Eötvös Loránd [illegible] egyetemi jegyzetei

$$\xi' = \xi + \alpha_0(x+u) + \alpha_1(y+v) + \alpha_2(z+\omega)$$
$$\eta' = \eta + \beta_0(x+u) + \beta_1(y+v) + \beta_2(z+\omega) \quad \cdots (4)$$
$$\zeta' = \zeta + \gamma_0(x+u) + \gamma_1(y+v) + \gamma_2(z+\omega)$$

Die Transformationsgleichungen zwischen II und III zeigen dass $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ Functionen von $x+s,\ y,\ z$ sind also, wenn:

$$\frac{\partial\xi'}{\partial x} = \frac{\partial\xi'}{\partial s}$$
$$\frac{\partial\eta'}{\partial x} = \frac{\partial\eta'}{\partial s}$$
$$\frac{\partial\zeta'}{\partial x} = \frac{\partial\zeta'}{\partial s}$$

Diese Gleichungen sollen mit Hilfe von (4) gebildet — wie schon bemerkt sind in diesen: ξ, η, ζ allein Functionen von s, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots$ etc auch allein Functionen von s — u, v, ω Functionen von x und s, also:

$$\alpha_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha_1\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{d\xi}{ds} + \frac{d\alpha_0}{ds}(x+u) + \frac{d\alpha_1}{ds}(y+v) + \frac{d\alpha_2}{ds}(z+\omega) + \alpha_0\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_1\frac{\partial v}{\partial s} + \alpha_2\frac{\partial\omega}{\partial s}$$

$$\beta_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta_1\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{d\eta}{ds} + \frac{d\beta_0}{ds}(x+u) + \frac{d\beta_1}{ds}(y+v) + \frac{d\beta_2}{ds}(z+\omega) + \beta_0\frac{\partial u}{\partial s} + \beta_1\frac{\partial v}{\partial s} + \beta_2\frac{\partial\omega}{\partial s} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\gamma_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \gamma_1\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{d\gamma_0}{ds}(x+u) + \frac{d\gamma_1}{ds}(y+v) + \frac{d\gamma_2}{ds}(z+\omega) + \gamma_0\frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_1\frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_2\frac{\partial\omega}{\partial s}$$

Diese Gleichungen der Reihe nach mit α_0, β_0, γ_0 multiplizirt, addirt, dann Rücksicht genommen auf die Beziehungen zwischen den Grössen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ etc. – erhalten wir den Ausdruck für $\frac{\partial u}{\partial x}$. – In diesem setzen wir:

$$
(6) \ldots \quad
\begin{aligned}
p &= \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{ds} \\
q &= \alpha_2 \frac{d\alpha_0}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_0}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_0}{ds} \\
r &= \alpha_0 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_0 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_0 \frac{d\gamma_1}{ds}
\end{aligned}
$$

ferner:

$$
(7) \ldots\ldots \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\right)^2} - 1
$$

ε die Dilatation eines Stabtheils. –
Das Verhältniss der Cosinuse der Winkel welcher ein Element mit der X Axe bildet ist:

$$
\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = \frac{d\xi}{ds} : \frac{\partial \eta}{\partial s} : \frac{\partial \zeta}{\partial s}
$$

Aus diesem Verhältniss und aus (7) folgt:

$$
(8) \ldots\ldots \quad \frac{d\xi}{ds} = \alpha_0(1+\varepsilon) \qquad \frac{d\eta}{ds} = \beta_0(1+\varepsilon) \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_0(1+\varepsilon)
$$

Mit Hülfe von (6) und (8) ergiebt sich der vereinfachte Ausdruck von $\frac{\partial u}{\partial x}$. –
Die Multiplication der Gleichungen (5) der Reihe nach mit α_1 β_1 γ_1; dann mit α_2 β_2 γ_2, giebt auf ähnlichem Wege die Ausdrücke für $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$ — es sind diese:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + r(y+v) - q(z+w) + \varepsilon$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s} + p(z+w) - r(x+u) \qquad \ldots\ldots \qquad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial s} + q(x+u) - p(y+v)$$

Wir suchen die Werthe u, v, w – so darzustellen dass sie der Gleichung (2) genügen – in derselben kommt F die Function von X_x, Y_y ... etc, ~~X_y Y_x ... etc~~ vor – die erste Aufgabe sei nun die ersteren dieser Grössen durch u v w darzustellen. –

Es werden die Grössen u, v, w vollständig ausgedrückt durch die Integrale:

$$u = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)$$

$$v = \int\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)$$

$$w = \int\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)$$

Es ~~sind~~ ~~dx~~ können dx dy dz als Projectionen eines Elementes, einer Linie betrachtet werden, welche zwischen P und dem Punkte x y z gelegt ist – es ist also das Integral auf diese Linie auszudehnen wobei für x = 0 y = 0 z = 0 auch v = 0 w = 0 u = 0 ist

Es ist x, y, z unendlich klein – also, wie aus diesen Integralen ersichtlich ist u, v, w unendlich klein gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ etc; unendlich klein gegen alle ihre Differential Quotienten nach x, y, z. –
Diese Differentialquotienten sind aber auch unendl. klein – wie dies die erwähnten Integral Ausdrücke ersichtlich machen –; folglich müssen u, v, w auch gegen x, y, z unendlich klein sein. –
In folge dessen gestalten sich die Ausdrücke (9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + ry - qz + \varepsilon$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

s ist unendl. groß gegen $x\ y.\ z$ folglich; $\frac{\partial u}{\partial s}$ unendl. klein gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ry - qz + \varepsilon$$

(10) .... $$\frac{\partial v}{\partial x} = pz - rx$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = qx - py$$

Diese Gleichungen mit dx multiplizirt, dann integrirt folgt:

$$u = u_0 + (ry - qz + \varepsilon)x$$

(11) ..... $$v = v_0 + pxz - \frac{rx^2}{2}$$

$$w = w_0 + q\frac{x^2}{2} - pxy$$

u_0, v_0, w_0 sind Constanten der Integration, man erhält sie indem man $x = 0$ setzt; sie sind daher auch von x unabhängig, und enthalten allein die Variabeln y, z, und S. –
Die Bedeutung der Grössen x_x y_y z_z etc ist auf Seite 36 angeführt; die darin zu substituirenden Werthe enthalten die Gleichungen (11), so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}
x_x &= ry - qz + \varepsilon \\
y_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
z_z &= \frac{\partial w_0}{\partial z} \\
y_z &= \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
z_x &= \frac{\partial u_0}{\partial z} - py \\
x_y &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + pz
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (12).$$

Der zu bildende Ausdruck F enthält noch die Grössen X_x, Y_y, etc; diese werden durch die Gleichungen I des ersten Abschnittes – und gewisse Grenzbedingungen bestimmt. –
Bilden wir zuerst (I §7.) – Wir sahen wie X_x etc als Functionen von x_x etc darstellbar sind (z.B. Gl. 25 Abschn. I) – die letzteren Grössen drück-

ten wir eben durch $u_0\ v_0\ w_0$, aus, wir bemerkten dass diese von x unabhängig sind also $\frac{\partial X_x}{\partial x}$, $\frac{\partial Y_x}{\partial x}$, $\frac{\partial Z_x}{\partial x}$ werden $=0$; und so wenn $\varrho=1$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=X$$

$$\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=Y$$

$$\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=Z$$

Die Diff. Quotienten X_y, X_z etc. sind von der Ordnung der Grössen $p.q.r$, also endlich; dagegen sind die Componenten der formändernden Kraft X, Y, Z unendlich klein – es sind ja Kräfte, die auf Körper von überall endlichen Dimensionen unendl. kleine Formänderungen hervorbringen. – Als Beispiel kann die Formänderung eines Körpers in Folge der Schwere dienen. – Also reduciren sich die Gleichungen:

$$(13)\ldots\left\{\begin{aligned}\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}&=0\end{aligned}\right.$$

Die Werthe in (12) zur Bildung von X_x etc benützt erhalten wir partielle Differential Gleichungen 2ten Grades – die Lösungen derselben sind dann noch von den Grenzbedingungen des ~~Stabes~~ Stabes abhängig.– Die Gleichung der Contoure des Querschnittes, also eine Function von x und y, sei:

$$g = 0$$

Die Oberfläche des Stabes sei vom äusseren Drucke frei – sehen wir von dem in der Natur unvermeidlichem Luftdrucke ab; dann $(X) = 0$ $(Y) = 0$ $(Z) = 0$ gesetzt – ergeben die auf Seite 24 angeführten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (14)$$

Den Gleichungen (3), (6), (11), (13) (14) genügend haben wir nun u, v, w ~~zu bilden~~, und dann nach (12) x_x, y_y etc. erst zu bilden – es ergeben sich die letztgenannten Grössen als homogene Functionen ersten Grades von p, q, r, τ; – und von x unabhängig. –

Mit Hülfe dieser Werthe stellt sich auch F.

als eine von x unabhängige Function – die in Bezug auf p, q, r, ε vom 2ten Grade und homogen ist. –

Dieser Werth von F dient zur Bildung des Ausdruckes zwei – In Folge der Unabhängigkeit F's von x, lässt sich die Integration nach dieser Variable ausführen – die Grenzen dabei sind 0 und ds – so wird:

$$\iiint F\,dx\,dy\,dz = ds \iint F\,dy\,dz$$

und

$$\sum \iiint F\,dx\,dy\,dz = \int ds \iint F\,dy\,dz$$

wo die erste Integration in Bezug auf die ganze Länge des Stabes – die zweite Doppelte dagegen auf die Fläche des Querschnittes auszudehnen ist – wir setzen

(15) ..... $$\iint F\,dy\,dz = f$$

sind f eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, ε – Also wird (2,

(16) .... $$0 = \delta\Omega - \delta\int f\,ds$$

§24. – Die Function f für einen unkrystallinischen runden Stab. –

Die bis jetzt angestellten Betrachtungen machten in Bezug auf das isotrope oder anisotrope Verhalten des Körpers keine Beschränkung; – wir nehmen jetzt an der dünne Stab wäre k. unkrystallinisch. – Die Beziehungen zwischen X_x etc: und x_x etc. stellten wir für unkryst. Körper im ersten Abschn. Gleich. (25) auf – diese lassen sich auch in folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -2K\left\{x_x + \vartheta(x_x + y_y + z_z)\right\} \\
Y_y &= -2K\left\{y_y + \vartheta(x_x + y_y + z_z)\right\} \\
Z_z &= -2K\left\{z_z + \vartheta(x_x + y_y + z_z)\right\} \\
Y_z &= -K y_z \\
Z_x &= -K z_x \\
X_y &= -K x_y
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Die Gleichungen (12) zeigen dass Z_x und X_y allein von u_0; Y_y, Z_z und Y_z dagegen allein von v_0 und w_0 ti abhängig sind — das System von Gleichungen also welchem u_0 v_0 w_0 entsprechen müssen; zerfällt in zwei Gruppen deren eine nur u_0 deren andere dagegen nur v^0 und w^0 enthält — u_0 kann also abgesondert von v_0 und w_0 bestimmt werden, ebenso v^0 und w_0 abgesondert von u_0. So besteht:

(A) für u_0

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

für $g = 0$

$$X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

für $y = 0$, $z = 0$ auch $u_0 = 0$

(B) für v_0 und w_0

$$\frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

für $g = 0$

$$Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

und für $y = 0$, $z = 0$

$$v_0 = 0, \quad w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

Behandeln wir erstens die Gruppe (B)

Den ersten vieren dieser Gleichungen genügen wir, indem wir setzen:

$$Y_y = 0 \quad Z_z = 0 \quad \text{und} \quad Y_z = 0$$

dann wird aus (17)

$$y_y = z_z = -\frac{\vartheta}{1+2\vartheta}(ry - qz + \varepsilon)$$

$$y_z = 0$$

Stehen aber diese Werthe von y_y, z_z, y_z nicht in Widerspruch, mit den (12), u zwar speciell mit:

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = y_y$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = z_z$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = y_z$$

Differenziren wir die erste dieser Gleichungen 2 mal nach z; die zweite 2 mal nach y und die dritte einmal nach y und noch einmal nach z — und addiren dann die 1te u. 2te, subtrahiren die 3te dieser Gleichungen so folgt:

$$\frac{\partial^2 y_z}{\partial y \partial z} = \frac{d^2 y_y}{dz^2} + \frac{d^2 z_z}{dy^2}$$

Eine Gleichung die immer erfüllt wird wenn y_y, z_z, lineare Functionen von x, y, z sind — und dies sind sie ja eben in diesem Falle. — Bilden wir nun die Gleichungen für v_0 u w_0. — Denken wir uns von dem Punkte $x=0$, $y=0$

nach dem Punkte x, y, z eine Linie gezogen – dessen Projection auf die yz Ebene $= w_0$ ist – dann folgt:

$$w_0 = \int \frac{\partial w_0}{\partial y} dy + \frac{\partial w_0}{\partial z} dz$$

Da nach (B) für $y = 0$ und $z = 0$, auch $w_0 = 0$ sein muss – so ist durch dieses Integral der Werth von w_0 vollkommen gegeben. –

Es ist dann:

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = \int \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \, \partial z} dz$$

durch dies Integral ist $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ auch vollkommen gegeben es muss ja $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ für $x = 0$ und $y = 0$ gleich 0 werden – und eben $x = 0$ $y = 0$ ist die untere Grenze des Integrals. –

Mit Hülfe der Gleichungen zwischen v_0 und $\mathfrak{Y}_y$ etc. auf der vorangehenden Seite, ~~lassen~~ erhält das Integral folgende Form:

(18) ...... $$\frac{\partial w_0}{\partial y} = \int \left(\frac{\partial y_z}{\partial y} - \frac{\partial y_y}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial \text{[illegible]}}{\partial y} dz$$

~~Dies ist~~ Hieraus folgt der Werth von w_0 welcher dem System der Gleichungen (B) entspricht. –

Für eine andere Projection v_0 der Linie ist:

$$v_0 = \int \frac{\partial v_0}{\partial y} dy + \frac{\partial v_0}{\partial z} dz$$

v_0 vollkommen ge angedrückt da für $y=0$ und $z=0$ auch $v_0 = 0$

Also:

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = (Y_z)_0 + \int \frac{\partial Y_y}{\partial z} dy + \left(\frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial y} \right) dz \quad \text{-------} \quad (19)$$

Es ist $(Y_z)_0$ der Werth dieses Ausdruckes für die Grenze $y=0$, $z=0$ — wir haben ja:

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = Y_z$$

für $y=0$, $z=0$ wird dann

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = (Y_z)_0$$

(18) und (19) sind geben die Werthe v_0 - und w_0 für welche:

$$Y_x = 0 \qquad Z_x = 0 \qquad Y_z = 0$$

und für welche das System (B) besteht. — Es können diese letzteren Formeln auch auf krystallinische ~~Medien~~ Stäbe angewendet werden — insofern die Axe derselben eine Axe der Symmetrie ist. —

Wir wollen uns nun zu dem Systeme (A) wenden — die erste Gleichung:

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

wird dann mit Hülfe von (17) und (12)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

dann die Grenzbedingung:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + pz\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - py\right)\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Wir machen die Annahme der Querschnitt des Stabes, wäre eine Ellypse dann ist

$$g = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Die Gleichung der Grenzbedingung ist dann:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + pz\right)\frac{y}{b^2} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - py\right)\frac{z}{c^2} = 0$$

Dieser Bedingung kann genügt werden gesetzt

$$u_0 = Ayz$$

dann wird, die Gleichung:

$$\frac{A+p}{b^2} + \frac{A-p}{c^2} = 0$$

hieraus:

$$A = p \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$$

folglich:

(20) - - - - - - - - - $u_0 = p \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \cdot y \cdot z$

Demnach entspricht u_0 allen Bedingungen von (A). –

Ist der Querschnitt des Stabes ein Kreis so wird $b = c$, und folglich $u = 0$; dies ist der weiter zu betrachtende Fall. –

Die Werthe von y_y, z_z, und y_z, welche dem v_0 und w_0 entsprechen fanden wir bereits — wir bilden mit Hülfe von (12) auch noch die andern Grössen: —

$$\left.\begin{aligned}
x_x &= ry - qz + \varepsilon \\
y_y &= -\frac{\vartheta}{1+2\vartheta}(ry - qz + \varepsilon) \\
z_z &= -\frac{\vartheta}{1+2\vartheta}(ry - qz + \varepsilon) \\
y_z &= 0 \\
z_x &= -py \\
x_y &= pz
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Mit diesen soll F gebildet werden. — Für einen unkrystallinischen Körper ist:

$$F = K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + \vartheta(x_x + y_y + z_z)^2\right\} \quad \ldots (22)$$

In Folge der Werthe (21)

$$F = K\left\{\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}(ry - qz + \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)p^2\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

Nun können wir (15) bilden — bei der Integration setzen wir:

$$\iint dy\, dz = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

$$\iint (y^2 + z^2)\, dy\, dz = \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

also: $\cancel{\iint (y^2+z^2)}$ $\iint y^2 dy\, dz = \int z^2 dy\, dz = \frac{\mu}{2}$

λ und μ haben hier eine ~~ganz~~ bestimmte Bedeutung; u. zwar ~~ist~~ bezeichnet λ die Fläche des Querschnittes, und μ das Trägheitsmoment einer Masse, von der Dichtigkeit 1, welche die Fläche des Querschnittes bedeckt in Bezug auf eine Axe welche ~~senkrecht zur~~ mit der Axe des Stabes zusammenfällt. – Wir erhalten dann: ~~durch den Anfangspunkt des Stabes geht~~
Die Definitionen erfolgen aus den Gleichungen (25) u. (24),

$$26 \ldots\ldots \quad f = K\left\{\frac{\mu}{2}p^2 + \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\frac{\mu}{2}(q^2+r^2) + \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\lambda\varepsilon^2\right\}$$

die darin auftretenden Grössen $p\,q\,r$ zu bestimmen kann eine Aufgabe der Gleichung (16) sein. –

Anwendungen dieser Formeln auf endliche sowie unendlich kleine Verrückungen sowie die meisten hier vorgeführten Betrachtungen in Bezug auf dünne Stäbe sind in der Kirchhoff'schen Abhandlung in Crelle's Journal Band LVI enthalten. – Wir werden uns hier auf die einfacheren Fälle beschränken. –

§25. – Weitere Ausbildung der Function f. in Bezug auf unendl. kleine Verrückungen. –

Es sollen die Kräfte nur auf die ~~Stäbe und~~ Enden des Stabes einwirken – wir wollen Fälle betrachten bei welchen wenn das beliebige $\xi\ \eta\ \zeta$ Axensystem so gewählt wird, dass die ξ Axe mit der Axe des Stabes zusammenfällt, die Winkel

(ξ, x) , $(\eta\, y)$ und $(\zeta\, z)$ unendlich klein werden. –
(Es ist diese Vorstellung nicht eben leicht, – führen wir das System x, y, z. auf das ~~Anfang~~ eine Ende des Stabes als Anfangspunkt zurück – so dass – die Coordinaten irgend eines Punktes P $x=s$ $y=0$ $z=0$ werden – und lassen dann die ξ Axe des zweiten Systemes mit der Axe des Stabes in ihrer Gleichgewichtslage zusammen fallen – dann treffen diese Bedingungen der Winkel – bei allen zu betrachtenden Fällen, wie Biegung, Dehnung, Torsion – zu.)

Die Winkel zwischen den Axen $\xi\ \eta\ \zeta$ und x, y, z sind durch das System der ihrer Cosinuse auf Seite 106 gegeben – es wird hiernach in dem zu betrachtenden Falle:

$$\alpha_0 = 1 \quad \beta_1 = 1 \quad \gamma_2 = 1$$

Die Cosinuse aller andern Winkel sind unendl. klein – 1er Ordnung –

Die Beziehungen:

$$\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2\alpha_0 + \beta_2\beta_0 + \gamma_2\gamma_0 = 0$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

reduziren sich hiernach:

$$\alpha_1 + \beta_0 = 0$$
$$\alpha_2 + \gamma_0 = 0$$
$$\beta_2 + \gamma_1 = 0$$

Aus den Gleichungen (8) folgt dass $\underline{\beta_0 \varepsilon}$ als eine unendl. kleine Grösse 2ter Ordnung vernachlässigt werden kann —

$$\beta_0 = \frac{d\eta}{ds} \qquad \gamma_0 = \frac{d\zeta}{ds}$$

Gesetzt nun $\beta_2 = -\gamma_1 = \varphi$, wo φ den Torsionswinkel des Stabes für den Punkt $\underline{S}$ bezeichnet — ergiebt sich aus all' diesen Relationen — das System der Cosinus der erwähnten Winkel

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{d\eta}{ds} & \frac{d\zeta}{ds} \\ -\frac{d\eta}{ds} & 1 & -\varphi \\ -\frac{d\zeta}{ds} & \varphi & 1 \end{array}$$

p. q. r. nach (6) gebildet

$$(27)\ldots \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{d\varphi}{ds} \\ q = \frac{d^2\zeta}{ds^2} \\ r = -\frac{d^2\eta}{ds^2} \end{array} \right.$$

Um $\underline{f}$ muss noch ε in u, η, ζ und φ ausgedrückt werden — Es ist nun $u = \xi' - s$, und folglich

$$\frac{d\xi}{ds} = 1 + \frac{du}{ds}$$

Nach (7) wird also

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{du}{ds} + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2} - 1$$

$\left(\frac{du}{ds}\right)^2$ ist hier gegen $\frac{du}{ds}$ in allen Fällen zu vernachlässigen — η und ζ und u können von ungleicher Ordnung sein — wie wir es auch an Beispielen sehen werden. — Es ist also: (Es ist $\varepsilon + 1 = \sqrt{}$ diese Ausdrücke zum Quadrat erhoben und ε^2 als von höherer Ordn. vernachlässigt.

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2\right)$$

Diesen Werth so wie die Werthe (27) in die Gleichung (26) eingesetzt — ergiebt sich folgende:

$$f = K\left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\frac{\mu}{2}\left(\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2\right) + \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\lambda\left(\frac{du}{ds} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2\right)\right)^2\right\} \quad \ldots (28)$$

Es soll nun nach dieser Formel — die Dehnung, Torsion und Biegung eines Stabes untersucht werden. —

§ 26. Dehnung eines Stabes.

Bei dieser Formänderung bleibt der Stab gerade es ist also: $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und $\varphi = 0$ unter diesen Bedingungen wird (28):

$$f = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

Der Stab sei einem Ende befestigt — an dem andern Ende soll eine Zugkraft P wirken — für $s = 0$

dass ist an dem befestigten Ende ist dann $u=0$;
Mit u_l bezeichnen wir dagegen die Verrückung des zweiten Stabendes (~~also~~ also wenn l die Länge desselben bedeutet) — den Werth von u für $s=l$. —

In diesem Falle ist

$$\delta\Omega = P\delta u_l$$

und

$$\int f ds = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\lambda\int\left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds$$

ferner.

$$\delta\int f ds = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\lambda\int\left\{\left(\frac{d(u+\delta u)}{ds}\right)^2-\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right\}ds$$

da aber.

$$\left(\frac{d(u+\delta u)}{ds}\right)^2=\left(\frac{du}{ds}+d\frac{\delta u}{ds}\right)^2$$

so wird durch Entwickelung dieses Quadrates, und Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\delta\int f ds = 2K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\lambda\int_0^l\frac{du}{ds}\cdot d\frac{\delta u}{ds}ds$$

Nach der Formel für partielle Integration:

$$\int U.dV = UV - VdU$$

ergiebt sich dann

$$\int_{s=0}^{s=l}\frac{du}{ds}\cdot d\frac{\delta u}{ds}\cdot ds=\left[\frac{du}{ds}\delta u\right]_0^l-\int_0^l\delta u\frac{d^2u}{ds^2}ds$$

Da für $s=0$ auch $u=0$ und folglich auch $\delta u=0$ so ist:

$$\int_0^l \frac{du}{ds} d . \frac{\delta u}{ds} ds = \delta u_l \left(\frac{du}{ds}\right)_l - \int_0^l \delta u \frac{d^2u}{ds^2} ds$$

Diesen Werth in (16) gesetzt können wir nun die Gleichung (16) bilden — es ergiebt sich dann der Ausdruck

$$0 = \left\{ P - 2K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \lambda \left(\frac{du}{ds}\right)_l \right\} \delta u_l - 2K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \lambda \int_0^l \delta u \frac{d^2u}{ds^2} ds \quad \ldots\ldots (30)$$

δu ist eine beliebige Function von s welche aber für $u=0$ verschwindet — und unendlich klein gegen u ist — demgemäss muss u eine lineare Function von s sein, und in Folge dessen muss:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 0$$

Dieser Ausdruck vereinfacht die Gl. 30 — sie wird dadurch:

$$2K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \lambda \left(\frac{du}{ds}\right)_l = P$$

und hieraus:

$$u = \frac{P}{\lambda} \cdot \frac{1}{2K} \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta} l$$

hiernach ist die Längendilatation der Längeneinheit:

$$= \frac{\text{Zugkraft.}}{\text{Querschnitt.}} \cdot \frac{1}{2K} \cdot \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}$$

Ein Resultat, wie wir es schon im ersten Abschnitte §11, Seite 44. erlangten. —

§ 27. Torsion eines Stabes.–

Wir betrachten den Fall daß:

$$u=0 \qquad \eta=0 \qquad \xi=0$$

Es ist dann (28)

$$f = K\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

Eine Torsion wird erreicht indem ~~die~~ eine Kraft. ~~M~~ den Stab um seine Axe zu drehen sucht.–
~~Das~~ Deren Drehungsmoment ~~ist~~ M ist; also:

$$\delta\Omega = M\delta\varphi$$

Hiernach:

$$\delta\int f\,ds = K\mu\delta\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds$$

$$= K\mu\cancel{\delta}\int_0^l\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{d\delta\varphi}{ds}\,ds$$

Durch partielle Integration:

$$\delta\int f\,ds = K\mu\left\{\left[\delta\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right]_0^l - \int\frac{d^2\varphi}{ds^2}\delta\varphi\,ds\right\}$$

Das Ende $s=0$ ist befestigt, deshalb ist dann $\varphi=0$ hiernach wird:

$$\delta\int f\,ds = K\mu\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l\delta\varphi_l - \int\frac{d^2\varphi}{ds^2}\delta\varphi\,ds\right\}$$

Die Gleichung (16) wird hier folgende:

$$0 = M\delta\varphi - K\mu\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l \delta\varphi_l - K\mu\int_0^l \frac{d^2\varphi}{ds^2}\delta\varphi\, ds \quad \ldots\ldots (32)$$

Es muss $\delta\varphi$ eine beliebige ~~lineare~~ Function von φ sein – und es muss

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$$

hiernach:

$$0 = M\delta\varphi - K\mu\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l \delta\varphi_l \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

für das Ende des Stabes also $s = l$ und

$$0 = M - K\mu\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l$$

und hieraus

$$\varphi = \frac{M}{K\mu} l$$

Bedeutet nun R. den Radius des Querschnittes des Stabes, dann ist nach der Definition (Seite 122)

$$\mu = \frac{\pi}{2} R^4$$

Hiernach:

$$M = \varphi \cdot \frac{\pi}{2} K \cdot \frac{R^4}{l}$$

oder: die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der 4ten Potenz des Radius des tordirten Stabes – und umgekehrt proportional der Länge desselben – Ausserdem ist sie aber noch abhängig von einer Constantente – dem Torsionscoeffizienten – dessen Werth für verschiedne Substanzen verschieden ist. –

§ 28 Die Biegung eines Stabes. –

Bei dieser Untersuchung:

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

Ausserdem nehmen wir noch an dass die Biegung in der $\xi\eta$ Ebene geschieht, folglich dass:

$$\zeta = 0$$

Es wird also in diesem Falle nach (28)

$$\mathfrak{F} = K\,\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2$$

Das Ende $s=0$ des Stabes ist befestigt kann also weder verschoben noch gedreht werden. Also es wird da $\eta = 0$ und auch $\frac{d\eta}{ds} = 0$ – (Auf Seite 124 fanden wir $\frac{d\eta}{ds} = \beta_0$ – und auf Seite 106 definierten wir $\beta_0 = \measuredangle(x,\eta)$). –

Am andern Ende $s = l$ des Stabes wirkt eine Zugkraft B in der Richtung der u Axe – und eine Kraft, welche den Stab um ihre ζ Axe zu drehen sucht deren Drehungsmoment M_ζ ist; also:

$$(34) \ldots\ldots \quad \delta\Omega = B\,\delta\eta_l + M_\zeta\,\delta\left(\frac{d\eta}{ds}\right)_l$$

Es sollte nun $\delta\int\mathfrak{F}ds$ gebildet werden. Es ist:

$$\delta\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 ds = \int_0^l\left[\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}+\frac{d^2\delta\eta}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2\right]ds$$

$$= 2\int\frac{d^2\eta}{ds^2}\cdot\frac{d^2\delta\eta}{ds^2}\,ds$$

Zerlegung in

Durch partielle Integration wird dieser Ausdruck

$$= 2\left[\frac{d^2\eta}{ds^2}\cdot\frac{d\delta\eta}{ds}\right]_0^l - 2\int_0^l\frac{d^3\eta}{ds^3}\cdot\frac{d\delta\eta}{ds}\,ds$$

dieselbe Operation noch einmal wiederholt:

$$= 2\left[\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d\delta\eta}{ds}\right]_0^l - 2\left[\frac{d^3\eta}{ds^3}\delta\eta\right]_0^l + 2\int_0^l\frac{d^4\eta}{ds^4}\,d\eta\,ds$$

Da für $s=0$ die ersten zwei Glieder dieser Ausdruckes verschwinden so folgt:

$$\delta\int f\,ds = K\cdot\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\mu\left[\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d\delta\eta}{ds}\right)_l-\left(\frac{d^3\eta}{ds^3}\delta\eta\right)_l+\int_0^l\frac{d^4\eta}{ds^4}\,d\eta\,ds\right] \quad \ldots\ldots(35)$$

Mit den Ausdrücken (34) und (35) kann man der Gleichung (16) genügen – es entsteht dann eine identische Gleichung – in welcher Coefficienten gleicher Variabeln gleich sein müssen – also folgt:

$$\frac{d^4\eta}{ds^4}=\eta$$

$$M_l = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\mu\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)_l$$

$$B = -K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\cdot\mu\left(\frac{d^3\eta}{ds^3}\right)_l$$

Diesen Gleichungen genügend ist zu setzen:

$$\eta = C s^2 + D s^3$$

§29. Die Grundgleichung der Theorie dünner Stäbe für den Fall der Bewegung. – Das Hamilton-sche Princip. –

Es sollen im Folgenden Fälle der Bewegung betrachtet werden – besonders die Schwingungen des Stabes sind es die uns beschäftigen werden. – Das allgemeine Princip der Statik ist das der virtuellen Geschwindigkeiten – es sagt dieses aus dass: Ein festes System, auf welches Kräfte irgend einer Art einwirken, nur dann im Gleichgewicht sein kann – wenn die Summe der virtuellen Momente, für alle gleichzeitigen unendlich kleinen Verrückungen der Punkte des Systems gleich Null ist. – Das Wort virtuelles Moment bezeichnet das Product aus einer Kraft – mit der Verrückung ihres Anfangspunktes, in der Richtung der Kraft selbst.

Also wenn X eine Kraft — δx eine entsprechende unendl. kleine Verrückung bezeichnet — so ist nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\sum X \delta x = 0$$

Die Grundlage der Dynamik ist das D'Alembert'sche Princip — es führt dies alle Aufgaben der Dynamik auf die Statik zurück indem es ausspricht — dass, bei der Bewegung irgend eines Systemes — die ~~Summe der~~ verlornen Kräfte sich das Gleichgewicht halten müssen — oder dass:

$$\sum \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x = 0$$

$\sum X \delta x$ ist das Moment der wirkenden Kräfte — wir bezeichnen es mit δU. — Dann lässt sich D'Alembert's Princip durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\delta U - \sum m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x = 0$$

Das Hamilton'sche Princip nimmt die Lage des Systemes zu zwei Zeitpunkten t' und t'' als gegeben an — Es folgt dann die Gleichung des Weges welchen das System zu durchlaufen muss um aus der Lage in zu der in t'' überzugehen — aus der D'Alembert-schen ~~Princip~~ Gleichung. — Multipliciren wir diese mit dt und integriren dann:

$$\int dt\,\delta U - \sum m \int \delta x \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = 0$$

Es sei für t' und für t'' $\delta x = 0$

Durch partielle Integration ist:

$$\int_{t'}^{t''} \delta x \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \left[\delta x \frac{dx}{dt}\right]_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x}{dt} \cdot dt$$

$$= \left[\delta x \frac{dx}{dt}\right]_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{dt} \cdot \delta \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\delta \int \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

Da nun die Summe der lebendigen Kraft des ganzen System's durch den Ausdruck gegeben ist:

$$T = \sum \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

So folgt in obigem eingesetzt die Gleichung:

$$0 = \int dt\,(\delta U + \delta T)$$

Diese Gleichung ~~st~~ drückt das Hamilton'sche Princip aus. — Nach dieser bilden wir die Grundgleichung für die Bewegungen dünner Stäbe. —

Wir benutzten schon in einigen Ausdrücken (16) die Beziehung des Momentes der äusseren Druckkräfte $\delta\Omega$; ebenso die der elastischen Druckkräfte $\delta\int f ds$. — Es wird also das Moment der sämmtlich wirkenden Kräfte

$$\delta U = \delta\Omega - \delta\int f ds$$

sein. — Im Falle des Gleichgewichtes ist $\delta U = 0$, wir kehren dann auch zur Gleichung (16) zurück. — Also nach dem Hamilton'schen Principe:

$$0 = \int dt(\delta\Omega + \delta T - \delta\int f ds) \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

~~Wir~~ Unsere Aufgabe ~~soll~~ sei hier allein solche Schwingungen zu betrachten — welche bei einem freien oder an den Enden befestigten Stabe im Falle entstehen — wenn die bewegende Kraft auch nur an den Enden wirkt — also wenn $\delta\Omega = 0$. In diesem Falle wird unsere Grundgleichung:

$$0 = \int dt(\delta T - \delta\int f ds) \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

So wie wir früher die Biegung, Torsion und Ausdehnung des Stabes betrachteten — so werden wir jetzt seine transversalen, Torsions, und longitudinalen Schwingungen betrachten. —

§30. Longitudinal Schwingungen eines dünnen Stabes. –

Es ist hier die Gleichung (37) zu bilden. –
Den Werth von f entnehme ich aus den Betrachtungen über Dehnung des Stabes (§ 26) – es war daselbst (Gl. 29)

$$f = K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$

Um T auszudrücken – betrachten wir ein Element des Stabes dessen Länge $\underline{ds}$ und Querschnitt bekanntlich λ ist – bezeichnet dann ϱ die Dichtigkeit – damit ist:

$$\text{Masse} = \varrho \lambda ds$$

Die lebendige Kraft dieses Theilchens finden wir indem wir seine halbe Masse mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multipliciren d. i. s:

$$= \frac{1}{2}\varrho\lambda\left(\frac{du}{dt}\right)^2 ds$$

Und die lebendige Kraft in Bezug auf den ganzen Stab:

$$T = \frac{1}{2}\varrho\lambda\int_{s=0}^{s=l}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 ds$$

Bei der Bildung von (37) wollen wir nun den Ausdruck mit $\frac{1}{2}\varrho\lambda$ dividiren – wir erhalten dann, gesetzt

$$\frac{2K(1+3\vartheta)}{(1+2\vartheta)\varrho} = \underline{m}^2$$

($\underline{m}^2$ eine immer positive Constante) folgende Gleichung:

$$0 = \delta \iint dt . ds \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - m^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

Die erste Integration in Bezug auf t, die zweite in Bezug auf s – es ist ja u eine Function von t und s. – Auch:

$$0 = \delta \iint dt . ds \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} - m^2 \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial s} \right)$$

Das Integral in zwei gespalten und jede seiner Theile durch partielle Integration umformt:

$$\int_{t'}^{t''} dt \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} . \delta u \right]_{t'}^{t''} - \int dt . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u$$

$$\int ds \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial s} = \left[\frac{\partial u}{\partial s} . \delta u \right]_{s=0}^{s=l} - \int ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u$$

Die Ableitung der Gleichung (38) beruht auf dem Hamilton'schen Principe – es wurde hiebei für $t = t'$ und für $t = t''$ gesetzt $\delta u = 0$

Also wird die umgeformte Gleichung (38):

$$0 = m^2 \int dt \left[\frac{\partial u}{\partial s} \delta u \right]_{s=0}^{s=l} - \iint ds\, dt \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) \delta u \quad \ldots\ldots (39)$$

Ich behaupte es ist in allen Fällen die wir zu behandeln beabsichtigen:

$$m^2 \int dt \left[\frac{\partial u}{\partial s} \delta u \right]_{s=0}^{s=l} = 0$$

Die Fälle sind 1) beide Enden des Stabes fest, in diesem Falle ist für $s=0$ und $s=l$ zu setzen $u=0$. –

2) beide Enden des Stabes frei; es ist dann die Verrückung ~~von~~ in allen Punkten gleichmässig also unabhängig von s, und so $\frac{du}{ds}=0$

3) Ein Ende frei das andere befestigt. – Dann für $s=0$, $u=0$ und für $s=l$ $\frac{du}{ds}=0$. –

In all diesen 3 Fällen verschwindet das genannte Glied des Ausdruckes 39) wirklich – damit also dieser ~~x~~ identisch gleich 0 sein könne, muss:

(40) .... $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=m^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

mit Hülfe dieser Gleichung wollen wir nun die Reihe der einfachen Töne ~~behandeln~~ aufsuchen, welche der ~~longit. Stab. in d.~~ den longit.-Schwingungen des Stabes entsprechen. –

Es ~~muss~~ kann die Verrückung u in folgender Form ausgedrückt werden –

$$u=S\sin t m a$$

S entsprechend der Amplitude ist hier eine Function von s – a eine willkürliche Constante – und m eine Grösse die wir schon vorhin durch eine Gleichung auf Seite 136 definirten. – Der Anfangspunkt der Zeit kann und soll so gewählt werden dass für $s=0$ auch $u=0$. –

~~Es ist daher auch~~ Wir gelangen immer zu denselben Werthen von u indem wir statt t $t+\frac{2\pi}{ma}$ setzen – Also ist die Function um $\frac{2\pi}{ma}$ periodisch – und folglich die Zeit einer Doppelschwingung welche dem Tone entspricht $=\frac{2\pi}{ma}$. – Durch diesen Werth von u wird die: ~~Gleichung~~ ~~40~~ zu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m^2 a^2 S \sin mat.$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{d^2 S}{ds^2} \sin mat.$$

Also in 40 eingesetzt

$$\frac{d^2 S}{ds^2} = -a^2 S$$

deren allgemeinsten Integral:

$$S = A \sin as + B \cos as \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Worin A und B Constanten. –

Gehen wir nun zur Betrachtung der einzelnen Fälle über. –

1. Beide Enden fest.

Es ist dann für $s=0$ auch $u=0$

daher auch $S=0$ – In Folge dessen

$$B=0$$

Der Ausdruck reduzirt sich also, zu.

$$S = A \sin as$$

für $s=l$ muss aber u auch $=0$ und also auch $S=0$

Daher

$$0 = \sin a l$$

Der Bedingung genügt allein:

$$a l = n\pi$$

Wo n eine Ganze Zahl — hieraus

$$a = \frac{n\pi}{l}$$

Also nach (41)

$$S = A \sin \frac{n\pi}{l} s$$

Und in u Seite (138) gesetzt

$$u = A \cdot \sin \frac{n\pi}{l} s \cdot \sin \frac{n m \pi}{l} t$$

A. Eine Constante bezüglich auf die Amplitude. — Die Schwingungsdauer der verschiedenen Töne verhalten sich nun wie:

$$\frac{\pi}{l} : \frac{2\pi}{l} : \frac{3\pi}{l} : \frac{4\pi}{l} : \ldots\ldots$$

und folglich die Schwingungszahlen wie

$$\frac{1}{2l} : \frac{2}{2l} : \frac{3}{2l} : \frac{4}{2l} \quad \text{etc.} -$$

Giebt die erste Zahl den Grundton des Stabes an dann beziehen sich die andern Zahlen auf die Obertöne derselben — dieselben sind die Octave des Grundtones die Quinte der Octave u. s. w. — Töne welche je höher sie werden einander um so näher rücken. —

Ausser den Schwingungszahlen sind es noch die Knotenpunkte, wodurch sich die verschiedenen Töne desselben Stabes unterscheiden ~~lassen~~. – ~~Für je~~ Die Knotenpunkte müssen in der Gleichgewichtslage des Stabes ruhen – es muss also für sie

$$u = 0$$

in Folge dessen ist für sie auch:

$$\sin \frac{n\pi}{l} s = 0$$

Was nur möglich ist, wenn:

$$s = h \cdot \frac{l}{n}$$

wo <u>h</u> eine positive ganze Zahl bedeutet. – Es diesem Ausdrucke ist ersichtlich dass den Werthen h-s 0, 1, 2 .... n je ein Knotenpunkt entspricht. – Die Werthe $h = 0$ und $h = n$ geben $s = 0$ und $s = l$ es sind dies die Endpunkte des Stabes, welche nicht als Knotenpunkte betrachtet werden sollen. – Es sind also $(n-1)$ Knotenpunkte da welche die ganze Länge des Stabes in <u>n</u> gleiche Theile theilen. –

<u>2) Beide Enden ~~befestigt~~ frei</u> –

Für $s = 0$ und $s = l$ muss $\frac{du}{ds} = 0$ also durch Differenzirung der Gleichung auf Seite 138

$$\frac{du}{ds} = \frac{dS}{ds} \sin t m a = 0$$

Also $\frac{dS}{ds} = 0$

Nach dem Ausdrucke (41) ist

$$\frac{dS}{ds} = aA\cos as - aB\sin as$$

Für $s = l$ muss dieser Ausdruck $= 0$ werden es kann dieses durch passende Werthe von A und B – Aber es muss auch noch für $s = 0$ verschwinden, und dies ist allein möglich wenn:

$$A = 0$$

Hiernach:

$$\frac{dS}{ds} = -aB\sin as$$

und nun für $s = l$

$$\sin al = 0$$

Also

$$a = \frac{n\pi}{l}$$

Die entstehenden Töne sind also dieselben, wie bei dem befestigten Stabe. –

Durch Integration des Ausdruckes $\frac{dS}{ds}$ folgt.

$$S = B.\cos\frac{n\pi}{l}s$$

hiernach u (138)

$$u = B.\cos\frac{n\pi}{l}s.\sin\frac{mn\pi}{l}t$$

Für alle Knotenpunkte ist nun $u = 0$, also:

$$\cos\frac{n\pi}{l}.s = 0$$

oder was dasselbe ist, wenn:

$$s = \frac{2h-1}{2} \cdot \frac{l}{n}$$

Wo h eine ganze Positive Zahl bedeutet. —
Es sind da ~~h~~ n Knotenpunkte vorhanden welche den Werthen $h = 1$ (1, 2 … n) entsprechen. Es müssen diese Werthe von s entsprechen welche zwischen 0 und l liegen. —

3) Das eine Ende fest, das andere frei. —

Für $s = 0$ muss $u = 0$ also $S = 0$ und nach
(41) auch $B = 0$, so dass:

$$S = A \sin as$$

Für das zweite freie Ende $s = l$ muss $\frac{du}{ds} = 0$ also $\frac{dS}{ds} = 0$

$$\frac{dS}{ds} = Aa \cos as = 0$$

folglich

$$\cos al = 0$$

Es ist dies allein möglich wenn:

$$al = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

u ist um a periodisch — Die Schwingungsdauer des ~~[illegible]~~ Grundtones und der Obertöne verhalten sich also wie:

$$1 : 3 : 5 : 7 \; \ldots \text{etc.}$$

für die Knoten ist $u=0$ also auch

$$s=0$$

da aber

$$s = A \sin as$$

~~[illegible]~~ oder:

$$0 = \sin \frac{(2n-1)s}{l}\cdot\frac{\pi}{2}$$

hiernach

$$\frac{(2n-1)s}{l}\cdot\frac{\pi}{2} = h\pi$$

wo h eine ganze Zahl:

$$s = h\frac{2l}{2n-1}$$

Die Zahl der Knoten ist den ~~Anfangs~~ beiderseitigen Punkte $s=0$ nicht mit gerechnet ist $(n-1)$ entsprechend dem Werthen $h-s$ von $0 \ldots$ bis $(n-1)$. –

§31. Torsionsschwingungen eines dünnen Stabes. –

Ganz analog ist das Verfahren bezüglich der Torsionsschwingungen. – Wir haben daselbst auch den Ausdruck (37) zu bilden, worin aber die Bedeutung der Function f an Seite 128 zu suchen ist – Es ist da:

$$f = K\cdot\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

Die lebendige Kraft folgt, wenn wir den ganzen Stab in Gedanken in Parallelepipeds zerlegt deren Kanten dx, dy und ds sind – damit ist die lebendige Kraft eines solchen Theilchens

$$\frac{1}{2}\varrho\, dx\, dy\, ds \left(x^2+y^2+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)$$

also

$$T=\frac{\varrho}{2}\iint\limits_{z\,y}(y^2+z^2)\,dy\,dz\int\limits_{s} ds\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Das erste Doppel-Integral ist von s das zweite von z und y unabhängig – der Werth des ersten ist was wir vorher mit μ bezeichneten (Seite 122), also:

$$T=\frac{\varrho\mu}{2}\int\limits_{s=l}^{s=0}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 ds$$

gesetzt nun $m^2=\frac{K}{\varrho}$ folgt:

$$0=\delta\iint dt\, ds\left(\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-m^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Bei der Betrachtung longitudinaler Schwingungen fanden wir denselben Ausdruck, – All die da erzielten Resultate in Bezug der Schwingungszahlen der verschiedenen Töne – und der Knotenpunkte derselben haben also auch hier ihre Gültigkeit. –

§ 32. – Transversal Schwingungen eines Stabes. – Schwingungsdauer. –

Longitudinale und transversale Verrückungen sollen vollkommen fehlen – es soll auch die Schwingungsebene mit der $u\eta$ Ebene zusammenfallen – so dass

$$u=0 \qquad \varphi=0 \qquad \text{und } \xi=0$$

Unter diesen Bedingungen wird der Ausdruck 28) folgender:

$$f = K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \cdot \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}\right)^2$$

Die lebendige Kraft ist, wenn wir den Stab durch ~~in~~ Querschnitte im Abstande ds ~~in~~ zertheilt denken, die lebendige Kraft eines solchen Theiles bestimmen – und dann zwischen 0 und l in Bezug auf s integriren:

$$T = \frac{1}{2}\varrho\lambda\int_0^l \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 ds$$

Der Ausdruck (37) wird also:

$$(43)\ldots\ldots \quad 0 = \delta\iint dt . ds \left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - m^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}\right)^2\right)$$

Es ist in diesem Ausdrucke

$$m^2 = \frac{K}{\varrho} \cdot \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \cdot \frac{\mu}{\lambda}$$

In dem Ausdrucke ~~von~~ (43), ist:

$$\frac{1}{2}\delta \iint dt\, ds \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 = -\iint dt . ds \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta\eta$$

und durch partielle Integration:

$$\frac{1}{2}\delta \iint dt\, ds \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2}\right)^2 = \int dt \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial \delta\eta}{\partial s}\right]_{s=0}^{s=l} - \int dt \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} \delta\eta\right]_{s=0}^{s=l} + \iint dt\, ds \frac{\partial^4 \eta}{\partial s^4} \delta\eta$$

~~Bei~~ In allen Fällen wobei die Befestigung des Stabes nur an den Enden derselben geschieht ~~muss~~ ~~für s = 0~~ $\cancel{\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = 0}$ ~~und für s = l~~ haben $\delta\eta$ und $\frac{d\delta\eta}{ds}$ beliebige Werthe.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = 0 \quad \cancel{\text{und}} \quad \cancel{\frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} = 0} \quad \cancel{\text{sein}} -$$

Stellen wir also nun (43) wieder zusammen – dann erhalten wir eine Gleichung, welche allein bestehen kann, im Falle, dass:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -m^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial s^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Zur vollständigen Lösung kommen hierzu noch die Bedingungsgleichungen, welche sich aus der Art der Befestigung des Stabes ergeben. – Wie bereits bei den longitudinalen Schwingungen u so wird hier η in folgender Form darstellbar sein: –

$$\eta = S \sin a^2 mt.$$

wo S eine Function von s bezeichnet, welche für $s=0$ verschwinden muss – und m eine Constante ist wie wir sie bereits auf Seite ~~14~~6 definirten. – Der Werth der Function ändert sich nicht indem für t gesetzt wird $\left(t+\frac{\pi}{a^2m}\right)$, sie ist also um $\frac{\pi}{a^2m}$ periodisch, dann ist die Zeit einer einfachen Schwingung des Stabes $=\frac{\pi}{a^2m}$
Mit diesem Werthe von η wird (44):

$$(45) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{d^4S}{ds^4} = m^2a^4S$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist:

$$S = e^{\sqrt[4]{a^4}\, s}$$

Die allgemeine Integr$^{\text{ation}}$ der Gl. (45) muss 4 willkürliche Constanten enthalten; das Resultat derselben ist:

$$S = \alpha e^{as\sqrt{-1}} + \beta e^{-as\sqrt{-1}} + \gamma e^{as} + \delta e^{-as}$$

Um die imaginären Glieder dieses Ausdruckes fortzuschaffen, wird gesetzt:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(A + B\sqrt{-1})$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(A - B\sqrt{-1})$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(C + D)$$
$$\delta = \tfrac{1}{2}(C - D)$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für $\mathcal{S}$, und benützt bekannte Relationen zwischen trigonometrischen Functionen und Exponentialgrössen, dann wird:

$$\mathcal{S} = A\cos as + B\sin as + C\frac{e^{as}+e^{-as}}{2} + D\frac{e^{as}-e^{-as}}{2} \quad \ldots\ldots (46)$$

Also:

$$\frac{d^2\mathcal{S}}{ds^2} = a^2\left\{-A\cos as - B\sin as + C\frac{e^{as}+e^{-as}}{2} + D\frac{e^{as}-e^{-as}}{2}\right\}$$

und $$\frac{d^3\mathcal{S}}{ds^3} = a^3\left\{A\sin as - B\cos as + C\frac{e^{as}-e^{-as}}{2} + D\frac{e^{as}+e^{-as}}{2}\right\}$$

Es soll speciell der Fall betrachtet werden dass die beiden Enden des Stabes frei sind in diesem Falle wird für $s=l$ und $s=0$ η von s unabhängig.

folglich $\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}=0$ und $\frac{\partial^3\eta}{\partial s^3}=0$

Also nach dem Werthe von η

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = \frac{d^2\mathcal{S}}{ds^2}\cdot\sin a^2mt. = 0$$

$$\frac{\partial^3\eta}{\partial s^3} = \frac{d^3\mathcal{S}}{ds^3}\cdot\sin a^2mt = 0$$

da $\sin a^2mt$ beliebige Werthe annehmen kann, so ist.

$$\frac{d^2\mathcal{S}}{ds^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{d^3\mathcal{S}}{ds^3}=0$$

Dies ist nach obigen Gleichungen nur möglich wenn:

$$A = C \quad \text{und} \quad B = D$$

Also ist:

(47) ...... $y = A\left(\cos as + \frac{e^{as}+e^{-as}}{2}\right) + B\left(\sin as + \frac{e^{as}-e^{-as}}{2}\right)$

Setze ich nun in die Gleichungen für $\frac{d^2y}{ds^2}$ und für $\frac{d^3y}{ds^3}$ statt A, C und statt B, D – ferner führe ich den Werth $s = l$ ein dann ergeben sich.

(48) $$\begin{cases} A\left(-\cos al + \frac{e^{al}+e^{-al}}{2}\right) + B\left(-\sin al + \frac{e^{al}-e^{-al}}{2}\right) = 0 \\ A\left(\sin al + \frac{e^{al}-e^{-al}}{2}\right) + B\left(-\cos al + \frac{e^{al}+e^{-al}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Ein flüchtiger Anblick zeigt dass diesen Gleichungen genügt werden kann durch $A = 0$, $B = 0$. Ebenso werden (48) erfüllt wenn ihre Determinante nach A und B gleich 0 ist, dass ist wenn:

$$\left(-\cos p + \frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right)^2 + \sin^2 p = 0$$

hiebei ist $al = p$ gesetzt.

Die Auflösung dieser Gleichung ~~ist~~ zeigt:

$$\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right)^2 = 1$$

also:

(49) ..... $\cos p\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right) = 1$

Die Schwingungsdauer ist nun für ~~einen~~ den Grundton, auch für die möglichen höheren Töne, da $al = p$ durch folgenden Ausdruck dargestellt $= \frac{l^2\pi}{p^2 m}$. –
Also sehen wir, dass die Schwingungsdauer der verschiedenen Töne eines elastischen Stabes proportional sind mit der Länge desselben. –
Für die höheren Töne sind die Grenzen von p so zu wählen dass

$$e^p = \infty \quad \text{und dann} \quad e^{-p} = 0 \quad \text{werden kann.}$$

für diese ist dann:

$$\cos p = 0$$

also

$$p = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

wo n jede beliebige ganze Zahl bedeutet. –
Die Werthe der Schwingungsdauer hängen nun allein von p ab – die entsprechenden Werthe von p erhalten wir aus der Gleichung (49), die Wurzeln derselben können wir durch folgende geometrische Betrachtung erhalten. –
Sehen wir in (49):

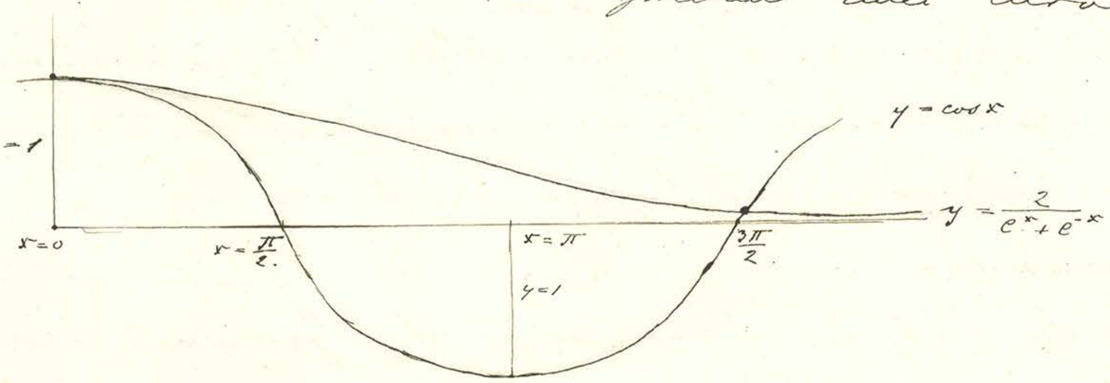
$$y = \cos p \quad \text{oder} \quad y = \cos x^0$$

wobei statt p x gesetzt werde um die Coordinaten einer Curve ~~ersichtlicher~~ darzustellen. –

Es wird dann aus (49) :

$$y = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

diesen zwei Gleichungen entsprechen zwei Curven,



welche auf der Figur dargestellt sind. –
Alle Wurzel p der Gleichung (49, müssen diese zwei Gleichungen

$$y = \cos p$$

$$y = \frac{2}{e^{p}+e^{-p}}$$

entsprechen – diese stellen aber zwei Curven dar, deren Schnittpunkte die Wurzeln der Gleichung sein müssen. –
Also ist $p = 0 \,,\, \frac{3\pi}{2} \,,\, \frac{5\pi}{2} \,\ldots$ etc.

Es sind dies 4fache Wurzeln der Gleichung. Denn entwickeln wir (49, der Reihe nach:

$$\left(1 - \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} - \ldots\right)\left(1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \ldots\right) = 1$$

Dieser Ausdruck kann auch folgendermassen umgestaltet werden:

$$\left(1+\frac{p^4}{4!}+\frac{p^8}{8!}+\dots\dots\right)^2-\left(\frac{p^2}{2!}+\frac{p^6}{6!}+\dots\dots\right)^2-1=0$$

Alle Glieder dieses Ausdruckes enthalten p in der 4ten Potenz – also p in der That eine 4fache Wurzel. –

Für $p=0$ kennen wir keine besondere physikalische Bedeutung –

~~Ist aber~~ Der Näherungswerth der 2ten Wurzel von p ist $=\frac{3\pi}{2}=4{,}712$ also

$$\cos p=\frac{2}{e^{4{,}712}+e^{-4{,}712}}$$

hieraus $p=4{,}730\,(360°-88°\,58'\,10'')$

Noch mehr können wir den wahren Werth p-s annähern, wenn wir diesen schon genaueren Werth in den Ausdruck für $\cos p$. einsetzen. –

§33. Transversal Schwingungen eines dünnen Stabes – Knotenpunkte. –

Wir setzten bereits

$$\eta=S.\sin a^2mt$$

wo, $a=\frac{p}{l}$, und l die Länge des Stabes p eine Wurzel der transcendenten Gleichung (49) ist. –

Die Knoten sind bestimmt durch

$$\eta = 0$$

folglich durch

$$s = 0$$

Im folgenden setze ich

$$\frac{s}{l} = x$$

Also x die Entfernung eines Punktes von dem Anfangspunkte – in der Länge des Stabes als Einheit ausgedrückt. –

$$(50)\ldots\left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}-\sin p\right)\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2}-\cos px\right)-\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2}-\cos p\right)\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2}+\sin px\right)=0$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen führen uns zur Bestimmung der Knoten. –

Es ist:

$$\frac{e^{p}+e^{-p}}{2} = \frac{1}{\cos p}$$

daher:

$$\frac{e^{p}-e^{-p}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 p}-1}$$

Das Vorzeichen ist hier nicht willkürlich es muss so gewählt werden, dass der linke Theil des Ausdruckes positiv wird – es ist weiter

$$\frac{e^{p}-e^{-p}}{2} = \pm\, tg\, p$$

ferner:

$$\frac{e^{p}-e^{-p}}{2} - \sin p = tg\,p(\pm 1 - \cos p)$$

$$\frac{e^{p}+e^{-p}}{2} - \cos p = tg\,p \cdot \sin p$$

In Folge dessen wird der Ausdruck (50)

$$(\pm 1 - \cos p)\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2} + \cos px\right) - \sin p\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2} + \sin px\right) = 0 \quad \ldots (51)$$

Wir sahen im vorigen §, dass p ein ungerades Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ ist – demnach wird

$$\sin p = \pm 1$$

und $$\cos p = 0$$

demnach modificirt sich (51)

$$\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2} + \cos px\right) - \left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2} + \sin px\right) = 0 \quad \ldots (52)$$

Das zweimal vorkommende Doppelzeichen, wird hier ausser Rücksicht gelassen – es hängen diese ja so zusammen – dass wenn ~~das eine + dann~~ für das eine + genommen wird dann auch das andere + wird. – Man kann sich davon leicht überzeugen wenn man betrachtet dass $\frac{\cos p}{}$ immer positiv also $\sin p$ immer von demselben Zeichen sein muss als $tg\,p$. –

(52) lässt sich einfacher so darstellen:

$$\sin px - \cos px = e^{-px}$$

Es kann diese Gleichung in Folgende umgestaltet werden:

(53) $$\sin\left(px - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-px}$$

Nach dieser Formel stellte Strehlke seine sorgfältigen Berechnungen an, aus seinen Resultaten entnehmen wir folgende, auf den Fall des Ganz freien Stabes bezügliche, Zahlen:

Grundton, mit zwei Knoten, angenommen $l = 1$

$x_1 = 0,2242$

$x_2 = 0,7758$

~~2ter~~ Erster Oberton, mit drei Knoten

$x_1 = 0,1321$

$x_2 = 0,5$

$x_3 = 0,8679$

Zweiter Oberton, mit 4 Knoten

$x_1 = 0,0947$

$x_2 = 0,3585$

$x_3 = 0,6415$

$x_4 = 0,9056$

All' unsere bis jetzt angestellten Betrachtungen in Bezug auf transversale Schwingungen eines Stabes beziehen sich ausschliesslich auf den Fall, dass die beiden Enden des Stabes frei sind – legen wir uns nun die Aufgabe vor das Problem auch für den Fall zu lösen wenn das eine Ende fest und nur das andere frei ist. –

Dann ist für das freie Ende $s=0$, nach der Gl. (47)

$$\vartheta = A\left(\cos as + \frac{e^{as}+e^{-as}}{2}\right) + B\left(\sin as + \frac{e^{as}-e^{-as}}{2}\right)$$

für das feste Ende $s=l$ muss $\vartheta=0$, also gesetzt:

$$al = p$$

folgt:

$$A\left(\cos p + \frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right) + B\left(\sin p + \frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right) = 0$$

da sich der Stab in $s=l$ auch nicht biegen kann, so muss auch $\frac{d\vartheta}{ds}=0$, also:

$$A\left(-\sin p + \frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right) + B\left(\cos p + \frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right) = 0$$

Diesen zwei Gleichungen kann durch die Werthe $A=0$ und $B=0$ genügt werden – es wird aber auch genügt wenn die Determinante noch gleich 0 wird, das ist wenn:

$$\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2} + \cos p\right)^2 - \left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right)^2 + \sin^2 p = 0 \qquad \ldots\ldots (54)$$

da nun:

$$\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}\right)^2 = 1$$

so ist:

$$(55) \qquad \cos p \cdot \frac{e^{p}+e^{-p}}{2} = -1$$

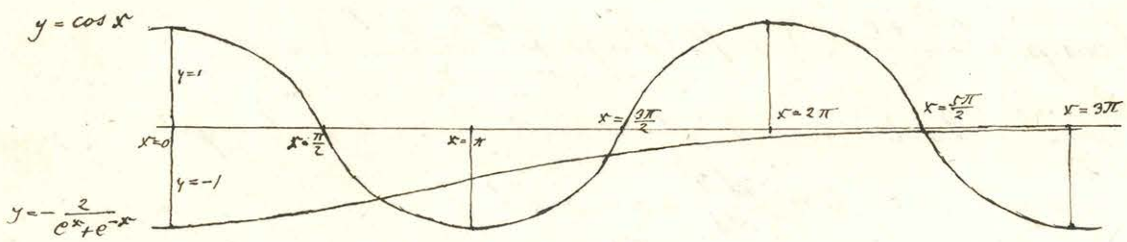
p als x Coordinate betrachtet, und gesetzt

$$y = \cos x$$

und auch

$$y = -\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

und dies sind die zwei Bedingungen, welche der Gleichung (55) entsprechen — die Wurzeln p derselben können wir als x Coordinaten durch folgende Construction finden:



Die kleinste Wurzel der Gleichung ist nach der Construction etwas grösser als $\frac{\pi}{2}$ — es ist ihr Annäherungswerth

$$p = 1,875$$

Bei Schwingungen höherer Ordnungszahl ist die Annäherung von p zu $\frac{2n+1}{2}\pi$ eine grössere. —

Die Schwingungsdauer ergiebt sich dann wie vorher aus dem Ausdrucke: $\frac{l^2\pi}{p^2 m}$ (Seite 151), wo l die Länge des Stabes und m eine von der Masse des Stabes abhängige Constante bezeichnen. — (Seite 147)

Die Knoten sind dann durch folgende Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}+\sin p\right)\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2}+\cos px\right)-\left(\frac{e^{p}+e^{-p}}{2}+\cos p\right)\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2}+\sin px\right)=0 \quad \ldots (56)$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x=1$, bei diesen Berechnungen ist aber $l=1$ angenommen, also ist beim Grundtone nur im befestigten Punkte – da wir aber diesen nicht als Knoten betrachten wollen – gar kein Knoten vorhanden. –

§ 34. Transversal Schwingungen eines Stabes dessen befestigtes Ende eine gegebene Bewegung ausführt. –

Es ist dies ein Problem, welches bei mancher physikalischen Frage von hohem Interesse ist. – Zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Stimmgabel oder einer Membrane, befestigen wir an dieselben – dünne Glasfäden – und untersuchen dann die Bewegungen, welche die freien Enden der Glasfadens ausführen unsern Beobachtungen. – Ein solches Stäbchen verzeichnet dann nicht allein Bewegungen welche von der Membrane, oder der Stimmgabel herrühren ihre eigenen Schwingungen werden auch von Einfluss auf die Zeichnung sein. – Sehen wir nun in wie fern? Es sei also das Ende $s=0$ frei.

Das andere Ende $s=l$ ~~hat~~ ist ~~lang~~ befestigt, und führt eine gegebene Bewegung aus; – Es nimmt also für $s=l$, η einen gegebenen Werth an
Sei dieser

$$\eta = \alpha \sin a^2 mt$$

und

$$\frac{d\eta}{ds} = a\alpha' \sin a^2 mt$$

α, α' sind Constanten bezüglich auf die Amplitude des schwingenden Stabes oder der Membrane an welchem der Faden befestigt ist. –
Es muss hiebei noch der in §. 32 festgestellten Bedingung der transversalen Schwingungen:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -m^2 \frac{\partial^4\eta}{\partial s^4}$$

Es wird dieser Gleichung genügt durch:

$$\eta = S \sin a^2 mt$$

dadurch wird sie jetzt:

$$\frac{d^4 S}{ds^4} = a^4 S$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$S = A\left(\cos as + \frac{e^{as}+e^{-as}}{2}\right) + B\left(\sin as + \frac{e^{as}-e^{-as}}{2}\right)$$

für den befestigten Punkt $s=l$ ~~gelt~~ ist offenbar $S=\alpha$, gesetzt also $al = p$, wird:

$$\alpha = A\left(\cos p + \frac{e^p + e^{-p}}{2}\right) + B\left(\sin p + \frac{e^p - e^{-p}}{2}\right)$$

und

$$\alpha' = A\left(-\sin p + \frac{e^p - e^{-p}}{2}\right) + B\left(\cos p + \frac{e^p + e^{-p}}{2}\right)$$

Es müssen diese Gleichungen für alle Werthe von A und B bestehen – und es müssen da α und α' gegebene Grössen sind die Ausdrücke von 0 verschiedene Werthe annehmen – welche auch die Werthe von A und B seien. – Es ist dies für $A = \infty$ und $B = \infty$ allein möglich wenn:

$$\left(\cos p + \frac{e^p + e^{-p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right)^2 + \sin^2 p = 0$$

also wenn:

$$\cos p \frac{e^p + e^{-p}}{2} = -1$$

Es ist dies ganz dieselbe Gleichung welche wir erhielten im Falle dass der Stab an einem Ende an einem ruhenden Punkt befestigt war. – Wir haben aber hier auch eigentlich denselben Fall betrachtet – dadurch dass wir A und B ∞ setzten nahmen wir ja auch δ die Ampl. des freien Endes unendlich gross gegen die Ampl. α des befestigten an. – Es folgt dies aus dem Ausdrucke von δ, in welcher $\delta = 0$ und $A = \infty$, $B = \infty$ gesetzt $\delta = \infty$ werden muss. –

§35 Transversal Schwingungen gespannter insbesondere gerupfter Saiten. –

Um eine solche Bewegung der Saite am einfachsten mathematisch darstellen zu können – nehmen wir an dass die Schwingungen derselben in der Richtung der η Axe geschehen dass also $\xi = 0$; ferner nehmen wir auch an, dass keine Torsionsschwingungen vorhanden sind, dass also $\varphi = 0$. –

Es wird nun nach der Gleichung (28)

$$f = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2\right)^2\right\}$$

Bei Bildung der Variation dieses Ausdruckes ist $\delta u = 0$ zu setzen. – Es ist ja u von 0 verschieden und von t unabhängig also constant, und hiernach

u muss von 0 verschieden sein es muss ja die Saite gespannt sein der damit sie einen Ton giebt.

$$\delta f = K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\left\{\frac{\mu}{2}\delta\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}\right)^2 + \lambda\left(\frac{du}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2\right\}$$

Hier ist η also $\frac{\partial\eta}{\partial s}$ unendlich klein – so dass $\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2$ vernachlässigt werden kann gegen $\frac{du}{ds}$. – Die Gleichungen (24) und (25) geben die Definitionen der Grössen λ und μ – es ist aus denselben ersichtlich dass μ von der Ordnung μ^2 ist. – Wenn also die Dicke der

Stabes so gering ist, dass sie gegen die Längendilatation vernachlässigt werden kann, das ist wenn d unendlich klein gegen $\frac{du}{ds}$, dann kann sie vernachlässigt werden gegen $d\frac{du}{ds}$. — Diesen Fall werden wir in den Folgenden betrachten — dadurch wird:

$$\delta f = K \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}\, d \frac{du}{ds} \cdot \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial s}\right)^2$$

Da nun:

$$T = \frac{1}{2}\varrho\, d \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 ds$$

Und die Gleich. (37) gebildet:

$$0 = \delta \iint dt\, ds \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}\right)^2\right)$$

worin
$$m^2 = \frac{2K}{\varrho} \cdot \frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta} \cdot \frac{du}{ds}$$

Und hieraus

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Ganz dieselbe Gleichung fanden wir auch bei der Behandlung des Problems der longitudinalen Schwingungen eines Stabes — es war diese (40)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

Die Grenzbedingungen waren da für $s=0$ und $s=l$ bei dem an beiden Enden befestigten Stabe $u=0$. — Ebenso ist es bei der Saite für $s=0$ und $s=l$ auch $\eta=0$. — All die Betrachtungen bezogen auf die longitudinal Schwingungen haben also in Bezug auf die Schwingungen einer Saite, und umgekehrt ihre Gültigkeit. –

Sind für irgend einen Zeitpunkt die ~~Geschwindigkeiten~~ Verrückungen u und die Geschwindigkeiten aller Punkte der Saite gegeben; dann können wir auch die Lage der Saite in jedem Augenblicke bestimmen. – Dies auszuführen sei unsere Aufgabe. – Die Differentialgleichung der schwingenden Saite wollen wir hier in der Form benutzen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

Eine particulare Lösung derselben ist:

$$u = A \sin\frac{ns}{l}\pi \cdot \sin\frac{nmt}{l}\pi$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet –
eine andere Lösung

$$u = \left(A \sin\frac{nmt}{l}\pi + B\cos\frac{nmt}{l}\pi\right)\sin\frac{ns}{l}\pi$$

Und endlich die allgemeinste Lösung:

(58) ...... $$u = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \left(A_n \sin\frac{nmt}{l}\pi + B_n\cos\frac{nmt}{l}\pi\right)\sin\frac{ns}{l}\pi$$

Es sei nun die Verrückung und die Geschw. zur Zeit $t=0$ gegeben und zwar seien diese:

$$u = U$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U'$$

wo U und U' zwei gegebene Functionen von s sind. –

Aus der allgemeinen Lösung (58) folgt dann

$$U = \sum_1^\infty B_n \sin \frac{ns}{l}\pi$$

$$U' = \frac{m\pi}{l} \sum_1^\infty n.A_n \sin \frac{ns}{l}\pi$$

Um abkürzen zu können setzen wir von nun an

$$s . \frac{\pi}{l} = x$$

Wir können dabei die Einheit der Länge so wählen dass $l = \pi$ wird – dann wird $s = x$; und ~~die Integration~~ es sind dann die Functionen U und U' welche bis jetzt in Bezug auf s zwischen 0 und l gegeben waren; in Bezug auf x zwischen 0 und π gegeben. –

Die Lösung der Aufgabe, das ist die Bestimmung von A_n und B_n ist nun auf die Aufgabe zurückgeführt irgend eine Function $f(x)$, welche zwischen den Grenzwerthen $x = 0$ und $x = \pi$ gegeben ist in Form einer Sinusreihe darzustellen. – Es ist dann:

$$f(x) = C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \ldots\ldots$$

Die Möglichkeit dieser Darstellung bewies in einer klassischen Abhandlung Dirichlet (Dove u. Moser – Repertorium der Physik. I Band 1829) –

Multipliciren wir die Reihe mit $\sin ax\, dx$ und integriren dann, so folgt:

$$\int_0^\pi f(x)\sin ax\,dx = \sum_1^\infty C_n \int_0^\pi \sin nx \sin ax\,dx$$

$$= \sum_1^\infty C_n \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\cos(a-n)x - \frac{1}{2}\cos(a+n)x\right)dx$$

Es ist ferner

$$\int_0^\pi \sin nx \sin ax\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-n)x}{(a-n)} - \frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]_0^\pi$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung besteht für alle Werthe von $\underline{a}$; ~~sie kan~~ es ergiebt sich aber für das Integral ein von 0 verschiedener Werth nur in dem Falle dass $a = n$. – Dann ist

$$\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = C_n \cdot \frac{\pi}{2}$$

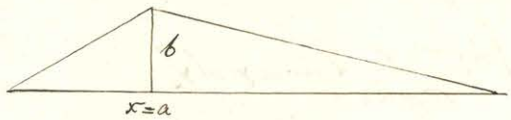
und hieraus

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

Dies ist der Weg der im allgemeinen zur Bestimmung der Coefficienten dienen kann – Nachdem wir ihn eingeschlagen wollen wir einen speciellen Pfad betreten – und uns mit den Schwingungen einer gerupften Saite beschäftigen. –

Wir betrachten denjenigen Zeitpunkt $t = 0$ gegeben, ~~für welch~~ in welchem die Saite gebracht wird –

bevor sie losgelassen wird. – Es ist in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit



$$U' = 0$$

Bei Darstellung der Coefficienten zeigt sich nun, dass sämmtliche A-s verschwinden, dass also

$$A_n = 0$$

Es ist ferner $\underline{u}$ um $\frac{\pi}{m}$ periodisch, also die Dauer einer einfachen Schwingung:

$$T = \frac{\pi}{m}$$

Die Zeiteinheit wählen wir aber so, dass

$$T = \pi$$

Dadurch wird dann $m = 1$ – und in Form der allgemeinsten Lösung

$$u = \sum_1^\infty B_n \sin nx \cos nt$$

also:

$$U = \sum_n B_n \sin nx$$

Aus der Form der gezupften Saite folgt nun, dass U

für $0 < x < a$ gegeben ist $U = \frac{b}{a} x$

für $a < x < \pi$ " " $U = b \cdot \frac{\pi - x}{\pi - a}$

Analog wie wir auf Seite 166 bei Faden folgt dann:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U \sin nx \, dx$$

also auch:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{b}{a}\, x \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_a^\pi b \cdot \frac{(\pi - x)}{(\pi - a)} \sin nx\, dx$$

da aber:

$$\int x \sin nx\, dx = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}$$

$$\int \sin nx\, dx = -\frac{\cos nx}{n}$$

so folgt:

$$B_n = \frac{2b}{a(\pi - a)} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sin na$$

Die ~~einzelnen Glieder der Reihe~~ Bewegung der Saite ist zusammengesetzt aus den einzelnen Tönen, welche durch die Glieder der Reihe für n dargestellt sind. — Die Constante B_n ist die Amplitude des n ten Tones. — Es wird B_n also die Intensität des n ten Tones $= 0$, wenn $\sin na = 0$ d.h. $a = \frac{\pi}{n}$. — In diesem Falle verschwinden aber auch die mit der Ordnungszahl $2n$, $3n$ .. etc bezeichneten Töne. — Es werden also im Klange alle Töne fehlen welche in dem gerupften Punkt einen Knoten haben. —

Die Lage und Form der Saite können wir auch ~~durch~~ auf anderem Wege durch andere Lösungen der Gleichung (57) bestimmen. –
Durch die für t und T eingeführten Einheiten wird $m=1$ und folglich auch die Diff. Glch. 57.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

hierzu kommen die Grenzbedingungen.

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x=0 \\ \;\;\text{"}\;\; x=\pi \end{array}\right\} u=0$$

hiernach wird die allgemeine Lösung:

$$u=\varphi(t+x)+\psi(t-x)$$

da für $x=0$ $u=0$ also

$$0=\varphi(t)+\psi(t)$$

hieraus $$\varphi(t)=-\psi(t)$$

hiernach muss auch bestehen:

$$u=\varphi(t+x)-\varphi(t-x)$$

Die zweite Grenzbedingung ist für $x=\pi$ ~~ist~~ $u=0$

$$0=\varphi(t+\pi)-\varphi(t-\pi)$$

$$\varphi(t+\pi)=\varphi(t-\pi)$$

Setzen wir $t-\pi=z$ dann:

$$\varphi(z+2\pi)=\varphi(z)$$

Es ist also die Function $\varphi(z)$ periodisch um 2π – wir werden sie vollständig darstellen können, wenn wir alle ihre Werthe von $-\pi$ bis $+\pi$ gefunden haben. –

Es sei die Lage der Saite in einem Zeitpunkte $t=0$ gegeben in welchem alle Punkte derselben ruhen – also

$$\text{für } t=0 \quad \begin{cases} u = U \text{ eine gegebene Function von } x \text{ in dem Interval } x=0 \text{ bis } x=\pi \\ \dfrac{du}{dt} = 0 \quad \text{in dem Interv. } x=0 \text{ u. } x=\pi \end{cases}$$

dann wird:

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = U$$

$$\varphi'(x) - \varphi'(-x) = 0$$

Die letzte Gleichung mit dx multiplizirt und integrirt giebt:

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = C$$

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = U$$

Die zweite Gleichung wird zur ersten addirt – dann abgezogen, giebt:

$$\varphi(x) = \frac{U+C}{2}$$

$$\varphi(-x) = \frac{C-U}{2}$$

Hiedurch ist die Function $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $+\pi$ und $-\pi$ bestimmt. – Die Integrationsconstante hebt sich in den Ausdrücken für u und für $\frac{du}{dt}$

weg, es ist also vollkommen gleichgültig welchen Werth wir ihr beilegen. – Die Allgemeinheit unserer Betrachtungen beschränken wir also gar nicht durch die Annahme des Werthes

$$C = 0$$

Es wird dann:

$$\varphi(x) = \frac{U}{2}$$

$$\varphi(-x) = -\frac{U}{2}$$

hieraus ist ersichtlich:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x)$$

und folglich

$$u = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$$

Nehmen wir nun an die Saite sei bei x in der Mitte, also bei $x = a = \frac{\pi}{2}$ gerupft, dann wird nach Seite (167): –

$$U = \frac{2b}{\pi}x \qquad \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$U = \frac{2b}{\pi}(\pi - x) \qquad \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

also

$$\varphi(x) = \frac{bx}{\pi} \qquad \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(x) = \frac{b(\pi - x)}{\pi} = b - \frac{bx}{\pi} \quad \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Wir können $\underline{u}$ auch in der Form darstellen:

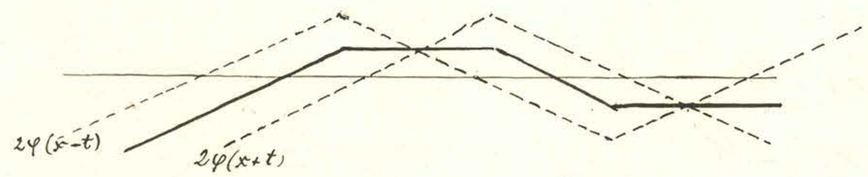
$$u = \frac{1}{2}\left\{2\varphi(x+t) + 2\varphi(x-t)\right\}$$

Denken wir uns daher zwei Curven gezeichnet:

$$y = 2\varphi(x+t)$$

und $$y' = 2\varphi(x-t)$$

so stellt u in jedem Punkte das arithmetische Mittel von y und y' dar. –



II Kapitel. –
Die Theorie dünner Platten. –

§36. Allgemeine Grundlage der Theorie dünner Platten. –

Wir leiteten für den Fall des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers mit theilweise unendlich kleinen Dimensionen, im I Kapitel dieses Abschnittes die Gleichung ab:

$$0 = \delta\Omega - \delta\sum\int F\,dx\,dy\,dz \qquad \ldots\ldots (1)$$

worin für einen krystallinischen Körper F die Arbeit welche erfordert wird um die Formänderung vorzubringen. –

$$F = K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \vartheta(x_x+y_y+z_z)^2\right\} \qquad \ldots(2)$$

Es handelt sich nun um die Bildung von F. –
Die Platte sei im natürlichen Zustande eben –
Zwischen ~~Durch~~ den Grenzflächen derselben kann also eine ebene Mittelfläche gelegt werden. – Auf dieser Mittelfläche nehme ich einen Punkt P ins Auge, und bezeichne mit s und s' seine Coordinaten in Bezug auf ein rechtwinkeliges System deren Axen

in der Mittelfläche liegen. – In P stelle ich mir nun drei Linienelemente vor; deren eines (0) mit der Axe s; das zweite (1) mit der Axe s', und endlich den dritte (2) senkrecht auf die beiden ersten stehen soll. – ~~Diese~~ Diese gegenseitige rechtwinkelige Lage der Linienelemente verändert sich sobald eine Formänderung eintritt – es werden dann die Winkel zwischen den Linienelementen von einem rechten Winkel um Grössen abweichen, welche von der Ordnung der Dilatation od. Contr. sind. – Wir wollen unsere Betrachtungen durch Annahme ausschliesslich unendlich kleiner ~~Veränderung~~ Verrückungen nicht beschränken – wollen also auch die Ordnung dieser Winkel nicht bestimmen. Mit den Elementen 0, 1, 2. nach der Formänderung Nahezu zusammenfallend nehmen wir nun ein rechtwinkeliges Coordinaten-system xyz an; und zwar soll die x Axe zu 0; die y Axe zu 1, und die z Axe zu 2 sehr nahe stehen – es ist ausserdem in unserer Macht das System so zu wählen dass $\sphericalangle(1, z) = 90^\circ$ ~~Die Axen dieses Systems~~ Der Anfangspunkt P dieses Systemes ist mit dem Punkte P fest verbunden – vor der Formänderung fallen dann die Axen x und y in die Mittelebene – und z steht auf diese vertical – nach der Form-

änderung ~~Lage~~ tangiren x und y ~~in~~ die aus der Mittelebene entstandenen gekrümmten Fläche – und z ist die Normale dieser krummen Fläche. –
Die Coordinaten eines ~~Punktes~~ Moleküls bezeichnen wir dann auf dieses System bezogen in der Gleichgewichtslage mit x, y, z – die Coordinaten desselben ~~Punktes~~ Moleküls nach der Formänderung, also auch nach der drehung der Coordinatenaxen mit $x+u$, $y+v$, $z+w$. – Selbstverständlich ist nun

für $x=0$ $y=0$ $z=0$

auch $u=0$ $v=0$ $w=0$

und ferner

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

Wir führen ein neues beliebiges rechtwinkeliges Coordinaten System ein – in welchem die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung ξ η ζ sind. – Die Cosinusse der Winkel welche letztgenannte Axen mit den x, y, z Axen bilden sind ~~durch folgende~~ α_0. β_0 γ_0 α_1 β_1 γ_1 α_2 β_2 γ_2; – diese Grössen so wie die Coordinaten ξ η ζ sind von der Lage des Punktes P in der Platte, also von s und s' abhängig. – Das bereits erwählte System der Coordinaten ist:

ξ	η	ζ	
α_0	β_0	γ_0	x
α_1	β_1	γ_1	y
α_2	β_2	γ_2	z

In diesem System der $\xi\ \eta\ \zeta$ bezeichnen wir ferner mit $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ die Coordinaten desjenigen Punktes, dessen Coordinaten in dem System $x\,y\,z$ wir $x+u$, $y+v$, $z+w$ setzten – dann ist offenbar:

$$(3) \ldots \begin{cases} \xi' = \xi + \alpha_0(x+u) + \alpha_1(y+v) + \alpha_2(z+w) \\ \eta' = \eta + \beta_0(x+u) + \beta_1(y+v) + \beta_2(z+w) \\ \zeta' = \zeta + \gamma^0(x+u) + \gamma_1(y+v) + \gamma_2(z+w) \end{cases}$$

$\xi'\ \eta'\ \zeta'$ sind Functionen von $s+x$ und von $s'+y$ es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial\xi'}{\partial s} = \dfrac{\partial\xi'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\eta'}{\partial s} = \dfrac{\partial\eta'}{\partial x}. \\ \dfrac{\partial\zeta'}{\partial s} = \dfrac{\partial\zeta'}{\partial x} \end{cases}$$

und ebenso:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi'}{\partial s'} &= \frac{\partial\xi'}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta'}{\partial s'} &= \frac{\partial\eta'}{\partial y}\\ \frac{\partial\zeta'}{\partial s'} &= \frac{\partial\zeta'}{\partial y}\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

Diese zwei Systeme von Gleichungen (4) und (5) wollen wir in der That bilden – wir können dies durch die angedeutete Differentiation der Gl. (3). –

Aus (4) folgt dann ein sehr complicirter Ausdruck welchen wir aber durch Einführung der neuen Grössen p q r auf Folgende reduciren können:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= ry - qz + \varepsilon\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= pz - rx\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= qx - py\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Es ist hier gesetzt worden:

$$\left.\begin{aligned}p &= \alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial s} + \beta_1\frac{\partial\beta_2}{\partial s} + \gamma_1\frac{\partial\gamma_2}{\partial s}\\ q &= \alpha_2\frac{\partial\alpha_0}{\partial s} + \beta_2\frac{\partial\beta_0}{\partial s} + \gamma_2\frac{\partial\gamma_0}{\partial s}\\ r &= \alpha_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial s} + \beta_0\frac{\partial\beta_1}{\partial s} + \gamma_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial s}\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

und:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\right)^2} - 1$$

~~Ist~~ ε ist dann wohl die Dilatation in der Richtung x, eines der kleinen ~~Flächen~~ Theile der Platte – in welche wir es getheilt denken müssen. – ~~Diese einzelnen Theile~~ Dimensionen dieser kleinen Theile sind von derselben Ordnung das ist von der Ordnung der Dicke der Platte. –

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = \frac{\partial \xi}{\partial s} : \frac{\partial \eta}{\partial s} : \frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

also mit Hülfe von (8)

$$(9) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s} &= \alpha_0 (1+\varepsilon) \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \beta_0 (1+\varepsilon) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s} &= \gamma_0 (1+\varepsilon) \end{aligned} \right.$$

Ganz ähnlich geformte Gleichungen haben wir nun ~~in Bezug~~ in Folge von (5) zu bilden. Aus (3) ergeben sich

$$\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_1\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(x+u) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(y+v) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1}(z+w) + \alpha_0 \frac{\partial u}{\partial s_1} +$$
$$+ \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial s_1}$$

$$\beta_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_1\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial \beta_0}{\partial s_1}(x+u) + \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1}(y+v) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1}(z+w) +$$
$$+ \beta_0 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial s_1}$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_1\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial s_1}(x+u) + \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}(y+v) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}(z+w) +$$
$$+ \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial s_1}$$

In diesen Gleichungen setzen wir dann:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} \\ q_1 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_0}{\partial s_1} \\ r_1 &= \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \beta_0 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \gamma_0 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

und

$$\varepsilon' = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2} - 1 \quad \ldots\ldots (11)$$

Die in diesen Ausdrücke auftretenden Grössen $\frac{\partial \xi}{\partial s_1}, \frac{\partial \eta}{\partial s_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}$ sollen wir nun umformen – wir benützen hiezu ein Verhältniss welches bestehen muss, wenn das Linienelement 1 im natürlichen Zustand mit s' parallel angenommen wird, dann ist nämlich:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} : \frac{\partial \eta}{\partial s_1} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \cos(1,\xi) : \cos(1,\eta) : \cos(1,\zeta)$$

Also in Folge der Gleichung (10)

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = \cos(1,\xi)(1+\varepsilon')$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s_1} = \cos(1,\eta)(1+\varepsilon')$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \cos(1,\zeta)(1+\varepsilon')$$

Es sind die Cosinus der Winkel, welche das Linienelement 1 mit den Axen x y z bildet der Reihe nach

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \qquad 1 \qquad 0$$

Worin $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ die Werthe von $\frac{\partial u}{\partial y}$ bedeutet für

$x=0$ $y=0$ $z=0$

ferner sind die Cosinus welche die x y z Axen mit den ξ η ζ axen bilden:

x	y	z	
α_0	α_1	α_2	ξ
β_0	β_1	β_2	η
γ_0	γ_1	γ_2	ζ

Also:

$$\cos(1,\xi) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \alpha_0 + \alpha_1$$

$$\cos(1,\eta) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \beta_0 + \beta_1$$

$$\cos(1,\zeta) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \gamma_0 + \gamma_1$$

Wir setzen nun

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \sigma$$

wo dann σ den ~~von~~ sehr kleinen Winkel bedeutet um welchen der Winkel (01) ~~vor~~ nach der Formänderung von einem rechten abweicht. Durch diese Werthe ergeben sich dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s_1} &= (\alpha_0 \sigma + \alpha_1)(1+\varepsilon_1) \\ \frac{\partial \eta}{\partial s_1} &= (\beta_0 \sigma + \beta_1)(1+\varepsilon_1) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} &= (\gamma_0 \sigma + \gamma_1)(1+\varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

Aus (9) und (12) ergiebt sich nun der Werth von σ, und zwar:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial \eta}{\partial s_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial s}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')}$$

Da nun ε und ε' unendlich klein sind gegen 1 so folgt.

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial s}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial s_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial s}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial s_1} \quad \ldots\ldots (13)$$

Benützen wir nun die Gleichungen (10), (11), (12) zur Bildung des aus (5) folgenden Ausdruckes so erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s_1} + r_1(y+v) - q_1(z+w) + \sigma(1+\varepsilon_1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial s_1}+p_1(z+w)-r_1(x+u)+\varepsilon_1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial s_1}+q_1(x+u)-p_1(y+v)$$

Wir haben aber unser Problem so aufzufassen dass die Dicke der Platte vernachlässigbar sei gegen seine Längs und Quedimensionen – dass ferner die ~~Form~~ Verrückungen der einzelnen Molecüle ~~unendlich~~ sehr klein sein gegen die Dicke der Platte. –

Also ist u v w vernachlässigbar gegen x y z und x y z vernachlässigbar gegen s s' – bemerken wir ferner dass auch ε und ε' verschwindet gegen 1; so erhalten wir die vereinfachten Ausdrücke:

$$(14)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=r'y-q_1z+\sigma\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=p'z-r'x+\varepsilon'\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=q'x-p'y\end{aligned}\right.$$

Wie aus (6) und (14) ersichtlich sind die erhalten Ausdrücke partialle Diff Quotienten derselben Function bilden wir aus ~~denen~~ beiden derselben –

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\qquad\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}\qquad\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$r = 0$$

$$r' = 0$$

und $p + q_1 = 0$

Die Integration ergiebt nun:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + pyz - qzx + \varepsilon x + \sigma y \\ v &= v_0 + p_1 yz + pzx + \varepsilon_1 y \\ w &= w_0 + \frac{q}{2}x^2 - pxy - \frac{p_1}{2}y^2 \end{aligned}\right\} \cdots (15)$$

Nach Definition der Grössen x_x, y_y, z_z etc. auf Seite 36, folgt nun: – (Die Integrationsconstanten $u_0\, v_0\, w_0$ sind von x und y unabhängig können aber noch immer von z abhängen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= x_x = -qz + \varepsilon \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= y_y = p_1 z + \varepsilon_1 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= z_z = \frac{dw_0}{dz} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= y_z = \frac{dv_0}{dz} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= z_x = \frac{du_0}{dz} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= x_y = 2pz + \sigma \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (16)$$

Diese Werthe von $x_x\ y_y$ etc. müssen aber in die Ausdrücke für $X_x\ Y_y$ etc. auch den Gleichungen I des Ersten Abschnittes genügen – hierdurch haben wir ein Mittel $u_0\ v_0\ w_0$ zu be-

184

stimmen. – Es sind x_x etc ~~___~~ von x und y unabhängig, Functionen der Variable z, es müssen also nach Gleichung (25) (Erster Abschn.) auch die Druckcomponenten X_x, Y_y etc von x und y unabhängig sein. – Der Vereinfachung halber setzen wir die Componenten des äusseren Druckes $=0$, und sehen dadurch auch von dem experimentell nie zu vermeidlichen Drucke der Atmosphäre ab, wodurch wir dann die Gleichungen I in folgender einfacher Form erhalten

$$\frac{dX_z}{dz}=0$$

$$\frac{dY_z}{dz}=0$$

$$\frac{dZ_z}{dz}=0$$

Bezeichnen wir mit $2h$ die Dicke der Platte so ist die Gleichung der Oberfläche der Platte

$$z=\pm h$$

Es muss also für alle Werthe von z

$$X_z=0 \qquad Y_z=0 \qquad Z_z=0$$

sein. –

Also nach den Gleichungen (25) des ersten Abschnittes, muss:

$$X_2 = 0$$

$$Y_2 = 0$$

$$Z_2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}(X_x + Y_y) = 0$$

und so nach (16)

$$\frac{du_0}{dz} = 0$$

$$\frac{dv_0}{dz} = 0$$

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left((q-p_1)z - \varepsilon - \varepsilon_1\right)$$

~~Wir nehmen an~~ Wie bereits erwähnt ist für

$x = 0$ $y = 0$ $z = 0$

auch $u = 0$ $v = 0$ $w = 0$

hierdurch können die Integrations constanten der drei ~~Gleichungen~~ neu abgeleiteten Gleichungen bestimmt werden – es sind diese $= 0$ und wir erhalten dann als Integrale:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left\{\frac{(q-p_1)}{2}z^2 - (\varepsilon+\varepsilon_1)z\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (17)$$

Diese Werthe in (16) eingesetzt, wird:

$$X_x = -qz + \varepsilon$$

$$Y_y = p_1 z + \varepsilon_1$$

$$(18)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Z_z = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left((q-p_1)z - \varepsilon - \varepsilon_1\right) \\ Y_z = 0 \\ Z_x = 0 \\ X_y = 2pz + \sigma \end{array}\right.$$

Zur Bildung von F haben wir nun diese Werthe in (2) zu setzen, und erhalten dadurch:

$$(19)\ldots\quad F = K\left\{(qz-\varepsilon)^2 + (p_1 z + \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{2}(2pz+\sigma)^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left((q-p_1)z - \varepsilon - \varepsilon_1\right)^2\right\}$$

Dieser Werth muss in (1) gesetzt werden. Hierin ist erstens der Ausdruck

$$\sum\iiint F\,dx\,dy\,dz.$$

Wir hatten die Platte in Theile getheilt deren Dimensionen von der Ordnung der Dicke derselben waren – es sind also die Grenzen für für x von 0 .. bis ds; für y von 0 .. bis ds' und endlich für z, von $-h$ bis $+h$. –

~~Zuerst~~ Das Summenzeichen bezieht sich auf die Grössen s und s' – wobei auf die ganze Fläche der Platte auszudehnen ist –

Also:

$$\sum\int F\,dx\,dy\,dz = \iint ds\,ds'\int_{-h}^{+h} F\,dz.$$

gesetzt nun:

$$\int_{-h}^{+h} F\,dz = f$$

so wird der Ausdruck (1,

$$o = \delta\Omega - \delta\iint f\,ds\,ds, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

bilden wir nun wirklich diesen Ausdruck f, so wird:

$$f = \frac{2}{3}Kh^3\left\{q^2+p_1^2+2p^2+\frac{\vartheta}{1+\vartheta}(q-p_1)^2\right\}+2Kh\left\{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\delta^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\vartheta}{1+\vartheta}(\varepsilon+\varepsilon_1)^2\right\} \quad \ldots (21)$$

Wir nehmen die Dickendimension der Platte, also <u>h</u> unendlich klein an, man könnte daher leicht dazu verleitet werden das erste Glied gegen den zweiten zu vernachlässigen; ohne dazu Berechtigung zu haben, denn die Ordnung der Glieder ist auch von den unter der Parenthese stehenden Glieder bedingt – welche ~~ganz~~ mannigfache Ordnung sein können. – Unter Umständen kann das erste Glied unter der Parenthese endlich werden, während das zweite immer unendl. klein ist. (?)

Wir müssen auf die Bedeutung einiger im Verlaufe dieser Untersuchungen eingeführten Grössen erinnern. – Es ist:

$$(8) \ldots\ldots \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\right)^2} - 1$$

$$(11) \ldots\ldots \quad \varepsilon' = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2} - 1$$

$$(13) \ldots\ldots \quad \sigma = \frac{\partial \xi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial s} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}$$

ferner nun noch $r = 0$

$r' = 0$

und $p = -q$.

Also:

$$(10) \ldots\ldots \quad p = -\left(\alpha_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_0}{\partial s_1}\right)$$

$$(7) \ldots\ldots \quad q = \alpha_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s} + \beta_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_0}{\partial s}$$

$$(10) \ldots\ldots \quad p_1 = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}$$

Da nun ε und ε' gegen 1 als unendlich klein zu vernachlässigen ist, so folgt auch:

$$\alpha_0 = \frac{\partial \xi}{\partial s} \qquad \beta_0 = \frac{\partial \eta}{\partial s} \qquad \gamma_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial \xi}{\partial s_1} - \alpha_0 \sigma \; ; \; \beta_1 = \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - \beta_0 \sigma \; ; \; \gamma_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} - \gamma_0 \sigma$$

Wir specialisiren nun die Aufgabe dadurch, dass wir annehmen, dass die Platte nur unendlich kleine transversale Verrückungen erleidet. — Auch das beliebige Axensystem ξ η ζ können wir so wählen dass seine ξ und η Axe mit der s und s_1 zusammenfalle- dass also vor wie nach der Formänderung

$$\xi = s \qquad \eta = s_1$$

~~Aus~~ Die $\xi\eta$ Ebene wählen wir so dass auch ζ unendlich klein wird; verlegen ihn also in die Mittelfläche der Platte. —

Ist nun ζ eine unendl. kleine Grösse erster Ordnung so ~~ist~~ sind es ε, ε' und σ von der zweiten, p, q, p_1 dagegen auch von der ersten Ordnung. —

Die Ordnung der zwei Glieder im Ausdrucke (21) hängt also ausschliesslich von der Ordnung der Grösse h ab — und wir wollen unsere ferneren Betrachtungen an Platten knüpfen für welche das ~~erste~~ zweite Glied des Ausdruckes (21) gegen das ~~zweite~~ erste verschwindet; für welche also:

$$f = \frac{2}{3} K h^3 \left\{ q^2 + p_1^2 + 2p^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}(q-p_1)^2 \right\} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Da in den Ausdrücken für α_0^2, β_0, γ_0 etc. $\beta_0\sigma$ ~~also~~ die unendlich klein höherer Ordnung

vernachlässigt werden muss und da $\xi = s$
$\eta = s_1$, so folgt aus denselben:

$$\alpha_0 = 1 \qquad \beta_0 = 0 \qquad \gamma_0 = \frac{\partial \xi}{\partial s}$$

$$\alpha_1 = 0 \qquad \beta_1 = 1 \qquad \gamma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial s_1}$$

Aus den Relationen:

$$\alpha_1 + \beta_0 = 0$$

$$\alpha_2 + \gamma_0 = 0$$

$$\beta_2 + \gamma_1 = 0$$

folgt noch:

$$\alpha_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial s} \qquad \beta_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial s_1}$$

und aus der Relation

$$\alpha_2 \alpha_0 + \beta_2 \beta_0 + \gamma_2 \gamma_0 = 0$$

folgt $\gamma_2 = 1$

Diese Werthe zur Bildung von p, q, p_1 benutzt (10)(7)(10), erhalten wir:

$$(23) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} p &= -\frac{\partial^2 \xi}{\partial s \, \partial s_1} \\ q &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \\ p_1 &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial s_1^2} \end{aligned} \right.$$

Diese Werthe in (22) gesetzt führen dann für f zu folgendem Ausdruck:

$$f = \frac{2}{3} K h^3 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s . \partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s_1^2}\right)^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s_1^2}\right)^2 \right\} \cdots (24)$$

§37. Die transversalen Schwingungen einer dünnen Platte. –

Den eben abgeleiteten Ausdruck (24) für f wollen wir benützen um eine Gleichung zu bilden welche uns zum Lösen des Problemes führen wird. – Demnach beziehen sich auch diese Betrachtungen – auf eine unendlich dünne Platte, deren transversale Verrückungen unendlich klein sind, während die longit. Verrückungen $= 0$ sind. –

Das Hamilton'sche Prinzip führt uns hier ähnlich wie bei der Theorie der Stäbe, zu der Gleichung:

$$0 = \int dt \left(\delta\Omega + \delta T - \delta \int f\, ds\, ds_1\right)$$

In dieser Gleichung bezeichnet $\delta\Omega$ das Moment der äusseren Kräfte – zur Vereinfachung setzen wir $\delta\Omega = 0$ dann ist wir nehmen an die Platte ist ganz frei ~~; wenn wir ferner die Zeichen d~~

und s, mit ~~den~~ durch die gleichbedeutenden x und y ersetzt, dann ~~folgt~~ gestaltet sich die Gleichung:

(25)..... $$0=\int dt\left\{\delta T-\delta\iint f\,dx\,dy\right\}$$

Die Dimensionen eines in der Platte angenommenen Körperelementes (dessen Coordinaten x und y sind) ~~und durch die Gro~~ sind $dx\,dy$ und $2h$. – Wenn dann ϱ die Dichtigkeit derselben bedeutet dann ist seine Masse =

$$\varrho\,2h\,dx\,dy$$

~~Also die lebendige Kraft des Elementes~~

$\frac{1}{2}$ ~~da~~ seine Geschwindigkeit $=\frac{\partial\xi}{\partial t}$.

Also die lebendige Kraft des Körperelementes:

$$h\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 dx\,dy$$

Und so die lebendige Kraft der Ganzen Platte:

$$T=\varrho h\iint\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 dx\,dy$$

diesen Werth in (25) gesetzt, folgt:

(26)..... $$0=\delta\iiint dt\,dx\,dy\left\{\varrho h\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2-f\right\}$$

Dies Integral werden wir nun in zwei zerlegen, und die Variationen derselben wirklich bilden:

$$\delta\iiint dt\,dx\,dy\,\rho h\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 = -2\rho h\iiint dt\,dx\,dy\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta$$

Das zweite der zu bildenden Integrale enthält die Function f, dieselbe muss nach Gleichung (24) gebildet werden – das erste Glied dieses zu bildenden Ausdruckes ist:

$$\delta\iiint dt\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2\iiint dt\,dx\,dy\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}$$

Also:

$$\delta\iiint dt\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2\int dt\left\{\iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\right) - \iint dx\,dy\,\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\right\}$$

Da nun ferner:

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right) - \frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\delta\zeta$$

also:

$$\delta\iiint\ldots\ldots = 2\int dt\left\{\iint\ldots\ldots\ldots) - \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right) + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\delta\zeta\right\}$$

Ist U eine Function der Orter, ds ein Element des Umfanges, N die nach innen gerichtete Normale dieses Elementes dann ist:

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial U}{\partial x} = -\int ds\,U\cos(N,x)$$

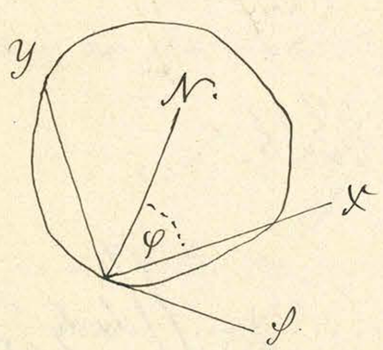
das Integral genommen über die ganze Fläche der Platte. — Und ebenso:

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial U}{\partial y} = -\int ds\,U\cos(N,y)$$

Nach diesen Gleichungen, wird:

$$\delta\iiint dx\,dy\,dt\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2 = 2\int dt\left\{-\int ds\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}\cos(N,x) + \right.$$

$$\left. + \int ds\,\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\,\delta\xi\cos(N,y) + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}\,\delta\xi\right\}$$



Hierdurch haben wir eigentlich ein neues Coordinatensystem eingeführt — dessen Anfangspunkt unendlich nahe zu ds liegt — und von dem ersten Coordinatensystem xy ~~um~~ um die Coordinaten x_0 und y_0 absteht — diese Coordinatenaxen sind an der Figur mit N und S bezeichnet. —

Die Transformationsgleichungen sind nun: ds ein Element der Contoure.

$$N=(x-x_0)\cos(N,x)+(y-y_0)\cos(N,y)$$

$$s=(x-x_0)\cos(s,x)+(y-y_0)\cos(s,y)$$

hiernach:

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}=\frac{\partial\delta\xi}{\partial N}\cdot\cos(N,x)+\frac{\partial\delta\xi}{\partial s}\cos(s,x)$$

Wir bezeichnet $\sphericalangle(N,x)$ mit φ, dann ist

$$(s,x)=90^\circ-\varphi$$

also:

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}=\frac{\partial\delta\xi}{\partial N}\cos\varphi+\frac{\partial\delta\xi}{\partial s}\sin\varphi$$

hiernach wird dann:

$$\delta\iiint dx\,dy\,dt\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2=2\int dt\left\{-\overset{(I)}{\int ds\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta\xi}{\partial N}\cos^2\varphi}-\overset{(II)}{\int ds\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\delta\xi}{\partial s}\cos\varphi\sin\varphi}\right.$$

$$\left.+\overset{(III)}{\int ds\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\delta\xi\sin\varphi}+\overset{(IV)}{\iint dx\,dy\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}\delta\xi}\right\}$$

Das Integral II werden wir partiell integriren hiebei verschwindet das Constante Glied, da der Umfang ~~der~~ Platte eine in sich zurückkehrende sein muss, statt II können wir dann direct ~~in~~ ~~in~~ das gewonnene Integral setzen, und wenn wir es noch mit III zusammenziehen dann ergebt sich:

$$\delta\iiint dx\,dy\,dt\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2 = 2\int dt\left\{-\int(\mathrm{I}) + \iint_{(\mathrm{III}\,,\,\mathrm{IV})}(\mathrm{IV}) + \int ds\,\delta\xi\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\}$$

(?) . . . .

Zu diesem Integral gelangten wir indem wir

$$\delta\iiint dx\,dy\,dt\,f$$

zu bilden suchten – wir bestimmten aber so nur das erste Glied desselben – und haben dann weiter nach dem Ausdrucke (24) gemäss zu verfahren. – Nach langer Arbeit wird dann die Gleichung (26) gebildet – er ist sehr lang; ich bezeichne sie mit (27). –

~~Ein~~ Diese zu bildende Gleichung (27) kann ~~alle~~ für alle Werthe der Variabeln allein dann bestehen, wenn der Factor von $\delta\xi$ ~~sa~~ gleich 0 ist das ist wenn:

$$(28) \quad \ldots\ldots \quad 0 = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\cdot\frac{h^2K}{\varrho}\left\{\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}\right\}$$

Hiezu kommen noch zwei Grenzbedingungen. – Es ist am Rande $\delta\xi$ willkürlich – also

also für Grenzwerthe der Variabeln, auch $\frac{\partial\delta\xi}{\partial N}$ willkürlich – demnach muss der Factor von $\frac{\partial\delta\xi}{\partial N}$ gleich 0 sein dann ist es müssen:

$$0=\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left\{\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial^2 x\partial y}+\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right\}\quad\ldots\ldots(29)$$

und:

$$0=\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\sin^2\varphi\quad\ldots(30)$$

Die Gleichung (28) ohne den Grenzbedingungen leitete schon Laplace ab; die Grenzbedingungen stellte zuerst Poisson auf in einer Abhandlung welche sich im VIII Bande der „Mémoires de l'Academie" unter dem Titel befindet: „Sur l'équilibre et les mouvements d'un corps élastique". – Poisson stellt da drei Bedingungs-gleichungen auf es rührt dies her von einem Fehler welchen er begeht indem er eine in Bezug der Dicke der Platten aufgestellte Reihe als Convergent annimmt. – Die Theorie in seiner ganzen Schärfe und Bestimmtheit zu ergründen gelang es dann Kirchhoff – er leitete die drei Gleichungen 28 29, 30 in einer Abhandlung ~~ab~~ aus dem XL. Bande von Crelle's Journal ab – auf einem Wege der wie er selbst behauptet an Strenge den bei diesen Vorlesungen befolgten nachsteht. –

§38. Die transversalen Schwingungen einer kreisförmigen unkrystallinischen Platte. – Theorie der Klangfiguren. –

Wir nehmen an die Platte gebe nur einen einfachen Ton – dann lässt sich die transversale Verrückung ξ zur Zeit t in folgender Form darstellen:

(31) $$\xi = U \sin(4\lambda^2 at)$$

wo U eine noch weiter zu bestimmende Function von x und y, λ eine beliebige Constante ist – a ist eine zur Verkürzung eingeführte Bezeichnung des constanten Factors in (28) und zwar so dass:

$$a^2 = \frac{2}{3}\,\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\cdot\frac{h^2 K}{\varrho}$$

Für U können wir ~~folgende p~~ indem wir den Werth (31) in die Gleichung (28) einsetzen folgende partielle Differentialgleichung bilden:

$$16\lambda^4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Diese Gleichung lässt sich in zwei Diff. Gleichungen zweiter Ordnung zerlegen. — Diese sind:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda^2 v &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 4\lambda^2 u &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Führen wir statt u und v die halbe Summe und die halbe Differenz dieser Grössen — also S und D in die Rechnung ein, so dass

$$u = S + D$$
$$v = S - D$$

dann erhalten wir in Folge der Gleichungen (33):

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda^2 S &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \\ -4\lambda^2 D &= \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Unsere weitere Aufgabe sei die Theorie in Bezug auf eine kreisförmige Platte fest zu stellen – wie bei allen ähnlichen Aufgaben scheint es also zweckmässig zu sein Polarcoordinaten ein zu führen – und dies wollen wir in der That thun. – Also setzen wir

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

~~Wir~~ Es wurden ~~hierbei die Axen~~ hiebei das Coordinatensystem, welches wir erstens mit s und $\mathfrak{s}$, dann mit x und y bezeichneten in den Mittelpunkt der kreisförmigen Platte verlegt. – Vergleichen wir dies mit der im vorigen § benützten Zeichnung so sehen wir dass dabei die positive Richtung verwechselt wurde dass als was früher φ war nun $(180+\varphi)$ ist. – Hierdurch werden dann die Gleichungen (34)

$$(35)\ldots\left\{\begin{aligned} 4\lambda^2\mathfrak{S} &= \frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial\varphi^2}\\ -4\lambda^2\mathfrak{D} &= \frac{\partial^2\mathfrak{D}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{D}}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\right.$$

Eine particuläre Lösung ~~von~~ der ersten dieser Gleichungen ist:

$$S = A \cos n\varphi\, X$$

wo X eine Function von r, und $\underline{n}$ eine beliebige Grösse. – (A eine Const.) Die Function S muss da unsere Platte eine kreisförmige ist um 2π periodisch sein – und hieraus folgt, dass $\underline{n}$ eine positive ganze Zahl ist. –
Setzen wir nun diesen Werth von S in (35) dann wird

$$\frac{d^2X}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dX}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + 4\lambda^2\right)X = 0 \quad \ldots\ldots (36)$$

Eine ähnliche Lösung der zweiten Gleichung (35) ist, mit ähnlicher Bedeutung der Zeichen:

$$\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - 4\lambda^2\right)Y = 0 \quad \ldots\ldots (37)$$

Die weitere Aufgabe ist also Lösungen dieser Gleichungen (36) und (37) zu finden; hierdurch sind ja auch schon die Lösungen von 35 gefunden. –
Wir führen nun der Übersichtlichkeit halber die Grösse $x = \lambda r$ ein so dass $r = \frac{x}{\lambda}$; selbstverständlich ist dabei die Bedeutung des Zeichens x eine ganz andere wie in den bisherigen Betrachtungen. –

Durch Einführung dieses neuen Zeichens wird; (36) und (37):

$$(38) \ldots\ldots \quad \frac{d^2X}{dx} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2}+4\right)X = 0$$

$$(39) \ldots\ldots \quad \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dY}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2}-4\right)Y = 0$$

~~Um~~ Es sollen nun zwei particuläre Lösungen dieser Gleichungen gebildet werden – es hat dann keine Schwierigkeit zur allgemeinen Lösung über zugehen. –

Eine particuläre Lösung von (38) bilden wir durch Reihenentwickelung – alle Glieder der Reihe ~~müssen~~ sollen von demselben Vorzeichen sein also:

$$X = A_0 x^k + A_2 x^{k+2} + A_4 x^{k+4} + \ldots\ldots$$

Es ist dann:

$$\frac{dX}{dx} = kA_0 x^{k-1} + (k+2)A_2 x^{k+1} + A_4(k+4)x^{k+3} + \ldots\ldots$$

und

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k.k-1.A_0 x^{k-2} + k+1.k+2.A_2 x^k + \ldots\ldots$$

bilden wir dann mit diesen Werthen von X, $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{d^2X}{dx^2}$ die Gleichung 38; dann ist multiplizieren wir diese letztgenannten Grössen der Reihe nach mit $-\left(\frac{n^2}{x^2}+4\right)$ ~~dann mit~~ $\frac{1}{x}$, und $\frac{1}{x}$ und 1, und addiren sie, dann ergebt sich:

$$0 = A_0(k^2-n^2)x^{k-2} - 4A_0 x^k + A_2((k+2)^2-n^2)x^k -$$
$$-4A_2 x^{k+2} + A_4((k+4)^2-n^2)x^{k+2} - 4A_4 x^{k+4} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Die Summe dieser ganzen Reihe muss $=0$ sein es müssen also:

$$k^2-n^2=0$$
$$A_2((k+2)^2-n^2)-4A_0=0$$
$$A_4((k+4)^2-n^2)-4A_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Wurzeln der ersten dieser Gleichungen sind

$$k=+n \quad \text{und} \quad k=-n$$

Von diesen sollen nur die ersten benützt werden, die Resultate, welche sich ~~zu~~ bei Benützung der zweiten Wurzel ergeben sind ~~dann~~ mit den durch Benutzung von $k=+n$ gewonnenen identisch. –

Mit Benutzung dieser Wurzel, wird dann:

$$A_2 = \frac{A_0}{1\cdot n+1}$$

$$A_4 = \frac{A_2}{2 . n+2}$$

$$A_6 = \frac{A_4}{3 . n+3}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

Die Multiplicationsconstante A_0 ist hiebei noch willkürlich – wir werden über sie passend so verfügen können dass, wenn die in einer Reihe darzustellende Lösung X_n ist, die Reihe folgende Form annimmt:

$$(40) \ldots\ldots \quad X_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left\{1 + \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Die Reihe ist für alle Werthe von x eine convergente. – Als Resultat ganz ähnlicher Betrachtungen ergibt sich auch eine ~~Lö~~ particuläre Lösung Y_n der Gleichung 39 – dieselbe ist:

$$(41) \ldots\ldots \quad Y_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left\{1 - \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} - \ldots\ldots\right\}$$

Wir werden nun eine zweite particuläre Lösung der Gleichungen (38) und (39) aufsuchen. – Diese Gleichungen sind in Bezug auf x homogene und lineare partielle Differential-gleichungen zweiter Ordnung. – Eine ihrer Wurzeln bezeichne ich mit X – wenn dann U eine

Function von r resp. x bedeutet so wird:

$$X = U . X_n$$

also:

$$\frac{dX}{dx} = U \frac{dX_n}{dx} + X_n \frac{dU}{dx}$$

und

$$\frac{d^2X}{dx^2} = U \frac{d^2X_n}{dx^2} + 2 \frac{dX_n}{dx} \cdot \frac{dU}{dx} + X_n \frac{d^2U}{dx^2}$$

Hiermit die Gleichung (38) gebildet:

$$0 = X_n \frac{d^2U}{dx^2} + \left(\frac{X_n}{x} + 2 \frac{dX_n}{dx} \right) \frac{dU}{dx}$$

nun $\frac{dU}{dx} = U'$ gesetzt:

$$\left(\frac{dU'}{U'} + 2 \frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n} \right) dx = 0$$

Die Integration giebt dann:

$$\log U' + \log x + 2 \log X_n = \text{Const. der Integr.}$$

folglich:

$$U' = C . \frac{1}{x X_n X_n}$$

und also:

$$U = C . \int \frac{dx}{x . X_n . X_n}$$

Wenn dann die Constante $C = 1$, was in unsrer Macht liegt, so ist eine part. Lösung von

206

(38) :

$$(42) \;\ldots\ldots\quad \overline{X} = X_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x X_n X_n}$$

Die entsprechende part. Lösung der Gleichung (39) ist:

$$(43) \;\ldots\ldots\quad \overline{Y} = Y_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x Y_n Y_n}$$

wo x_0 eine beliebige endliche Grösse bedeutet.[*)] Diese beiden Lösungen werden für den ~~dritte~~ Grenzwerth $x=0$ unendlich, sie können daher auch bei dem Falle einer vollen Platte nicht benützt werden; es wird ja dann eben $r=0$, also $x=0$ der eine Grenzwerth. –

Da wir uns eben mit den Schwingungen einer vollen Platte beschäftigen wollen, so nennen wir als Lösungen von 38 und 39 die Werthe von X_n und Y_n betrachten, wie sie in (40) und (41) dargestellt sind. –

Also erhalten wir

$$\ldots\quad \mathfrak{S} = A \cos n\varphi\, X_n$$

und

$$\mathfrak{D} = B \cos n\varphi\, Y_n \quad {}^{+)}$$

als Lösungen der Gleichungen (35), mit diesen

---

*) Die allgemeinen Lösungen sind dann

$$X = \alpha X_n + \alpha' \overline{X}$$

$$Y = \beta Y_n + \beta' \overline{Y}$$

Aus 42) u. 43) folgt, dass $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ für $x=0$ unendlich werden; ist die Scheibe eine volle, dann müssen für $r=0$ dann ~~mit~~ ist für $x=0$, u und v, also auch X und Y endlich bleiben und daher müssen α' und β' verschwinden. Die Constanten α und β lassen sich ohne der Allgemeinheit zu schaden $=1$ setzen dann

---

+) Y_n ist die Function welche Bessel mit J^n_{2x} berechnete. –

sollen zuerst U und V dann selbst mittels ξ gebildet werden. –

~~Erstens~~ Zur Bestimmung der Grössen A und B sollen die Grenzbedingungen (29) und (30) benützt werden.+) – Wir transformieren ~~sie~~ die Gl. (29 und 30) auf Polarcoordinaten, setzen also:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

hierdurch. Da $\varphi = 180 + \psi$:

$$0=\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi^2}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r.\partial\psi}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\right)\;\cdots(44)$$

$$0=\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi^2}\right)+\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\;\cdots\cdots(45)$$

Setzen wir nun $\xi = u$, in der Bedeutung wie sie in Gleichung (33) vorkommt. –

Es werden dann nach Gleichung (33), welche in ~~[illegible]~~ Polarcoordinaten ausgedrückt die Form annimmt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}=4\lambda^2 v$$

die Gleichungen (44) und (45) beträchtlich reduziert – und zwar:

+) In diesen Gleichungen ist der Bogen s in derjenigen Richtung als wachsend anzusehen die wir auf Seite 194 und 195 als solche bestimmten. Wenn man ψ in derjenigen Richtung wachsen lässt und den Anfangspunkt von s so wählt dass $s = l\psi$ wird wo l den Radius der Scheibe bezeichnet $\varphi = \psi + 180^0$ dann wird

$$(46)\quad \begin{cases} 0 = 4\lambda^2 \dfrac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial\psi^2} - \dfrac{1}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} \\[2ex] 0 = 4\lambda^2\dfrac{\vartheta}{1+\vartheta}\, v + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{cases}$$

Hierin soll nun noch $r = \frac{x}{\lambda}$ gesetzt werden. – Es kommen dann die zweiten Differentialquotienten von X_n und Y_n nach x vor – diese Diff. Quot. können wir ausdrücken durch X_n und Y_n selbst und ihren ersten Differentialquotienten – wenn wir dann noch setzen

$$\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta} = \gamma$$

dann werden die Grenzbedingungen:

$$47\quad \begin{cases} 0 = A\left\{n^2 X_n - x(n^2-4\gamma x)\dfrac{dX_n}{dx}\right\} + B\left\{n^2 Y_n - x(n^2+4\gamma x^2)\dfrac{dY_n}{dx}\right\} \\[2ex] 0 = A\left\{(n^2+4\gamma x^2)X_n - x\dfrac{dX_n}{dx}\right\} + B\left\{(n^2-4\gamma x^2)Y_n - x\dfrac{dY_n}{dx}\right\} \end{cases}$$

Die zu erfüllenden Gleichungen sind:

$$S = A\cos n\psi\, X_n$$

$$D = B\cos n\psi\, Y_n$$

Die Gleichungen werden ~~erfüllt~~ durch passende Werthe von A, B und λ erfüllt – sie werden erfüllt wenn die Determinante der Coefficienten A und B in den Gleichungen (47) gleich 0 ist. – Diese Gleichung

$$\Delta = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (48)$$

hat in Bezug auf d unendlich viele Wurzeln – und dies stimmt mit der Erfahrung vollkommen überein, die Platte kann ja auch unendlich viele Töne geben. –

Eine dieser Wurzeln sei $\lambda_{n\mu}$, und es sei:

$$U_{n\mu} = X_n \left\{ \underbrace{(n^2 - 4\gamma x^2) Y_n - x \frac{dY_n}{dx}}_{x = \lambda_{n\mu} t} \right\} - Y_n \left\{ \underbrace{(n^2 + 4\gamma x^2) X_n - x \frac{dX_n}{dx}}_{x = \lambda_{n\mu} t} \right\}$$

[Es war:

$$\zeta = U . \sin 4\lambda^2 at$$

hiebei bedeutete aber U noch eine Function der mit s und d, identischen Coordinaten x und y. $U_{n\mu}$ ist allein eine Function von r, und so:]

Den Gleichungen 28–30 wird also genügt durch:

$$\zeta = C . \sin (4\lambda_{n\mu}^2 at) . U_{n\mu} \cos n\psi \qquad \ldots\ldots (49)$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ giebt die Schwingungszahlen der Töne welche die Platte ~~geb~~ geben kann. –

Die Knotenpunkte werden aus der Gleichung

$$\zeta = 0$$

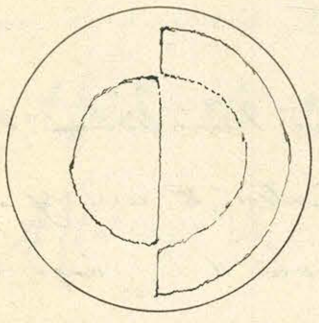
folgen. – Also aus den zwei Gleichungen:

$$\cos n\psi = 0$$

und $$U_{n\mu} = 0$$

Die erste dieser Gleichungen stellt nur ein System von Kreisdurchmessern dar; die zweite eine Function der einzigen Variablen r ein System von concentrischen Kreisen. —

In der That zeigt die Erfahrung daß die Klangfiguren unkrystallinischer kreisförmiger Platten aus concentrischen Kreisen und deren Durchmessern bestehen. — Von Kirchhoff angestellte Berechnungen stimmen mit Messungen an wirklich dargestellten Klangfiguren sehr schön überein. — Die einzige höchst merkwürdige Abweichung der Theorie von der Erfahrung ist die, daß die Kreise und Durchmesser nie vollständig zu Stande kommen, sondern daß in der Nähe ihrer Schnittpunkte Verzerrungen auftreten — etwa wie sie in der Figur dargestellt sind. — Der Grund dieser Erscheinung ist vielleicht die nicht vollkommene



Homogeneität der Platte; wahrscheinlicher noch der endlichen Dicke derselben, welche in der Theorie unendlich klein angenommen wurde.–

§ 39. Die Schwingungen einer Membrane.–

Ähnlich wie wir von der Theorie eines schwingenden Stabes zur Theorie der schwingenden Saite übergingen, wollen wir jetzt den Weg einschlagen, der uns von der Platte zu einer Membrane führt.– Eine Membrane ist eine äusserst dünne elastische Platte, welche an ihren Seiten gespannt ist.– Es sollen hier nur die transversalen Schwingungen derselben betrachtet werden – die Theilchen der Membrane haben aber bei der Spannung longitudinale Verrückungen erleidet, und diese ~~...~~ Verrückungen sind auf ~~longi~~ die transversalen Schwingungen von bedeutendem Einfluss sodass wir sie nicht aus der Rechnung fortlassen können.– Es seien ξ η ζ die Coordinaten eines Punktes S, S. in der Membrane, bezogen auf ein ~~noch~~ rechtwinkeliges Coordinatensystem. – Wird dieses letztere so gewählt, dass die ξ und η Axe parallel seien mit den Axen s und s_1, – und ferner so gewählt dass, (wenn u und v die unendlich kleinen longitudinalen Verrückungen bezeichnen, welche die erwähnte Punkte s und s_1 durch die Spannung erlitten hat) – die Gleichungen bestehen sollen:

$$\xi = s + u$$
$$\eta = s_1 + v$$

Wie bereits im Allgemeinen für die Theorie elastischer Platten abgeleitet wurde, ist nach Gleichung (21):

$$f = \frac{2}{3} K h^3 \left\{ q^2 + p_1^2 + 2p^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}(q - p_1)^2 \right\} + 2Kh \left\{ \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}(\varepsilon + \varepsilon_1)^2 \right\}$$

Das erste Glied in der Klammer dieses Ausdruckes ist von der Spannung also von u v abhängig es kann auch endlich sein – das zweite Glied in der Klammer ist immer unendlich klein. – Die Ordnung dieser einzelnen Glieder ist von der ~~Dicke~~ Ordnung der h der Membrane, und von der Spannung derselben abhängig. – Wir werden weiterhin den Fall betrachten wenn das erste Glied als unendlich klein gegen das zweite verschwindet. – Es ist dies ein Fall welcher eintritt wenn h unendlich klein von höherer Ordnung ist als u usw. Also ist für eine Membrane:

$$f = 2Kh\left\{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{\vartheta}{1+\vartheta}(\varepsilon+\varepsilon_1)^2\right\} \quad \ldots\ldots (50)$$

Eine Gleichung die auf anderem Wege abgeleitet schon längstens bekannt ist; es ist in derselben:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s}\right)^2} - 1$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\right)^2} - 1$$

$$\sigma = \frac{\partial\xi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s_1}+\frac{\partial\eta}{\partial s}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial s_1}+\frac{\partial\zeta}{\partial s}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}$$

wo dann noch $\xi = s+u \qquad \eta = s_1+v$ zu setzen ist, und u, v und ζ unendlich kleine Grössen sind. – Es soll nun die Grundgleichung erfüllt werden – wir nehmen diese in ihrer Form (26), woselbst:

$$0 = \delta\iiint dt.\,dx.\,dy\left(\varrho h\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 - f\right) \quad \ldots\ldots (26)$$

wo statt s und s_1 die Grössen x und y eingeführt sind, und

$$\varrho h\iint\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 dx\,dy = \text{lebendige Kraft der Platte}$$

Der Ausdruck f ist allein zur Bildung dieses Ausdruckes nöthig – in demselben ist aber nur seine Variation δf erfordert – wir haben also nur die Glieder zu berücksichtigen, welche in δf von der niedrigsten Ordnung sind – also:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2$$

Werden nämlich die Werthe von ξ und η in ε gesetzt, dann ist:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2} - 1$$

Mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2\right)$$

Und da u und v Constante von der Zeit unabhängige Grössen bedeuten so können die Glieder $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial v}{\partial s}$ nichts zur Variation von f beitragen – in Bezug auf dieselbe ist also wirklich

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2$$

und ebenso:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2$$

und

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial s}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial s_1}$$

Also in Bezug auf seine Variation ist:

$$f = 2Kh\left\{\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial s}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial v}{\partial s}\right)\frac{\partial \xi}{\partial s}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s_1}\right)\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2\right)\right\} \quad \ldots\ldots(51)$$

Die Werthe von u und v hängen von der Spannung der Membrane ab — wobei die aber die mannigfaltigen Functionen des Ortes sein können. — Die ~~Fall~~ Untersuchungen, die wir anstellen wollen ~~beziehen~~ sollen sich ausschliesslich auf den Fall einer gleichmässig gespannten Membrane beziehen — es ist dann:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s_1} = \alpha$$

Wo α eine Constante bedeutet. — In diesem Falle ist ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

und so vereinfacht sich der Ausdruck (51)

$$f = 2K\frac{1+3\vartheta}{1+\vartheta}h.\alpha\left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots (52)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (26) — dabei führen wir statt s und s_1 die Grössen x und y, ferner:

$$\frac{2K}{\varrho}\cdot\frac{1+3\vartheta}{1+\vartheta}\cdot\alpha = m^2$$

so dass:

$$0 = \delta\iiint dt\,dx\,dy\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - m^2\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)\right) \quad \ldots\ldots (53)$$

Eine Gleichung welche nur im Falle bestehen kann, wenn:

$$(54) \quad \ldots\ldots \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)$$

Hiezu kommt noch die Grenzbedingung für $t = 0$ auch $\xi = 0$. –

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist für zwei Fälle gelungen – und zwar für den Fall dass die Contoure der gespannten Membrane ein Rechteck ist – und dann für den Fall dass sie ein Kreis ist. –

Im ersten Falle hat man es mit trigonometrischen im zweiten mit Besselschen Functionen zu thun. –

Bei einer rechteckigen Membrane liegen die Knoten in Geraden die den Seiten parallel laufen. –

Die Knotenlinien der kreisförmigen Membrane sind Concentrische Kreise und Durchmesser. –

Anhang.

Die Ausdehnung einer elastischen Hohl-kugel.–

1. Umwandlung der Grundgleichung in Polarcoordinaten.–

Die Fälle in welchen sich die Grundgleichungen der Elastizitäts-theorie integriren lassen sind sehr spärlich –, zu diesen Fällen gehört die Ausdehnung einer concentrischen Hohlkugel auf deren innere Fläche ein gleichmässiger senkrechter Druck wirkt – und auf dessen äussere Fläche auch ein solcher, wenn auch entgegengesetzter Druck wirkt.

Wie überhaupt bei Aufgaben die sich mit dem Kreise oder der Kugel beschäftigen ist es auch hier zweckmässig Polarcoordinaten einzuführen.–

Die Theorie erfordert die Erfüllung der Gleichung:

$$0 = \delta\Omega - \delta\iiint F\,dx\,dy\,dz \qquad \ldots\ldots \qquad \mathrm{I.}$$

wo $\delta\Omega$ das Moment der äusseren formändernden Kräfte ist – und die Bedeutung von F sich unter der Voraussetzung dass die Kugel unkrystallinich ist, aus der Gleichung ergiebt:

$$(1) \qquad F = K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + \vartheta(x_x + y_y + z_z)^2\right\}$$

~~Statt~~ Unsere erste Aufgabe sei nun diese Function F in Polarcoordinaten auszudrücken. –
Statt x_x, y_y .... etc wollen wir die Hauptdilatationen einführen – es sind diese die Maximum und Minimum Werthe von:

$$x_x\alpha^2 + y_y\beta^2 + z_z\gamma^2 + y_z\beta\gamma + z_x\gamma\alpha + x_y\alpha\beta \cancel{=0}$$

wo zwischen den ~~Relatione~~ Variabeln $\alpha\beta\gamma$ die Relation besteht

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Sucht man nun in der That die Maxima und Minima des Ausdruckes, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_x + y_y + z_z$$

$$\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y - \frac{y_z^2}{4} - \frac{z_x^2}{4} - \frac{x_y^2}{4}$$

Also:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2$$

In Folge dieser Werthe schreibt sich (1):

$$(2) \ldots\ldots \quad F = K\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2\right\}$$

Hierdurch haben wir uns von jedem Coordinaten-System unabhängig gemacht – ~~es~~ sind ja die Haupt-dilatationen, Grössen die in den verschiedenen Coordinatensystemen ausgedrückt dieselben bleiben. –

Um F und dann auch die angeführte Grundgleichung in Polarcoordinaten auszudrücken, sind λ_1 λ_2 und λ_3 als Functionen derselben darzustellen. –

~~Sind~~ Die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes (A) ~~vor~~ der Formänderung seien

$$x \qquad y \qquad z$$

dieselben nach der Formänderung:

$$x+u \qquad y+v \qquad z+w.$$

~~Die Polarcoordinaten desselben Punktes (A) vor der Formänderung bezeichnen wir mit~~

Diese rechtwinkeligen Coordinaten können wir auch durch Polarcoordinaten substituiren – indem wir setzen

$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\omega$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\omega$$

und ferner:

$$x + u = (r+R)\cos(\vartheta+\Theta)$$

$$y + v = (r+R)\sin(\vartheta+\Theta)\cos(\omega+\Omega)$$

$$z + w = (r+R)\sin(\vartheta+\Theta)\sin(\omega+\Omega)$$

Durch diese Grössen sind die Hauptdilatationes auszudrücken — wir werden zuerst die Dilatation in irgend einer Richtung so zu bestimmen suchen — die Maxima und Minima des Ausdruckes zu welchem wir dann gelangen ergeben die Hauptdilatationes. —

Sind die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes (oder molecüls) (A) vor der Formänderung

$x \qquad y \qquad z$

und die Coordinaten eines zweiten unendlich nahe zu A gelegenen Punktes (B), auch vor der Formänderung:

$x + dx \qquad y + dy \qquad z + dz$

So dass die Entfernung ε der beiden Punkte A und B durch die Gleichung gegeben sei:

$$\varepsilon^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

das nun in Polarcoordinaten ausgedrückt:

$$dx = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$dy = \sin\vartheta\cos\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\cos\omega\, d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\omega\, d\omega$$

$$dz = \sin\vartheta\sin\omega\, dr + r\cos\vartheta\sin\omega\, d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\omega\, d\omega$$

Also ist das Quadrat der Entfernung der zwei Molecüle (A und B) vor der Formänderung:

$$\varepsilon^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\omega^2 \qquad (3)$$

Bei der Formänderung

geht	x	in	$x + u$	über
"	y	"	$y + v$	"
"	z	"	$z + w$	"
"	$x + dx$	"	$x + u + dx + du$	"
"	$y + dy$	"	$y + v + dy + dv$	"
"	$z + dz$	"	$z + w + dz + dw$	"
"	r	"	$r + R$	
"	ϑ	"	$\vartheta + \Theta$	
"	ω	"	$\omega + \Omega$	
"	$r + \cancel{R}\, dr$	"	$r + R + dr + dR$	
"	$\vartheta + \cancel{\Theta}\, dr$	"	$\vartheta + \Theta + d\vartheta + d\Theta$	
"	$\omega + \cancel{\Omega}\, dr$	"	$\omega + \Omega + d\omega + d\Omega$	

wo dR, $d\Theta$ und $d\Omega$ vollständige Differentiale sind dann ist:

$$(4)\quad \begin{cases} dR = \dfrac{\partial R}{\partial r} dr + \dfrac{\partial R}{\partial \vartheta} d\vartheta + \dfrac{\partial R}{\partial \omega} d\omega \\[2ex] d\Theta = \dfrac{\partial \Theta}{\partial r} dr + \dfrac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} d\vartheta + \dfrac{\partial \Theta}{\partial \omega} d\omega \\[2ex] d\Omega = \dfrac{\partial \Omega}{\partial r} dr + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} d\vartheta + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \omega} d\omega \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit λ die Dilatation der Längeneinheit in der Richtung der Verbindungslinie von zwei Punkten hier etwa (A) und (B) — so ist das Quadrat der Entfernung derselben nach der Formänderung $\varepsilon^2(1+\lambda^2)$ Also:

$$(5)\quad \varepsilon^2(1+\lambda)^2 = (dr+dR)^2 + (r+R)^2 \cancel{\sin^2(\vartheta+\Theta)} (d\vartheta+d\Theta)^2 + (r+R)^2 \sin^2(\vartheta+\Theta)(d\omega+d\Omega)^2$$

Es sind R, Θ, Ω unendlich klein gegen r ϑ ω — berücksichtigen wir dies — und ziehen den Werth ε^2 wie ihn Gleichung (3) darstellt — hiervon ab so folgt:

$$(6)\quad \varepsilon^2\lambda = dr\, dR + r^2 d\vartheta\, d\Theta + r^2 \sin^2\vartheta\, d\omega\, d\Omega + rR\, d\vartheta^2 + (rR \sin^2\vartheta + r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, \Theta)\, d\omega^2$$

Die Werthe von dR, $d\Theta$, $d\Omega$ aus 4 hierin eingesetzt:

$$(7)\quad \varepsilon^2\lambda = \frac{\partial R}{\partial r} dr^2 + \left(rR + r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta^2 + \left(rR\sin^2\vartheta + r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,\Theta + r^2\sin^2\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\right) d\omega^2 + \left(r^2 \frac{\partial\Theta}{\partial\omega} + r^2\sin^2\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\right) d\vartheta\, d\omega + \left(\frac{\partial R}{\partial\omega} + r^2\sin^2\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) d\omega\, dr + \left(\frac{\partial R}{\partial\vartheta} + r^2\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) d\vartheta\, dr.$$

Es ist dann die in Bezug auf die Variabeln $dr\,d\vartheta\,d\omega$ homogene Gleichung zweiten Grades: – Auch:

$$\varepsilon^2\lambda = a_{11}dr^2 + a_{22}d\vartheta^2 + a_{33}d\omega^2 + 2a_{23}d\vartheta d\omega + 2a_{31}d\omega dr + 2a_{12}dr d\vartheta$$

λ. ist die Dilatation in irgend einer Richtung, in gewissen Richtungen welche durch die Variabeln dr $d\vartheta$ $d\omega$ bestimmt sind wird ~~die~~ λ ein Maximum werden – diese Maximumswerthe sind die Hauptdilatationen. – Um nun die Hauptdilatationen in Polarcoordinaten auszudrücken werden wir also erreichen wenn wir die Maxima der Gleichung für $\varepsilon^2\lambda$ aufsuchen indem zwischen seinen Variabeln die Bedingungsgleichung stattfindet:

$$\varepsilon^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\omega^2$$

Wo ε die Entfernung zweier Molecüle vor der Formänderung eine Constante ist. –

Wie es die allgemeinen Methoden der Bestimmung der Maxima und Minima mit einer Bedingungsgleichung erfordern multipliziren wir die Bedingungsgleichung mit einem Factor μ addiren sie zu $\varepsilon^2\lambda$ und bestimmen dann Maxima resp. Minima, die Grössen $dr\,d\vartheta\,d\omega$ und μ als Variabel betrachtet. –

Für den Fall des Maximums oder Minimums von λ bestehen dann die Relationen

$$(a_{11}-\mu)\,dr + a_{12}\,d\vartheta + a_{13}\,d\omega = 0$$
$$a_{21}\,dr + (a_{22}-\mu r^2)\,d\vartheta + a_{23}\,d\omega = 0$$
$$a_{31}\,dr + a_{32}\,d\vartheta + (a_{33}-\mu r^2\sin^2\vartheta)\,d\omega = 0$$

Diese Gleichungen sind aber nur dann $=0$ wenn die Determinante für $d\vartheta$ dr und $d\omega$ gleich 0 ist das ist wenn:

$$0 = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda r^2)(a_{33}-\lambda r^2\sin^2\vartheta) - (a_{11}-\lambda)a_{23}^2 - (a_{22}-\lambda r^2)a_{31}^2 -$$
(8) .....
$$-(a_{33}-\lambda r^2\sin^2\vartheta)a_{12}^2 + 2a_{23}a_{31}a_{12}$$

Es ist dies eine cubische Gleichung ~~von~~ in λ, die Wurzeln derselben sind geradezu die Maximumwerthe dieser Grösse also die Hauptdilatationen. –

Die Entwickelung von (8) führt zur Gleichung:

$$0 = \lambda^3 r^4\sin^2\vartheta - \lambda^2(r^4\sin^2\vartheta\, a_{11} + r^2\sin^2\vartheta\, a_{22} + r^2 a_{33}) + \lambda(a_{22}a_{33} +$$
(9) .....
$$+ r^2 a_{33}a_{11} + r^2\sin^2\vartheta\, a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - r^2 a_{31}^2 - r^2\sin^2\vartheta\, a_{12}^2) - \Delta_0$$

wo Δ_0 das von λ unabhängige Glied der Determinante bezeichnet. –

Aus (9) ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= a_{11}+\frac{a_{22}}{r^2}+\frac{a_{33}}{r^2\sin^2\vartheta}\\
\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 &= \frac{a_{22}}{r^2}\cdot\frac{a_{33}}{r^2\sin^2\vartheta}+\frac{a_{33}}{r^2\sin^2\vartheta}a_{11}+a_{11}\frac{a_{22}}{r^2}-\frac{a_{23}^2}{r^4\sin^2\vartheta}-\\
&\qquad -\frac{a_{31}^2}{r^2\sin^2\vartheta}-\frac{a_{12}^2}{r^2}\\
\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 &= a_{11}^2+\left(\frac{a_{22}}{r^2}\right)^2+\left(\frac{a_{33}}{r^2\sin^2\vartheta}\right)^2+2\cdot\frac{a_{23}^2}{r^4\sin^2\vartheta}+2\frac{a_{31}^2}{r^2\sin^2\vartheta}\\
&\qquad +2\frac{a_{12}^2}{r^2}
\end{aligned}\right\}\cdots(10)$$

Mit Benützung der Werthe von a_{11} a_{22} ... etc die wir stillschweigend durch Umformung der Gleichung (7) einführten, ergeben sich dann:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= \frac{\partial R}{\partial r}+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}+\frac{R}{r}\right)+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}+\frac{R}{r}+\frac{\vartheta}{tg\vartheta}\right)\\
\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 &= \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\omega}+\sin^2\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}+\frac{R}{r}\right)^2\\
&\qquad +\frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega}+r^2\sin^2\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}+\frac{R}{r}+\frac{\Theta}{tg\vartheta}\right)^2+\\
&\qquad +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial R}{\partial\vartheta}+r^2\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)^2
\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

Setzen wir nun diese Werthe in die Gleichung (2), so erhalten wir F in Polarcoordinaten ausgedrückt, dieser Werth sowie die Werthe von $dxdydz$ in Polarcoordinaten geben dann auch die Grundgleichung I in der gesuchten Form. –

2. Ausdehnung einer concentrischen Hohlkugel. –

~~Ist die~~ Die Gleichung der inneren Fläche dieser Hohlkugel ist

$$r = r_i$$

die der äusseren Fläche:

$$r = r_a$$

Auf die Flächeneinheit – und zwar auf jede Flächeneinheit gleichmässig – der inneren Fläche wirkt der senkrechte Druck

$$P_i$$

Auf die Einheit der äusseren Fläche der Druck

$$P_a$$

Unter diesen Verhältnissen kann sich jedes Molecül nur in der Richtung des Radius verrücken – es müssen also Θ und $\Omega = 0$ sein, und nur R wird einen von 0 verschiedenen Werth haben – Wie aber leicht einzusehen ist R hier ausschliesslich eine Function der Variable r. – Bilden wir nun für diesen Fall die Gleichungen (11), so gelangen wir zu folgenden sehr vereinfachten Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= \frac{dR}{dr}+2\,\frac{R}{r}\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 &= \left(\frac{dR}{dr}\right)^2+2\left(\frac{R}{r}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots(12)$$

Wir definiren durch λ_1 die Dilatation in der Richtung des Radius – folglich durch λ_2 und λ_3 die Dilatationen in den auf den Radius senkrechten Richtungen; dann ist

$$\lambda_2=\lambda_3$$

und:

$$\lambda_1=\frac{dR}{dr}$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\frac{R}{r}$$

Dies in (2) gesetzt:

$$F=K\left\{(1+\vartheta)\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+4\vartheta\,\frac{dR}{dr}\cdot\frac{R}{r}+2(1+2\vartheta)\left(\frac{R}{r}\right)^2\right\}\quad\ldots\ldots(13)$$

Auch für $dx\,dy\,dz$ Polarcoordinaten eingeführt wird dann in I vorkommende Integral:

$$\iiint F\,r^2\,dr\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\omega=4\pi\int_{r_i}^{r_a}F\,r^2\,dr$$

Es ist $\iint\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\omega=$ die Oberfläche einer Kugel deren Radius 1 ist also $=4\pi$.

Für unsere Kugel ist das Moment sämmtlicher formändernden Kräfte:

$$\delta\Omega = 4\pi\left(r_i^2 P_i \delta R_i - r_a^2 P_a \delta R_a\right)$$

Es ist nun die Grundgleichung (I), also vor allem die Variation des Seite 227 aufgestellten Integrals zu bilden; hierin verfahren wir nach folgenden allgem. Betrachtungen. –

Haben wir die Variation des Integrals

$$\int \varphi\left(R, \frac{dR}{dr}\right) dr$$

zu bilden – so ist:

$$\delta \int \varphi\left(R, \frac{dR}{dr}\right) dr = \int \left\{ \varphi\left(R + \delta R,\ \frac{dR}{dr} + \frac{d\delta R}{dr}\right) - \varphi\left(R + \frac{dR}{dr}\right) \right\} dr.$$

Nach Taylor's Satz:

$$\delta \int \varphi\left(R, \frac{dR}{dr}\right) dr = \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} \delta R + \frac{\partial \varphi}{\partial . \frac{dR}{dr}} \cdot \frac{d\delta R}{dr} \right) dr$$

Dies Integral in zwei Integrale zerlegt und dann partiell integrirt ist:

$$\delta \int \varphi\left(R, \frac{dR}{dr}\right) dr = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial \frac{dR}{dr}} \delta R \right]_i^a + \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - \frac{d}{dr} \frac{\partial\varphi}{\partial \frac{dR}{dr}} \right) \delta R\, dr$$

Nach dieser Formel kann die erwähnte Variation gebildet werden – thun wir dies so ist darin

$$\varphi = F r^2$$

zu setzen. –

Wird dann die Grundgleichung gebildet, so folgt aus derselben, da sie für alle Werthe der Variable $= 0$ sein muss die Gleichung:

$$\frac{\partial r^2 F}{\partial R} - \frac{d}{dr} \frac{\partial r^2 F}{\partial \frac{dR}{dr}} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Und die Grenzbedingungen, für $r = r_i$

$$\left(\frac{\partial r^2 F}{\partial \frac{dR}{dr}} \right)_i = - r_i^2 P_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

für $r = r_a$

$$\left(\frac{\partial r^2 F}{\partial \frac{dR}{dr}} \right)_a = - r_a^2 P_a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Mit Benützung des Werthes (13) für F ist:

$$\frac{\partial r^2 F}{\partial R} = 4K \left(\vartheta r \frac{dR}{dr} + (1+2\vartheta) R \right)$$

$$\frac{\partial r^2 F}{\partial \frac{dR}{dr}} = 2Kr \left((1+\vartheta) r \frac{dR}{dr} + 2\vartheta R \right)$$

Setzen wir dann diese Werthe in 14, so erhalten wir:

$$(17) \ldots\ldots \quad r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - 2R = 0$$

Auffallend ist es dass sich die Constante ϑ heraushebt. –

Um einen speciellen Fall betrachten zu können sei

$$R = r^n$$

dann wird die Gleichung (17):

$$n^2 + n - 2 = 0$$

und die beiden Wurzeln derselben:

$$n = +1$$

$$n = -2$$

Folglich wenn A und B zwei willkürliche Constanten sind, so ist die allgemeine Lösung:

$$(18) \ldots\ldots \quad R = Ar + \frac{B}{r^2}$$

Die Bestimmung von A und B geschieht dann aus (15) und (16) – weiterhin gelangen wir zu den Gleichungen:

$$(19) \ldots\ldots \begin{cases} 2K\left\{A(1+3\vartheta) - B\dfrac{2}{r_i^3}\right\} = -P_i \\[2ex] 2K\left\{A(1+3\vartheta) - B\dfrac{2}{r_a^3}\right\} = -P_a \end{cases}$$

Mit diesen Werthen berechnet folgt:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3A.$$

ein höchst merkwürdiges Resultat welches ausspricht dass die räumliche Dilatation in allen Theilen der Hohlkugel dieselbe ist. –

Aus (19) folgen die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{4K} \cdot \frac{P_i - P_a}{\frac{1}{r_i^3} - \frac{1}{r_a^3}} \\ A &= \frac{1}{2K(1+3\vartheta)} \cdot \frac{r_i^3 P_i - r_a^3 P_a}{r_a^3 - r_i^3} \end{aligned}\right\} \ldots (20)$$

Es ist ~~hier~~ A ~~und auch B dann~~ positiv wenn

$$r_i^3 P_i > r_a^3 P_a$$

auch B wird in diesem Falle positiv. –

Besteht diese Ungleichung so ist auch

$$\lambda_2 = \lambda_3 = A + \frac{B}{r^3} = \text{positiv}$$

das heisst die Dilatationen senkrecht auf den Radius sind positiv. –

Die Dilatation in der Richtung des Radius:

$$\lambda_1 = A - \frac{2B}{r^3}$$

kann dann noch immer positiv oder negativ sein. –

Δ_2 und Δ_3 haben ihren Grössten Werth für den kleinsten Werth von r also für $r = r_i$; soll also die Grenze der Elastizität nicht überschritten werden, so muss das Maximum der Dilatation $< A + \frac{B}{r_i^3}$ sein. –

Nehmen wir nun $P_a = 0$ an, dann wird:

$$B = \frac{1}{4K} \frac{r_a^3 \, r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} P_i$$

$$A = \frac{1}{2K(1+3\vartheta)} \cdot \frac{r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot P_i$$

Nehmen wir noch die Dicke der Kugel unendlich gross an – dann ist setzen während r_i einen endlichen Werth behält

$$r_a = \infty$$

so wird

$$A = 0$$

$$B = \frac{1}{4K} r_i^3 P_i$$

In diesem Falle ist also das Maximum der Dilatation $\frac{P_i}{4K}$; überschreitet d. der innere Druck P_i eine gewisse Grenze welche von der Beschaffenheit der Kugel (K) abhängig ist, so wird die Grenze der Elastizität überschritten – und die Kugel zerreisst – trotz seiner unendlich dicken Wand. –