Ms 5096/12. Eötvös Loránd [illegible]
egyetemi jegyzetei

Ein Kapitel aus Hesse's Vorlesungen

über Analytische Mechanik. –

R! 1867 Dec 3 – 1868 Jan 3.

R. Eötvös

Hydrostatik.

1) Hydrostatik ist die Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper.

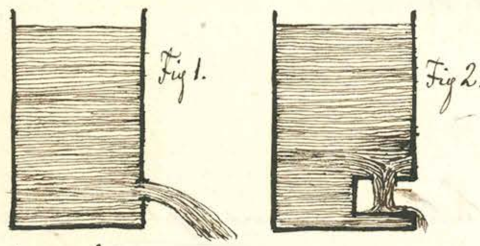
Als Resultat der Beobachtung muss es angenommen werden; dass die Richtung des Druckes auf das Flächenelement, dessen Bewegung es bewirken soll rechtwinkelig ist — da nun Wirkung und Gegenwirkung immer gleich sind, so ist der von einer Seite wirkende Druck gleich dem auf der andern Seite wirkenden.-

Was ist aber Druck?

Denken wir uns ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäss; nehmen wir ein Theilchen der Wand fort, so strömt die flüssige Masse aus; es entsteht hier Bewegung, es musste also schon vorher eine Kraft vorhanden sein; die nur durch die umschliessende Wand beseitigt wurde - diese Kraft nennen wir Druck.-

2)

Eine experimentell leicht nach weisbare Eigenschaft der Flüssigkeiten; ist auch; dass sie nach allen Richtungen zu den gleichen Druck ausüben. –

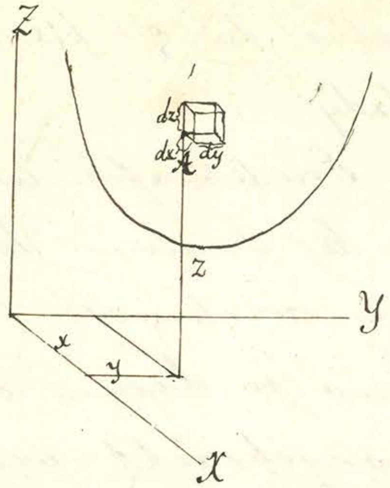


Wenden wir, um dies zu erforschen zwei Gefässe an; deren gleichen unter einer Flüssigkeits Säule von ~~gleicher~~ derselben Höhe stehenden Öffnungen wie in Fig 1 und Fig 2 angebracht sind; so ist es leicht zu beobachten; dass die in derselben Zeit ausgeflossenen Flüssigkeits massen bei beiden Gefässen gleich sind; dass also in der Richtung der Öffnung (Fig 1) derselbe Druck herrscht als in der von (Fig 2) . — u. s. w.

2) Ich will nun die Bedingungen des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse erforschen. –

– Befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, so können gewisse Theile desselben festgemacht werden, ohne dass an der Gleichgewichts lage etwas verändert würde. –

Ist also der Schwerpunkt der Flüssigkeit A, so kann ich mir die ganze Masse in das kleine in A sich befindende Körperelementchen vereinigt denken - und diesen ideell fest machen.



Mögen auf (A) alle möglichen Kräfte wirken, wir können sie doch immer in der Richtung der drei Axen in die Componenten X, Y, Z zerlegen.

Bedeutet δ die Dichtigkeit des flüssigen Körpers, so ist die Masse von (A) dessen Dimensionen dx, dy und dz sind, gleich $\delta . dx . dy . dz$.

Die Kräfte daher die das Elementchen in Gleichgewichts Zustande verhalten, den drei Coordinatenaxen nach

$$X . \delta . dx . dy . dz$$
$$Y . \delta . dx . dy . dz$$
$$Z . \delta . dx . dy . dz$$

Bezeichnen wir mit $\varrho = f(x, y, z)$ den Druck der auf die Flächeneinheit der Flüssigkeit ausgeübt wird; so ist der Druck der auf die Fläche dxdy des Parallelipipedons A lastet:

$$\varrho . dx . dy = f(x, y, z) dx . dy$$

Der Druck den das Parallelepipedon von oben erfährt, ist; wenn der auf Flächeneinheit in der Schicht $(z+dz)$ herrschende Druck ϱ' genannt wird, gleich $\varrho' dx dy$, also da $\varrho' = f(x,y,z+dz)$

$$\varrho' dx dy = f(x\,y\,z+dz)\,dx dy$$

Die Differenz dieser beiden Druckkräfte ist im Falle des Gleichgewichtes gleich der Summe der in A in der Richtung der Z Axe wirkenden Kräfte – sonst würde ja Bewegung in diesem oder dem anderen Sinne hervorgebracht werden – Es muss also für die Componente Z folgende Gleichung stattfinden

$$\delta.Z.dx dy dz = f(x\,y\,z+dz)\,dx dy - f(x\,y\,z)\,dx dy$$

$$\delta.Z = \frac{f(x\,y\,z+dz) - f(x\,y\,z)}{dz}$$

Dies ist aber die partielle Differentialgleichung der $f(x\,y\,z)$ nach ~~dz~~ z; folglich:

$$\delta Z = \frac{d.f(x\,y\,z)}{dz}$$

Ähnlichen Betrachtungen zufolge können auch die Componenten in den Richtungen der X und Y Axe bestimmt werden – wir erhalten dadurch als Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$\left.\begin{aligned} \delta . X &= \frac{d.f(xyz)}{dx} \\ \delta . Y &= \frac{d.f(xyz)}{d.y} \\ d.Z &= \frac{d.f(xyz)}{dz} \end{aligned}\right\} \text{-----------} (1)$$

Ist die Flüssigkeit incompressibl so kommt die Dichtigkeit δ nicht mit in Betracht.–
Aus diesen Gleichungen entlesen wir: Ist eine Flüssigkeit in Gleichgewicht so müssen die auf ein rechtwinkeliges Coordinaten System bezogenen Componenten der auf sie wirkenden Druckkräfte, durch partielle Differentialgleichungen derselben Function ausdrückbar sein.–

3) Die Oberfläche einer in Gleichgewicht verharrenden Flüssigkeit charakterisirt sich dadurch, dass die Resultante der Kräfte die auf ~~sie~~ ~~wirken~~ die Flüssigkeit wirken in jedem ihrer Punkte normal ist.–
Bezeichnet man also mit dx, dy und dz die unendlich kleinen Verlängerungen der Coordinaten x y z ~~einer~~ ~~in der~~ irgend eines Punktes der Oberfläche — indem man zu einem in der-

in derselben Oberfläche gelegenen Punkte übergeht — so hat man die Bedingungsgleichung:

(2) --------- $Xdx + Ydy + Zdz = 0$

Dies ist die allgemeine Differentialformel der Oberfläche, einer sich in Gleichgewicht befindenden Flüssigkeit. —

Man könnte dieselbe Gleichung, wenn C eine Constante bedeutet, auch endlich so ausdrücken

$$F(x, y, z) = C$$

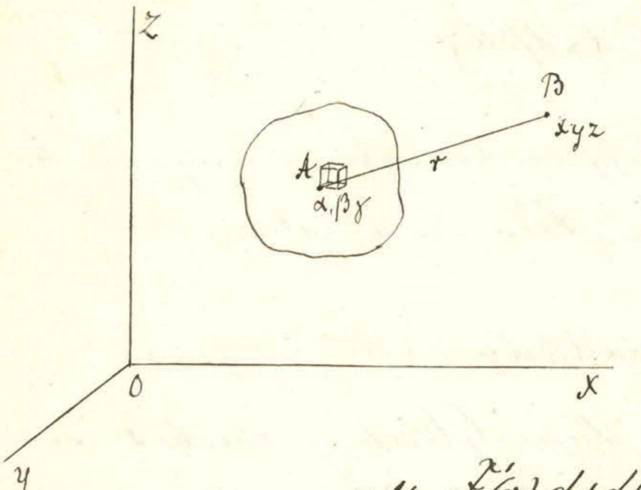
angenommen dass $F(xyz)$ immer eine Function ist deren Differential $= Xdx + Ydy + Zdz$

Attraction zweier Massen im allgemeinen betrachtet. —

Die Betrachtung der Himmelserscheinungen führt uns zur Annahme; dass alle Körper sich ihrer Masse proportional anziehen, und zwar im ~~Verh~~ verkehrtem Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernungen. — Wir wollen nun die Anziehung zweier Massen berechnen, die sich in einer Entfernung r ~~x~~; um der Aufgabe eine allgemeinere Form zu geben nicht nach dem Newton'schen, sondern nach einem Gesetze anziehen, das durch $F'(r)$ ausdrückbar ist.–

Ein Körper dessen Schwerpunkt A ist und ein ausserhalb desselben gelegener körperlicher Punkt B; die in der Entfernung r liegen ziehen sich an, es sei die Aufgabe die Grösse dieser Anziehung zu berechnen.

Die Masse des Punktes B sei $= \mu$; die Coordinaten des Punktes A α, β, γ; die des Punktes B, $x\,y\,z$.–



Ist die Dichtigkeit $= 1$ so ist die Masse des Differentialparallelipipedons A,

$$d\alpha . d\beta . d\gamma$$

Also die Anziehung desselben durch B

$$= \mu . F'(r)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

Diese Anziehung kann nach den 3 Coordinaten Axen in 3 Componenten zerlegt werden; wo die Projectionen der Entfernung r mit in Rechnung kommen; diese sind:

in der Richtung OX $= \mu . F'(r) \frac{x-\alpha}{r} d\alpha\, d\beta\, d\gamma$

in der Richtung $OY = \quad \mu . F'(r) \frac{y-\beta}{r} d\alpha d\beta d\gamma$

" " " " $OZ = \quad \mu . F'(r) \frac{z-\gamma}{r} d\alpha d\beta d\gamma$

Die Attraction der ganzen Masse ergiebt sich durch dreifache Integrirung dieser Differentialgleichungen, folglich erhalten wir die Componenten X, Y, Z:

$$X = \iiint \mu . F'(r) \frac{x-\alpha}{r} d\alpha d\beta d\gamma$$

$$Y = \iiint \mu . F'(r) \frac{y-\beta}{r} d\alpha d\beta d\gamma$$

$$Z = \iiint \mu . F'(r) \frac{z-\gamma}{r} d\alpha d\beta d\gamma$$

Dies sind partielle Differentialgleichungen derselben Function – diese Function ist

$$V = \iiint \mu . F(r) d\alpha d\beta d\gamma$$

Denn differenziren wir diese Gleichung nach x so bekommen wir:

$$\frac{dV}{dx} = \iiint \mu . \frac{F'(r) dr}{dx} d\alpha d\beta d\gamma$$

aber

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

und so:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$$

folglich:

$$X=\iiint \mu . F'(r)\frac{x-\alpha}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

Auf ähnlichem Wege können auch durch Differenzirung der Function V nach y und z die Werthe von Y und Z ermittelt werden — die Componenten der Anziehung sind also in der That partielle Differentialgleichungen derselben Function. — Diese Function, die wir mit V bezeichneten nennt Gauss kurzweg Potenzial; Green dagegen auch Potenzialfunction. —

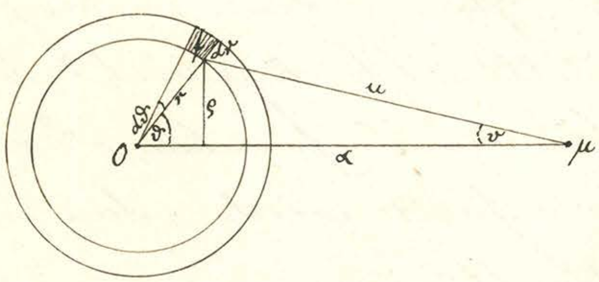
Nehmen wir nun an dass die Masse ein Flüssigkeit ist, so ~~zu~~ erfüllen diese Gleichungen der Attraction eine der ~~Gla~~ in dem vorhergehenden Kapitel festgestellten Gleichgewichtsbedingungen — man möchte nun erforschen ob auch die zweite Bedingung erfüllt wird, das ist ob die Gleichung der Oberfläche

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

stattfindet. — Jedenfalls wäre es sehr interessant auf diesem Wege die Gleichgewichtsfigur eines angezogenen flüssigen Masse auf diesem Wege zu bestimmen – dieser Weg ist aber zu ermüdend, vielleicht auch ungangbar; und so werden wir die Gleichgewichtsformen empirisch zu erforschen suchen; zuerst die Frage aufstellen ob die Kugel; dann die ob das Elypsoid eine solche ist?

Attraction der Kugel.–

1) Mein Zweck sei zuerst die Anziehung eines ausserhalb der Kugel gelegenen Punktes zu bestimmen.– Bei diesen Untersuchungen soll das Newton-sche Gesetz der allgemeinen Gravitation angenommen werden es soll also $F'(r) = \frac{1}{r^2}$ sein.–



μ ist der angezogene Punkt.– Wie es leicht ein zu sehen ist die Differentialfläche $f = r.dr d\vartheta$

Dreht sich nun dieser Kreis um die Axe $O\mu$, so dass es einen Winkel beschreibt dem der Bogen h entspricht, so beschreibt die Fläche f ein Parallel epiped, dessen Inhalt K berechnet werden kann:

$$K = h.rdrd\vartheta$$

Ist nun die Dichtigkeit dieses Korpertheiles K so ist die Masse:

$$M = \kappa.h.rdrd\vartheta$$

M wirkt nun auf μ eine Anziehung aus diese ist $= \frac{M.\mu}{u^2} = \frac{\mu.\kappa.hrdrd\vartheta}{u^2}$

Die Componente dieser Anziehung in der Richtung $O\mu$ ist =

$$\frac{\mu.\kappa.hrdrd\vartheta\cos\vartheta}{u^2}$$

Macht nun der Kreis noch mehrere Umdrehungen mit den Bögen $h_1\ h_2\ h_3 \ldots$ etc so summiren sich all diese Anziehungen =

$$\frac{\mu.\kappa r(h+h_1+h_2+\ldots\ h_n)drd\vartheta\cos\vartheta}{u^2}$$

Angenommen nun dass der Kreis sich vollkommen um die Axe dreht, so entsteht ein Ring und es wird

$$h+h_1+h_2+\ldots\ldots h_n = 2\varrho\pi$$

Die Componenten der Anziehung in der Richtung der Linie ϱ kommen nicht mit in Betracht sie ist = 0; da jeder in dieser Richtung wirkenden Kraft eine andere von gleicher Grösse entgegengesetzt ist. —

Die Anziehung des Punktes μ durch einen Ring vom Halbmesser ϱ ist also vollkommen ausgedrückt durch

$$a = \frac{2\pi\mu\kappa\varrho\, r\, dr\, d\vartheta \cos v}{u^2}$$

Dieser Ausdruck lässt sich etwas umwandeln; wie nähmlich aus der Figur sichtbar; ist:

$$r^2 = u^2 + \alpha^2 - 2u\alpha\cos v$$

$$\cos v = \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{2u\alpha}$$

mit Benutzung dieses Werthes:

$$a = \frac{\pi\mu\kappa\varrho\, r\, dr\, d\vartheta\,(u^2+\alpha^2-r^2)}{u^3\alpha}$$

da aber

$$\varrho = r.\sin\vartheta$$

$$u^2 = r^2+\alpha^2-2r\alpha\cos\vartheta$$

folglich

$$2u\,du = 2r\alpha\sin\vartheta\, d\vartheta$$

und

$$\varrho = \frac{u\,du}{\alpha.\,d\vartheta}$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$a = \frac{\pi\mu\kappa\, r\, dr\,(u^2+\alpha^2-r^2)\,du}{\alpha^2 u^2}$$

2) Will ich nun die Anziehung einer Kugelschale finden, so kann ich dies durch Integration dieses Ausdruckes ermitteln – die Grenzen sind dabei wie es die Figur deutlich zeigt, $\alpha+r$

und $\alpha - r$ anzunehmen; also

$$\mathfrak{A} = \pi\mu\kappa r\,dr \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \frac{(u^2+\alpha^2-r^2)\,du}{\alpha^2\times u^2}$$

Nach einer Formel der Integralrechnung ist:

$$\int \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{\alpha^2u^2}\,du = \frac{u}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2-r^2}{\alpha^2u}$$

$$\int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{\alpha^2u^2}\,du = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\alpha+r-\frac{\alpha^2-r^2}{\alpha+r}\right)-\left(\alpha-r-\frac{\alpha^2-r^2}{\alpha-r}\right)\right]$$

$$\int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{\alpha^2u^2}\,du = \frac{4r}{\alpha^2}$$

folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{4\pi\mu\kappa r^2\,dr}{\alpha^2}$$

Ein Ausdruck den ich noch auf anderem Wege erzielen kann; ~~denk ich nämlich die ganze Masse~~ Der Inhalt der äusseren Kugel ist $\frac{4}{3}(r+dr)^3\pi$; der des inneren $\frac{4}{3}r^3\pi$; der Inhalt der Kugelschale ist die Differenz dieser beiden also:

$$i = \frac{4}{3}\pi\left[(r+dr)^3 - r^3\right]$$

da nun

$$(r+dr)^3 = r^3 + 3r^2dr$$

wo die folgenden Glieder als unendlich Kleine höherer Ordnung wegfallen; so ist

$$i = 4r^2 dr\pi$$

und wenn K die Dichtigkeit m die Masse der Kugelschale bedeutet, so ist die letztere:

$$m = 4K\pi r^2 dr$$

Verleg ich jetzt dieser Masse in den Mittelpunkt O der Kugel so finde die Anziehung von μ

$$G = \frac{4\pi\mu K r^2 dr}{\alpha^2}$$

Dies ist offenbar der vorher gefundene Ausdruck, ich kann also den Satz aussprechen: Eine homogene Kugelschale übt auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt dieselbe Anziehung aus die, die im Mittelpunkte vereinigte Masse auf den angezogenen Punkt ausüben würde. –

3) Die Anziehung einer Kugel ist nun sehr leicht zu bestimmen; denken wir uns nämlich die Kugel in unendlich viele Schalen getheilt, deren jede eine Anziehung, die durch obige Gleichung bestimmt, ausübt – diese müssen wir summiren. – Unsere Aufgabe ist also eine einfache Integration; d. i.

$$A = \int_0^r \frac{4\pi\mu K r^2 dr}{\alpha^2} = \frac{4\pi\mu K r^3}{3\alpha^2}$$

Aber auch wenn die Masse der Kugel in den Mittelpunkt derselben verlegt wird, kommen wir auf dasselbe Resultat denn es ist für die Kugel:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$M = \frac{4}{3} \pi K r^3 \qquad \text{und}$$

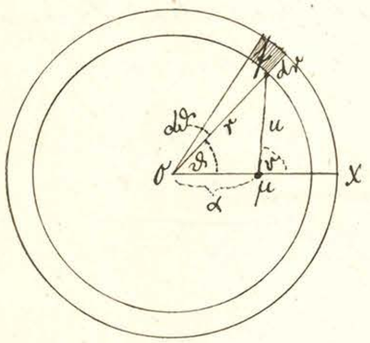
$$A = \frac{4\pi K r^3 \mu}{3\alpha^2}$$

Die Anziehung also die eine homogene Kugel ~~ausübt~~ auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt ausübt, ist gleich der, die der Mittelpunkt der Kugel ausüben würde, wenn die Masse in denselben vereinigt wäre. –

Dieser Satz ist gültig auch für Kugeln, die zwar in allen Theilen nicht ~~von~~ gleiche Dichtigkeit; ~~sind~~ besitzen; deren Schalen jedoch homogen sind. –

4) Wir wollen nun den Fall betrachten, wo die Entfernung α kleiner ist als r der Radius der anziehenden Kugel; wo also der angezogene Punkt μ innerhalb der Kugel liegt. –

Um streng logisch zu verfahren, wollen wir auch in diesem Falle zuerst die Anziehung eines homogenen Ringes, dann die einer Kugelschale; endlich die der ganzen Kugel berechnen. –



Die kleine Fläche f kann als ein Rechteck betrachtet werden also $f = r.\sin d\vartheta . dr$

da aber $d\vartheta$ unendlich klein ist:

$$f = r\,dr\,d\vartheta$$

dreht sich nun die Kreisfläche um die Axe OX so um, dass f einen Bogen = h beschreibt, so entsteht ein Parallelepiped dessen Inhalt

$$i = h.r\,dr\,d\vartheta$$

wenn κ die Dichtigkeit, so ist

$$m = \kappa h r\,dr\,d\vartheta$$

Nach dem Newton'schen Gesetz ist nun die Anziehung dieses Körpertheilchens gegen μ =

$$\frac{\mu.\kappa h r\,dr\,d\vartheta}{u^2}$$

Ich kann diese in Componenten in der Richtung von OX und senkrecht darauf zerlegen – letztere kommen nicht mit in Betracht, denn wenn von einem Ringe die Rede so vernichten sie sich, wie bereits in 11 dieses Abschnitte gezeigt wurde, also:

$$v_1 = \frac{\mu \kappa h_1 r dr d\vartheta}{u^2} \cos v$$

für das durch eine nächste Umdrehung beschriebene Körperelement

$$v_2' = \frac{\mu \kappa h_1 r dr d\vartheta}{u^2} \cos v$$

Da all diese Kräfte in derselben Richtung wirken so summiren sie sich; folglich

$$\sum(v) = \frac{\mu \kappa r dr d\vartheta \sum(h)}{u^2} \cos v$$

oder:

$$A = \frac{\mu \kappa H r dr d\vartheta}{u^2} \cos v$$

Hier bedeutet H eine endliche Grösse; ist nun die Umdrehung eine vollkommene, also $H = 2\pi r \sin\vartheta$, so erhalten wir als Ausdruck der Anziehung eines Ringes

$$A = \frac{2\pi \mu \kappa r^2 dr d\vartheta \cos v \sin\vartheta}{u^2}$$

Diese Gleichung ~~können~~ kann folgender massen umgestaltet werden — Aus der Figur ergibt sich

$$r^2 = u^2 + \alpha^2 + 2u\alpha \cos v$$

folglich

$$\cos v = \frac{r^2 - u^2 - \alpha^2}{2u\alpha}$$

und

$$u^2 = r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos\vartheta$$

durch Differenzirung:

$$2u\,du = 2r\alpha \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$d\vartheta \sin\vartheta = \frac{u\,du}{r\alpha}$$

In Folge dieser Werthe gestaltet sich der Ausdruck für die Anziehung eines Ringes

$$a = \frac{\pi\mu\kappa r dr (r^2 - u^2 - \alpha^2) du}{\alpha^2 u^2}$$

5) Die Anziehung einer Kugelschale kann durch Integration dieses Ausdruckes gefunden werden; die Grenzwerthe von u sind dabei $r+\alpha$ und $r-\alpha$ anzunehmen; also

$$a = \frac{\pi\mu\kappa r dr}{\alpha^2} \int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \frac{(u^2+\alpha^2-r^2)}{u^2} du$$

Nach Formeln der Integralrechnung ist:

$$\int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{u^2} du = \int_{r-\alpha}^{r+\alpha} du + (\alpha^2 - r^2) \int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \frac{du}{u^2}$$

$$\int_{r-\alpha}^{r+\alpha} du = 2\alpha$$

$$\int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = \frac{2\alpha}{r^2 - \alpha^2}$$

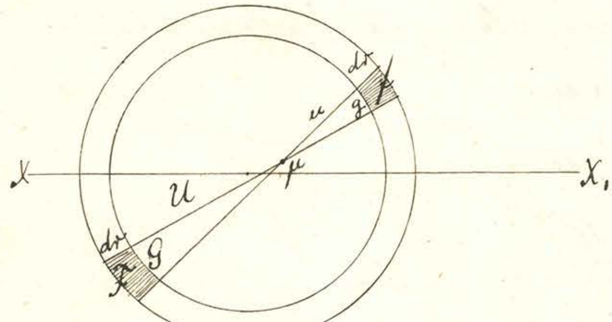
folglich:

$$\int_{r-\alpha}^{r+\alpha} \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{u^2}\,du = 2\alpha\left(1+\frac{\alpha^2-r^2}{r^2-\alpha^2}\right) = 0$$

Also $\qquad A = 0$

Ein Resultat das uns sagt, dass eine Kugelschale auf einen im inneren Hohlraum desselben liegenden Massenpunkt gar keine Anziehung ausübt.-

6) Dieses so merkwürdige Resultat können wir auch noch auf folgende Weise anschaulich machen.-



Die Figur zeigt offenbar:

$$f = g\,dr$$
$$F = G\,dr$$

Dreht sich nun der Kreis um die Axe XX' so beschreiben f und F entsprechend die Bögen h und H - die so entstandenen Körpertheilchen, haben also, wenn K die Dichtigkeit bedeutet, die Massen:

$$m = \kappa g h dr$$

$$M = \kappa G H dr$$

Die Anziehungen daher die m und M auf μ ausüben, sind:

$$a = -\frac{\mu \kappa g h dr}{u^2}$$

$$a_1 = \frac{\mu \kappa G H dr}{U^2}$$

Ich habe hier als positiv die Richtung der Anziehung a_1 angenommen; natürlich ist es dass dann a negativ wird.–

Bei Umdrehung der Kreisfläche um XX_1 sind zwei ähnliche Kegeln entstanden deren ~~Basis~~ Grundflächen GH, Kanten U, entsprechend gh und u sind; diese führen zu den Verhältnissen:

$$G : g = U : u$$

$$H : h = U : u$$

woraus: $\dfrac{gh}{u^2} = \dfrac{GH}{U^2}$

Mit Benutzung dieser Werthe, ergiebt sich:

$$a + a_1 = 0$$

Ebenso haben wir ~~ergiebt~~ für die Anziehung eines andern Theiles der Kugelschale m_1 dem M_1 entgegenwirkt

$$a^{I} + a_1^{I} = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Anziehung der Masse $\sum(m)+\sum(M)$ ist also:

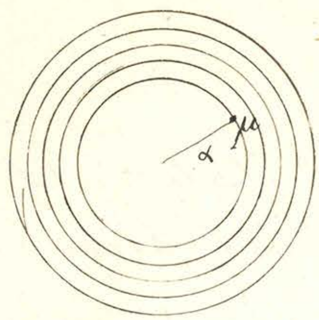
$$\sum(a)+\sum(a_1)=0$$

~~Die Anzi~~ D.i. Eine Kugelschale übt auf den innerhalb gelegenen Punkt keine Anziehung aus.–

Einen noch etwa sich auftauchenden Zweifel; ob, denn wirklich die ganze Masse der Kugelschale in dem Ausdruck $\sum(m)+\sum(M)$ enthalten ist, bestreitet eine einfache geometrische Betrachtung.–

7) Denken wir uns nun eine Kugel in unendlich viele concentrische Schalen getheilt; so ist es nach dem eben festgestellten Satze klar; dass all die Schalen die ausserhalb des angezogenen Punktes liegen auf denselben keine Anziehung ~~aus~~üben –; die Anziehung also die μ erfährt ist unabhängig von der Grösse der Kugel, sie ist gleich der Anziehung einer Kugel dessen Radius (x) die Entfernung ~~von~~ des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte ist.–
(Siehe Figur auf folgender Seite).–

Die Masse der anziehenden Kugel ist:



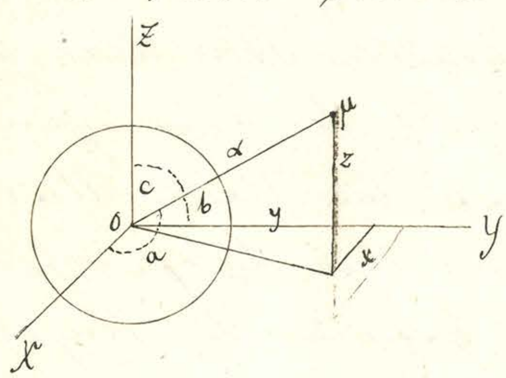
$M = \frac{4}{3}\pi\alpha^3 K$

Und so die Anziehung

$$A = \frac{4}{3}\pi K \alpha \mu$$

Eine Formel die zur Berechnung ~~eine uns~~ des Anziehung einer Kugel gegen einen innerhalb derselben gelegenen Punkt, dienen soll. –

8) Wir stellen uns die Frage: wenn die Kugelförmige Masse eine Flüssigkeit ist, befinden sich dann die Theilchen derselben in Gleichgewicht?
Für den ausserhalb der ~~Mass~~ anziehenden Masse gelegenen Punkt, haben wir bereits gefunden:



$$A = \frac{4\pi K r^3 \mu}{3\alpha^2}$$

Die Componenten dieser Anziehung sind

$$X = A\cos a = A\frac{x}{\alpha}$$

$$Y = A\cos b = A\frac{y}{\alpha}$$

$$Z = A\cos c = A\frac{z}{\alpha}$$

Durch Substitution des Werthes A :

$$X = \frac{4\pi K\mu r^3 x}{3\alpha^3}$$

$$Y = \frac{4\pi K\mu r^3 y}{3\alpha^3}$$

$$Z = \frac{4\pi K\mu r^3 z}{3\alpha^3}$$

Dies sind partielle Differentialgleichungen derselben Function, diese ist

$$V = \frac{2\pi\mu r^3 K}{3\alpha^3}(x^2+y^2+z^2)$$

Da aber $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

so kann dies Potential auch so dargestellt werden:

$$V = \frac{2\pi\mu K r^3}{3\alpha}$$

Ähnlich können die Componenten der Anziehung für den innerhalb gelegenen Punkt dargestellt werden:

$$A = \frac{4}{3}\pi K\alpha\mu$$

und:

$$X = A.\frac{x}{\alpha} = \frac{4}{3}\pi K\mu x$$

$$Y = A.\frac{y}{\alpha} = \frac{4}{3}\pi K\mu y$$

$$Z = A.\frac{z}{\alpha} = \frac{4}{3}\pi K\mu z$$

Das Potential der Anziehung ist also:

$$V = \frac{2}{3}\pi \kappa \mu \alpha^2$$

wo ebenfalls die Gleichung statt findet:

$$\alpha^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Es ist leicht sich zu überzeugen dass:

$$\frac{dV}{dx} = X \quad , \quad \frac{dV}{dy} = Y \quad , \quad \frac{dV}{dz} = Z$$

Wir sehen hiemit, dass die erste Gleichgewichtsbedingung einer flüssigen Masse, bei der Anziehung eines ausserhalb so wie auch eines innerhalb gelegenen Punktes, erfüllt. – Wie dies auch leicht zu begreifen ist da die Anziehung als ein Druck im negativen Sinne angesehen werden kann. –

9) Dass aber auch die zweite Gleichgewichtsbedingung erfüllt, kann man sich überzeugen, indem die Werthe von X, Y, Z für den innerhalb so wie für den ausserhalb gelegenen Punkt, in die Gleichung der Oberfläche:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

gesetzt werden; dann erhaltet man für den ausserhalb gelegenen Punkt:

$$\frac{4}{3}\pi \kappa \mu \frac{r^3}{\alpha^3}(x dx + y dy + z dz) = 0$$

und für den innerhalb gelegenen:

Z.

$$\frac{4}{3}\pi K\mu(xdx+ydy+zdz)=0$$

nach Integrirung:

$$\frac{2}{3}\pi K\mu\frac{r^3}{\alpha^3}(x^2+y^2+z^2)=\text{Const.}$$

$$\frac{2}{3}\pi K\mu(x^2+y^2+z^2)=\text{Const.}$$

Wir sehen also dass (da dies Gleichungen der Kugelfläche sind): die Kugel eine Gleichgewichtsfigur einer anziehenden sowohl als angezogenen Flüssigkeit ist. –

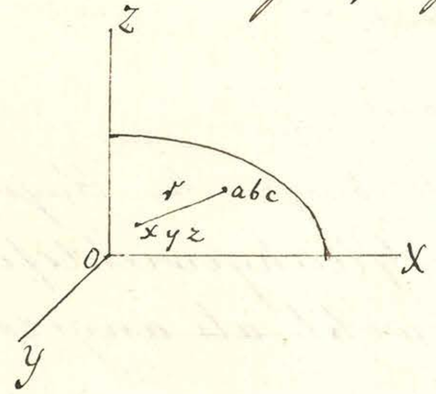
Die Geodesie und Astronomie lehren aber dass die Himmelskörper, die nach Laplace's Theorie aus flüssiger Masse hervorgetreten sind, nicht die Gestalt der Kugel sondern die eines Ellipsoids besitzen – es drängt sich also die Frage an uns ob dies auch eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit sei; desswegen sei ~~der~~ nun der Gegenstand unserer Untersuchungen die:

Attraction des Ellipsoides.

Suchen wir die Anziehung eines durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$$

ausgedrückten Ellypsoides zu bestimmen.– Nach den allgemein entwickelten Formeln der Anziehung, folg sind:



$$X = \iiint \frac{x-a}{r^3}\, da\, db\, dc$$

$$Y = \iiint \frac{y-b}{r^3}\, da\, db\, dc$$

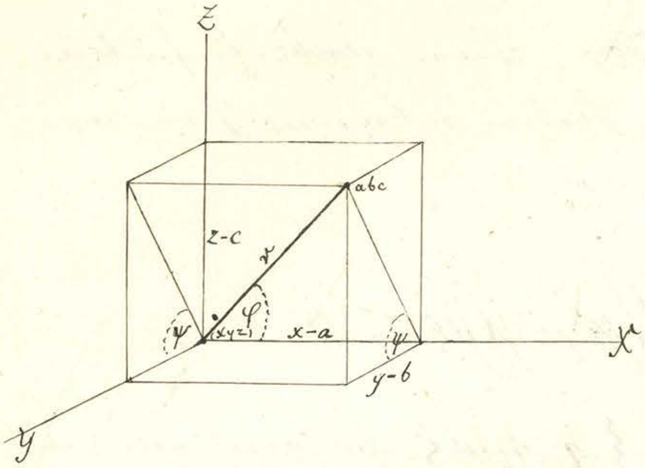
$$Z = \iiint \frac{z-c}{r^3}\, da\, db\, dc$$

Es sind hier X, Y, Z die Componenten der Anziehung des ganzen in dem Punkte (xyz) vereinigt gedachten Ellypsoides auf einen Variablen Punkt (abc) dessen Masse $\mu = 1$

Diese Integrale wollen wir zu Integralen mit bestimmten Grenzen transformiren; wir führen deshalb Polarcoordinaten ein.–

Legen wir in den Punkt xyz einem dem Ursprünglichen paralleles rechtwinkeliges Coordinatensystem, und bezeichnen mit φ den Winkel der r mit der X Axe, mit ψ den welchen die Projection von r auf die ZY Ebene mit der Y Axe bildet, so ist:

$$x - a = r.\cos\varphi$$



$$y-b = r\sin\varphi\cos\psi$$

$$z-c = r\sin\varphi\sin\psi$$

hieraus folgen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2 \; --- \; (1)$$

$$(y-b)^2+(z-c)^2 = (x-a)^2\, tg^2\varphi \; --- \; (2)$$

$$(z-c) = (y-b)\, tg\psi \; --------- \; (3)$$

(1) (2) und (3) stellen drei Systeme von Coordinaten dar. –

Die Gleichung (1) ist die einer Kugel, worin die Variable r ist; durch sie wird also der Raum in unendlich viel concentrische Kugelschalen getheilt. –

Die Variable der Gleichung (2) ist φ; sie bedeutet eine Reihe durch Umdrehung um die Axe OX entstandener Kegel – es ist also leicht einzusehen wie sie den Raum theilt.

(3) ist endlich die Gleichung einer Ebene, welche durch die OX Axe läuft und den Raum nach der Variable ψ theilt.

Diese Vorstellung der Raumvertheilung durch die neu eingeführten Variablen ist nöthig, um die Grenzen derselben bestimmen zu können. –

Für die Transformation eines unbestimmten Integrals in eines von bestimmbaren Grenzen, besteht die Gleichung:

$$\iiint f(xyz)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(xyz)\,\Delta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

wo Δ die Determinante, ξ, η und ζ die neu einzuführenden Variablen sind. –

Es ist also:

$$X = \iiint \frac{r\cos\varphi}{r^3}\,\Delta\,dr\,d\varphi\,d\psi$$

wo wir den vorher festgestellten Werth von $(x-a)$ benutzt haben. – Es ist nun

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{da}{dr}, & \dfrac{db}{dr}, & \dfrac{dc}{dr} \\ \dfrac{da}{d\varphi}, & \dfrac{db}{d\varphi}, & \dfrac{dc}{d\varphi} \\ \dfrac{da}{d\psi}, & \dfrac{db}{d\psi}, & \dfrac{dc}{d\psi} \end{cases}$$

Durch Differenziren der Gleichungen für $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, werden folgende Werthe erhalten:

$$\frac{da}{dr} = -\cos\varphi \qquad \frac{db}{dr} = -\sin\varphi\cos\psi$$

$$\frac{dc}{dr} = -\sin\varphi\sin\psi$$

$$\frac{da}{d\varphi} = r\sin\varphi \qquad \frac{db}{d\varphi} = -r\cos\varphi\cos\psi$$

$$\frac{dc}{d\varphi} = -r\cos\varphi\sin\psi$$

$$\frac{da}{d\psi} = 0 \qquad \frac{db}{d\psi} = r\sin\varphi\sin\psi$$

$$\frac{dc}{d\psi} = -r\sin\varphi\cos\psi$$

Folglich

$$\Delta = -\frac{da}{d\varphi}\left(\frac{db}{d\psi}\frac{dc}{dr} - \frac{db}{dr}\frac{dc}{d\psi}\right) - \frac{da}{dr}\left(\frac{db}{d\varphi}\frac{dc}{d\psi} - \frac{db}{d\psi}\frac{dc}{d\varphi}\right)$$

Und mit Beachtung der eben festgestellten Werthe

$$\Delta = r^2 \sin\varphi$$

Also ist:

$$X = \iiint \cos\varphi \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi$$

xyz sind die Coordinaten eines Punktes in welchem die Masse des ganzen Ellipsoides vereinigt gedacht werden kann, wir wollen hier den Fall betrachten wenn dasselbe homogen ist, dann liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte – xyz sind also die Coordinaten des Mittelpunktes. – Von diesem Punkte angefangen kann r nach beiden Richtungen wachsen, bis es die Oberfläche des Ellypsoides schneidet, wenn also r in einer Richtung r_1 wird so wird es in der Andern Richtung $-r_1$ – nach diesen Grenzen Integrirt:

$$X = \iint 2r_1 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

Es handelt sich nun um die Bestimmung von $2r_1$ wie schon vorher festgestellt wurde, ist:

$$x - a = r_1 \cos\varphi$$

$$y - b = r_1 \sin\varphi \cos\psi$$

$$z - c = r_1 \sin\varphi \sin\psi$$

Die in diesen Gleichungen ausgedrückten Werthe der Variabeln a, b, c ~~sind die~~ ergeben als Gleichung des Ellypsoides:

$$\frac{(x - r_1 \cos\varphi)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - r_1 \sin\varphi \cos\psi)^2}{\beta^2} + \frac{(z - r_1 \sin\varphi \sin\psi)^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

In allgemeiner Form dargestellt:

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

also

$$r = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 \pm 4AC}$$

Die ausgeführte Rechnung soll ergeben:

$$B^2 = 4AC$$

folglich:

$$2r = -\frac{B}{A}$$

Werden also die Werthe B und A berechnet und Zähler u. Nenner des so erhaltenen Bruches mit $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ dividirt so erhält man:

$$2r_1 = \frac{\cdot\left(\frac{x}{\alpha^2}\cos\varphi + \frac{y}{\beta^2}\sin\varphi\cos\psi + \frac{z}{\gamma^2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{\gamma^2}}$$

Dieser Werth führt uns zu dem unübersichtlichen Integral:

$$X = \iiint \left(\frac{\frac{x}{\alpha^2}\cos\varphi + \frac{y}{\beta^2}\sin\varphi\cos\psi + \frac{z}{\gamma^2}\sin\varphi\sin\psi}{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{\gamma^2}}\right)\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

Dasselbe kann vereinfacht werden durch folgende Betrachtung — Die Grenzen von ψ sind 2π und 0 folglich ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{z}{\gamma^2}\sin\varphi\sin\psi}{f(\cos^2\psi, \sin^2\psi)} = 0$$

auch

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{y}{\beta^2}\sin\varphi\cos\psi}{f(\cos^2\psi, \sin^2\psi)} = \frac{\frac{y}{\beta^2}\sin\varphi}{f(\cos^2\psi, \sin^2\psi)} - \frac{\frac{y}{\beta^2}\sin\varphi}{f(\cos^2\psi, \sin^2\psi)} = 0$$

Das Integral lässt sich also auch so schreiben:

$$X^c = \frac{x}{\alpha^2}\iint_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{\gamma^2}}$$

Das Integral nach ψ ist also

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{A \sin^2\psi + B \cos^2\psi}$$

zur Behandlung dieses Integrals, haben wir:

$$\int \frac{d\psi}{A \sin^2\psi + B \cos^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \, arc.tg\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} tg\psi\right.$$

durch Multiplication eines jeden Gliedes in dem Ausdrucke für X^c mit $(\sin^2\psi + \cos^2\psi)$ erhält dasselbe die Form

$$X^c = \frac{x}{\alpha^2}\iint_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\gamma^2}\right)\sin^2\psi + \left(\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2}\right)\cos^2\psi}$$

also ist in der angeführten Formel zu setzen:

$$A = \frac{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\gamma^2}}{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi}$$

$$B = \frac{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2}}{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi}$$

denn es ist

$$X^c = \frac{x}{\alpha^2}\iint_0^{2\pi} \frac{d\psi}{A \sin^2\psi + B \cos^2\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{AB}}$$

9)

da nun die Grenzen für φ $\frac{\pi}{2}$ und 0 sind so folgt:

$$X' = \frac{2\chi\pi}{\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\gamma^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2}}}$$

Durch Division mit $\cos^2\varphi$, wird:

$$X' = \frac{2\chi\pi}{\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 tg^2\varphi}{\gamma^2}}\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 tg^2\varphi}{\beta^2}}}.$$

Ich nenne jetzt

$$\alpha^2 tg^2\varphi = u$$

die Grenze $\frac{\pi}{2}$ verändert sich dadurch in ∞; denn wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ so wird die neu Eingeführte Variable $= \infty$ durch diese Substitution entsteht der Ausdruck:

$$X' = \frac{2\chi\pi}{\alpha^2}\int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{\alpha^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\gamma^2}\right)}}$$

Durch Analogie können auch die übrigen zwei Componenten der Attraction eines Ellypsoides festgestellt werden, gesetzt wenn

$$R' = \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{u}{\gamma^2}\right)}$$

ist:

$$X = \frac{2x\pi}{\alpha^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\alpha^2}\right)R'}.$$

$$Y = \frac{2y\pi}{\beta^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\beta^2}\right)R'}$$

$$Z = \frac{2z\pi}{\gamma^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\gamma^2}\right)R'}$$

In welchen Gleichungen gesetzt

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\alpha^2}\right)R'} = A \qquad \int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\beta^2}\right)R'} = B$$

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{du}{\gamma^2}\right)R'} = C$$

ist:

$$X = \frac{2x\pi}{\alpha^2}A \;,\; Y = \frac{2y\pi}{\beta^2}B \;,\; Z = \frac{2z\pi}{\gamma^2}C$$

Diese Werthe können nicht der Bedingungsgleichung ~~einer~~ der Oberfläche einer in Gleichgewicht bestehenden Flüssigkeit ~~genau~~ entsprechen; ~~anstatt~~ in die Gleichung gesetzt:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

ergiebt sich ~~aus Ihnen~~:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}A + \frac{y^2}{\beta^2}B + \frac{z^2}{\gamma^2}C = \frac{F}{2\pi}$$

was offenbar nicht die Gleichung der Oberfläche eines Ellypsoides ist.–

Hieraus folgt also: Das Ellypsoid ist keine Gleichgewichtsfigur für Flüssigkeiten auf welche allein Attractionskräfte wirken.–

Das Ellypsoid als Gleichgewichtsfigur.

(I)

Betrachtungen der Geologie und Astronomie führen uns zur Annahme; dass die Himmelskörper aus flüssigem Zustande erstarrt sind dass also ihre Gestalt eine Gleichgewichtsfigur ist.– Bekanntlich sind diese Gestalten von der Form zweiaxiger Ellypsoiden – dieselben müssen daher den Gleichgewichtsbedingungen einer Flüssigkeit entsprechen können.–

Unsere Aufgabe sei nun - dies zu erforschen. -
Auf unsere Weltkörper herrschte ausser den erwähnten Attractionskräften noch die Rotationskraft - und zwar so dass wenn die Richtung dieser letzteren als positiv betrachtet wird die Anziehung negativ wirkte. -
Der Druch also der jedes der Flüssigkeitstheilchen bewegte war

$$d = -a + p$$

wo a die Attractions, p die Rotationskräfte bedeuten sollen. -
Bedeutet r die Entfernung von der Axe, v die Winkelgeschwindigkeit eines Theilchens so ist für dasselbe

$$p = rv^2$$

So die Componenten der Kraft für jede die Punkte:

$$X' = -X + xv^2 \qquad Y' = -Y + yv^2$$

$$Z' = -Z + zv^2$$

Den Componenten der Attraction X, Y, Z fallen die Werthe zu, die im vorhergehenden Kapitel festgestellt wurden. -
Als Gleichung der Oberfläche einer in Gleichgewicht bestehenden Flüssigkeit, auf welche

Anziehungs so wie Rotationskräfte wirken, ist also

$$-Xdx + Ydy + Zdz + v^2(xdx+ydy) = 0$$

und die Werthe für X, Y, Z gesetzt:

$$-\frac{2\pi x}{\alpha^2}A\,dx - \frac{2\pi y}{\beta^2}B\,dy - \frac{2\pi z}{\gamma^2}C\,dz + v^2(xdx+ydy) = 0 \quad --- (1)$$

Wenn die Himmelskörper aus feuerflüssigem Zustande entstanden sind so muss diese Gleichung auf die Oberflächengleichung des Ellypsoides zurückführbar sein – und dies ist sie wirklich; wir schreiben die Gleichung (1) in der Form

$$\lambda\left(\frac{2x}{\alpha^2}dx + \frac{2y}{\beta^2}dy + \frac{2z}{\gamma^2}dz\right) = 0$$

Dann muss aber:

$$-\frac{2\pi}{\alpha^2}A + v^2 = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

$$-\frac{2\pi}{\beta^2}B + v^2 = \frac{2\lambda}{\beta^2}$$

$$-\frac{2\pi}{\gamma^2}C + v^2 = \frac{2\lambda}{\gamma^2}$$

Durch Einführung einer neuen Einheit $\gamma = 1$, und Eliminiren von v^2 folgt:

$$v^2 = \frac{2\pi}{\alpha^2}(A-C) = \frac{2\pi}{\beta^2}(B-C)$$

woraus:

$$(2) \qquad (\beta^2-\alpha^2)C = \beta^2 A - \alpha^2 B$$

Durch Einführung der Werthe A, B, C und gesetzt:

$$\frac{v^2}{2\pi} = V$$

entsteht aus den vorher angeführten Formeln:

$$\cancel{(3)} \qquad \cancel{V = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^4\gamma^2}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{u}{\gamma^2}\right)R'} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^4\gamma^2}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{u}{\gamma^2}\right)R'}}$$

$$(3) \cdots\cdots V = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)(1+u)R} = \frac{\beta^2-1}{\beta^4}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)(1+u)R}$$

$$(4) \cdots\cdots (\beta^2-\alpha^2)\left\{\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)R} - \int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)R}\right\} = 0$$

wo gesetzt wurde

$$R = \sqrt{\left[\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)(1+u)\right]}$$

~~Von~~ Der Gleichung (4) entspricht der Werth

$$\alpha = \beta$$

nach der Gleichung (3) ~~kann~~ muss $\alpha > 1$ sein da nun 1 die eine Axe des Ellypsoids ist, so folgt; dass das Ellypsoid, welches durch Rotation ~~der~~ Ellypse um die kleinere Axe entsteht, eine Gleichgewichtsfigur ist..

Unsere Himmelskörper haben also die Gestalt der einer Gleichgewichtsfigur von Flüssigkeiten die von Anziehung so wie durch Rotation bewegt werden – Sie müssen daher aus feuerflüssigem Zustande entstanden sein. –
– Jacobi hat den Fall ins Auge gefasst wenn α nicht gleich β ist; so kam er auf neue Gleichgewichtsfiguren, namentlich auf dreiaxige Ellypsoide. – (Darüber näheres O. C. Meyer. – De Aequilibrii formis Ellipsoidicis. – Crelle's Journal für Math. Bd. XXIV, 1842 pag. 44)

2) Die oben festgestellten Gleichungen können auch zur Berechnung des Werthes α dienen. –
Gesetzt nämlich in den Gleichungen (3) und (4) $\alpha=\beta$, erhalten wir

$$V = \frac{v^2}{2\pi} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)^2(1+u)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5)$$

Nach bekannten Formeln aufgelöst und der Einfachheit wegen $1+a^2=\alpha^2$ bezeichnet:

$$\frac{v^2}{2\pi} = \frac{(3+a^2)\,\mathrm{arctg}\,a - 3a}{a^3} \qquad (6)$$

Um auch ein Beispiel aufführen zu können, setzen wir die Dichtigkeit der Erde in jedem Punkte derselben gleichmässig, und berechnen so für seine Umdrehungsgeschwindigkeit den Werth α. – So wird gefunden:

$$V = \frac{v^2}{2\pi} = 0,0029972$$

Aus der Gleichung (6) erhalte ich nun:

$$\alpha = 1,0043441$$

Ein Resultat das den Dimensionen unserer Erde ziemlich nahe kömmt – ist nämlich die Polar Axe derselben zur Einheit gewählt so wird die Aequatorialaxe folgenden Werth haben:

$$a = 1,0033428$$

R.E.