$ umgewandelt werden in das Integral, dessen Element $d\xi_1 \ldots d\xi_n$ ist. —

Wenn eine Gleichung identisch erfüllt wird durch gewisse Variable, so giebt jede Differentiation nach diesen Variablen eine identische Gleichung

Wenn ich nun die Function [illegible] ist:

$$\varphi' x \, f'\xi_n + \varphi' x_1 \, f_1' \xi_n \qquad + \varphi' x_n \, f_n' \xi_n = 0$$

$$\left| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ f'\xi_1 & f_1'\xi_1 & & f_n'\xi_1 \\ \vdots & & & \\ f'\xi_n & f_1'\xi_n & & f_n'\xi_n \end{matrix} \right| = \Delta$$

$$\alpha x + \alpha_1 x_1 + \ldots = 0$$
$$\beta x + \beta_1 x_1 + \ldots \ldots 0$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi' x &= \frac{d\Delta}{\partial \alpha} \lambda \\ \varphi' x_1 &= \frac{d\Delta}{\alpha_1} \lambda \\ \varphi' x_n &= \frac{d\Delta}{\alpha_n} \lambda \end{aligned} \right\}$$

Also kann ich λ auf verschiedensten Arten darstellen: – Ich kann sagen:

$$\lambda = \frac{\sum \varphi' x_k}{\sum \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_k}}$$

~~λ [illegible]~~

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\sum X_h' \varphi' x_h}{\sum X_h' \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_h}} \\ \lambda &= \\ &= \end{aligned} \right\}$$

~~Da doch $dx_1 \ldots dx_n$ gleich $\frac{d\Delta}{\partial \alpha}$ ist~~

Da aber

$$\int dx_1 \ldots dx_n = \int \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

Da $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{\varphi' x}{\lambda}$ ist und λ auf 4 Arten ausgedrückt ist, so haben wir eine symmetrische Umformung gefunden. –

So haben wir:

$$\int dx_1 \ldots dx_n = \int \varphi' x \frac{\sum \varphi_1' x_h \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_h}}{\sum \varphi' x_h} d\xi_1 d\xi_n$$

Einfacher Fall, es sei

$$f = \frac{F}{N}, \quad f_1 = \frac{F_1}{N} \quad \dots \quad f_n = \frac{F_n}{N}$$

und es bestehen

$$f^2 + f_1^2 \dots f_n^2 = N^2$$

wenn man nun dies bildet und einsetzt in ~~die~~ die Gleichungen, so erhält man

dann die Functional-Determinante für diesen speciellen Fall folgende ist:

~~Hierauf~~

~~Diese~~

Hierauf der als Aufgabe behandelte spec. Fall basirt. —

Diese!

Ein Integral wird separirt genannt, wenn ~~jeder~~ der Factor ein Product von Factoren ist, $\int x_1 dx_1 \int x_2 dx_2 \int \cdot \int \cdot \int$

Ein solches kann man in einzelne zerlegen,

wenn nur die Grenzen constant sind.

Es giebt nun solche Separationen, wo ~~da~~ unter dem Integral ein Aggregat von Producten auftritt. —

Führen wir jetzt ein ~~$\int (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)\, dx_1 dx_2$~~

$x_1 = \cos\varphi_1$, ~~$dx_1\, dx_2 - x_1 x_2 + x_2$~~

$x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$ ~~$\int x_1 dx_1 \int dx_2 - \int x_2 dx_2 \int dx_1$~~

$x_{n-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}$

~~$\int x_1 dx_1 \int x_2 dx_2 + \int x_2 dx_2 \int dx_1$~~

dann ist

$$x_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-1}$$

Also kann ich mein Integral in den Form

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} = \int \sin\varphi_1^{n-2} \sin\varphi_2^{n-1} \dots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

Wenn ich nun dieses Integral bestimmhabe, dann kann ich ein merkwürdiges Integral auffinden. Hier kommt es nun mehr nur darauf an

$\int \sin\varphi^n \, d\varphi$ zu bestimmen. —

Jetzt kommt die Frage der Grenzen.

Unter andern kann ich die Grenzen alle von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ nehmen, und sehe dann nach, welche dann die Grenzen in x sind

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 - 1 = 0$$

Es soll für alle positiven Werthe die diese Gl. erfüllen dieser Ausdruck minimal werden. —

~~Es ist also:~~ Jetzt ist die Frage wie und

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^h \, d\varphi$ bestimmt $= \frac{h-1}{h}\,\frac{h-3}{h-2} \cdots \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$

Wenn $h = 2n+1$

Also

$$\int \frac{dx_1 \dots dx_{2n-1}}{x_n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n 2.4. \dots (2n-2)$$

$$\int \frac{dx_1 \dots dx_{2n}}{x_{2n+1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \cdot 3.5 \dots (2n-1)$$

Wir werden im folgenden wenn

n = gerade Zahl $J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} 2. \; 4 \dots (n-2)$

n = ungerade Zahl $J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} 3.5 \dots (n-1)$

Da wir nun unser Integral ausgedrückt haben in y-s so finden wir das wunderbare Integral. —

$$\int \frac{dy_1 \dots dy_{n-1}}{y_n} \left(a_1 y_1^2 + \dots a_n y_n^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$J_n \int_2^p \frac{dz}{\sqrt{(z+a_1^2)(z+a_2^2)}} = \int \frac{J_n \, dz}{a_1 a_2 \dots a_n} \int \frac{dy_1 \, dy_{n-1}}{y_n \sqrt{z+F}} \int \frac{dy_1 \, dy_{n-1} \, dz}{y_n \sqrt{z+F}}$$

Jetzt ist die Bahn gebrochen solche Integrale zu finden.

Ich setze statt

$a_1^2 = z + a_1^2 + \dots$

$a_n^2 = z + a_n^2$

dann wird das Integral

$\frac{dz}{}$

Dann erhalte ich viele Arten von Integralen. –

Wenn ich mit dz multiplizire und integrire dann erhalte ich das ultra elliptische Integral 1ter Gattung, durch

ein bestimmtes Integral ausgedrückt. –

Auf dieser Bahn soll man nun weiter gehen. –

$$\int_z^\infty \frac{z^{\frac{n-1}{2}}\,dz}{\sqrt{(\alpha_1+\beta_1 z)\dots\alpha_n}}$$

$\frac{n}{2}-p>0$?

Man kann nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen, welche ist diese. –

Wie kann man nun durch Integration oder durch Differentiation neue und neue Integrale ableiten. –

Das Ziel, sämmtliche verschiedenen Integrale der ersten Gattung (ultra-elliptische Integrale) durch bestimmte Integrale auszudrücken. –

Vortrag.

Dupins Problem die Bemerkung, daß wenn man

das Ellipsoid kann man eine Hyperbel

werden, wenn eine Axe negativ wird. —

Das Resultat der [illegible] Aufgabe war,

$$\begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y & f'_z \\ f'_x & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Dies folgt unmittelbar aus Maxima und

Der Coefficient von λ^2 ist

$$f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z$$

Der Coefficient von λ^0

Die Summe der beiden Wurzeln ist

$$= \sum f'^2_x \, \varphi_{xx}$$

Die Variabeln sind dann:

Andere Bemerkung. Diese beiden Krümmungs-

halbmesser stehen auf einander senkrecht,

α_{11}, α_{22},

$21\alpha + 22\alpha + 23\beta$

Dann erhält man $\lambda_1 \lambda_2$, wenn

die beiden Wurzeln nicht gleich sind,

dann müssen sie auf einander senkrecht

stehen. —

Unter: !!!!!! !!!!!!!!!!!!!!!!

15 Juni. Seminar

Gott, du grosser Gnadenkönig
Spitz' dein himmlisch Ohr ein wenig,
Neig es meinem Wimmern hin,
Sieh ich weiss ja, dass ich sündhaft
Und verlor'n hab deine Kindschaft
Und ein Topf des Zornes bin. –
Ei, mein –
Herrgottlein
Zieh dein Sündenschweinelein
In deiner Gnade Koben rein!

Auflösung der gegebenen Aufgabe. –

Wir fanden

$$\cancel{\int \frac{dy_1 \dots dy_{n-1}}{y_n} \cdot \frac{1}{z} + \sum (a_h^2 + y_h^2)^{\frac{n}{2}} = J}$$

Wir fanden: n gerade,

$$\int \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}}{y_n (z + \sum a_h^2 y_h^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{J}{\sqrt{(z+a_1^2)\dots(z+a_n^2)}}$$

Von z bis ∞ integriert

$$\int_z \int \frac{}{} \, dz = \int_z^\infty \frac{J\,dz}{\sqrt{(z+a_1^2)(\quad)(z+a_n^2)}}$$

$$= \int\int \frac{dy_1 \dots dy_{n-1}}{y_n(\cdot y + \sum)^{\frac{n}{2}-1}} = -\frac{n-2}{2} J \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a_1^2+z)}} \int\int \frac{dx_1 dx_2 \cdot dx_n}{x_1 \left(\frac{x_1^2}{z+a_1^2} + \dots \frac{x_n^2}{z+a_n^2}\right)}$$

Dies ist also von der irrationalen auf die rationale Potenz gebraucht. Wenn n gerade so sind beide rational, wenn n ungerade so ist das eine rational das andere irrational.

Wenn ich mehrmals hintereinander

$$\frac{1}{J}\cdot\frac{2^h}{(n-2)(n-4)(n-2h)}\int\frac{dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{y_n\left(z+\sum\right)^{\frac{n}{2}-h}} =$$

$$= \int_z^\infty\!\!\int_z^\infty \frac{dr^h}{\sqrt{z+a_1^2\ldots r+a_n^2}}$$

Das vielfache Integral $f(z)\,dr^h$ von z_0 bis z ~~...~~ ist, wenn die letzte Integration zuletzt genommen wird

$$= \frac{1}{1.2\ldots(h-1)}\cdot x^{h-1}$$

$$\int_{z_0}^{x} \quad = x^{h-1}\int_{x_0}^{x} f\,dr - \int \quad - \frac{1}{h-1}\int_{x_0}^{x} z^{h-1} f(z)\,dz.$$

~~Diese Formel kann~~ ~~...~~ ~~...~~

Hieraus folgt dann in unserem Fall folgende Gleichung besteht, gesetzt $X_p = \int_x^\infty z^p$

$$\int \quad X_p - \frac{p}{1} x X_{p-1} + \frac{p\cdot p-1}{1.2} x^2 X_{p-2} - \text{etc} =$$

$$= \frac{2}{J}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2p\ldots n}{(n-1)(n-2)\ldots(n-2)(p-2)}\int\frac{dy_1\ldots dy_{n-1}}{y_n\left(x+\sum\right)^{\frac{n}{2}-p}}$$

Hierin $x = 0$ gesetzt:

$$X_p = U_p + \frac{p}{1} x U_{p-1} + \frac{p(p-1)}{(n-2)} U_{p-2} + X_p U_0 + X_p.$$

$$X_p = \text{Symb.}\,(U + x)^p$$

$$U_p = \text{Symb.}\,(U_p - x)^p$$

Andere Ableitung.

$$\int\!\!\int\!\!\int_z^\infty \frac{dy_1\ldots f(z)\,dz}{y_n\left(z+\sum a_h^2 y_h^2\right)^{\frac{n}{2}}} = \int_z^\infty \frac{J\,dz\; f(z)\,dz}{\sqrt{(z+a_1^2)\ldots(z+a_n^2)}}$$

$\int\frac{f(z)\,dz}{(z+F)}$ hat man dies gefunden so kommt man auf alle geraden Zahlen.

Hat man $\int\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{z+F}}$ so kann ich alle mit ungeraden Zahlen machen.

~~...~~ Eigentlich brauche ich nur das

orte, denn wenn ich dies Integral bestimmen, so kann ich den Fall n ungerade auf n gerade reduciren. Indem man setzt

$z = \frac{1}{z}$

~~$2k$ $n = 2m+1$~~

Es giebt einige Formen von $f(z)$ wo dies unbeding ausgeführt werden k

$\frac{1}{a-z} = f(z)$

$$= \frac{dz}{(a+F)}\left\{\frac{1}{z+F} + \frac{1}{a-z}\right\}$$

$$\frac{1}{a+F}\log\left(\frac{z+F}{z-a}\right)$$

~~$\int \frac{dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{y_n(z}$~~

$$= +\frac{1}{(a+F)}\log\left(\frac{z-a}{z+F}\right)$$

Dieser Ausdruck muss so lange nach F differentiirt werden bis

$$\frac{1}{a+F+\varepsilon}\left\{\frac{z-a}{z+F+\varepsilon}\right.$$

n gerade

$$\int \frac{dz}{(z+F)^{\frac{n}{2}}(a-z)}$$

$$\left[\frac{1}{a+F+\varepsilon}\left\{\frac{z-a}{z+F+\varepsilon}\right.\right]_{\varepsilon^{-m}}$$

So haben wir das allgemeinste Abelsche Integral gefunden, haben wir

$$\int_z^\infty \frac{dz}{f(z+a_1)\ldots(a-z)}$$ dritte Gattung

Dann bekommen wir 0 us.

2ten Beispiel. Wenn n ungerade ist

$$\int \frac{dz}{(z+F)^{\frac{1}{2}}(a-z)} = \frac{1}{2}\ldots\log z+F$$

Auch dies kann so beh

3tes Beispiel, es sei $f = z^{a-1}$

$$\int \frac{z^{a-1}\,dz}{(z+F)} = \frac{\pi}{\sin a\pi}\, F^{a-1}$$

Also wenn a zwischen beliebt

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{}} = \frac{\pi}{y \sin a\pi} \iiint \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}}{y_n (y_n + F)^{\frac{n}{2}}}\, F^{a-1}$$

Merkwürdig ist dass wenn n ungerade ist man ein Mittel hat das Integral zu bestimmen, wenn ~~n~~ ist es dann

---

Aufgaben.

1. (Sehr einfach wenn man sehen.)
Es soll jetzt nicht mehr ein homogener Ausdruck unten stehen sondern

$dx_1\, dx_2 \,\ldots\, dx_{n-1}$.

$$\frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n\left(\sum\sum (\kappa, \lambda)\, x_\kappa\, x_\lambda\right)^{\frac{n}{2}-p}}$$

Das wesentliche ist dass das bestimmte Integral nicht durch Zwischengrössen sondern durch κ und λ ausgedrückt werden soll. — Es ist jetzt nicht mehr möglich nur für + Werthe an x es zu machen, da wir nicht mehr über ein Octante integriren können, aber über das ganze Gebiet ~~Etwas~~ Die Grenzen sind besonders zu beachten.

$$\frac{\sin \varphi^{n-2} \ldots \sin \varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}}{\sum\sum \kappa\lambda}$$

2

Es soll die Elasticitätsoberfläche ~~soll~~ quadrirt werden. —

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - r^4 = 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Man kann auch . —

Vortrag.

Der Krümmungshalbmesser einer Curve im Normalschnitt einer Fläche deren Gleichung gegeben ist in der Form

$$x = \varphi(u, v) \qquad y = \chi(u, v) \qquad z =$$

Es war $\dfrac{\cos\varphi'}{\rho} = \sum \dfrac{(\psi' u\, \chi' v - \psi' v\, \chi' u) d^2x}{ds^2}$

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{d^2x}{ds^2} + \quad +}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + (\quad) + (\quad)}}$$

$$dx = \varphi' u\, du + \varphi' v\, dv$$
$$dy = \psi' u\, du + \psi' v\, dv$$
$$dz = \chi' u\, du + \chi' v\, dv$$

Dies ist wichtig $\underbrace{ds^2 = du^2 E + 2du\,dv\, F + dv^2 G}$

$$E, F, G$$

$$d^2x = \varphi'' u\, du^2 + 2\varphi'' uv\, du\,dv + \varphi'' v\, dv^2$$
$$+ \varphi' u\, d^2v + \varphi' v\, d^2u$$

$$d^2y =$$

$$d^2z =$$

Ich behaupte dass diese beiden letzten Glieder verschwinden müssen, und zwar weil die ersten die Determinanten der

Normale, die letzten die der Tangente um

$$\frac{1}{\rho} = \frac{U du^2 + W du dv + V dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

$$= \frac{1}{\rho} \sqrt{(EG - F^2)} = y$$

Es wird nun gesucht für welche Werthe dies ein Maximum, oder Minimum wird. – Ferner nennen

$$\frac{U\xi^2 - 2W\eta\xi + V\eta^2}{} = y$$

$$(Ey - U)\xi^2 + 2(yF - W)\eta\xi + (yG - V)\eta^2 = 0$$

Differenziren erstens nach ξ dann nach η, eliminire dann y daraus

$$\begin{vmatrix} E du + F dv, & U du + W dv \\ F du, G dv, & W du, V dv \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist die Gleichung der Krümmungscurven.

$$\begin{vmatrix} Ey - U, & Fy - W, & Fy - \\ Fy - W, & Gy - V & \end{vmatrix} = 0$$

giebt den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser. –

$$\frac{UV - W^2}{EG - F^2} = y_1 y_2$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{UV - W^2}{(EG - F^2)^2}$$

Also ist hier wieder die Hieraus auch $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ abzuleiten

$$U = \left| \begin{matrix} \varphi'' \; \varphi' \\ x''_{uu} \end{matrix} \right|$$

$$W = \left| \quad \right|$$

$$V = \left| \quad \right|$$

Dieser Ausdruck gestattet es auch zu weisen dass die Mensura Curvaturae nur abhängig ist von E, F, G und ihren . –

Also wenn wir Curven die Eigenschaft haben, dann auf jeder dieser Stellen

Das Messure gleich ist . —

---

22 Juni

Jacobi-sche Abhandlung Crelle Journal 12,

Dies ist die Lösung der Aufgabe. –

Wir haben die Aufgabe das Integral

$$\int \frac{\sin\varphi_1^{\,n-2}\,\sin\varphi_2^{\,n-3}\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}}{\left(\sum\sum(\kappa\lambda)\,x_\kappa x_\lambda\right)^{\frac{n}{2}-\rho}}$$

$x_1 = \cos\varphi_1$

$x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$

$x_n = \sin\varphi_n \cdots \sin\varphi_{n-1}$

Dies so zu integrieren dass sämtliche Variabeln ausser der letzten von 0 bis π, die letzte von 0 bis

2π genommen werden. —
Ich will statt der Grössen x andere einführen $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$

$\xi_1 = \cos\varphi_1$

$\xi_{n-1} = \sin\varphi_1 \quad \sin\varphi_{n-1}$

Ausserdem soll werden:

$\sum (kd)\, x_k x_d = \varrho_1^2 y_1^2 + \varrho_2^2 y_2^2 + \ldots \varrho_n^2 y_n^2$

Es muss

$x_1^2 + x_2^2 + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2 = 1$

Still schweigend ist angenommen für keinen Werth zwischen den Grenzen der Variabeln verschwindet, — also sollen sämmtliche Variabeln die 1 nicht übertreffen. —
Es giebt nun eine solche Transformation, die auch in Baltzer zu finden ist. —

$\sum (kd) \cdot x_k x_d = \varrho_1^2 y_1^2 + \varrho_2^2 y_2^2 + \ldots \varrho_n^2 y_n^2$

$\varrho_i^2 \; \Delta\varrho$

Dann ist die Umformung dieses Integrals

$$\int \frac{\sin\varphi_1^{n-2} \sin\varphi_2^{n-3} \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}}{(\varrho_1^2 \sin^2\varphi_1 + \varrho_2^2 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 + \quad + \varrho_n^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

die weitere Aufgabe. — Dies geschieht mit Hülfe des Satzes

$$\int F(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int |R|\, dy_1 \ldots dy_n$$

$\cos\varphi_1 = \alpha_1 \cos\varphi_1 +$

$\cos \quad \text{etc}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots \alpha_n y_n \\ x_n = \nu_1 y_1 + \qquad\qquad \nu_n y_n \end{array}\right\}$$

Hierdurch haben wir die Aufgabe f gelöst...

Hier ist die Aufgabe gelöst, denn wir hatten schon jene Aufgabe.

$$z + a_1^2 \quad + z + a_2^2, \quad \text{als} \quad \text{ist} = \Delta z$$

Also ist die Aufgabe gelöst — die Resultate sind:

$$\int \quad = \frac{2^n(n-2)(n-4)(n-2p)\, J_n}{2 \cdot 4 \cdots (2p-2)} \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\, dz}{\sqrt{\Delta z}}$$

oder wenn nicht $\frac{n}{2} - p$ sondern p als Exponent steht

$$= \frac{2^{n}(n-2)(n-4)(n-2p)}{2 \cdot 4 \cdot \quad 2p-2}\, J_n \int_0^\infty \frac{z^{\frac{n}{2}-p-1}\, dz}{\sqrt{\Delta z}}$$

p ist immer eine ganze Zahl die zwischen Null und $\frac{n}{2}$ liegt, ist n auch eine ganze Zahl so folgt die eine Formel aus der anderen, sonst ist es eine andere Formel. — Der einzige Fall ist noch, wenn der Exponent $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ ist — Dann. — Auch hier ist statt 11 zu setzen $11 + \xi$

$$\cancel{\frac{11 + \xi \quad 22 \quad \cdots \quad 1n}{21}}$$

In den homogenen Ausdrücken ist z zu schreiben.

Es ist gleich, dies gemacht

Wenn man diese beiden homogenen Form f auf die Form bringen kann, so kann man auch eine beliebige

homogene Functionen 2ter Ordnung diese
solches machen. Es bleibt dann noch
folgende Aufgabe hin anschreiben übrig
Wie wird man das Integral

$$\frac{\sin\varphi_1^{\,n-1} \sin\varphi_2^{\,n-2} \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\varphi_{n-1}}{\left(\sum\sum k_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda\right)^N \left(\sum\sum k_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda\right)^M}$$

Es ist klar wie dies zu bes... ist

Denn habe ich beide so umgeformt, so werde ich dies immer auf diesem Weg bestimmen können. — Wenn hier N und M gehörig bestimmt werden so wird man ein

Elasticitätsoberfläche. bleibt auf das nächste mal. —

~~Die Aufgabe ist~~ Parenthese, man suche verschiedene Arten Functionen von x y z die die Gleichung identisch erfüllen. — Man suche sie mit folgendem Leitgedanken. — Die Elasticitätsoberfläche entsteht aus einem Ellypsoid dadurch daß man ~~sich~~ ~~eine~~ eine concentrische Kugelfläche bildet mit dem Radius m, und zu jedem Punkt des Ellypsoids seinen conjugierten Punkt ist. —

$$r\varrho = m^2$$

Dann wird man ~~Zahlen~~ Irgend welche die Ellypsoidgleichung erfüllende Elasticitäts dazu benützen können, welche es fanden.

$$x = \frac{m^2 \xi}{\rho^2}$$
$$y = \frac{m^2 \eta}{\rho^2}$$
$$z = \frac{m^2 \zeta}{\rho^2}.$$

Dann ist doch die Frage wie wird das Ellypsoid aussehen. —

Das Ellypsoid erfüllt, 1) die Bewegungen 2) ~~die Bewegungen~~ ~~3)~~

$$\xi = \frac{\alpha^2 \cos\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2\varphi + \beta^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi +}}$$

$\eta =$

$\zeta =$

3) Stöße welche dadurch entstehen, dass man die Normale an die Elasticitätsfläche setzt, und und da die Kugelfläche immer näher, und so zum Ellypsoid zurückgeht; —

Diese sind praktischer als die genannten Stücke. —

Vortrag. Wir fanden das Kennzeichen auf zwei Wegen. — Wir haben gefunden

$$K = T_1 \, T_2' \, T_2'' \, T_0''$$
$$T_2$$
$$T_3'$$

(?)

Nun gab ich damals die Aufgabe dieses umzuformen. –

Wir haben

$$(\overset{2}{1})\ \sum F_1 \frac{}{\cancel{du}} = \sum F_2 \frac{dx}{dv} = 0$$

Differentiirt diese nochmals so erhält man drei Formeln, sondern man links

$$\sum \frac{d^2x}{du^2} F_1 = - \sum \frac{dx}{du} F'_{1u}$$

$$\sum \frac{d^2x}{du\,dv} F_1 = - \sum \frac{dx}{dv} F'_{1u} = - \sum'$$

$$\sum \frac{d^2x}{dv^2} F_1 = - \sum \frac{dx}{dv} F'_{1v}$$

Wenn man links und rechts die symmetrische Determ. bildet so sieht man ein, dass der für K gefundene Ausdruck auf der rechten Seite stehen, wird, und dafür wird dann gewonnen.

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{Zähler von } K.$$

Nenner $= (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)^2$

Es gehört einige Courage dazu diesen Zähler zu behandeln. – Ich will diesen Zähler ausdrücken durch die Coefficienten von $\mathfrak{L}ds^2$ also durch

$\mathfrak{E} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$

$\mathfrak{F} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}$

$\mathfrak{G} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$

Durch diese wollen wir das aus-
drücken. —
Wir wenden den Produktsatz
an — so folgt 2 Determ.

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u}, & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, & \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Die zweite ist ganz dieselbe nur
~~statt~~ zu setzen $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ statt $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ etc.

Sieht man dies an, so sieht man
ein dass diese Determ. unverändert
bleibt was man auch zu dem Ist-
glieder addirt, um —
Dies beruht darauf,

$$\begin{matrix} 0^{+u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ +^{+u} & + & + \\ + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 \end{matrix}$$

Nun kommt Rechn. erstens E nach
u differentiirt, dann G nach

v differenziren dann E nach v
differenz., und gross E nach
u differen., endlich F nach
u und nach v differenziren. —
Dies giebt sechs Formeln. —

Dann soll man E 2 mal nach u,
G zweimal nach u, dann F
zweimal nach u und nach v,
so erhält man solche Grössen
aus denen allein, die Elemente
der beiden Determ. zusammengesetzt
werden können. —

Man erhält nämlich:

$$K = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & W & V \\ \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial u} & U & W \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial v} & U & W \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial u} & W & V \end{vmatrix}$$

$(UV-W^2)^2$ dividirt durch

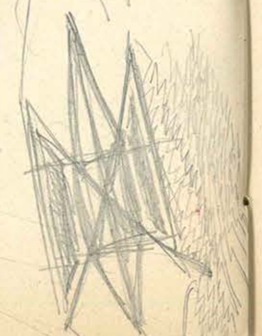
Also ist die Krüm. Quadratur
nur in U V W und ihren par.
Diff. Quot. gefunden. —

Also wenn bei zwei Oberfläch.
der Element ds an einem endlichen
Stück der Oberfläche gleich
sind, d. i. wenn sie sich so einhüllen
lassen, dann eine auf die andere
passt, dann ist bei beiden

1) Mensura curvaturae, 2) Wenn die integra gleich, also sind sie abwickelbar, und dann muss U V W bei beiden gleich sein. —

Ist die eine Fläche eine Ebene, so ist K = 0, (aus der 1ten Formel des Krümmungsmasses). Dies gilt auch für die Kegelfläche, die Spitze ausgenommen. —

Das mit Anwendung ist, dass man dritte partiale Diff. nicht braucht.



[6 Juli]

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-r^4=0$$

$$1 = \frac{x^2}{\sqrt{}} + \frac{y^2}{\sqrt{}} + \frac{z^2}{\sqrt{}}.$$

$$\xi^2 = \frac{x^2}{\sqrt{}} \quad \text{etc.}$$

$$x = \xi\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}$$

$$y = \eta\sqrt{}$$

$$z = \zeta\sqrt{}$$

$$\xi = \cos u \qquad \eta = \sin u\cos v \qquad \zeta = \sin u \sin v$$

~~dS du dv √~~

dies eingesetzt in die Form dS =

$$dS = \sin u\, du\, dv\sqrt{a^4\xi^2+b^4\eta^2+c^4\zeta^2}$$

$$d\sigma = \sin u\, du\, dv\sqrt{\beta^2\gamma^2\xi^2+\alpha^2\gamma^2\eta^2+\alpha^2\beta^2\zeta^2}$$

$$d\sigma = \sin u\, du\, dv\sqrt{\beta^2\gamma^2\cos^2 u+\alpha^2\gamma^2\sin^2 u\cos^2 v+\alpha^2\beta^2\sin^2 u\sin^2 v}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta^2\gamma^2 &= a^4\\ \alpha^2\beta^2 &= b^4\\ \alpha^2\beta^2 &= c^4\end{aligned}\right\}$$

$\alpha = \frac{bc}{a}$ $\beta = \frac{ac}{b}$ $\gamma = \frac{ab}{c}$

Wenn $x = \frac{\xi}{r}$ $y = \frac{\eta}{r}$ [illegible], Thalmann, Schoen, Müller

$$\frac{d\varphi\, d\psi}{r^2} \begin{vmatrix} f & \varphi & f\psi' \\ f & & \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2}$$

Bemerkung es ist das erste und einfachste

$$x = \frac{\frac{\cos\varphi}{a^2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{c^2}}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{c^4}}$$

Da nun

$$\xi = \frac{m^2}{a^2}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + }}$$

Eine:

$$\frac{\frac{\cos\varphi}{a}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{c^2}}$$

Im Ganzen $\frac{m^2}{c}\sin\varphi\sin\psi = \zeta$

ξ und η ebenso.

Die im grund.

$$\xi = \frac{m^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2}}$$

Die Gleichung der Fläche

$$\frac{a^2}{m^4}\xi^2 + \frac{b^2}{m^4}\eta^2 + \frac{c^2}{m^4}\zeta^2 - 1 = 0$$

Noch eine 4te Art diese ist: Nimmt man die Gl. der Elast. Oberfl. ein so scheint es am einfachsten Polarcoordinaten einzuführen

$$r^2 = a^2\left(\frac{x}{r}\right)^2 + b^2\left(\frac{y}{r}\right)^2 + c^2\left(\frac{z}{r}\right)^2$$

Nun $\frac{x}{r} = \cos\varphi$ $\frac{y}{r} = \sin\varphi\cos\psi$ $\frac{z}{r} = \sin\varphi\sin\psi$

so folgt:

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}$$

Ähnlich ist ~~es~~ mit dem Ellipsoid. Wie sieht aber das Oberflächenelement aus. –

Diese Aufgabe zur Generalprüfung.

Resultat ist:

$$ds = r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2 + \left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi}\; d\varphi\, d\psi$$

Dies angewendet für den Fall wenn die Glei- ~~de~~ chung ist allgemein für

$$r = f(\varphi, \psi)$$

$$d\sigma = r\sqrt{f_\psi'^2 + (f^2 + f_\varphi'^2)\sin^2\varphi}\; d\varphi\, d\psi$$

Gesetzt da

$$\lambda = \frac{m^2 x'}{x'x' + y'y' + z'z'}$$

$$\eta = \frac{m^2 y'}{\quad}$$

$$r r' = m^2$$

Sucht man das Element der Conjugirten Fläche

$$r' = \frac{m^2}{f(\varphi\psi)}$$

So ist

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{m^4}{r^4}$$

Das ist der innere Grund davon, dass wenn das eine der Flächen ~~gefunden~~ quadrirt werden kann, dann auch die conjugirte Fläche quadrirt werden kann. Diese Methode könnte man auch auf andere Oberflächen übertragen.

Construction der Elasticitätsfläche

~~Man~~ man betrachte ein

~~Man fälle auf~~ an (bestimmtes Ellipsoid) lege sämmtliche Tangentialebenen, und fälle vom Centrum Perpendikel, und suche die Fusspunktsoberfläche des Ellipsoids. Diese ist die Elasticitätsoberfläche.

Es könnten auch die Normalrichtungsdeterminanten der Elasticitätsoberfläche benützt werden. —

Andere Aufgabe:

$$\int \frac{\sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}}{\left(\sum\sum a_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^? J_n}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} a_{11} + z b_{11}, & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\int \frac{d\Phi}{\left(\sum\sum a_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda\right)^{\frac{n}{2}-p} \left(\sum\sum b_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda\right)^{p}} =$$

$$= \frac{2^n (n-2) \ldots (n-2p)}{2 \cdot 4 \ldots (2p-2)} \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\, dz}{\sqrt{D(z)}}$$

Mir [?] dann man könnte auch noch ~~ein~~ anderes Element dazu nehmen; —

Man kann nun

$$\cos\varphi_1 = \alpha_{11}\cos\psi_1 + a_{21}\sin\psi_1\cos\psi_2 + a_{31}\sin\psi\sin\psi_2 \ldots$$

~~dividirt durch die Summe der Quadr.~~ $\cos\psi_2$

$$\ldots \alpha_{n1}\sin\psi_1\sin\psi_2 \ldots \sin\psi_{n-1}$$

der einzelnen Glieder dieser Zahlen;

$$\sin\varphi_2^{\cos\varphi_2} = \alpha_{12}\cos\varphi_1 + \alpha_{22}\sin \ldots$$

wenn man die n^2 Substitutionscoefficienten so bestimmt dass $\sum a_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ und $\sum b_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 +$ etc. ist, so können

$$\int \frac{\sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}}{\left(a_1^2\cos^2\varphi_1 + a_2^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \ldots\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Von hier aus kommt man zu demselben Integral.

~~Diese~~

Neue Aufgabe. Parallele Oberfläche zu einer anderen zu quadriren —

Parallele Oberfläche ist die welche entsteht, wenn man auf der Normale einer gegebenen Oberfläche ein gewisses Stück aufträgt, und dann da ein gewisses Stück aufträgt. Dies etwa auch durchzuführen bei dem Ellipsoid. —

Weiter Vortrag. Wir fanden

~~K =~~ Ich setze

$$ds^2 = U du^2 + 2W du\, dv + V dv^2$$

Dann fand ich

K = Summe zweier Determinanten.

Orthogonale Darstellung des Oberflächenelements ds

Haben wir orthogonale Curven so wissen wir dass $W = 0$ wird, wir haben also nur K dadurch [zu] vereinen, dass wir $W = 0$ setzen. Thut man dies so wird

$$K = \frac{-\frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial U}{\partial u}, & -\frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial v}, & 0, & V \\ \frac{\partial V}{\partial u}, & U, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v}\right), & \frac{\partial U}{\partial v}, & \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v}, & U, & 0 \\ \frac{\partial V}{\partial u}, & 0, & V \end{vmatrix}\right\}}{U^2 V^2}$$

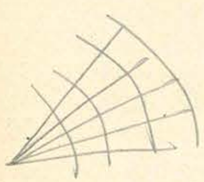
Hieraus:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{UV}}\left(\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\partial \sqrt{U}}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{\partial \sqrt{V}}{\partial u}}{\partial u}\right)$$

~~Weg~~ ~~Ca~~

Unter den vielen orthogonalen Curven giebt es eine Art, die vor allen den Vorzug verdient. Wenn man nämlich an einer Curve ausgehend senkrecht darauf immer gleich lange Linienstücke errichtet.

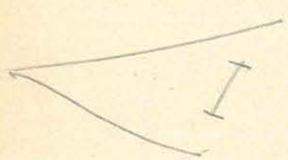
Dieses Curvengitter wird auch geeignet sein, um Aufgaben über die Oberflächen quadratur zu bezwingen. —



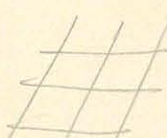
Noch ~~besser~~ ist es die
Ich will eine Art von Gitter vornehmen, analog von Inhaltsformen beliebigen Coordinaten.

$ds^2 = U du^2 + 2W du dv + V dv^2$

Es ~~sollen~~ gehe c_1 c_2 c_3 die erste Art von Curven —



I



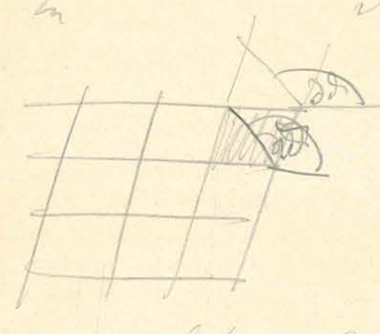
Die eine Curve die
α Curve die andere
die β Curve.

Jeder Punkt auf der Oberfläche ist symmetrisch als Durchschnitt ~~solcher Curven~~. —

Die beiden anliegenden Elemente sind $\sqrt{U}du$ + $\sqrt{V}dv$ auf der v Curve, der Winkel zwischen beiden ist, $2\sqrt{UV}\cos\omega$ —

Die Winkel zwischen beiden Elementen sei ω, der Inhalt der Curven die wird gefunden $\sqrt{UV}\sin\omega\, du dv$.

oder $\sqrt{UV - \omega - W^2}\, du dv$.



Nun nenne ich den Winkel zwischen ds und $\sqrt{U}$, du richtig gewählt nenne ich ϑ so hat man

Dies ϑ hat die Eig

$\cos\vartheta ds = U v +$

$\sin\vartheta ds = \dfrac{(\sqrt{UV - W^2})dv}{\sqrt{U}}$

Dies ist gerade zu hinzuschreiben, denn dies folgt durch Projection von ds auf eine Seite des Dreiecks — und der andern — wenn nun die Linie denn...
ist, so folgt

$$\sqrt{UV - W^2}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{W}{U}\, dU + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial v}\, dU$$

$$- \frac{\partial W}{\partial u}\, u - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial u}\, dv$$

Es ist das eine Formel die gerade aus der Variationsrechnung folgt. — Wenn $W = 0$ ist so ist

$$\underbrace{2\sqrt{UV}\, d\vartheta = \frac{\partial U}{\partial v}\, du - \frac{\partial V}{\partial u}\, dv}$$

Wenn v = Const. auch kürzeste Linien bedeuten so ist doch nach der Formel, für v = Const. ist $dv = 0$ also $d\vartheta = 0$, also dies von die eingesetzt Diese Formel hineingesetzt sehe ich dann für jeden Werth von v der Const $\frac{\partial U}{\partial v}$ verschwindet also ist bei dieser Setzung von U unabhängig von v, ist also nur von u abhängig.

Es sei u die Länge der Linie der ersten Art selbst, dann ist

$$U = 1$$

denn $\sqrt{U}\, du$ war die Länge des Elements. — Wenn also

$$V = \text{Const.}$$

die kürzeste Linie ist, so war

$$U = 1 \text{ denn}$$

$$ds^2 = du^2 + V dv^2$$

Es sollen die Linien der 2^{ten} Art so beschrieben sein —, es soll dann nun gewesen —

Das Krümmungsmaß ist dann

$$k = -\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{\partial^2 \sqrt{V}}{\partial u^2} \qquad d\vartheta = -\frac{\partial \sqrt{V}}{\partial u}\cdot dv$$

Bemerkung: Wir sind nun vorbereitet darauf die Curvatura Integra zu studieren.

auf jeder beliebigen Oberfläche zu beziehen
welche durch
Wir können

$$\underbrace{d\sigma = K\,dS}$$

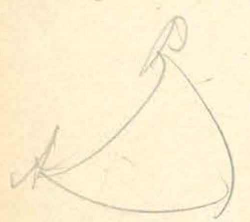
~~Dadurch~~ alles ausdrücken durch $\frac{dS}{uv}$

$$dS = \sqrt{u}\,\frac{\partial u}{\partial v}\cdot du\,dv\,.$$

Also haben wir —

$$\int d\sigma = -\int \frac{\partial^2 \sqrt{v}}{\partial u^2}\,du\,dv$$

Ich kann also von einem Elementhey die Curvatura Integra, so einfach ausdrücken, dass die Integration ergiebt, dass die Curvatura integra über ABC gleich



$$(A + B + C) - \pi$$

d. i. der sphärische Exzess —
Die Curvatura integra ist eine dieselbe. —

Also sind wir zu Ende gelangt von dem Gegenstand dieser Untersuchungen sind. —

13 Juni

Darum dass die Oberflächen parallel sind folgt dass die Normale zu einer Normal zur anderen ist. —

Tanio

~~Man wird also dass~~

~~Das~~ Das Krümmungsmaass ist

$\rho_1 \quad \rho_2$

$\rho_1 + m \quad \rho_2 + m$

$\frac{d\sigma}{ds} = k \qquad \frac{d\sigma}{dS} = K$

$= \frac{1}{\rho_1\rho_2} \qquad = \frac{1}{(\rho_1+m)(\rho_2+m)}$

$$\frac{d\sigma}{dK} = dS$$

Rubelots Aufg.

Es seien $\varrho_1\ \varrho_2$ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der gegebenen Oberfläche. —

ϱ_1 = der Werth neu gleicher nächster Normalen

ϱ_2 — — —

in der darauf senkrechten Hauptkrümm... —

Wenn man nun in jedem dieser Radien um m weiter geht, und einen Kreis beschreibt um den Krümmungs-Mittelpunkt, so müssen doch die dadurch entstandenen Bogen ds_1 und ds_2 auch auf sie ander und auf die verlängerten Krümmungshalbmesser senkrecht stehen — und

daher die Elemente der Hauptkrümmungscurven. —

Also ist die parallele Oberfläche wirklich parallel. —

Nun weiss ich dass

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = k \quad \text{u}$$

$$\frac{1}{(\varrho_1+m)(\varrho_2+m)} = K \text{ ist.}$$

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{d\sigma}{ds} \qquad \frac{1}{\varrho_1+m\,,\,\varrho_2+m} = \frac{d\sigma}{dS}$$

$$dS = d\sigma(\varrho_1\varrho_2 + m(\varrho_1+\varrho_2) + m^2)$$

$$\int dS = \int ds + m\int d\sigma(\varrho_1+\varrho_2) + 4m^2\pi$$

Es fragt sich hier nur noch noch

$$\int d\sigma(\varrho_1+\varrho_2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=W$$

$U=$

$V=$

$$dx^2+dy^2+dz^2=$$

$$=U\,du^2+2W\,du\,dv+V\,dv^2$$

$$\frac{U'V+V'U-2WW'}{UV-W^2}$$

$$\int d\sigma(\varrho_1+\varrho_2)=\int du\,dv\,\frac{(U'V+V'U-2WW')}{UV-W^2}$$

$$\cancel{\frac{x^2}{a^2}\left(x^2+y^2+z^2-4r^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4r^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}$$

Die Gleichung der zum Ellipsoid parallelen Oberfläche ist:

$$\underbrace{\left(\sum\frac{x^2}{a^2}(r^2-m^2)+x^2\right)^2=4r^4\sum\frac{x^2}{a^2}}$$

Analytische Lösung von Richelot.

Es sei $\underbrace{X=x+d\xi}$

$X\,Y\,Z$ Coord. der parallelen,

$x\,y\,z$ Coord. der correspondirenden

$\xi\,\eta\,\zeta$ Richtungsdeterminanten der Normale an die Oberfläche

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left(\;\right)^2 = d^2 = \text{Constant}.$$

Nach u und nach v partiell differentiirt erhalte ich zwei Gleichungen wo von

$$\underbrace{\sum (X^{\prime}-x)\frac{\partial X^{\prime}}{\partial u} = \sum (X^{\prime}-x)\frac{\partial x}{\partial u}}$$

dasselbe ist

$$\sum (X-x)\frac{\partial X}{\partial v} = \sum (X-x)\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ersetzt man da

$$X-x = d\xi \quad \text{etc.}$$

So weiss ich dass ich Null herausbekommen — denn die Normale

$$\xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad : \quad :$$

Also haben

$$X-x : Y-y : Z-z = \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} :$$

Das ist der Beweis des Satzes dass die Normale nur einen Normal ... die andere ist.

Jetzt haben wir die ~~Summe~~ Aufgabe die Summe der drei Quadrate

$$\int\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\;\right)^2 + \left(\;\right)^2}\,du\,dv$$

zu finden.

Alles kommt darauf an diesen Ausdruck umzuformen. Zu ... der Kürze wegen schreiben wir

$$\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2}$$

umformen.

In den kleinen Buchstaben kann

ich dasselbe mit

$$\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$$

$$\varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_2 + \varphi_3 \Phi_3$$

Dies folgt daraus ~~da~~

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$$

Es kommt nur alles darauf an

$$\varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_2 + \varphi_3 \Phi_3 \; ($$

zu bestimmen. Dies ist aber eine Determinante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Dies soll in den kleinen ausgedrückt werden.

Es sei gesetzt:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \varphi^2$$

$$\left|\begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\varphi_2}{\varphi} & \cdot \end{matrix}\right|$$

Die erste Reihe multiplicirt mit

$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}$. $\frac{\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\varphi^2}$

u. s. w. Dann folgt, dass man φ unten abrechnen [illegible]

$$= \left|\begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\lambda}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \text{etc} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right| \frac{du\,dv}{\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}}$$

Dies ist die Aufl. der Aufgabe in der elegantesten Form.

Es ist aber

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2 = \left|\begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix}\right|$$

Zähler und Nenner damit multiplicirt, um product ~~zu~~ zusammenzu[illegible]

$$= \frac{du\,dv \quad \times \text{Mal}}{\left(\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}\right)^3} \left|\begin{matrix} \Sigma\varphi_1^2 & \frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\ 0 & & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\ 0 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \end{matrix}\right|$$

Resultat:

$$\iint \frac{\left|\begin{matrix} U+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\varphi_1'u, & W+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\varphi_1'v \\ W+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\varphi_1'u, & V+\frac{\lambda}{\varphi}\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\varphi_1'u \end{matrix}\right|}{\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}^{(3)(2)}}\,du\,dv$$

Ellypsoid.

Da ist es sehr einfach, dabei kommt man zu einer besonderen Bedeutung des zweiten Gliedes. —

~~Ellypsoid~~

Aufgabe Quadrirung der der Elasticitäts-fläche parallelen Fläche. —

Die Wellenfläche hat noch kein mensch quadrirt. —

Vortrag: Zieht man auf einer Oberfläche kürzeste Linien so erhält man orthogonale Curven —

B sei das Ende einer kürzesten Linie.

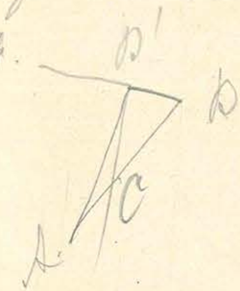
BB' sei = ∞, Es sei doch

B um einen endlichen Winkel ω verschieden von $\frac{\pi}{2}$.

$$\underbrace{B = \frac{\pi}{2} - \omega}$$

~~Der Winkel B' um also um~~ klein

Es folgt daraus dass B'+ω bis auf Grössen erster Ordnung auch $= \frac{\pi}{2}$ ist.



Wenn also $\sphericalangle BB'C = \frac{\pi}{2}$ ist so ist

$\Delta B'BC$ ein unendlich klein

D. i. hat unendlich kleine Seiten

Da $\sphericalangle B'$ um $\sphericalangle B$ um endliche ~~...~~ $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind. —

Wir wollen es noch analytisch nachweisen. —

Wir wollen annehmen es sei
ds' das Element der Fernpunkten curve dann
also dx' dy' dz' seine Projectionen auf
den Axen.

$$\frac{dx'}{ds'} = \frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial s'}{\partial v}$$

$$\frac{dy'}{ds'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial s'}{\partial v}}$$

Denn

$u = \text{Const.}$

gab mir die Curve worauf ds' gerechnet
wird. $\frac{dx'}{ds'}$ muss also lediglich gefol-
gert werden können, aus den Theilen
von dx' dy' dz' die erhalten werden,
wenn ich $u = \text{const.}$ setze

$$dx' = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

$$ds' = \frac{\partial s'}{\partial v} dv.$$

$$\cos(ds, ds') = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial s'}{\partial v}}$$

ds'
$\rangle\, ds$

$\frac{\partial s}{\partial u} = 1$, wenn u ist jede Länge

$$\frac{\partial s'}{\partial v} \cos(ds, ds') = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

Nun man dies nach u partiell differenz-
so findet man, dann es = Null wird.
Ich erhalte rechter Hand zweierlei
Arten von Gliedern:

$$\frac{\partial \frac{\partial x}{\partial u}}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = F'_x : F'_y : F'_z$$

Also ist der Satz auch analytisch bewiesen. —

$\frac{ds'}{dv} \cos(ds, ds')$ ist also von u unabh.
es ist nur eine Function von v.
Könnte ich ihn also nur für irgend einen Werth von u bestimmen.

$\frac{ds'}{dv}$

Da dies unabhängig von u.
Dies analytischer Beweis.
Irgend eine Curve darauf gleich lange kürzeste Linien, so ist die Trennpunkt Curve derselben auch orthogonal —
Dies wird ganz ebenso bewiesen, nur dass u hier angenommen wird

Wir brauchen nun ∂

$$\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial v} =$$

Für einen unendlich kleinen Werth von u ist der Punkt ein Kreis um a. und ein Bogen.

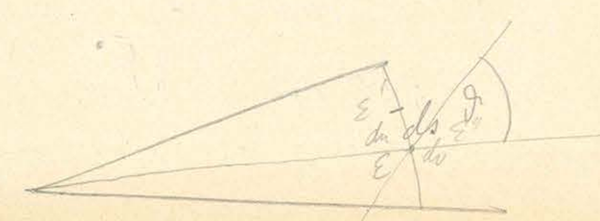
$$ds^2 = V dv^2 + U du^2$$

$$ds = \sqrt{V} dv$$

Wir erhalten also den Bogen mit dem unendl. kleinen Radius ε.
Für $u = 0$ wird $u = \sqrt{V}$ gesetzt werden können.

$$\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial u} = 1 \quad \text{für } u = \varepsilon$$

Wir brauchen noch $d\vartheta$



Wir wollen annehmen:

$$\left.\begin{aligned} dx &= a\,du + a'\,dv \\ dy &= b\,du + b'\,dv \\ dz &= c\,du + c'\,dv \end{aligned}\right\} \varphi$$

$$a = \frac{\partial x}{\partial u} \qquad a' = \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{etc.}$$

Nennen ich den Punkt aus den der ein[illegible] so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\sum a(a\,du + a'\,dv)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\sum(a\,du + a'\,dv)^2}}$$

Es kommt es jetzt darauf an dies umzurechnen und erhält etwas den Polarcoordinaten ähnlich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

$$a'a' + b'b' + c'c' = V$$

Daher ist

$$d\vartheta = \frac{dU}{\sqrt{dU^2 + V\,dv^2}}$$

$$-\sin\vartheta\,d\vartheta = \sum \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\, d\,\frac{a\,du + a'\,dv}{V} +$$

$$+ \sum \frac{a\,du + a'\,dv}{V}\left(d\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

Nun ist $a^2+b^2+c^2=1$

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

nach u und nach v partiell differenzieren

$$\sum a\,da = 0 \qquad \sum \quad = 0$$

Es ist aber $\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}$

$$\sum a\frac{\partial a'}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum a'\frac{\partial a}{\partial u} = 0$$

$$\underbrace{aa' + bb' + cc' = 0}$$

$$\sum a\frac{\partial a'}{\partial u} + \sum a'\frac{\partial a}{\partial u}$$

$$\sum a \frac{\partial(a\,du + a'\,dv)}{\sqrt{du^2 + V dv^2}} \quad \frac{+\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial v} \cdot dv^2,}{\sqrt{du^2 + V dv^2}}$$

Die andere Formel daraus genommen und den Sinus daraus bestimmt

$$-d\vartheta = \frac{\partial\sqrt{V}}{\partial v}dv + \frac{\sqrt{du^2 + V dv^2}}{\sqrt{vv}\sum a\,du\frac{\partial'}{\partial v}}$$

Haben wir die kürzeste Linie vor uns, so wird das zweite Glied so wie früher = null. —

$$d\vartheta = -\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial v}dv$$

Wir wollen nun noch die Quadratur integres dieses Dreiecks aufsuchen.

$$k = -\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{d^2V}{du^2}$$

$$d\sigma = k\sqrt{V}\,du\,dv.$$

Weil $ds^2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\iint d\sigma = -\iint \frac{d^2\sqrt{V}}{du^2}du\,dv.$$

Wir können 1 mal integriren

$$= -\int dv\left(\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial u} - C\right)$$

Genommen von $u = 0$ bis $u = a$

kann man die Const. bestimmen.

$$= -\int dv\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial u} - 1$$

Das ist weiter zu integriren

$$\frac{\partial\sqrt{V}}{\partial v} - du = -d\vartheta$$

$V + \vartheta + C$

Also Curvatura integra $= V + \vartheta + C$

oder die Integrum dieser Ände[illegible] von $V=0$ bis $V=a$ — Das zweite von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=1$

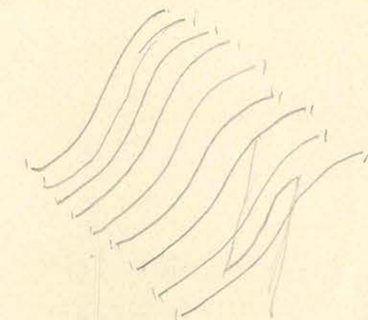
$$\vartheta_0 = \pi - B$$

$$\vartheta_1 = C$$

Die Curvatura ist

$$= A + B + C - \pi$$

d.i. die Curvatura integra gleich der sphärischen Excesse. —



Die Curvatura integra ist einer eine Th[illegible] und nicht kann auf den einen, wenn ich also Curvatura integra übertrage auf den Umfang der Polarfigur, so kann ich auf ein Sechseck. Der Umfang dieses Sechs[ecks] lässt sich dass $A + B + C - \pi$ bestimmen. —

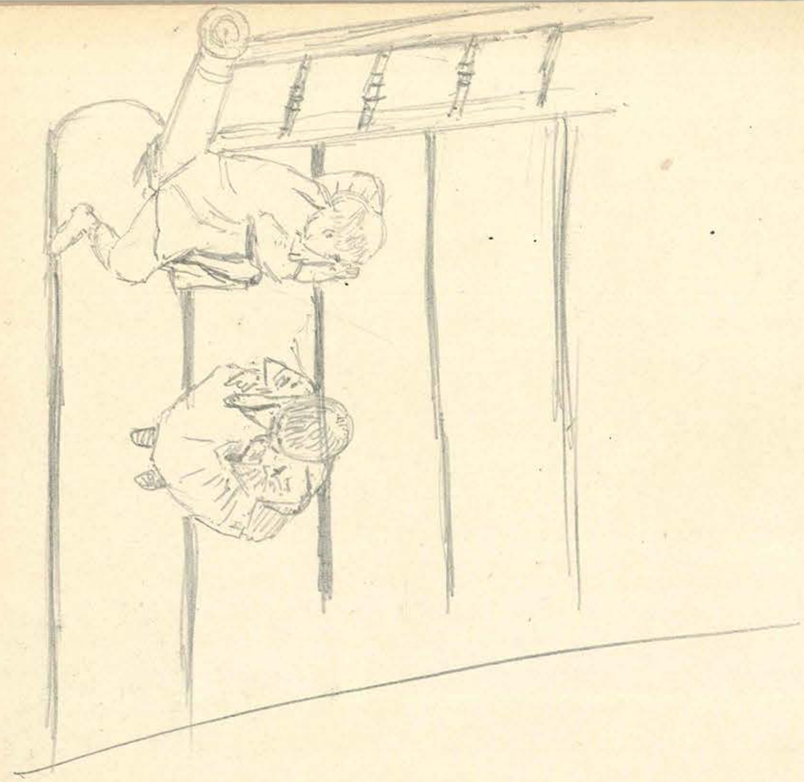
Man sehe in der Curve die von Polar ziehen will an dem Punkte ein berührenden grossen Kreis und suche den Pol dazu,

wenn nun die Figur eine Ecke bildet
so kommt es vor

Durch das Polarisieren erhält [illegible]
[illegible]

Es ist ganz gleichgültig ob die —
[illegible] —

Es fragt sich, sind wir im Stande das
Licht von [illegible] [illegible] zu [illegible]
auf eine Ebene an beliebigen [illegible]
[illegible] [illegible]



$$\rho_1 = \cancel{\;\;} \qquad - \cancel{2pqs + (1+q^2)}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+\cancel{b}+a-\cancel{b}}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{2a}{a^2+b^2}$$

$$\frac{2\left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+q^2)t\right]N}{rt - s^2}$$

$$= +$$