Űr-tan elemei

2. oldal

Bévezetés

§1 Az űrtan fogalma

Ez a végetlen nagy űr, melyben a földön s egyéb nagy égi testeken kívül minden egyes földi testek mint nélkülözhetetlen helyökben tanáltatnak, rész szerint már magok ezen különböző testek bennetaláltatásánál fogva, részint saját képzelődésünk vagy gondolataink s kimútatásaink által felosztható s fel is osztatik számtalan különböző nagyságu és alaku darabokra, melyek közöl egyik vagy mindegyik űrdarabnak vagy geometriai testnek neveztetik.
Minden űrdarab véges vagy határozott, s határai vagy „szélének egyeteme” neveztetik lapnak. Lap a testnek határa, tehát test nélkül ki nem mutatható. Ellenben a testet nem lehet észlelni a nélkül, hogy rajta a lapokat észre nem vennök. Ugy azt is, hogy

2. oldal háta

minden test a végetlen űr több részitől azon lap választ el, mely neki szélei s ennél fogva a lapot úgy is lehetne meghatározni, hogy a lap két egybeeső űrdarab választéka. Egyébaránt a lapokban mind nagyság mind alak tekintetében véghetlen különbség lehet, mi itt csak ezen egy osztályozást említjük meg, hogy a lapok lehetnek egyenlapok és görbe lapok. Egyenlap az mely maga magával szembe helyezve együvé eshetik, ugy közöttük hézag ne maradjon. Görbe lap melynél ez lehetlen.
Lapok lehetnek, vagy gondoltathatnak végteleneknek vagy végeseknek. A véges lap szélei egyetem neveztetik vonalnak. Vagy a lap ezen a vonalon tul is terjeszkedni képzeltethetvén, a vonal ugy lesz tekinthető, mint két szomszéd lap választéka. S a vonalak lehetnek szintén egyenesek és görbék. Egyenes vonal az mely maga magára bármely helyzetben fektethető, ugy hogy két

3. oldal

Pontjuk együvé esvén, egész hoszszuságokban is öszve essenek és hézagot magok között ne hagyjanak. Görbe vonal az melyet magára helyezni lehet úgy hogy két pontja közös leszen, a többi pontjaik egymásra ne essenek, hanem magok között hézagot foglaljanak bé. Végre egy vonal lehet végetlen és véges. Ha véges, két vége neveztetik pontnak. Vonaltól a pont, laptól a vonal, testtől a lap elválaszthatatlan még gondolatban is, úgy hogy pontot vonal nélkül, vonalat lap nélkül, lapot test nélkül képzelnünk lehessen, de beszélni róluk külön is lehet. S példának mondani, hogy a vonal ugy tekinthető mint egy mozgó pontnak utja, lap mint egy nem önmagán mozduló vonalnak utja, s test mint egy nem önmagán mozduló lapnak utja. És már e négy dolognak pont, vonal, lap és test közös neve „űrtani menyiségek” és pedig a pont 0^k rendű űrtani menyiség, mert sem hoszszal sem

3. oldal háta

szélességgel, sem magassággal nem bír. A vonal első rendű űrtani menyiség, mert hoszszal ugyan bír, de nem szélességgel sem magassággal. A lap másodrendű űrtani menyiség mert hoszsza és szélessége van. Végre a test harmadrendű mert hoszszusággal, szélességgel és magassággal is bír. S e négy űrtani menyiségről érdekes megjegyezni – megtanulni és alkalmazni való igazságokat foglal magában az a tudomány melyet igen keskeny értelemben neveztek volt még régen Geometriának, mi pedig már terjedelmének megfelelőbb névvel nevezzük ezt <u>Űrtannak.</u>

§2 <u>Az űrtan részei</u>

Az űrtannak négy tárgya van: pont – vonal – lap – test. Természetesen tehát ezeket renddel veszszük vizsgálat

4. oldal

Alá s tanulunk
1ör A pontról – a mi kevés lesz erről mondanivalónk, ez lesz a <u>Ponttan</u>
2or A vonalakról – <u>Vonaltan</u>
3or A lapokról – <u>Laptan</u>
4er A testekről – <u>Testtan</u>
De ezen osztályozásnak még más oldala is van, ugyanis a három elsőbb terjtani menyiségeket két esetben lehet vizsgálat alá venni – mert ezen menyiségek eléfordulhatnak
mind csak egy egyenalapban
különböző egyenlapokban
Míg pontot, vonalt és lapot már csak azon föltét alatt vizsgálódunk, hogy mindenik a mi együtt fordul elé ugyanazon egy egyenlapban esik vizsgálódásaink az úgy nevezett lapos űrtant foglalják magukba. Ha pedig

4. oldal háta

Ugyan csak pontot, vonalt és lapot vizsgálunk, de már nem mind mulhatatlanúl egy egyenlapban létezőket, hanem különböző egyenlapokban és helyzetekben. Vizsgálódásaink már átmennek a testűrtanra, melyhez fog tartozni részint
a pont, vonal és laptan különböző egyenlapokra vitetődő része, részint
a testtan minden esetre.
Mihez képest már az egész űrtannak osztályozása egy lesz
1ő Fő rész – Lapos űrtan – Geometria v Planimetria s ebben
1ő Rész Ponttan
2k --- Vonaltan
3k … Laptan
Ezt követi
2k Fő rész - Testi űrtan – Geometria solidat

5. oldal

pontra s következőleg egyik félkör kerülete a másik félkör kerületére, mert ha nem arra hanem valahol vagy kiebb vagy benebb a középponthoz távolabb v. közelebb esnek, tehát a sugár azon pontban nem volna egyenlő a más sugárokhoz.
2. Szelet azon darab, mely az ív s annak hurja között fekszik
3. Czikk azon darabja a félkörnek mely két sugár s azokat egybekötő ív között fekszik. Itt is lehet mondani, hogy minden sugárpárnak két íve, s tehát két czikkje van.
Érintőnek neveztetik azon egyen, mely a kör kerületével csak egy pontban találkozik. Ennek tehát minden pontja kívül esik a körön.

Öszvevethető, hogy ha két egyenlő sugáru kört egymásra úgy helyezünk, hogy egyiknek középpontja a másik középpontjába essék, azon két kör kerülete egészben egymásra esik s egy az egész kör és fedi egyik a másikat.
§7 Két egyen
Két egyen egy más csak három helyzetben állhatnak
Csak egy pontjok közös. Ekkor egymást átvágják.
Két pontjok közös. Ekkor minden pontjok közös s a két egyen együvé esik, vagy ugyanazon egyent

5. oldal háta

alkotja
3) Egy pontjuk sem közös bármiként is megnyujtassanak. Ekkor neveztetnek párhuzamosoknak v. paralelláknak.

§8 Szög

Két egyen melyeknek egy vagy több pontjuk alkotnak egy szögöt széles értelemben, szorosabb értelemben pedig, ha csak egy pontjuk közös, a szög högypontja azon közös pont. Két szára a két egymással V ben álló. Ha egy egyen a másikon fekszik, de egyik a másiktól elmozdíttatik egy pont híjján, melyek folyvást egymáson maradnak, az elmozdíttatás időpontján kezdve már csak azon egy pontjuk lesz közös, s ezen állapotjukba mondom hogy szögöt alkotnak (szorosabb értelemben). Szélesebb értelemben pedig szögöt alkottak elmozdíttatásuk előtt is. Tovább mozdíttatván mind nagyobb szögöt fognak

6. oldal

formálni, míg a mozdított végre fordított állásba érkezik t.i. hogy a helyt állások ismét egy egyent formál, de azon része mely előbbi helyzetében a másikon feküdt, most nem többé rajta, hanem annak a fordulási pont felé eső megnyujtásában fog feküdni.
S ha most még az elkezdett arányban tovább mozdíttatik a forduló egyen, ismét szögöt formál, a helyt álló egyennel. Ezen állásokban ismét nem alkotnak uj szögöt, hanem csak egy egyent, melyben a mozdított egyen folytatása lesz a másiknak, s ezen állásában neveztetik nyujtott szögnek, ha pedig a mozdított egyen még tovább mozdíttatik, formálnak ismét szögöt, még pedig már viszszahajtottat, mely folyvást nevekedik, míg a mozduló vonal előbbi helyzetébe viszszaérkezvén a szög elenyészik vagy 0-vá válik. E szerint az egy pont körül forgó egyen egy megfordulása alatt a helyén maradó egyennel folytonosan

6. oldal háta

(kivéve csak a kiindulás s a nyujtott szög esetét) szögöt formál, ez a szög volt öszvehajló, mind addig míg el nem érte azt az állást melyben nyult szögnek neveztetik, azután széjjelhajló, mind végig. Egyszersmind nem lehet észre nem venni, hogy a mozduló egyennek körül forgása alatt annak egy akármely pontja kört ír le, mely körnek ívei renddel nevekednek s jelesen, mikor a szög nyult, akkor egy félkört tesznek, míg öszvehajló addig az ívek kisebbek, miután széjjelhajló az ívek nagyobbak egy félkörnél. Sőt az ívek mekkorasága használódik a szögök nagyobb vagy kisebb volta meghatározására – mi végre a kör eloszatik 360 egyenlő ívekre, melyeknek mindenike egy fokunak neveztetik, s a hány fok fér el illyen a szög két szára közé, anyi fokunak mondatik a szög. Így tehát a nyultszög 180 foku, az öszvehajló szögök kisebbek mint 180 fokuak, a széjjelhajlók nagyobbak. Ha egy nyult szög két egyenlő szögre vágunk fel, mindegyik lesz 90 foku s az ilyen neveztetik derékszögnek, melyet

7. oldal

tehát ha négyet adunk öszve lesz belőle 360 foku, de nagyobb nem lehet. S innen a derék szögöt is meg lehet határozni, hogy az, melyet csak négyszeresen lehetséges.
Könyü átlátni azt is, hogy két szög melyeknek szárai közé eső ívei ugyanazon vagy egyenlő sugáru körnek egyenlők, magok is egyenlők s egyenlő szögnek nevezik azokat melyek egymásra helyezhetők, hogy högypontjaik s egyik száruk egymásra essenek, a másik száruk is egymásra fognak esni – az említett esetben, hogy ez fog történni könyü átlátni, mert a két szög högypontait s egyik szárukat egymásra helyezvén ezen száróknak az ív felöli végpontjaik is egymásra esnek a sugárok egyenlősége miatt – ugy íveik is az ívek egyenlőségéért. S következőleg másik száruk s tehát az egész szög is. S ahány ilyen szögöt lehet öszveadni ugyananyi ívét is ezen szögnek, még pedig akármily sugáru ívet, tehát ugyanazon szög különböző sugáru ívei mind egyenlő fokuak.

§9

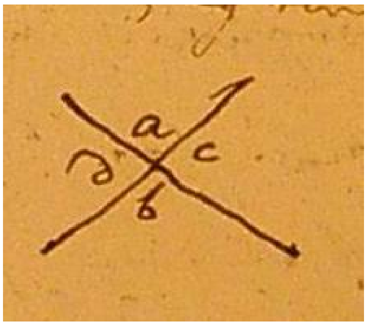
A szögök fokaival egyszerre átlátható igazsága

7. oldal háta

továbbá ezek
Egy nyult szöget alkotó két vagy akárhány szög ívei öszvesen = 180º. Ha csak két ily szög alkotja a nyult szögöt neveztetnek mellékszögöknek. S ha a kettő egymáshoz egyenlő mindenik neveztetik, mint már megjegyeztük derék szögnek, s melynek íve = 90º
Egy központba hegyellő minden szögök öszvesen együttvéve 360º

§10 <u>További igazságok a szögökről</u>

<u>Szembehegyellő szögök egyenlők</u>
Szembehegyellő szögöknek neveztetik azokat melyeket két egymást átvágó egyen ugy formál, hogy csupán högypontjok közös nem pedig száraik is. Hogy az ily szögök egymás köztt egyenlők, legrövidebben ugy bizonyítjuk be. Legyenek

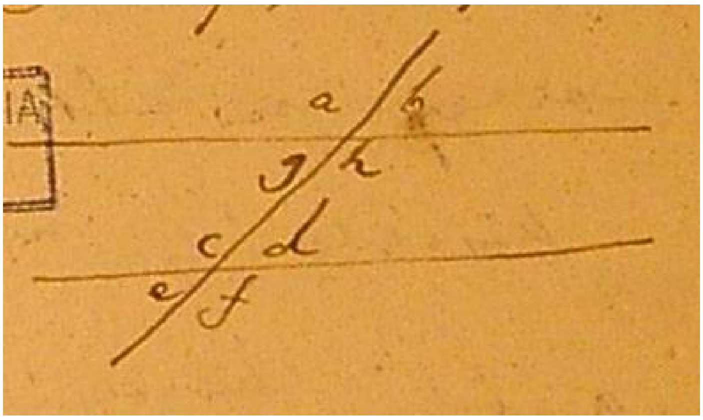


Ily szembehegyellő szögök, a = b és c = d

8. oldal

a + c = 180º mik nyultszögöt alkotnak, c + b = 180º ugyanazon okból, tehát a + c = c + b, mindegyikből ugyanazt u.m. c-t elvéve a mi marad egyenlő lesz, tehát a = b, s éppen így megbizonyítható hogy c = d.

§11 <u>Három egyen</u>, melyek közöl kettő bármeddig nyujtva is egymást nem vágja, a harmadik pedig igen mindegyiket.
Az egymást nem vágó egyenek neveztetnek párhuzamosaknak, az őket vágó egyen pedig mindegyikkel szögöt formál, mindöszve tehát formálódik nyolc szög, melyeknek helyzetökhöz képest saját neveik vagynak jelesen



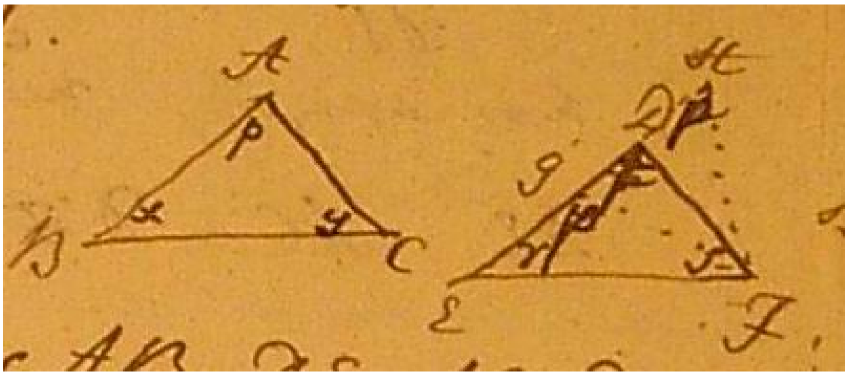
a, b, e, f neveztetnek külsőknek, g, h, c, d belsőknek, b a d-hez, s f a h-hoz egyfelől szembenálló külső és belső, b és f s a és e külső egyfelől szembenállóknak, h és d belső egyfelől szembenállóknak, g és d-hez, h a c-hez belső cserésen szembenállóknak, b és c, a és f külső cserésen szembenállóknak és már több rendbeli

8. oldal háta

szögpárokról a következendő igazságok állanak
1. a) ha a belső egyfelől szembenállók öszvete 180º
Vagy
b/ a külső és belső egyfelől szembenállók =k
vagy
c) a belső s külső cserésen szemben állók =k
Ezen három eset közül akármelyikből következik a másik kettő is.
(Valahányszor még több ily egymást feltételező eset fog eléfordulni, mindenik bébizonyításában ugy járunk el, hogy kimutatjuk a) miként következik egyik esetből mindenike a többinek is b) miként mindenikből az az egy, mi által meg lesz mutatva, hogy mindenikből következik mindenik.) Így teszszük itt is. a-ból következik b, mert
h + d = 180º f.t.sz.
h + b = 180º § szerint tehát
h + d = h + b s mindegyikből elhagyván h-t
d = b m.b.v.
a-ból következik c

9. oldal

Ha két hármagban egyenlők egy oldal és két szög, egyik az egyenlő oldal mellett, a másik a vele szembenálló, ilyenkor a két hármag merőben is, többi részeiben is egyenlő pl.



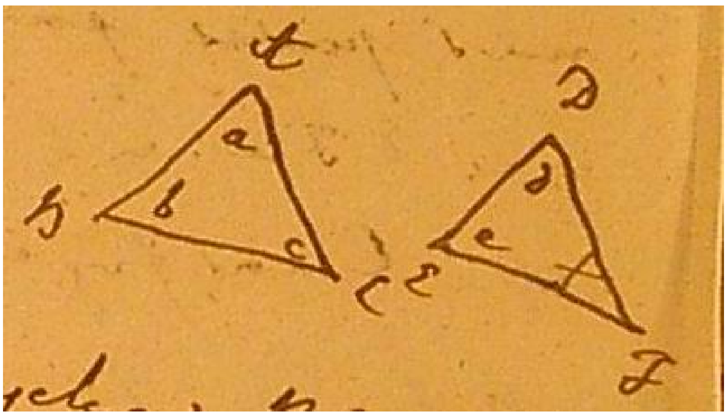
ABC és DEF hármagokban BC = EF és x = r, p = t, úgy a két hármag merőben egyenlők s AB = DE, AC = DF y = s.
Vegyük fel gondolatban ABC hármagot s helyeztessük DEF re úgy hogy B pont essen E pontra – ez lehetséges mert pontot pontra helyezni lehet – úgy továbbá hogy BC essen EF re ezt is lehet, mert egyenre egyent helyezni lehet, ekkor C pont fog esni F pontra, mert BC = CF f.t.sz.. Továbbá BA egyen fog esni ED re, mert x = r f.t.sz., ekkor A pont fog esni vagy D re vagy D-n kívül pl. H ra vagy D n belül pl. G re. Ugy de H ra nem eshetik, mert ugy CA is esnék FD n kívül FH ra s p szög lenne í t szög §13.2 pedig p = t f.t.sz. G re sem eshetik mert ugy lenne p > t §13.2. pedig p = t f.t.sz., tehát A pontnak esnie kell D pontba,

9. oldal háta

s következőleg CA nak FD re. Így a két hármagnak minden högypontja s minden oldalai egymásra esvén, azok egymást fedik, s következőleg minden részeik egyenlők jelesen AB = DE, AC = DF, y = s m.b.v.

§16 Második eset

II.1. Ha két hármagban egyenlők két oldal s a közrefogott szög, azon hármagok egyenlők s a többi részeikben is egyenlők Pl.



Ha ABC és DEF hármagokban AB = DE, AC = DF és a = d akkor egész ABC = DEF s jelesen BC = EF, b = e, c = f mert
Felveszem gondolatban ABC hármagot s úgy helyezem DF re, hogy A pont essék D pontra, ez lehető, mert pontot pontra helyezni lehet, úgy továbbá hogy AB essék DE re, ez is lehető mert egyent egyenre helyezni lehet. Most a B pont fog esni E pontra, mert AB = DE, másfelől AC fog esni DF

10. oldal

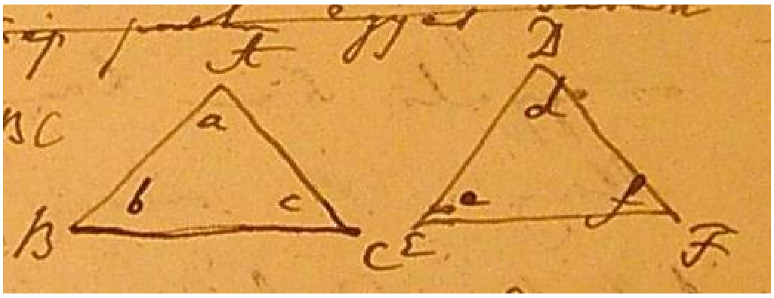
re, mert a = d s C pont esik F pontra mert AC = DF, tehát mivel B esett E re és C esett F re, BC egyen esni fog EF-re, mert két pont közé csak egy egyen eshetik, és így a két hármag három högypontja s 3 oldala egymást feküvén, a hármagok egymást fedik, s tehát egészben és részekben egyenlők, jelesen BC = EF, b = e, c = f MBV
a második eset másik ága s az egész harmadik eset bébizonyítása alább a maga helyén következik.

§14 Egyenlő száru hármagok

A hármagok között különös figyelemre méltandó az egyenlő száru hármag, miről ez az alapállás. Ha valamely hármagban két oldal egymást közt egyenlő vagy két szög az egyenlő oldalakkal szembenállván, vagy a harmadik ugy nevezett talp, mellettük egyenlők vagy

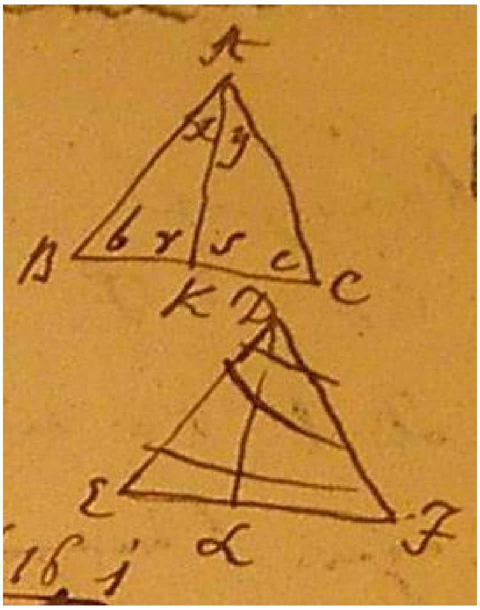
10. oldal háta

2.a hegypontból a talp közepébe vont egyen függő vagy
a högypontból a talpra bocsátott függő a talpot s
a högyponti szögöt felezi s
A talp közepiről emelt függő a hegyponton megy keresztül – ezen hat eset közöl mindenik felteszi a másikot akármelyiket s az ilyen hármag neveztetik egyenlő szárunak.
Bébizonyítás
1 ből foly 2

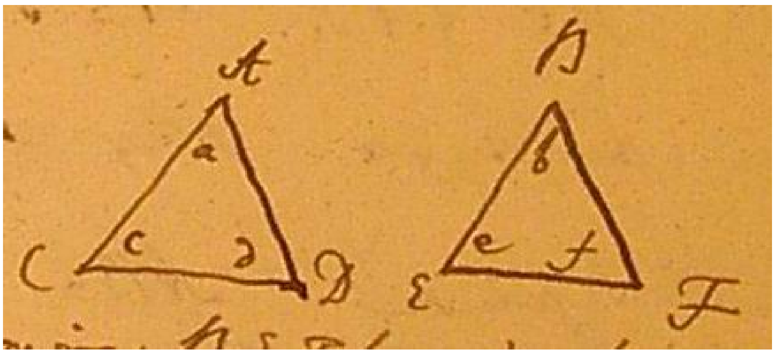


Legyen a felvett hármag ABC melyben AB = AC ez fordíttassék tulsó lapjára ugy hogy AB = DF, AC = DE s a = d, b = f, c = e. Ez a két hármag így is egyenlő lesz két oldal és a közbellő szögök egyenlőségéért, s következőleg c = f mi enyi mint c = b s b = e mi ismét anyi

11. oldal
Mint b = c M.B.V.



1 ből foly 3 és 4 mert ABK = AKC, ugyanis r = s f.t.sz. c = b 2 p. sz. AK = AK mert közös oldal tehát §16 szerint ABK = AKC s jelesen BK = KC, x = y M.B.V.
1-ből foly 5, mert AC = AB f.t.sz. KC = BK f.t.dz. c = b 2 p. sz. tehát két oldal s a közbefogott szög egyenlőségénél fogva AKC = AKB s jelesen r = s, tehát mind r mind s = 90º §8 m.b.v.
1 ből foly 6 A tól BC nek középpontja u.m. K hoz vont egyen függő, tehát ugyanazon középről emelt függő a n megyen keresztül m.b.v.
2 ből foly 1



ACD t megfordítván másik lapjára BEF hez úgy hogy lapja AC = BF, AD = BE, a = b, c = f, d = e ezen

11. oldal háta

Hármagok így is egyenlők lesznek, mert CD = EF, c = d = e és d = e = f tehát egy oldal s a két mellette fekvő szögök miatt az egész hármagok egyenlők s tehát AC = BE = AD s AD = BF = AC M.B.V.
3 ból foly 1 mert AK = AK, mert közös oldal BK = KC f.t.sz. r = s f.t.sz., tehát két oldal és a közbefogott szögök egyenlőségénél fogva a két hármag egyenlő AKB = AKC s tehát AB = BC m.b.v.
4 ből foly 1 mert AK = AK mint közös oldal, r = s f.t.sz. x = y f.t.sz. tehát a két hármag AKB = AKC egyenlő §15.2. s jelesen AB = BC m.b.v.

5 bők foly 1 mert AK = AK mint közös oldal, BK = KC f.t.sz. r = s f.t.sz. tehát két oldal s közbefogott szög egyenlőségénél fogva AKB = AKC s jelesen AB = AC m.b.v.

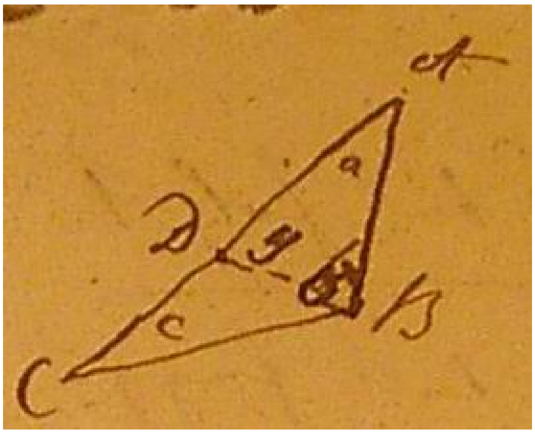
12. oldal

6 ból foly 1 mert a högypontból a talpra bocsátott függő AC egyennek közepit vagy K pontot tanolja, tehát e K pontból felemelt függő is A vagy a högyponton megyen keresztül, s ebből folyólag ABK = ACK, mert AK = AK mint közös oldal, BK = CK f.t.sz. r = s f.t.sz. tehát ABK = ACK s jelesen AB = AC m.b.v.

§18 Következtetések

A fönebbiekben bebizonyított alapigazságokból , tömérdek fontosságu következtetések folynak az egész űrtan minden ágazataira kiterjedőleg. Közelebbről kiemeljük a következőket.
1. Ha egy hármagban az oldalok nem egyenlők, a szögök sem lehetnek egyenlők, s jelesen nagyobb oldallal szemben nagyobb, a kisebbel szemben kisebb oldal fekszik. Pl. ha ABC hármagban

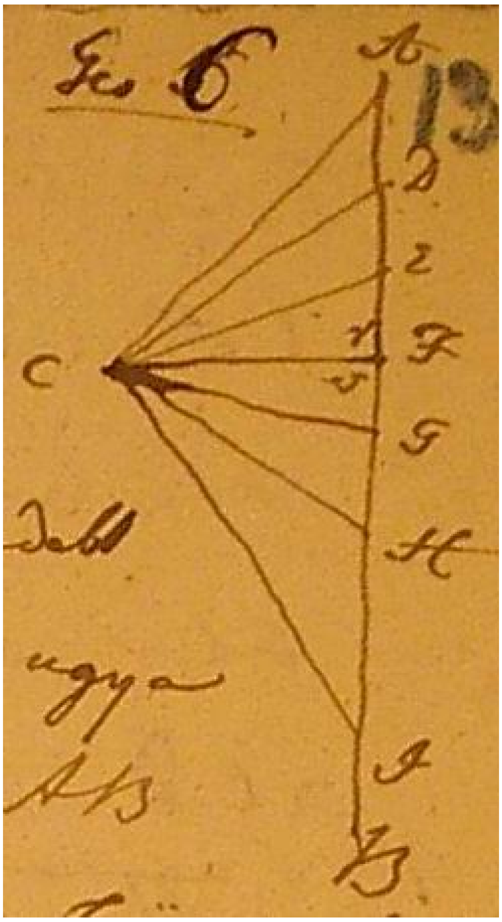
12. oldal háta



AC > AB akkor b > c, mert AC ból kivágván A felől AB hoz egyenlő darabot, mely itt = AD, minthogy D esik A és C közé, B-től D-hez egyent vonván az esik BA és BC közé s egyszersmind AB hármag egyenlő száru lévén, benne y = x, már pedig y > c § s tehát x > c, b pedig > x annál inkább b > c m.b.v. s megfordítva. Akármely hármagban nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal áll, mert egyenlő sem lehet, akkor a szögök is egyenlők leendvén, kisebb sem akkor a szög is kisebb leendvén, tehát csak nagyobb lehet. S továbbá könyü átlátni hogy
Egy adott pontból egy adott egyenre vont számtalan egyen között legrövidebb

13. oldal

Az mely reá függő,



p. C pontból AB egyenre vonható CA, CD, CE . CF, CG, CH és CI egyenek között legrövidebb CF egyen, mert az függő AB-re ugyanis minden más egyen ezen CF el s az AB egyen köztök eső részével egy derékszögű hármagot formál, melyben CF azon másik oldal, s tehát azon hármagban legnagyobb szöggel, pedig és ama harmadik oldal kisebbel áll szemben, tehát ezek kisebbek, s CF legkisebb távolság az egész AB-től.
3. De még a többi rézsút távolságok közöl is az amely CF-től távolabb esik, minthogy akármely két távolságot hasonlítunk öszve, pl. CG–t és CI-t az általuk és AB közbeeső darabja által formált hármagban, mely itt AGI a távolabbi, itt AI esik szemben egy tompa s tehát a hármag legnagyobb szöggel. De ha egy felől már egy is, ellenben CF két oldalán van egy egy a többi távolok közöl melyek egymáshoz egyenlők, u.m. azok melyeknek aljait t.i. AB-nek

13. oldal háta

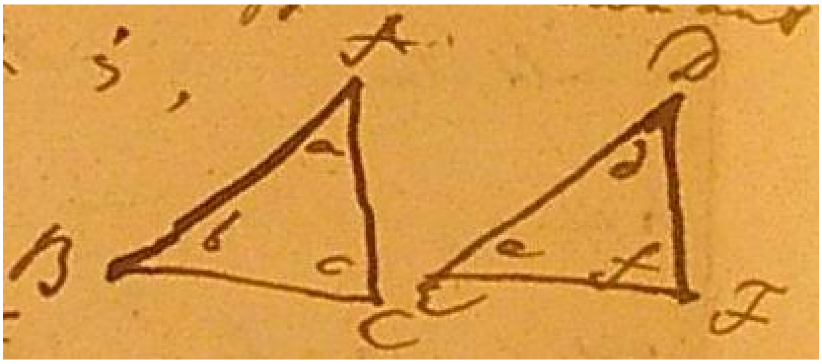
F-től hozzájokig ró részeik egyenlők, mint pl. CH = CD, mert FH = FD, CF = CF közös lévén s r^ = s^ mindenik derék lévén f.t.sz. tahát CFH Δ = CFD Δ s következőleg CH = CD m.b.v. 4k s következőleg hogy ha hegyesszög egyik

Lap alján beszúrás

Szárának akármely pontjából függőt bocsátva a más szárra, ez a függő a szögben belől esik, mert különben oly hármagot formálna, melyben egy derék s egy tompa szög van.

§19 <u>A hármagok egyenlőségi eseteinek folytatása</u>

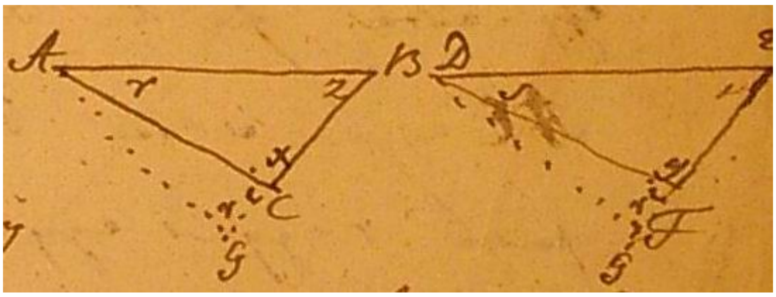
Már most a hármagok egyenlőségének hátralévő eseteit bévégezhetjük u.m.
II.2: ha két hármagban egyenlő két oldal s egy de nem közrefogott szög, s azon kívül a két hármag szögei tekintetében egy nemű, s a mely szög bennök a legnagyobb nem esik egyikben is egyenlő oldalok közt, azok egyszersmind egyenlők is,



Pl. ha ABC és DEF hármagokban AB = DE, AC = DF és c = f s a két hármag szögeire nézve egynemű, akkor ABC Δ = DEF Δ.

14. oldal

Lévén f.t.sz. s A pont esik D pontra mert AB = DE f.t.sz. C pont pedig esik valahova EF egyenbe, még pedig nem bellebb mint F pl. G be, minthogy AC egyennek esnie DG be s kisebb lenne DF nél, nem is kiebb pl. nem H ba, mert ugy AC egyen esnék DH ba, s nagyobb lenne DF nél, és pedig AC = DF f.t.sz. tehát esik C f re, s AC DF re, BC pedig EF re. Így a két hármag három högypontjai s három oldalai egymásra esvén, egymást fedik s következőleg egyenlők egészben s több részeiben jelesen BC = EF p = t, q = r m.b.v.
2^k eset mind a két hármag tompa szögű, s a tompaszög egyikben sem esik az egyenlő oldalok köztt pl. AB = DE, AC = DF és x = y vagy z = v

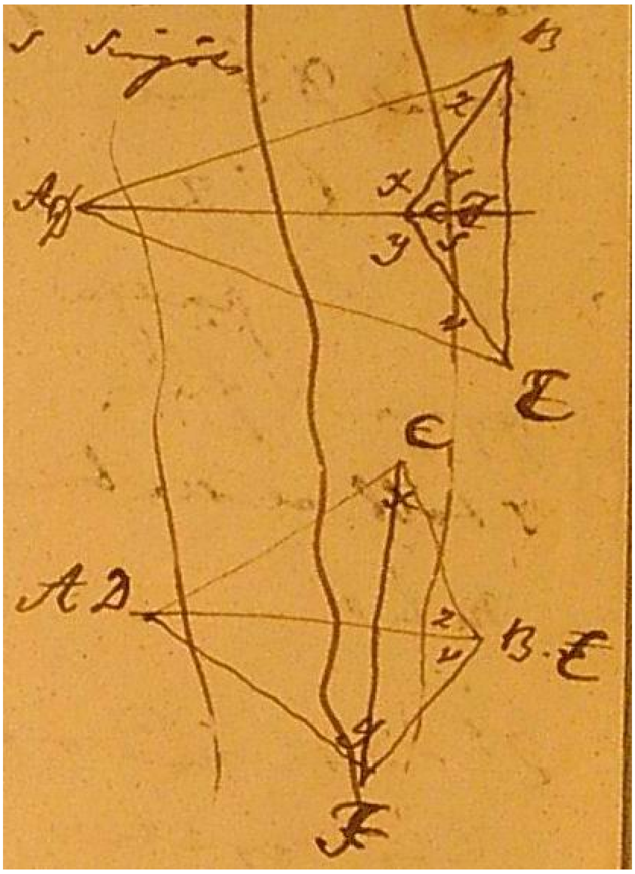


A következő rész ki van húzva

Tetessék ABC Δ DEF Δ mellé, úgy hogy AC, DF vagy pedig AB, DE egybeessenek, t.i. tetessék A pont D pontra

14. oldal háta

Ez lehetséges, mert pontot pontra tenni lehet, AC egyen DF egyenre vagy AB egyen DE egyenre, ezek is lehetségesek, mert egyent egyenre helyezni lehet. Most C pont F pontra vagy B pont E pontra fog esni. Megnyujtjuk AC-t vagy AF-t formálódnak r = s szögök.



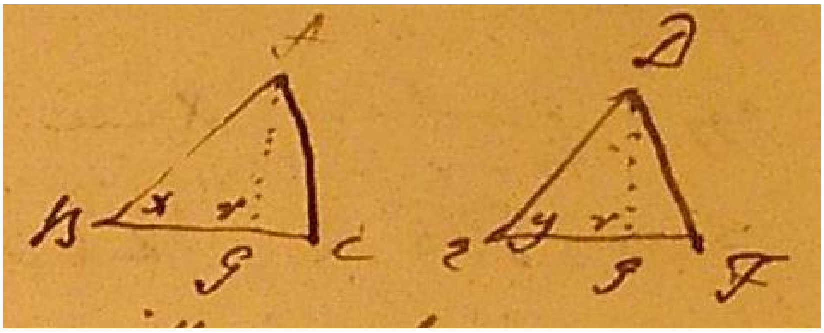
Mert r = 180º - x, s = 180º - y, tehát egyenlőkből egyenlőköt véve el r = s
Vétessék föl az egyik Δ pl. ABC s tetessék a másikra t.i. DEF re úgy hogy az egyenlő szögök essenek egymásra, az az ha x = y ugy hogy C pont essék F pontra, AC egyen essék FD re – ezek lehetségesek mert pontot pontra s egyent egyenre helyezni lehet, akkor A pont fog esni D pontra, mert AC = FD f.t.sz.

15. oldal

Bébizonyítás. BE és EF egyenek nyujtassanak meg s azokra A-ból és D-ből bocsáttassanak függők, AG és DG s ha
volt x = x származik ACG és DFG derékszögű Δ , melyek egyenlők, mert AC = DF f.t.sz. i = i, mert egyik pótléka x nek 180º ra, másik y-nak ismét 180º ra, y pedig = x, r = r, mert derékszögök, tehát §15.2 , tehát bennök AG = DG s szintugy ABG Δ = DEG Δ, mert derékszögűek s AG = DG f.t.sz. AB = DE f.t.sz. fönebbi pont nyomán. Egyenlőkből egyenlőket véve el, u.m. ABG –ACG = BEG – BFG vagy ABC = DEF, ha pedig
z = v ABG Δ = DEG Δ mert z = v f.t.sz. , r = r mert derékszögök, AB = DE f.t.sz., tehát §15,2, s így bennök AG = DG. Már most ACG Δ = AFG Δ derékszögűek és AG = DG f.t.sz. AC = DF f.t.sz. fönebbi pont nyomán lehet egyenlőkből egyenlőket véve el egyenlet marad jelesen:

15. oldal háta

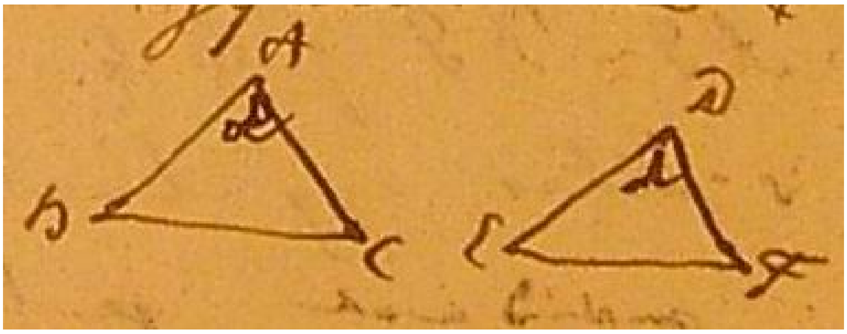
ABG – ACG = BEF – BFG vagy is ABC = AEF m.b.v.
3^k eset mind a két hármag hegyes szögű és AB = DE, AC = DF, x = y.



A ból és D ből bocsáttassanak függők BC re és EF re. AG és DG melyek az illető hármagokat kettőre derékszögűekre vágják. Ezek közt ABG Δ = DEG Δ, mert AB = DE f.t.sz. x = y f.t.sz. és r = r mert derékok, tehát §15.2. s tehát AG = DG, másfelől AGC Δ = DGF Δ, mert derékszögűek és AG = DG f.t.sz. AC = DF f.t.sz. tehát a közelebbi pont nyomán. Egyenlőkhöz egyenlőket adva lesz ABG + AGC = DEF + DGF vagy ABC Δ = DEF Δ m.b.v.

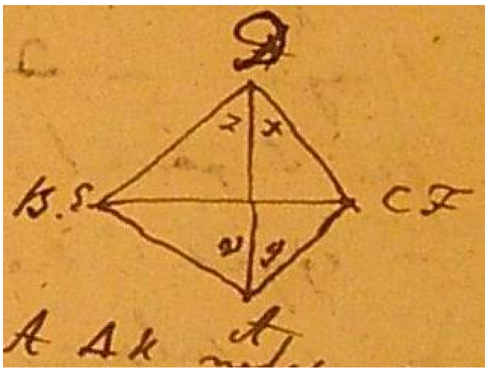
§20 Folytatás

II. Ha két hármagban egyenlők mind a három oldal pl



16. oldal

ABC és DEF hármagokban AB = DE, AC = DF és BC = EF, úgy a hármagok egészben s egyéb részükben, az az részei, szögök egymást köztt egyenlők.
Bébizonyítás Tétessenek a két hármagok egymással sorban, ugy hogy a legnagyobb oldalok egymásra essenek, pl. ha a^ derék vagy tompa volna BC lenne az ABC hármag legnagyobb oldala, mely EF-el tétessék öszve, úgy hogy B pont essék E pontra – ez lehetséges mert pontot pontra tenni lehet, úgy tovább hogy BC essen EF re, ez is lehető, mert egyent egyenre tenni lehet, akkor e fog esni f re, mert BC = EF, s A pont fog esni EF nek más oldala felől, nem ott hol D áll



Pl. miként itt van. Már most D és A pontokat egybékötvén származnak CDA = EDA Δk, melyek egyenlő száruak, mert DF = AC f.t.sz. és DE = AB f.t.sz. tehát x^ = y^, tehát (x + z)^ = (v + y) ^ s tehát már a két adott Δ két oldal s a közrefogott ^ egyenlőségénél fogva egyenlő M.B.V.

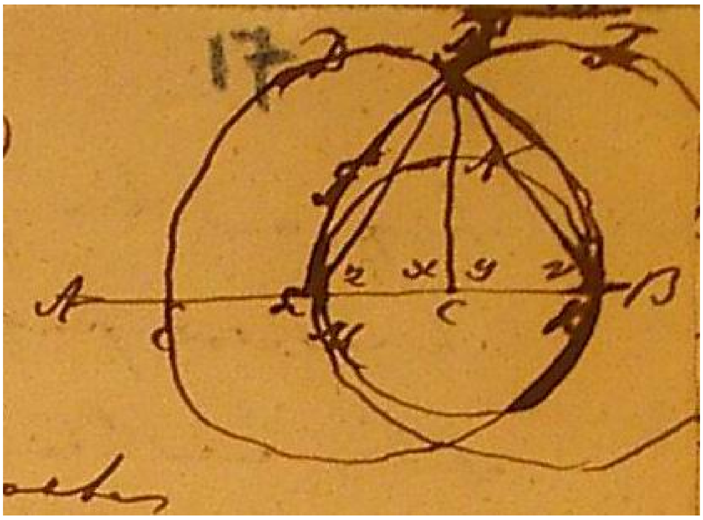
16. oldal háta

§21 Alkalmazások

A hármagok egyenlőségének már bévégzett esetei , nagyon sok és nevezetes alkalmazásokra nyitnak rést, jelesen lehet már azoknak nyomán
1. függőt emelni, 2. függőt bocsátani, 3. szöget felezni, 4. egyent felezni, 5. szögöt lemásolni, s tehát 6. hármagot másolni és végre 7. párhuzamost vonni.
Lássuk mindezeket részre

Függőt emelni azt teszi, mint oly egyent vonni mely más egyenre függő v. derékszögű legyen, s egy azon egyenben fekvő kimutatott ponton menjen keresztül. E végre a kimutatott pontból mint középpontból kényleges sugárral írjunk le kört, ez két pontban vágja az egyent, ezen két pont között béfoglalható egyenre mint talpra írjunk egyenlő száru hármagot, mi úgy történik hogy mind két pontból mind középpontból kényleges de egyenlő sugárokkal írunk egy kört, hol ezek egymást vágják, a kimutatott ponthoz vonjunk egyent s ez lesz a kívánt függő – ugyanis

17. oldal

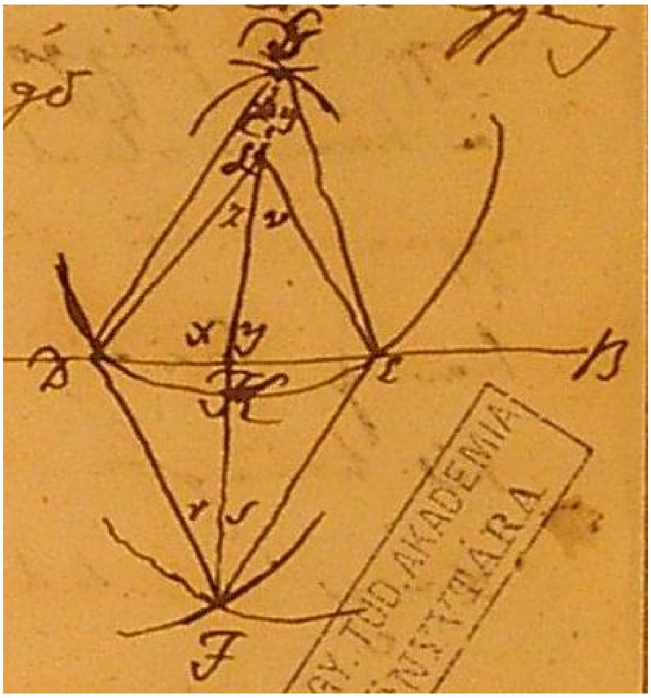


Legyen az adott egyen AB, a rajta kimutatott pont C, a C pontból mint középpontból írt kör MN mely AB egyent vágja K és L pontokban. K pontból mint középpontból írt kör FG, L pontból írt kör DE, ezek egymást vágják P ben. Állítom hogy PC függő AB re, mert LPC Δ = PBC Δ, a három oldal egyenlőségéért, ugyanis LC = BC mert ugyanazon kör sugarai, LP = BP mert egyenlő szárú hármag szárai, PC PC mint közös, tehát a mondott két hármagban a többi részek is egyenlők, jelesen x = y, s tehát mind kettő derék m.b.v.
Függőt bocsátni, azt teszi, egy adott egyenre más függőleg álló egyent vonni, mely az adott egyenen kívül álló ponton menjen keresztül. E végre ismét a kimutatott pontból mint középpontból kényleges sugárral (de még is elég naggyal arra hogy az egyent átvágja) írjunk

kört, az átvágási két pont között béfoglalló egyenre, egyenszáru hármagot akármelyik oldalán az adott egyennek, annyira csakugyan ügyelve

17. oldal háta

hogy a hármagok högypontja ne essék éppen a kimutatott pontba, mit legbizonyosabban úgy érünk el ha ezen hármagot az adott egyen másik oldalán s nem a felől alkotjuk, hol a kimutatott pont van. Az ujra alkotott hármag högypontján s a kimutatott ponton által vont egyen az adott egyenig megnyujtva lesz a kívánt függő.

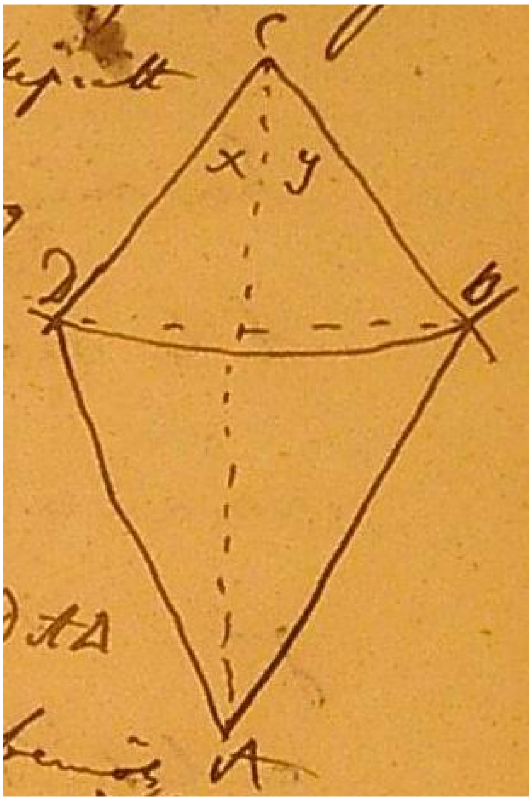


Ugyanis legyen adva AB egyen s kimutatva C pont, melyre kell függőnek lenni a vonandó egyennel, s melyen kell annak átmenni, D és E a két pontok, hol a C pontból írt kör AB t vágja C, D, F az alkotott egyenszáru hármagok högypontjai, mely közöl vagy D vagy F felesleges, egyik AB egyik oldalán, másik másikon lévén aztán $1^{\text{ör}}$ GLE Δ = GLD Δ három oldalok egyenlőségéért, következőleg x^ = y^, 2^{or} GDK Δ = GEK Δ két oldal s a közrefogott szög egyenlőségéért, következőleg x^ = y^ s tehát mind kettő

18. oldal

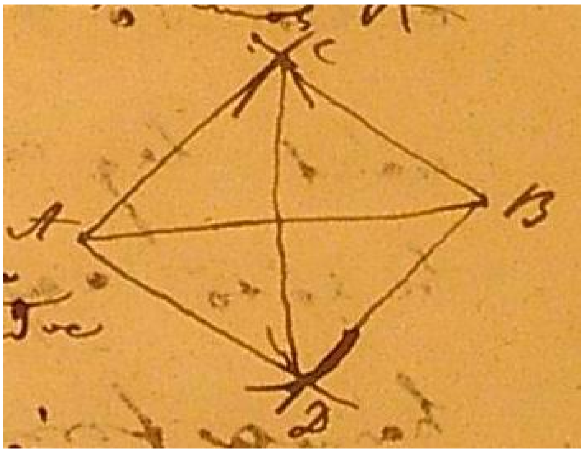
Derék m.b.v. vagy pedig a másfelőli hármagokra $1^{\text{ör}}$ LEF Δ = LDF Δ három oldal egyenlőségéért, z^ = v^, 2^{or} LDK Δ = LEK Δ két oldal s a közrefogott szög egyenlőségéért, következőleg x^ = y^, s tehát mind a kettő derék m.b.v.

Szögöt felezni. A szög högypontjából C ből mint középpontból kényleges sugárral pl. CB vel írassék ív, mely a szög két szárát vágja B nél és D nél.



BD képzelt egyen felébe írassék egyenszáru hármag ABD, C és A pontok kötessenek öszve egyennel, mely az adott szögöt felezni fogja, ugyanis CBA Δ = CDA Δ három oldal egyenlőségéért, tehát bennök x^ = y^ m.b.v.

Egyent felezni



Legyen felezendő AB egyen. Írassék AB re mint talpra a tudva lévő modon két egyenszáru hármag akár egyik felől mind a kettő, akár a kettő kétfelől

18. oldal háta

Különböző feleire AB nek, ezen két hármag högypontjain keresztül vont egyen az adottat felezi, mert egyenszáru háromszögökben a högyponti szögöt felezi, tehát azok talpát vagy AB-t is m.b.v.

Szögöt lemásolni, még pedig kimutatott egyenre mint szárra, s kimutatott ponthoz, mint högyponthoz.
A lemásolandó szög, kényleges egyen átvonása által alakíttassék által hármaggá, s ez másoltassék le, a mindjárt említendő modon, mely alkalommal egyébiránt legczélirányosabb lesz. A két szárt egybekötő egyent úgy vonni, hogy egyenszáru hármag formálódjék, mi az által történik, hogy a szög högypontjából mint középpontból kényleges sugárral ívet írunk, a szög szárait