 Eötvös Loránd: Nehézségi erő

[illegible]

Előadás 1896

Gravitatió előadás 1896.

Clairaut tétele.

(Gestalt der Erde 1878)

Egy geoid felület megállapításánál Bruns nyomán járok el.

A nehézség ~~potentialja~~ erőfüggvénye:

$$U = V + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

A földtestet $x\, y\, z$ derékszögű tengelyrendszerre vonatkoztatjuk, melynek tengelyei a főtehetetlenségi és a tömegközéppontján át ezekkel tengelyekkel összeesnek. A Z tengely legyen a forgási tengely. Egy tetszőleges P pontra tesszük:

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda$$
$$y = r\cos\varphi\sin\lambda$$
$$z = r\sin\varphi$$

$$f(x+h,\, y+k,\, z+l) = f(xyz) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\left\{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + 2lh\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}$$

Egy tömegelemre a földben:

$$x' = r'\cos\varphi'\cos\lambda'$$
$$y' = r'\cos\varphi'\sin\lambda'$$
$$z' = r'\sin\varphi'$$

akkor

$$V = \int dm\left\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

V-t sorba fejtem.

$$V = \frac{1}{r}\int dm + \frac{1}{r^3}\int dm(xx'+yy'+zz') + \frac{1}{r^5}\int dm\,\frac{3(xx'+yy'+zz')^2 - r^2r'^2}{2} + \cdots$$

Ha M a föld tömege MA, MB, MC főtehetetlenségi momentumai akkor:

$$\int dm = M \qquad \int x'dm,\ \int y'dm,\ \int z'dm = 0$$
$$\int y'z'dm,\ \int x'y'dm,\ \int z'x'dm = 0$$
$$\int dm(y'^2+z'^2) = MA \qquad \int dm(x'^2+z'^2) = MB \qquad \int dm(x'^2+y'^2) = MC$$

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M}{2r^5}\left\{x^2(B+C-2A) + y^2(C+A-2B) + z^2(A+B-2C)\right\} + \cdots$$

ehhez hozzájön $\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$

tegyük $A-B=0$ és $C = \frac{1}{2}(A+B)+K$ akkor:

$$U = \frac{M}{r} + \frac{MK}{2r^5}(x^2+y^2-2z^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$U = \frac{M}{r} + \frac{MK}{2r^3}(1-3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi$$

φ, λ a geocentrikus szélesség és hosszúság

U a legkezdetlegesebb első közelítés a föld alakjára.

P a föld sarkán
A az aequatornak egy pontja

Sarkon P-ben $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = r_2 \quad g = g_2$

Aequatoron A-ban $\varphi = 0$ $\quad r = r_1 \quad g = g_1$

E két pontban a normális az r irányába esik ($\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ így):

Az ~~sarkon~~ aequatoron $U_0 = \frac{M}{r_1} + \frac{MK}{2r_1^3} + \frac{1}{2}\omega^2 r_1^2$

a sarkon $U_0 = \frac{M}{r_2} - \frac{MK}{r_2^3}$ $\quad$ 1)

és

$$g_1 = -\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{M}{r_1^2} + \frac{3MK}{2r_1^4} - \omega^2 r_1$$

$$g_2 = -\frac{\partial U}{\partial r_2} = \frac{M}{r_2^2} - \frac{3MK}{r_2^4} \qquad 2)$$

Legyen $\frac{r_1 - r_2}{r_1} = \alpha$ a ~~lapultság~~ lapultság.

1) egyenletekből

$$\frac{1}{2}\omega^2 r_1 = \frac{M}{r_1^2}\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{MK}{r_1^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1-\alpha)^3}\right) \qquad 4)$$

2-ből

$$\omega^2 r_1 + g_1 = \frac{M}{r_1^2} + \frac{MK}{r_1^4}\frac{3}{2} \qquad \ldots 5)$$

$$g_2 = \frac{M}{r_1^2}\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{MK}{r_1^4}\cdot\frac{3}{(1-\alpha)^4} \qquad \ldots 6)$$

ezekből pedig (e két utolsóból) magasabb rendűek elhanyagolásával:

$$7a) \ldots \frac{M}{r_1^2} = \frac{2\omega^2 r_1}{3} + \frac{2g_1}{3}\left(1+\frac{2\alpha}{3}\right) + \frac{g_2}{3}\left(1-\frac{10\alpha}{3}\right) \quad +$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \frac{MK}{r_1^4} = \frac{2}{9}(\omega^2 r_1 + g_1 - g_2)\left(1-\frac{4\alpha}{3}\right) + \frac{4\alpha g_2}{9}\left(1-\frac{11\alpha}{6}\right) \end{array}\right\} 7.)$$

ezek a 4) ben helyettesítve

$$\frac{5\omega^2 r_1}{2g_1}\left(1-\frac{\alpha}{5}\right) = \alpha(1+\alpha) + \frac{g_2-g_1}{g_1} \quad \ldots 8)$$

vagy

$$\underline{\frac{5}{2}\frac{\omega^2 r_1}{g_1} - \alpha = \frac{g_2-g_1}{g_1}}$$ ez a Clairaut tétele.

A föld tömege és sűrűsége:

7 a) ból

$$\frac{fM}{r_1^2} = \frac{2g_1}{3} + \frac{g_2}{3} + \frac{2\omega^2 r_1}{3} + \frac{4g_1}{9}\alpha - \frac{10}{9}g_2\alpha$$

helyezzük a 8) ból vagyis Clairautból.

$$g_2 = g_1 - \alpha g_1 + \frac{5}{2}\omega^2 r_1$$

és így

$$\frac{fM}{r_1^2} = g_1 - g_1\alpha + \frac{3}{2}\omega^2 r_1$$

Listing földjére $r_1 = 6{,}377365$ méter.

$\omega^2 r_1 = 3{,}391$

$\alpha = \frac{1}{289}$ $\qquad g_1 = 978{,}073$ C.

$\omega = \frac{2\pi}{86164}$ $\qquad \omega^2 = \frac{5330}{10^6 \cdot 10^6}$ egész

ha $\quad f = 0{,}0000000665 \qquad M = 59922 \cdot 10^{23}$

$M = \frac{4}{3}\pi s r_1^2 r_2$ ezért $\qquad \underline{V = \frac{4}{3}\pi r_1^3(1-\alpha)}$

$f\sigma\frac{4}{3}\pi r_1(1-\alpha) = g_1(1-\alpha) + \frac{3}{2}\omega^2 r_1 \qquad V = 10827\,10^{23}$

$f\sigma\frac{4}{3}\pi r_1 = g_1 + \frac{3}{2}\frac{\omega^2 r_1}{g_1}$ és ebből $\frac{M}{V} = \sigma = 5{,}5345$

$\cancel{f\sigma\frac{4}{3}\pi r_1}$ $\sigma =$

Nagyon úgy
(Az a tény, a melyet egy előadás [illegible] fizikai fogalmak, de még mindig csak kérdést foglal magában, a ~~[illegible]~~ A valóság az első jelenség, mely a megfigyelő előtt feltűnik s minek kérdéseket állít. Arra vonatkozó ismereteink fejlődése egy a mechanika fejlődésével — mondhatni a mechanika a valóság jelenségeinek megfigyeléséből kiinduló inductio eredménye. Viszont a valóság jelenségei adják az ellenőrzést mechanikai ~~[illegible]~~ elméleteink igazolására.

Ezzel a ténnyel mint physikusok fogunk foglalkozni — ki kell ezt emelnem — mert az a mathematikusnak is első dolgot adott.

Mathematikai [illegible] nem fogunk keresni — de nem is fogunk kerülni.

Hogy a tény — magában minden [illegible] jelenségben van szerepe. De mi kihasználjuk ezt a mi [illegible], a megfigyelés módszerét — és ~~a~~ elméletet.

Új kísérleti megfigyelésekben hogy [illegible] az erőt magát, hanem annak tételét vallja [illegible] és minden fizikai elméletei. Ilyen az erő egy végez helyen [illegible], vagy egy test [illegible] helyét [illegible] akkor is magunk [illegible], ha ezt [illegible] minden pontjában meghatározók.

A tárgyat megint rendszeresen, ha tárgyat írunk így értjük be.

1) A nehézség megfigyelésére statikai úton, ~~mint tudni~~ fogjuk

2) Dynamikus úton

3 A nehézség elmélete, úgy

Ugyanúgy a nyomásra nézve.

De előbb a rendszerről el kell majd térnünk.

Mi a nehézség?

Két definíciójuk lehet.

a) a nehézség az a nyomó erő melyet nyugvó testek alapjukon gyakorolnak.

b) a nehézség az az erő mely a testek esését okozza.

Mind a kettő bizonyos tekintetben jó, de más tekintetben tökéletlen.

Az első a statikai nem különbözteti meg más erőktől (rugalmasság, delejesség) és magában foglalhat, a második e mellett még ~~[illegible]~~ tökéletlen, azért mert az erő testek helyét elmozdítását, ~~a …~~ más magában zárja s ezért nem egyenlő az elsővel.

Persze, hogy most meghatározhatjuk
hogy a sebesség minden irányban
ugyanazon egyenletes a helyzete
akkor jobb definíciót adhatunk.
azt mondván hogy a sebesség az
a gyorsító erő meg a feszülés
minden ~~egységnyi~~ között különböző irányban
egyforma. —
Még jobb lenne ~~az~~ a definíció a
theoriában. Mert az arra
fog hozatni, hogy

Külső erő (nem hat).

$$K(\varphi,\lambda,r,\xi,\eta,\zeta)\,\alpha'$$

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,X = F(\varphi,\lambda,r)\,\alpha + C\alpha'' + f_1(\varphi,\lambda,r,\xi\eta\zeta,v,w)$$

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,Y = F(\varphi\lambda r)\,\beta + C\beta'' + f_2(\varphi\lambda r\ \lambda\mu\ v\ w$$

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,Z = F(\varphi\lambda r)\,\gamma + C\gamma'' + f_3(\varphi\lambda r\ \lambda\omega),v,w)$$

F ~~φ~~ tömegerők C a közvetítő erő $u\ v\ w$ sebességek
φ = geocentrikus szélesség λ a hosszúság r a geocentrikus
távolság.
Ettől a sebesség

$$g_x = F(\varphi\lambda,r)\,\alpha + C\alpha'$$

$$g_y = F(\varphi\lambda r)\,\beta + C\beta'$$

$$g_z = F(\varphi\lambda r)\,\gamma + C\gamma'$$

Statikai meghatározások

1) az irány,
függőn
nyugvó irány. a belső egyensúlyra mindegy, persze csak
~~Szigetelve feszült~~ akkor ha a nyugvó irányban a nyomás mindenütt
egyenlő, ha a fonálra egyéb erő nem hat.

Könnyű még ezt is tenni.

Guyot. Tortschortle 6,7. 1855

57 méteres $4\frac{1}{2}$ milliméteres kitérés.

A Pantheonban.

Megfordíthattam és megfordítható. csak lengjen a libella

De különben az erő változását tekintetbe vegye és következik

ha $$X = X_0 + ax + by + cz$$ $$Y = Y_0 + a'x + b'y + c'z$$ $$Z = Z_0 + a''x + b''y + c''z$$

$$X = X_0 + \frac{\partial X}{\partial x}x + \frac{\partial X}{\partial y}y + \frac{\partial Z}{\partial z}z$$

etc.

akkor az összes erő

$$\Sigma mX = \Sigma mX_0 + a\Sigma mx + b\Sigma my + c\Sigma mz.$$

tehát:

$$\Sigma mX = \Sigma mX_0$$ $$\Sigma mY = \Sigma mY_0$$ $$\Sigma mZ = \Sigma mZ_0.$$

az egy a testen működő összes erő lengyen mint a tömegközéppontban minthogy tehát [illegible] egyensúlyban. De ha valamely vonalban vagy egyik pontja akar. és arra az XZ síkban akkor

$$F = \cancel{\Sigma mXz} + \Sigma mZx - \Sigma mXz$$

$$F = \Sigma mZ_0 x + a''\Sigma mx^2 + c''\Sigma mxz$$
$$- \Sigma mX_0 z - a\Sigma mxz - c\Sigma mz^2$$

ha például $\Sigma mx = 0$ $\Sigma mz = 0$

$$F = a''\Sigma mx^2 + c''\Sigma mxz$$
$$- a\Sigma mxz - c\Sigma mz^2$$

$$F = a''\Sigma mx^2 - c\Sigma mz^2 + (c'' - a)\Sigma mxz$$

[illegible]

$$F = 2a''ml^2\sin^2\varphi - 2c\,ml^2\cos^2\vartheta + (c'' - a)\sin 2\vartheta\, ml^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \quad \frac{\partial X}{\partial z} \quad \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x}$$

Pécs

~~Példa~~
Érdekessé teszi a függőón hasonlítható
a pince nem.

~~Példa~~

Példa Puiseux 1857 Fortschritte 12 - Comptes rendus 42

$$2\frac{\partial Z}{dx}\cos 2\vartheta = \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\sin 2\vartheta$$

$$\mathrm{tg}\, 2\vartheta = \frac{2\frac{dZ}{dx}}{\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x}}$$

Lásd

$$g_\varphi = 9{,}780728 + 0{,}050875\sin^2\varphi$$ (Lásd Günther Geophysik 174)

$$g_\varphi = g_0(1+\alpha\sin^2\varphi).$$ $$g_\varphi = 9{,}780738\,(1+0{,}0052016\sin^2\varphi)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = g\,\alpha\sin 2\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}$$ $$R\,d\varphi = dx$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{g}{R}\,\alpha\sin 2\varphi.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{2g}{R} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{g}{R}.$$

$$\frac{\frac{dX}{dx}\delta x}{g} = d\varphi\,\frac{\delta x}{R}.$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{g}{R}.$$

$$\mathrm{tg}\,2\vartheta \quad 2\vartheta = \frac{2\alpha\sin 2\varphi}{3} = \text{legfeljebb } \frac{1}{200}$$

1 perc = 0,000291 kör $\frac{1}{343{,}600}$ a földrajzi 1718 m

0,0101 0,00346

A főerőtér a libella.

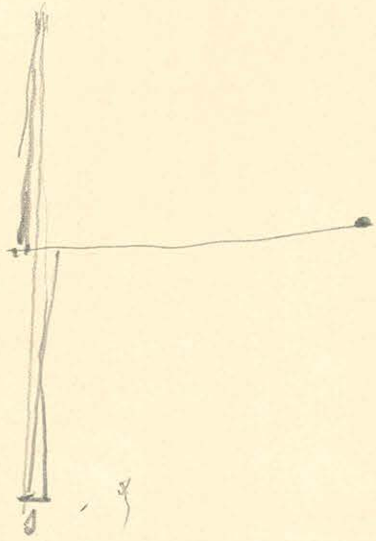
Így kapjuk a nehézség irányát egy pontban.
Irányváltozását, akkor ha változását
teljesen megtaláljuk tudjuk,
hogy áll a dolog időben, ...

A függély viszonyítása nehézség. nehéz testek.

Alap. elhelyezése.

Függőleges tengely elhelyezése. csavarmenetes.

Hengler – Zöllner féle inga



függés α síkjában

$$\alpha = \frac{s}{l}.$$

$$mkg\frac{s}{l}\sin\vartheta + \tau\vartheta$$

függés mellett $mkg\frac{s}{2}\vartheta + \tau\vartheta$

ha ε akkor a függés marad

$mgk\,\varepsilon$ vagyis

$$\varepsilon = \frac{s}{l}\vartheta + \frac{\tau}{mgk}\vartheta.$$

~~Mérési eredmény~~

Zöllner kísérleteinél 2500 mm. $\varepsilon = 0{,}00135$ mg egy osztályrész

Potsdamnál $0{,}''0174$ a holdtól

$0{,}0080$ a naptól.

~~Más eszközök.~~

Astronomische Pendelwage nebst einer neuen Nivellirwage, erfunden u. dargestellt von Lorenz Hengler akademischem Bürger an der Hochschule zu München

Dinglers Polyt. Journal 1832.

Zöllner Horizontalpendel 1869 Pogg. Ann. 150ik kötet

Más előszót

Horace Darwin

[illegible]

1896. Előadás. 1

A nehézség és lineáris változásainak méréséről.

$$X = X_0 + \frac{\partial X}{\partial x}x + \frac{\partial X}{\partial y}y + \frac{\partial X}{\partial z}z$$

$$Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x}x + \frac{\partial Y}{\partial y}y + \frac{\partial Y}{\partial z}z$$

$$Z = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x}x + \frac{\partial Z}{\partial y}y + \frac{\partial Z}{\partial z}z.$$

Tehát 12 adat volna meghatározandó X_0, Y_0, Z_0 és $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$, etc.

Elméleti összefüggések e differentiálhányadosok között ha a nehézséget a tömegvonzás és a középpontfutó erő eredőjének tekintjük.

Ez esetben egyaránt

$$X = -fm\frac{x-\xi}{r^3} + C_x$$

$$Y = -fm\frac{y-\eta}{r^3} + C_y$$

$$Z = -fm\frac{z-\zeta}{r^3} + C_z$$

ξ, η, ζ az m tömegpont összrendezői $\quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$

$$-fm\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} fm\frac{1}{r} \qquad \Sigma - fm\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\Sigma\frac{fm}{r}$$

$$-fm\frac{y-\eta}{r^3} = \frac{\partial}{\partial y} fm\frac{1}{r} \qquad \ldots$$

$$-fm\frac{z-\zeta}{r^3} = \frac{\partial}{\partial z} fm\frac{1}{r} \qquad \ldots$$

~~Ugy~~ ha $x\,y\,z$ a vonzó folytonosan elosztott anyagon kívül van akkor egyszersmind $\Sigma\frac{fm}{r} = \int\frac{f\,dm}{r}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = fm\int\left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-\xi)^2}{r^5}\right) dm.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

$$\underline{\Delta V = 0}$$

Külső pontokra.

A második rész

$$C_x \qquad C_y \qquad C_z$$

legyen z' a forgási tengely akkor P pont összetevői

$$x_1,\ y_1,\ z_1$$

akkor

$$C_{x_1} = x_1 \omega^2$$
$$C_{y_1} = y_1 \omega^2$$
$$C_{z_1} = 0$$

és

$$C_x = x_1 \omega^2 \cos(x_1 x) + y_1 \omega^2 \cos(y_1 x)$$
$$C_y = x_1 \omega^2 \cos(x_1 y) + y_1 \omega^2 \cos(y_1 y)$$
$$C_z = x_1 \omega^2 \cos(x_1 z) + y_1 \omega^2 \cos(y_1 z)$$

x_1, y_1, z_1-et kifejezzük $x\ y\ z$ által transformatió [illegible]

	x	y	z
x_1	α_1	β_1	γ_1
y_1	α_2	β_2	γ_2
z_1	α_3	β_3	γ_3

$$C_x = \omega^2 \{ x_1 \alpha_1 + y_1 \alpha_2 \}$$
$$C_y = \omega^2 \{ x_1 \beta_1 + y_1 \beta_2 \}$$
$$C_z = \omega^2 \{ x_1 \gamma_1 + y_1 \gamma_2 \}$$

$$x_1 = a_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y_1 = b_1 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z_1 = c_1 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x} \qquad \alpha_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}$$

$$\beta_1 = \frac{\partial x_1}{\partial y} \qquad \beta_2 = \frac{\partial y_1}{\partial y}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial x_1}{\partial z} \qquad \gamma_2 = \frac{\partial y_1}{\partial z}$$

Tehát

$$C_x = \omega^2 \left\{ x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + y_1^2)$$

$$C_y = \omega^2 \left\{ x_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} (\qquad)$$

$$C_z = \omega^2 \left\{ x_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} \right\} = \frac{\partial}{\partial z} (\qquad)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = w^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial y} = w^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial z} = w^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$$

$$\Sigma = 2w^2$$

tehát írhatjuk

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\left(V + \tfrac{1}{2}\varrho^2 w^2\right)$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(V + \tfrac{1}{2}\varrho^2 w^2\right)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(V + \tfrac{1}{2}\varrho^2 w^2\right)$$

$U = V + \frac{1}{2}\varrho^2 w^2$ a nehézség erőfüggvénye.

$\underline{\Delta U = 2w^2}$ a Laplace egyenletének megfelelőleg

A kilenc diff. hányados között e szerint 4 összefüggés

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

és $$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 2w^2$$

$$w = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073$$

$$w^2 = \frac{5330}{10^5 \cdot 10^6}$$

Ezek szerint meghatározandók lesznek

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}.$$

Ha most felveszünk egy XYZ koordinátarendszert, úgy mindig megválaszthatjuk a Z tengely megválasztása mellett xy-nak olyan irányait hogy $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$ legyen.

Most ha V a potenciál x, y, z-ben kifejezve,

V' a " " x', y', z-ben kifejezve.

úgy hogy: $x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$

$y' = y\cos\vartheta - x\sin\vartheta$

akkor:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x'}\cos\vartheta - \frac{\partial V}{\partial y'}\sin\vartheta$$

és

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\sin^2\vartheta - \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\cos 2\vartheta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\sin 2\vartheta$$

ϑ úgy választható meg hogy mell $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = 0$ legyen.

Akkor tehát z ? irány és $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}$ $\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}$ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ elegendő

egy irány így deflexiónál kapcsolódik.

Geometriai vonatkozások.

$U = C$ egyelőre a nívófelületet

egy pontban az érintő irányában az erő $= 0$

az erő arra merőleges.

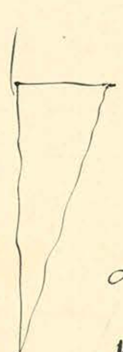
Ez arra való hogy evvel kiterjesszék meg a vizsgálati

elemeket.

Az összemutatók középpontjában érintősík lesz az xy sík

z-dik merőleges lesz a nehézség iránya akkor.

$X_0 = 0$ $\quad Y_0 = 0$ $\quad Z_0 = g_0$



XZ normálmetszetben

$$\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}x}{g} = -\frac{x}{\varrho} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g}{\varrho}$$

Ha ϱ_1 és ϱ_2 főgörbületi sugarak

XZ, YZ fő normálmetszetek irányában akkor

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g}{\varrho_1} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g}{\varrho_2}$$

1896 [illegible] 2.

A felületek görbületének elméletében arra kerül, hogy ha a tengelyrendszer XZ és YZ főmetszetek síkjai akkor $\frac{\partial U}{\partial x \partial y} = 0$

[Lásd ~~Stur~~ Sturm Cours d'Analyse 1864iki kiadás II kötet 213ik oldal $s=0$ az az $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ minthogy pedig $U(x,y,z) = U(x,y,z(x,y)) = C$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{tehát} \quad \frac{dU}{dx} = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \quad \text{ha } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \text{ és } x=0\ y=0 \text{ ban } \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

azért $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$]

Továbbá még $\frac{dg}{dx} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}$ $\frac{dg}{dy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$

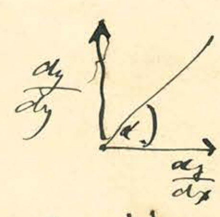
ezek helyett is a vetülés eredőjét, az összes vetületét és annak irányát helyettesíthetjük be, mert a nívófelület érintősíkjában eső s irányában az $xy=0$ pontot s diametra felvevő vonalra nézve a vetülés

$$\frac{dg}{ds}s = \frac{dg}{dx}x + \frac{dg}{dy}y \quad \text{vagy} \quad \frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx}\cos\alpha + \frac{dg}{dy}\sin\alpha.$$

$\frac{dg}{ds}$ ennek maximuma van ha.

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dg}{ds}\right) = -\frac{dg}{dx}\sin\alpha + \frac{dg}{dy}\cos\alpha$$

az az $tg\,\alpha = \frac{\frac{dg}{dx}}{\frac{dg}{dy}}$



$\frac{dg}{dx}$ $\frac{dg}{dy}$ helyett vehető tehát $\frac{dg}{ds}$ és annak iránya.

Lefelé való irányváltozás:

$\frac{dg}{ds}$

tehát $\frac{dg}{dx}$

$\frac{\frac{dg}{dx}}{g} = \frac{dx}{[illegible]}$: ez a horizontális vonatkozás és ily vetülés lefelé.

Ha ismerem a nívófelületet is abban a helyen a g értékét ~~...~~ ~~geometriai...~~ ugy ismerek mindent.

Példa

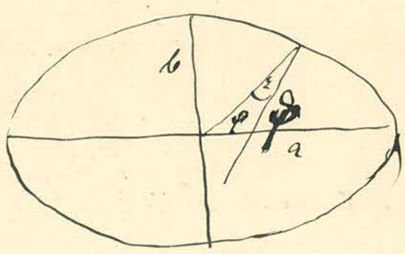
A Listing féle normál föld egy forgási ellipsoid

$a = 6{,}377\,365$ méter $\quad b = 6{,}355\,298$ méter $\qquad \frac{a-b}{a} = \frac{1}{289}$ Günther I, 149

$$g_\varphi = 978{,}0728 + 5{,}0875 \sin^2\varphi$$

vagy $g_\varphi = 978{,}0728(1 + 0{,}0052013 \sin^2\varphi)$

ezekben adva van minden. Lássuk.



φ = a geografiai szélesség

ψ = a geocentrikus szélesség

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$\varphi = 47^\circ 30$

ezekből

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi \qquad \varepsilon = \varphi - \psi$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi} \qquad \frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{289} \qquad \varepsilon = 11'\,55''$$

További

$$\rho_1 = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

példánkban $\rho_1 = 636{,}933000$ c.

$\frac{1}{\rho_1} = 157002 \cdot 10^{-14}$

mint pedig $\rho_2 = \frac{x}{\cos\varphi}$

$$\rho_2 = \frac{a}{\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

" $\rho_2 = 638{,}941\,000$

$\frac{1}{\rho_2} = 156509 \cdot 10^{-14}$

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2 a}\cos^2\varphi\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = 493 \cdot 10^{-14}$

$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 313571 \cdot 10^{-14}$

$$\frac{dg}{dz} = g\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \omega^2 \qquad \omega^2 = \frac{5330}{10^6 10^6}$$

$g = 980{,}838$

$\frac{dg}{dz} = 3{,}075{,}040 \cdot 10^{-12} + 5330 \cdot 10^{-12}$
$= 3{,}080{,}370 \cdot 10^{-12}$

$\frac{\frac{dg}{dz}}{g} = 3140 \cdot 10^{-12}$

$\frac{dg}{ds} = 796 \cdot 10^{-12}$

Másrészt a Clairaut formulából

a meridiánirányban $\frac{dg}{ds} = \frac{978{,}073(0{,}005201 \sin 2\varphi)}{\rho_1}$

mivel $\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$

és $\rho_1 d\varphi = ds$

Ha Σ a centiméterre eső egy a horizontális eső irány változása lefelé akkor

$$\Sigma = \frac{\frac{dg}{ds}}{g} \qquad \text{tehát} \quad \Sigma = 8115.10^{-15} \qquad \Sigma = 0{,}000\,001\,673^{4} \text{ másodpercz.}$$

Itt tehát a földön mindenütt megvan ~~[illegible]~~ a nívófelületek s az állandó nívófelület, a geoid – alakja, mérete és a Clairaut formula.

A nívófelületen a nehézség az egy s a normális irányának változásai.

A felületet egy O pontjában érintő síkot emeljük, attól l távolságra fekvő pontban a nehézség irányát keressük. Egyszer l végtelen kicsiny a ρ görbületi sugárhoz akkor: a nehézség vetülete az OPC síkban az OC-vel képző

C görbületi középpont

$$\delta = \frac{l}{\rho} \text{ szöget.}$$

De ezenkívül még a PC-vel is szöget képez.

Keressük a szöget melyet a δ szögével az OC által leírt henger és a felületet által kivágott görbe egymással képeznek.

Ha xy az O-n át fekvő érintő sík, akkor ennek metsző görbe l pontjára nézve

$$z = \frac{l^2}{2\rho}$$

és mint
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\delta + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\delta \qquad \text{Euler tétele.}$$

$$z = \frac{l^2}{2}\left(\frac{\cos^2\delta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\delta}{\rho_2}\right)$$

Ha a görbület l eleme ds akkor

$$\eta = \frac{dz}{ds} = \frac{l^2}{2}\left(\frac{\sin 2\delta}{\rho_2}\frac{d\delta}{ds} - \frac{\sin 2\delta}{\rho_1}\frac{d\delta}{ds}\right) \qquad \text{minthogy } l\,d\delta = ds$$

$$\eta = -\frac{l \sin 2\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

---

e szerint a növekedő δ-ek irányában van egy erő komponens a mely

$$= + mgl\,\frac{\sin 2\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Forgási momentum $\frac{?}{?}$

$$= + mgl^2 \frac{\sin 2\vartheta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

ρ_1 a meridiánsíkban a görbületi sugár.

akkor ez a forgási momentum null a ρ_1 és ρ_2 irányában

ha ϑ $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb pozitív akkor a forgási momentum +

ha " " negatív −

az az a ~~[illegible]~~ $\frac{1}{\rho_2}$ kisebb és kisebb irányában

A nagyobb görbületi sugár irányában van a stabil } egyensúlyi
a kisebb " " " a labil } helyzet.

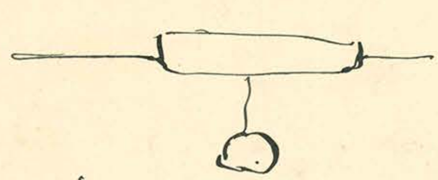
A függő a meridiánsíkra merőlegesen.

<u>Példa</u> könnyű [illegible] testek egyensúlyára a földön

1) Súlypontjában alátámasztott rúd a nagyobb görbületi sugár irányában áll.

2) Álló pontok, ~~[illegible]~~ kötélen lógók melyek vertikális és [illegible] lejtőkkel [illegible] párhuzamosan helyezkednek.

3) Homogén testek vízben úszó [illegible] nem [illegible] — nem [illegible] így. És pedig 1)  [illegible] a meridiánra merőlegesen

2)  a meridián irányában

Az 1) a mellett észak felé a 2) ha [illegible] az [illegible] [illegible] a [illegible] [illegible] észak felé ha [illegible] délfelé ~~[illegible]~~ haladni.

~~[illegible]~~ Areométer északra, [illegible], [illegible] délre halad.

[illegible] meg kell hagyni a meridián irányában [illegible] [illegible] egy délre.

1896 Előadás 3.

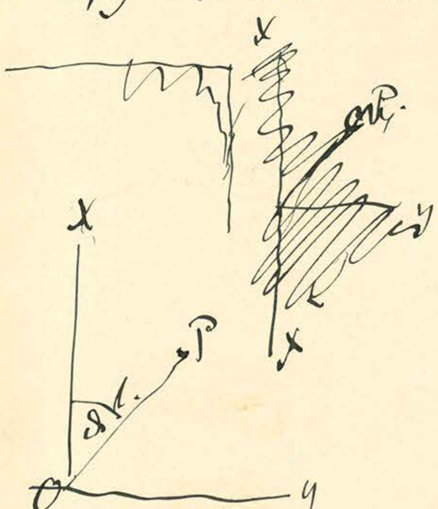
A nehézség mérésére szolgálnak statikai eljárások. Dinamikai szempontból legjobb [illegible]. Erre szolgál az inga, és minden szilárd tengely körül történő körmozgás, mert a mint később majd kimutatjuk, egyedül a föld forgása által [illegible] nem gyakorol, az az nem egyebet mint a nehézség középpontjából eredő erőt [illegible].

Az inga megadja g-t

A Jolly féle mérlegelés $\frac{dg}{dz}$, a még hátralevő 4 adat meghatározására eljárásom szerint a Coulomb mérleg szolgálhat.

A z tengely legyen a függélyes a Coulomb inga középpontjában.

x, y erre merőleges.



akkor a P-ben levő tömegegységre ható nehézségi erő forgási momentuma X-től Y felé, az az óramutató irányában $= Yx - Xy$

de mint fönt

$$X = X_0 + x\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}$$

$$Y = Y_0 + x\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}$$

$$Y_x - X_y = Y_0 x + x^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + xy\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + xz\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} - X_0 y - xy\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - yz\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}$$

legyen $OP = l$ $\sphericalangle(POX) = \vartheta$ akkor

$x = l\cos\vartheta$ $y = l\sin\vartheta$ és

$$Y_x - X_y = Y_0 l\cos\vartheta - X_0 l\sin\vartheta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{l^2}{2}\sin 2\vartheta + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}l^2\cos 2\vartheta + \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}lz\cos\vartheta - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}lz\sin\vartheta$$

Egy testre vonatkozólag e kifejezés egyes tagjainak összegét kell venni.

Ezt az összegezést úgy végezzük, hogy felvesszük az ingatestben egy abban szilárd $\xi\,\eta\,\zeta$ tengelyrendszert melyre nézve, ha az m pont [illegible] és a ξ tengely egymással ε szögletet képeznek akkor: $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$ $\vartheta_0 = \sphericalangle(x,\xi)$ és

$$l\cos\vartheta = l\cos(\vartheta_0+\varepsilon) = l\cos\vartheta_0\cos\varepsilon - l\sin\vartheta_0\sin\varepsilon = \xi\cos\vartheta_0 - \eta\sin\vartheta_0$$

$$l\sin\vartheta = l\sin(\vartheta_0+\varepsilon) = l\sin\vartheta_0\cos\varepsilon + l\cos\vartheta_0\sin\varepsilon = \xi\sin\vartheta_0 + \eta\cos\vartheta_0$$

$$\frac{l^2\sin 2\vartheta}{2} = (\xi^2-\eta^2)\frac{\sin 2\vartheta_0}{2} + \xi\eta\cos 2\vartheta_0$$

Így lesz azután: $l^2\cos 2\vartheta = (\xi^2-\eta^2)\cos 2\vartheta_0 - 2l^2\sin\vartheta_0\,\xi\eta$

5646
72/2

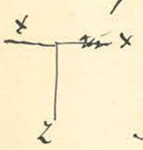
$\cancel{Y_x - X_y = Y_0\cos\vartheta_0 - X_0}$

$$\int dm\,(Y_x - X_y) = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\cos\vartheta_0 - \frac{\partial U}{\partial x}\sin\vartheta_0\right)\int\xi\,dm - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\sin\vartheta_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\cos\vartheta_0\right)\int\eta\,dm +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\vartheta_0}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\vartheta\int\xi\eta\,dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos 2\vartheta_0\int(\xi^2-\eta^2)\,dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\,2\sin 2\vartheta\int\xi\eta\,dm +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cos\vartheta_0 - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\sin\vartheta_0\right)\int\xi\zeta\,dm - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\sin\vartheta_0 + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos\vartheta_0\right)\int\eta\zeta\,dm$$

épen így tün x helyett z-t y helyett x-et.



$$\int(X_z - Z_x)\,dm = -g_0\sin\vartheta_0\int\zeta\,dm \overset{-g\cos\vartheta_0\int\eta\,dm}{+} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\overbrace{\int(\zeta^2-\xi^2)\,dm}^{\frac{\sin 2\vartheta_0}{2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos 2\vartheta_0\int(\zeta^2-\xi^2)\,dm$$

$\int\xi\,dm = ms\cos\alpha \qquad \int ms\sin\alpha \qquad s$ a súlypontnak $\quad \alpha+\vartheta_0=\varphi$

φ a súlyponti egyenes és Z által képezett szöglet tehát

$$g_0\sin\vartheta_0\int\xi\,dm + g_0\cos\vartheta_0\int\eta\,dm = \underline{ms\sin\varphi}$$

tehát

$$\int(X_z - Z_x)\,dm = -mgs\sin\varphi + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)K\frac{\sin 2\vartheta_0}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}K\cos 2\vartheta_0$$

$$\sin\varphi = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\frac{K}{mgs}\frac{\sin 2\vartheta_0}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\frac{K}{mgs}\cos 2\vartheta_0$$

$$\sin\varphi = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\frac{\sin 2\vartheta_0}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos 2\vartheta_0\right\}$$

Vagy ha $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 0$

$$\sin\varphi = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\frac{\sin 2\vartheta_0}{2}$$

és

~~Ki~~ Az egyensúlyi helyzet körüli lengésekre:
verticalis irodra:

$$\tau\ddot\varphi - mgs\cos\varphi\ \cancel{mgs\cos\varphi} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)K\,\overset{\cos 2\vartheta_0\,\omega}{\cancel{\cos 2\vartheta_0}} = \cancel{\frac{T^2}{\varphi^2}}\ \frac{\pi^2 K}{T^2}$$

~~mi mozgás ...~~

$$\tau\ddot\varphi - mgs\cos\varphi + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)K$$

$\vartheta,\ \varphi = 0$ verticalis irányu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

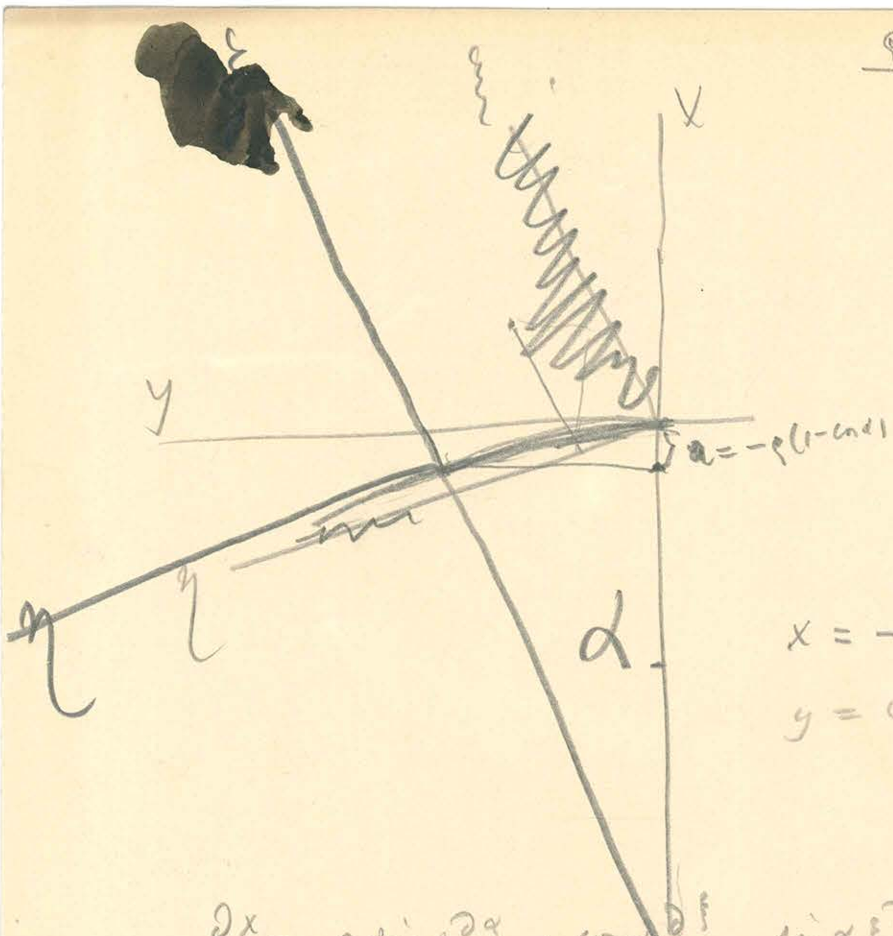
φ horizontalis $\quad \varphi = 0 \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

1896 Előadás

Jövedelmi

φ



$$x = a + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha$$
$$y = b + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$$
$$z = \zeta$$
$$a = -\rho(1-\cos\alpha)$$
$$b = \rho\sin\alpha.$$

$$x = -\rho(1-\cos\alpha) + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha.$$
$$y = \rho\sin\alpha + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha.$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\rho\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \cos\alpha\frac{\partial\xi}{\partial t} - \sin\alpha\,\xi\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \sin\alpha\frac{\partial\eta}{\partial t} - \cos\alpha\,\eta\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 \cancel{- \sin\alpha\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}} + \cos\alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \cos\alpha\,\xi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 \cancel{- \sin\alpha\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}}$$
$$\cancel{- \sin\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}} - \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t} \cancel{+ \sin\alpha\,\eta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2} - \cos\alpha\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{d\alpha}{dt}.$$

ha $\alpha = 0$

$$X = \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \xi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \rho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \xi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = Y + \eta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = Z$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -g\cos\varphi + 2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \cancel{\eta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2} - 2\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

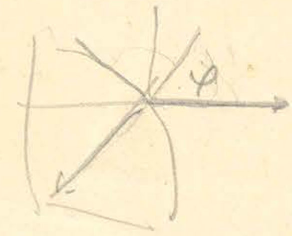
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -g\sin\varphi.$$

$x' = \xi\cos\gamma - \zeta\sin\gamma$

$y' = \xi\sin\gamma + \zeta\cos\gamma$

$-\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$

$\gamma = \cancel{\frac{\pi}{2}+\varphi}\quad \gamma = -\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$



$x' = \cancel{+}\,\xi\,\frac{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}} + \zeta\,\frac{\cos\varphi}{}$

$z' = -\,\xi\,\frac{\cos\varphi}{\cancel{\sin\varphi}} \cancel{\mp}\,\zeta\,\frac{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}}.$

$\frac{\partial x'}{\partial t^2} = +\sin\varphi\frac{\partial\xi}{\partial t} \pm \cos\varphi\frac{\partial\zeta}{\partial t}$

$\frac{\partial z'}{\partial t^2} = \cos\varphi\frac{\partial\xi}{\partial t} \mp \sin\varphi\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$

$\xi = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi$

$\frac{d\xi}{dt} = \sin\varphi\frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t}\cos\varphi$

$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \cancel{+}\sin\varphi\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \cos\varphi\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$

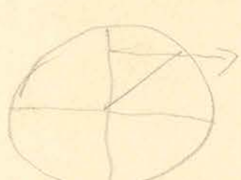
$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = \cos\varphi\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \mp \sin\varphi\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}.$

$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = -2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\sin\varphi\frac{dy'}{dt}$

$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = -2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{d\xi}{dt} = 2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\sin\varphi + \frac{\partial z'}{\partial t}\cos\varphi\right)$

$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = g - 2\cos\varphi\frac{d\alpha}{dt}\frac{dy'}{dt}$

jól van



$x' = r\sin\vartheta$

$z' = r\cos\vartheta$

$\frac{dx'}{dt} = -r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$

$\frac{d^2y'}{dt^2} = -r\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

csis Winkelmann 10 Z

$\frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073$

Reuk 158,54

28,4 mm

27,5

$\lambda = \frac{2}{3}\frac{2\pi}{\cancel{86164}}\,2\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi.$

$\varphi = 57^\circ$

$g = 981$

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\xi \sin\varphi + \zeta\cos\varphi \\ z' &= -\xi\cos\varphi - \zeta\sin\varphi \end{aligned}\right\} 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial t} &= -\frac{\partial\xi}{\partial t}\sin\varphi + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\cos\varphi \\ \frac{\partial z'}{\partial t} &= -\frac{\partial\xi}{\partial t}\cos\varphi - \frac{\partial\zeta}{\partial t}\sin\varphi \end{aligned}\right\} 2$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = -P_x \sin\varphi + P_z\cos\varphi - 2\omega\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial t}$$

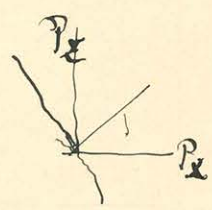
$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = P_y - 2\omega\frac{\partial\xi}{\partial t} \qquad d$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = -P_x\cos\varphi - P_z\sin\varphi - 2\omega\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial t}.$$

2-ből

$$\cancel{x'} \qquad \frac{\partial x'}{\partial t}\sin\varphi + \frac{\partial z'}{\partial t}\cos\varphi = \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{másrészt}$$



$$\left.\begin{aligned} -P_x\sin\varphi + P_z\cos\varphi &= X \\ -P_x\cos\varphi - P_z\sin\varphi &= Z \end{aligned}\right\} \text{a nehézség összetevői}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - 2\omega\sin\varphi\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + 2\omega\left(\frac{\partial x}{\partial t}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial t}\cos\varphi\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - 2\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right.$$

Alkalmazások:

1) Reich kísérletei 158,54 méternyi esve Freibergben ($\varphi = 51°$, $g = 9810$ mm.)

Találta eltérés keletre $= 28,4$ mm.

Számítás.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +2\omega\frac{dz}{dt}\cos\varphi = 2\omega g t\cos\varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega\frac{gt^2}{2}\cos\varphi = 2\omega h\cos\varphi \qquad y = 2\omega\frac{gt^2}{2}\frac{t}{3}\cos\varphi = 2\omega\frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi$$

$$\frac{2\pi}{86164} = 0,000073 \qquad y = \frac{2}{3}\frac{2\pi}{86164}h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi \quad \text{adja}^{\text{Kelet felé}} \quad \underline{y = 27,6 \text{ mm.}}$$

elég megegyezés.

E mellett a déli eltérés elegendő. ugyanis $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}(h-z)$ vagyis

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{8}{10^9} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = \frac{8}{10^9} \quad \text{legyen} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = \frac{1}{10^8} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{10^8}\left(h - \frac{g}{2}t^2\right)$$

$$s = \frac{1}{10^8}\left(h\frac{t^2}{2} - \frac{g}{24}t^4\right) = \frac{1}{10^8}\left(\frac{h^2}{g} - \frac{1}{6}\frac{h^2}{g}\right) = \frac{1}{10^8}\frac{5}{6}\frac{h^2}{g}.$$

kb. 0,00 mm.

~~2) Inga~~ 2) Foucault inga

Erre $\frac{\partial z}{\partial t}=0 \qquad X=0 \qquad Z=g$ lehát

I) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -c\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{g}{l}x \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = +c\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{g}{l}y \end{cases}$ $\qquad 2\omega\sin\varphi = c$

$$x = \xi\cos\gamma - \eta\sin\gamma$$
$$y = \xi\sin\gamma + \eta\cos\gamma$$

$\xi\,\eta$ tengelyekre vonatkoznak.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\cos\gamma - \xi\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\sin\gamma - \eta\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$

elhanyagolva $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2$-es tagokat

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d\xi}{dt}\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\gamma - \frac{d\eta}{dt}\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt} - \cos\gamma\frac{d\eta}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \eta\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sin\gamma + \xi\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\cos\gamma - \eta\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$

Tegyük $\qquad x = s\cos\frac{c}{2}t$

$\qquad\qquad y = s\sin\frac{c}{2}t.$

akkor

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t - s\frac{c}{2}\sin\frac{c}{2}t$$

elhanyagolva c^2-es tagot

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\frac{c}{2}t - \frac{c}{2}\frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t - \frac{c}{2}\frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\frac{c}{2}t - c\frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t + s\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\sin\frac{c}{2}t + \frac{c}{2}\frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t + \frac{c}{2}\frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t = \frac{d^2s}{dt^2}\sin\frac{c}{2}t + c\frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t.$$

ezért:

$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dy}{dt} - \frac{g}{l}x$ lesz: $\quad \frac{d^2s}{dt^2}\cos\frac{c}{2}t - c\frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t = -c\frac{ds}{dt}\sin\frac{c}{2}t - \frac{g}{l}s\cos\frac{c}{2}t.$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s.$$

és

$\frac{d^2y}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} - \frac{g}{l}y = \quad \frac{d^2s}{dt^2}\sin\frac{c}{2}t + c\frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t = c\frac{ds}{dt}\cos\frac{c}{2}t - \frac{g}{l}s\sin\frac{c}{2}t$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s.$$

Tehát I egyenletei egy egyszerű síkban lengő inga egyenletei, melynek síkja $\frac{c}{2} = \omega\sin\varphi$ sebességgel forog északról kelet felé, keletről délen át nyugat felé.

3) Coulomb mérleg

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - c\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + c\frac{dx}{dt}$$

$x = r\cos\vartheta$

$y = r\sin\vartheta$

$\frac{dx}{dt} = -r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y =$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y = r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Y_x - X_y - cr^2\cos^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + cr^2\sin\vartheta\cos\vartheta = Y_x - X_y$$

tehát a forgási momentum független a erejétől.

---

4) inga ugyanaz.

5 Feldobás kérdései.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt} = c'\frac{dz}{dt}.$$

Furttenbach 1627 ben Ulmben

Halinitropyrobolia.

$$\frac{dz}{dt} = gt - c$$

$$\frac{dy}{dt} = c'\left(\frac{gt^2}{2} - ct\right)$$

$$y = c'\left(\frac{gt^3}{6} - c\frac{t^2}{2}\right)$$

$gt = 2c$

$t = \frac{2c}{g}$

$$y = c'\left(\frac{4}{3}\frac{c^3}{g^2} - 2\frac{c^3}{g^2}\right) = -\frac{2}{3}\frac{c^3}{g^2}$$

6) Vízszintes mozgás akár a meridiánban, akár arra merőlegesen jobbra.

7) Foucault inga $\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt}.$ $y = \alpha\sin\frac{2\pi}{T}$

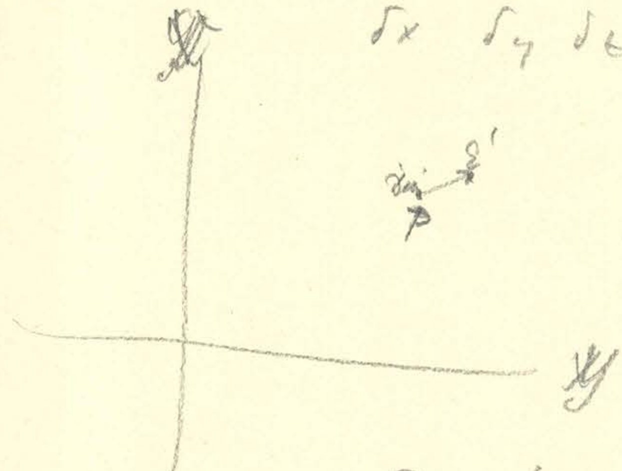
Előadás 1896

Mágnes változó térben.

Végtelen kicsiny mágneses mágneses elem.

A mágnes elem vetületei legyenek $\mu\delta x$ $\mu\delta y$ $\mu\delta z$.

δx δy δz végtelen kicsinyek.



A mágneses tér összetevői P pontban:

$X, Y, Z.$

~~P pontban~~

Akkor a P-ben levő déli μ polusra ható erő

$$\left.\begin{array}{ll} \text{déli } \mu\text{-re.} & -\mu X \\ \text{az északi } \mu\text{-re} & +\mu X + \mu\delta x \dfrac{\partial X}{\partial x} + \mu\delta y \dfrac{\partial X}{\partial y} + \mu\delta z \dfrac{\partial X}{\partial z} \end{array}\right\} \quad 1)$$

Az összes elemre ható erő

$$\left.\begin{array}{l} P_x = m_x \dfrac{\partial X}{\partial x} + m_y \dfrac{\partial X}{\partial y} + m_z \dfrac{\partial X}{\partial z} \\ \text{és} \quad P_y = m_x \dfrac{\partial Y}{\partial x} + m_y \dfrac{\partial Y}{\partial y} + m_z \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ P_z = m_x \dfrac{\partial Z}{\partial x} + m_y \dfrac{\partial Z}{\partial y} + m_z \dfrac{\partial Z}{\partial z} \end{array}\right\} \quad 2)$$

a hol tehát $m_x = \mu\delta x$ $m_y = \mu\delta y$ $m_z = \mu\delta z$.

P_x, P_y, P_z a kimozdító erő összetevői.

Ha ezt integráljuk az egész mágnesre kapjuk hogy egy véges mágnesre ugyanaz áll.

Mágnes Forgási momentum az O középpont körül XY síkban.

Akkor. Képezzük az y irányú ...

$$\left.\begin{array}{ll} \text{déli pólus} & -\mu\left(Y_0 + \dfrac{\partial Y}{\partial x}x + \dfrac{\partial Y}{\partial y}y + \dfrac{\partial Y}{\partial z}z\right)x \\ \text{északi pólus} & +\mu\left(Y_0 + \dfrac{\partial Y}{\partial x}(x+\delta x) + \dfrac{\partial Y}{\partial y}(y+\delta y) + \dfrac{\partial Y}{\partial z}(z+\delta z)\right)(x+\delta x) + P_y x. \end{array}\right\} = m_x Y_0 + m_x \frac{\partial Y}{\partial x}x + m_x \frac{\partial Y}{\partial y}y + m_x \frac{\partial Y}{\partial z}z + P_y x$$

egyenl. úgy.

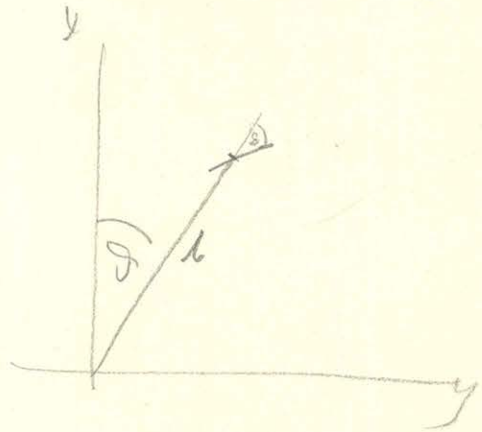
$$\Big\} = m_y X_0 + m_y \frac{\partial X}{\partial x}x + m_y \frac{\partial X}{\partial y}y + m_y \frac{\partial X}{\partial z}z + P_x y.$$

Tehát az egész forgó momentum:

$$F = m_x Y_0 - m_y X_0 + m_x \frac{\partial Y}{\partial x} x + m_x \frac{\partial Y}{\partial y} y + m_x \frac{\partial Y}{\partial z} z$$
$$- m_y \frac{\partial X}{\partial x} x - m_y \frac{\partial X}{\partial y} y - m_y \frac{\partial X}{\partial z} z$$
$$+ P_y x - P_x y.$$

Vegyük P_y és P_x [illegible].

$$\mathfrak{F} = m_x Y_0 - m_y X_0 + (m_y x + m_x y)\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$
$$+ z(m_x x - m_y y)\frac{\partial X}{\partial y}$$
$$+ (m_z x + m_x z)\frac{\partial Y}{\partial z}$$
$$- (m_z y + m_y z)\frac{\partial X}{\partial z}.$$



$$x = l \cos\vartheta$$
$$y = l \sin\vartheta$$
$$m_x = m_h \cos(\vartheta+\varepsilon)$$
$$m_y = m_h \sin(\vartheta+\varepsilon)$$

e szerint

$$\mathfrak{F} = m_h \cos(\vartheta+\varepsilon)\, Y_0 - m_h \sin(\vartheta+\varepsilon)\, X_0 + m_h l \sin(2\vartheta+\varepsilon)\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + z\, m_h l \cos(2\vartheta+\varepsilon)\frac{\partial X}{\partial y}$$
$$+ m_h z\left(\cos(\vartheta+\varepsilon)\frac{\partial Y}{\partial z} - \sin(\vartheta+\varepsilon)\frac{\partial X}{\partial z}\right) + m_v l\left(\cos\vartheta \frac{\partial Y}{\partial z} - \sin\vartheta \frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

legyen $\varepsilon = 0$ $\quad m_v = 0$ $\quad z = 0$ $\quad m_h = m$

akkor

$\cancel{\mathfrak{F} = m_h \cos\vartheta Y_0 - m_h}$

$$\mathfrak{F} = m \cos\vartheta\, Y_0 - m \sin\vartheta\, X_0 + m l \sin 2\vartheta\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + m l \cos 2\vartheta \frac{\partial X}{\partial y}.$$