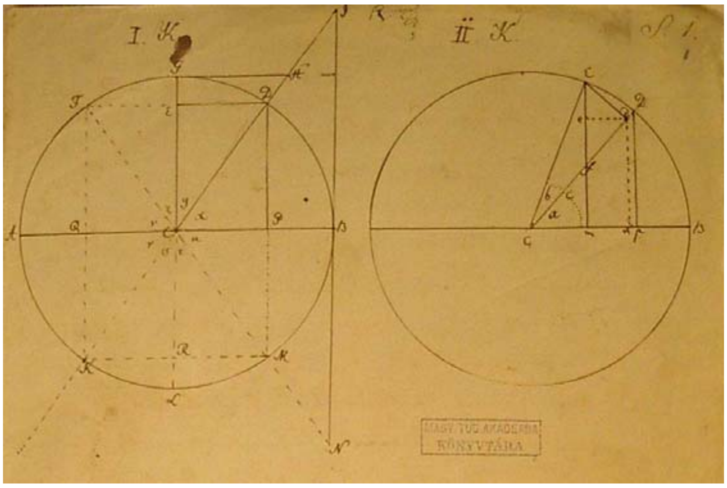
1. oldal



Azok amiket mi másutt mindennemű görbéknél altárnak(abscissa) és feltárnak (ordinata) neveztünk, különösön körnél más sajátnevet is viselnek; S neveztetik a feltár sinusnak, az altár cosinusnak, főpontnak mindig a középpontot téve, s a + és – előjegyeket régibbi egyezésünk szerint alkalmazva. Pl, AGBL körben D pontnak sinusa = +PD = +CE, cosinusa = +ED = +CP; F pontnak sinusa = +QF = +CE, cosinusa = - EF = - CQ; M pontnak sinusa = - PM = – CR, cosinusa = + RM = + CP stb.

De itt t.i. a körnél ezen elnevezéseknek még több rendbeli szélesített értelmei is járulnak a többihez t.i.

a) A kerület akármely pl. D, vagy G, vagy F, vagy A vagy K vagy L vagy M pontjának sinusa és cosinusa mondatnak azon szög sinusának és cosinusának is, melynek högypontja a középpont, jobb (M) szára CB. Az altár egyenes + jelű fele, bal szára pedig az illető ponton át a középpontból vont egyenes pl.

1. oldal háta

Pl. PD és CP sinusa s cosinusa x szögnek, + QF és – CQ sinusa és cosinusa BDF = (x + y + z) szögnek; - QK és – CQ sinusa és cosinusa BCKA = (x + y + z + v + r) hátrahajtott szögnek, s végre – PM és + CP sinusa és cosinusa BCM = (x + y + z + v + r + s + t) még hátrahajtottabb szögnek. De mivel a szögökről, a hátrahajtottat is odaértve, 360º-n felül világos fogalmat alkotni bajos, ezért

b) Még szélesítettebb értelme a fenforgó műszavaknak abban áll hogy akármely kerületbeli D, G, F, A, K, L, M stb pontnak sinusa és cosinusa, mondatik azon ív sinusának és cosinusának is, melynek kezdő pontja B, t.i. az altár egyenben + arány felé vont sugár végpontja, végző pontja pedig az illető kerületi pont. Ezen értelmezés következtében tehát + PD és + CP sinusa és cosinusa BD ívnek; + QF és - CQ sinusa és cosinusa BM, azaz (???) (BD + DF + FA + AK + KL + LM) ívnek. És mivel a kör magába viszszatért s tehát végetlen vonal, melyen folyvást egy megkezdett arányban haladás akármeddig – s a már megjárt pontokban újra viszsza érkezve s azokon túl is haladva, mindig folytatni lehet, látni való (s figyelmesen megjegyzendő) mi hogy ugyanazon sinus és cosinus egyszersmind sinusa és cosinusa végetlen sok különböző íveknek pl. az is nevezettet azon általános értelemben vévén hogy az indulási pontunkból, megállapodási pontunkig a kerületen béjárt egész utunkat, s tehát ennek hasznát jelentse, mindazoknak is beleszámlálásával, melyeket talán kétszer háromszor s akárhányszor, előbbi nyomokon ismételten tapodva jártunk

2. oldal

Pl. BD ívnek sinusa és cosinusa ugyanaz mint (BD + DC + CF + FA + AK + KL + MB + BD) ívei, s ez igen természetes, tulajdonképpen csak azt tudva, hogy az utolsónak végpontja az előbbiekével közös u.m. D, s következőleg mindeniknek sinusa és cosinusa a D pont sunusa és cosinusa levén, egyenlők, s könyű átlátni hogy x-el akármely ívet sinx, cosx-el annak sinusát, cosinusát , P-vel pedig egy egész kerületet jelölve, mindig lesz

a) … $\sin x = \sin (x + P)$, sőt $\sin x = \sin (x + kP)$, s szintugy

b) … $\cos x = \cos (x + P)$ sőt, $\cos x = \cos (x + kP)$ …

c) Továbbá a legegyszerűbb terjtani ismeretek nyomán egyszerre átláthatók ezek is:

d) 1) Csak 360°nál nem nagyobb ívekről szólván

90°nál kisebb íveknél sin és cos + előjegyűek
90° ívnél sinusa = +r sugár, cosinusa = 0
180° és 90° közti íveknek sinusa +, cosinusa – előjegyűek
180° ívnek sinusa = 0, cosinusa = - r
180° és 270° közti sinusok -, cosinusok is – előjegyűek
270° ívnek sinusa = -r, cosinusa = 0
270° és 360° köztt a sinusok -, a cosinusok + előjegyűek, végre
$360^\circ = \sin 0 = 0$, $\cos 360^\circ = \cos 0 = +r$.

2) Akármelyik ívről szólva

$\sin(P/2 – x) = \sin(180^\circ - x) = \sin x$	$\cos(P/2 – x) = \cos (180^\circ - x) = - \cos x$
$\sin(P/2 + x) = \sin(180^\circ + x) = - \sin x$	$\cos(P/2 + x) = \cos (180^\circ + x) = - \cos x$
$\sin(P – x) = \sin(360^\circ - x) = - \sin x$	$\cos(P – x) = \cos (360^\circ - x) = \cos x$
$\sin(P + x) = \sin(360^\circ + x) = \sin x$	$\cos(P + x) = \cos (360^\circ + x) = \cos x$

2. oldal háta

Ha az íveket B-től, ugyan, de nem B-D-G hanem B-M-L arányban veszszük, valamint amaz elsőbb esetben +, ugy ebben - előjegygyel jelelhetjük. S különben láthatjuk, még egy mástól, s itt is látni való egy + vagy – előjegyű ívnek lehessen közös végpontjok, lehet, s lesz ugyanazon sinusok s cosinusok is, pl. $\cos +x = \cos(-x)$ s átalában lesz áll hogy $\sin x = - \sin (- x)$; $\cos x = \cos (- x)$

Ami az ívek mértékét illeti ez kétféle lehet

a) Mérhetjük az ívet ívvel, pl. egy fokot = P/360 – t, vagy P/4 – et vagy akármely kerület darabot vevén egységnek, s ily mértékkel éltünk eddig. De

b) Mérhetjük az ívet egyennel is (tudnivaló csak közelitőleg) s ezentúl ezt a mértéket használjuk, egységnek véve mindig a sugár. Tehát r = 1 s x is lesz az a szám, mely annak hoszszát a sugárral mint egységgel mérve kifejezi, pl. Innen $360^\circ = 2\pi$, $x = 30^\circ = \pi/6 = 0{,}5235987756$….. Ehez képest a fönebbi formulákban P helyébe mindenütt 2π illik.

Végre sinusokat és cosinusokat illetőleg tegyük még egy jegyzetet.

Azon x és y ívek melyeknek öszvete = $90^\circ = \pi/2$ mondatnak társíveknek, s megfelelő szögeik társszögöknek (coanguli = complementarus anguli) pl. I. képen x és y szögök BD és DC ívek; (BD + DG + GF) ívnek társíve – GF, stb….. És már megjegyzésünk abból

3. oldal

áll, hogy (minek igazsága szintén egyszerre átlátható) hogy ily x és y íveket illetőleg (legyen azok közöl egyik bármily széles értelemben akármekkora) mindig $\sin x = \cos y$ s $\cos x = \sin y$ vagy szóban mondva ki: Ha akármely ív (vagy szög) cosinusa nem egyéb mint társívének (vagy szögének) sinusa.

§2

Eléforduló számítások egyszerűsítése végett, a sinus és cosinus nemely functioját, azaz nemely belőlök alakuló képleteket saját nevekkel ruháztak fel a terjtanárok: jelesen

1) $\frac{\sin}{\cos}$ neve tangens, vagy $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x$

2) Ennek reciprocuma vagy is $\frac{\cos}{\sin}$ cotangens vagyis $\frac{\cos x}{\sin x} = \text{cot x}$

tehát $\text{tang x} = \frac{1}{\text{cot x}}$ vagy $\text{cot x} = \frac{1}{\text{tang x}}$

3) A cosinus reciprocuma secans, tahát $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

4) A sinus reciprocuma cosecans vagy is $\frac{1}{\sin x} = \text{cosec} x$

5) 1 – cos neve sinus versus, vagy is 1 – cos x = sinv x

6) 1 – sin x neve cosinus versus, vagy is 1 – sinv x = cosv x

Ezen képleteket melynek száma hat, s tehát a sinus és cosinus odaszámlásával öszvesen nyolc, trigonometriai functióknak nevezik, s mint már a sinust és cosinust kimuattuk, ugy a többiek közöl is mindeniket vonalban is ki lehet mutatni, az az oly vonalokat jelelünk ki a körnél, melyeknek mértéke mindig ezek számbecsének felel meg

3. oldal háta

u.m. ha (I. kép) BD is = x

1. BI = tang x, mert az illető Δk hasonlóságánál fogva

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{BI}{1} = BI = \text{tang x}$ tehát, szóban kifejezve, a tangens nem egyéb mint a +1 végére emelt függőnek az a darabja, mely B s azon pont köztt foglaltatik bé, hol a középpontból x is végpontján át vezetett egyen amazt vágja.

Ezt az értelmezést alkalmas akármely kisebb vagy nagyobb. Pl. BF ívre, ennek tangense lesz BN egyen, mely – előjegyű, s annak is kell lennie, mert a definitio szerint tang BF = $\frac{\sin BF}{\cos BF}$,

s mivel sin BF + előjegyű (= QF), cos BF – előjegyű (= - CQ) tehát tang BF = $\frac{+QF}{-CQ} = -BN$

Figyelmes utánvevés tangens meggyőzend a felől, hogy a szóval kifejezett, s a képletben adott értelmezések – akármely ívekre nézve is tökéletes öszhangzásban fognak lenni mind mekkoraságot mind előjegyeket illetőleg.

2) GH = cot x, mert (nem feledve hogy CE = PD = sin x s ED = CP = cos x)

$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{GH}{1} = \cot x$; miről egyszerre felötlő észrevétel az hogy (hasonlóan ahoz miként sinusnál s cosinusnál tanultuk volt) cot x = tang y s tang x = cot y. Lesz tehát a cotangens értelmezése szerint ez: cotangensnek neveztetik a társív (vagy szög) tangense – s ebből ujra az a következtetés, hogy a cotangens képlet s szóbani értelmezéseik is, minden lehető íveket illetőleg öszvehangzanak.

4. oldal

3) CI = sec x, mert $\frac{1}{\cos x} = \frac{CI}{1} = CI = \sec x$. S ebből folyó szóbeli értelmezés lesz. Secans nak neveztetik az illető ív végpontján a középpontból vezetett egyennek azon darabja, mely C középpont s a B kezdő pontból CBre emelt függő (= tang) átvágása között foglaltatik bé. Ez az értelmezés is minden esetben öszvetanálkozik $\frac{1}{\cos x}$ -el.

4) CH = cosec x, mert $\frac{1}{\sin x} = \frac{CH}{1} = CH = \text{cosec x}$, s ismét szembeötlő, hogy cosecansnak neveztetik a társív (szög) secansa, tehát sex x = cosec y, cosec x= sec y. Itt is áll az átalánosság.

5) PB = sinv x; mert 1 – cos x= PB = sinv x

6) EG = cosv x, mert 1 – sin x = EG = cosv x. Ismét
sinv x = cosv y; cosy x = sinv y

s tehát átalában: Minden ív co előragu functioja, nem egyéb mint társíve co előragtalan hason nevű functioja.

Mily íveknek mely functioji lesznek + vagy – előjegyűek, akár magában a körben kiábrázolt vonalok helyzetén, akár az algebrai képletben kifejezett értelmezések vizsgálat alá vehető; mindazon által a secans –okra (s tehát a cosecansokra) nézve a + és – előjegynek nem lehet a szerinti értelme, hogy jobbra vagy balra, le és fel nyúlnak ábrázoló vonalak, mert így ugyanazon secans egyik tekintetben +

4. oldal háta

másik tekintetben – előjegyű lehetne: pl. BDGF ívnek secansa CN egyen, melynek vége s tehát magán altárilag +, de feltárilag – előjegyet igényelne. Secansoknál tehát (és cosecansoknál) hogy az őket illető előjegyek, az algebrai képlet értelméből folyó eredménnyel öszhangzásban legyenek, a + és a – jegyeket egészen más sajátságos értelemben veszszük, s + al jeleljük azt a secanst melynek a tangenssel tanálkozó vége, a középponttól az illető ív végpontjában vont sugár tovább folytatásában esik, ellenben –al azt, melynek említett végpontja az ív végpontjától a sugár középpont felé vont egyen folytatásban esik, más szókkal: + az a melynek végét a középponttóli távolodás arányában, - melynek végét a középpont felé közeledés arányában érjük el, mindig az ív végpontjától indulva
Pl. BD ív secansa + CI, BDGF e – CN, BDGFAK e – CI stb.
A vizsgálatok eredménye ez lesz
I. A sarkpontoknál t.i. a négy körnegyedek elválasztó pontjánál (melyek B, G, A, L)

	B	G	A	L - nél
sinus =	+ 0	+ 1	- 0	- 1
cosinus =	+ 1	+ 0	- 1	- 0
tangens =	+ 0	+ ∞	- 0	- ∞
cotangens =	+ ∞	+ 0	- ∞	- 0
secans =	+ 1	+ ∞	- 1	- ∞
cosecans =	+ ∞	+ 1	- ∞	- 1
sinv x =	+ 0	+ 1	+ 2	+ 1
cosv x =	+ 1	+ 0	+ 1	+ 2

5. oldal

II. A sarkpontokon kívül

	Első n	Második n	Harmadik n	Negyedik n
Sinus	+	+	-	-
Cosinus	+	-	-	+
Tangens	+	-	+	-
Cotangens	+	-	-	+
Secans	+	-	-	+
Cosecans	+	-	-	+
Sinusv	+	+	+	+
Cosinusv	+	+	+	+

§3

Ezek az előjegyekről, s csak a sarkpontok functioját illetőleg szólottak azoknak mekkoraságáról is. Más akármely pontra (vagy ívre) mint a különböző functioknak egymástól függését menyiben jelen esetünkben czélunkhoz tartozóknak, a következő egyenletek fejezik ki, elmellőzve még száz és ezer ily nemű, maga rendén s helyén nem érdektelen viszonyokat.

1. Minden ív v. szög sinusa s cosinusa a tőponttól az ív végében vont egyennel egy derékszögű Δt formálnak, miből következik hogy

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ….. 1)

s tehát $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ …. 2)

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ ….. 3)

2. Hogy két ív öszvetének vagy különbségének sinusát s cosinusát magukkal azon ívek sinusával s cosinusával kifejezzük, erre a következő észrevételek vezetnek

5. oldal háta

melyekben világosításul a II. kép tarozik.

Legyen BD ív = x, DE = y, tehát BE = x + y lesz

Dp = sin x; Ed = sin y; Em = sin(x + y)

Cp = cos x; Cd = cos y; Cm = cos (x + y) továbbá d-től függőleg böcsszám dn és de-t az illető Δk hasonlóságáért

$\frac{em = dn}{Dp} = \frac{Cd}{1}$ vagy is em = Cd.Dp

$\frac{Ee}{Ed} = \frac{Cp}{1}$ vagy is Ee = Cp.Ed, tehát öszveadván

Ee + em = Em = Dp.Cd + Ed.Cp az az

$\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \sin y . \cos x$ 4)

Viszont

$\frac{Cn}{Cp} = \frac{Cd}{1}$, vagy is Cn = Cp.Cd

$\frac{mn = ed}{Ed} = \frac{Dp}{1}$, vagy is mn = Dp.Ed s kivonva

Cn – mn = Cm = Cp.Cd – Dp.Ed az az:

$\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ 5)

Ezen két utóbbi egyenletekben elnevezve (x + y) = z lesz y = y, x = z – y, s tehát előbb
sin z = sin x.cos y + sin y.cos x vagy
sin y.cos x = sin z – sin x.cos y … a) s mindig
cos z = cos x .cos y - sin x.sin y vagy
cos x.cos y = cos z + sin x. sin y …b) s most

6. oldal

a)-t osztva b) vel

$$\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin z-\sin x.\cos y}{\cos z+\sin x.\sin y}$$ s ebből sin x kifejezve

sin y.cos z + sin x.sin y^2 = sin z.cos y – sin x.cos y^2
sin x.sin y^2 + sin x.cos y^2 = sin z.cos y- sin y. cos z

$$\sin x=\frac{\sin z.\cos y-\sin y.\cos z}{\sin y^2+\cos y^2}=\sin z.\cos y-\sin y.\cos z$$

Végre x-nek becsét behelyettesítve
sin(z – y) = sin z.cos y – sin y.cos z …6)
Továbbá a) -t és b)- t másként véve
sin x.cos y = sin z –sin y.cos x
sin x. sin y = cos x.cos y – cos z felsőt alsóval osztva

$$\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\sin z-\sin y\cos x}{\cos x\cos y-\cos z}$$ s ebből

cos x.cos y^2 – cos z.cos y = sin y.sin z – sin y^2.cos x, ebből
cos x. cos y^2 + cos x.sin y^2 = cos z.cos y + sin z.sin y ebből

$$\cos x=\frac{\cos z\cos y+\sin z\sin y}{\sin y^2+\cos y^2}=\cos z\cos y+\sin z\sin y$$

Az x-nek becsét helyettesítvén
cos(z – y) = cos z.cos y + sin z.sin y …7)

Egyébként könyű átlátni, hogy ezen utóbbi átalakítások el is maradhattak volna, ha eszünkbe jut hogy itt y helyett – y áll, s tehát sin (-y) = siny (hiba!!!) ellenben cos(-y) = - cos y (Hiba!!!), ezeket ama kifejezésekben így helyettesítjük. Minden esetre tehát két ív öszvete vagy kölönbségének sinusa és cosinusa a következendő

6. oldal háta

Két egyenletben van kimerítőleg béfoglalva, melyek tehát ezt még először teljesleg kipótolják

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x \qquad 8)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y \qquad 9)$$

Tangensekről hasonló formulát adni a fönnebbiek nyomán könyű lesz t.i.

$$\mathrm{tang(x+y)}=\frac{\mathrm{sin(x+y)}}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y-\sin x\sin y},$$

Osztva az alsó első tagjaival a felsőt és az alsót

$$\mathrm{tang}(x+y)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\mathrm{tang}\,x+\mathrm{tang}\,y}{1-\mathrm{tang}\,x.\mathrm{tang}\,y} \qquad 10)$$

Vagy még általánosabban $\mathrm{tang}(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{tang}\,x\pm\mathrm{tang}\,y}{1\mp\mathrm{tang}\,x.\mathrm{tang}\,y}$ 11)

§4

A sinus, cosinus és tangensek öszveti formulájáról azoknak többeseit kifejezőkre könyű az átmenet.
De tekintvén az idő szűkét, s legrövidebb uton és jobbra balra térés nélkül, sietvén czélunkhoz, tekintsük csak a sinusok többeseit. S azok köztt is (mivel czélunknak az is elég) csak a páratlan többeseket, u.m. sin x, sin 3x, sin 5x stb mennyik? (Csakugyan emlékezőül annyit megemlítvén, hogy
a) $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x.\cos x + \sin x.\cos x= 2\sin x.\cos x$ 12)

7. oldal

b) $\cos 2x = \cos (x + x) = \cos x^2 – \sin x^2$ 13)
c) vagy $\cos x^2$ helyébe $1 – \sin x^2$ téve $\cos 2x = 1 – 2(\sin x^2)$ 14)
d) vagy megfordítva $\sin x^2$ helyett $1 – \cos x^2$, $\cos 2x = 2\cos x^2 – 1$ 15)

S most szóljunk közvetlen a föltett kérdéshez
a) $\sin nx = \sin nx$
b) $\sin (n – 2)x = \sin (nx – 2x) = \sin nx.\cos 2x – \sin 2x.\cos nx$
c) $\sin (n - 4)x = \sin((n - 2)x – 2x) = (\sin nx.\cos 2x – \sin 2x.\cos nx)\cos 2x – \sin 2x.\cos (n - 2)x$
vagy mivel $\cos (n – 2)x = \cos (nx – 2x) = \cos nx.\cos 2x – \sin nx.\sin 2x$

c) $\sin (n – 4)x = \sin nx.\cos 2x.\cos 2x – \sin 2x.\cos nx.\cos 2x – \sin 2x.\cos nx.\cos 2x – \sin 2x.\sin 2x.\sin nx = \sin nx.\cos 2x.\cos 2x – 2\sin 2x.\cos nx.\cos 2x – \sin 2x.\sin 2x.\sin nx$

d + a) $\sin nx + \sin(n – 4)x = \sin nx.\cos 2x^2 – 2\sin 2x.\cos nx.\cos 2x + \sin nx – \sin 2x^2.\sin nx =$
$= \sin nx.\cos 2x^2 -2\sin 2x.\cos nx.\cos 2x + \sin nx(1 – \sin 2x^2) =$
$= \sin nx.\cos 2x^2 -2\sin 2x.\cos nx.\cos 2x + \sin nx.\cos 2x^2 =$
$= 2\sin nx.\cos 2x^2 - - 2\sin 2x.\cos nx.\cos 2x =$
$= 2\cos 2x(\sin nx.\cos 2x – \sin 2x.\cos nx) = 2\cos 2x.\sin (n – 2)x$ s végre 14) ből helyettesítve
$\sin nx + \sin (n – 4)x = 2\sin (n – 2)x – 4\sin (n – 2)x.\sin x^2$ s ebből
$\sin nx = 2\sin (n – 2)x – 4\sin (n – 2)x.\sin x^2 – \sin (n – 4)x$ 16)

8. oldal

Akármely szám legyen tehát n annak sinusát ki tudjuk fejezni, ha megelőző második és negyedik szomszédjainak sinusai tudatnak, mit ha n-en csak páratlan számmal tetszik értenünk, ugy is fejezhetünk ki x bármely páratlan számu többesének sinusa tudva van, ha az azt közvetlenül megelőző két szomszéd páratlan számu többesei tudatnak. S megfordítva, ha x s így két szomszéd páratlan szám többesének sinusa adva van, ebből foly minden következő páratlan szám többesek sinusának is kifejezhetése rendre rendre. Tudjuk pedig akármely szög +1 és -1 többesének sinusát, melyek + sin x, - sin x, tehát ezekből a 16) szerint kijőnek a következendők.

Ha	n	tehát	
	- 1	sin –x = - sin x	= -1.sin x
	+ 1	sin x = + sin x	= +1.sin x
	+ 3	sin 3x = 2(sin x) – 4sin x.sin x^2 + sin x	= 3sin x – 4sin x^3
	+5	sin 5x = 2(sin 3x) – 4sin 3x-sin x^2 – sin x	=5sin x – 20sin x^3 + 16sin x^5

vagy a lajtromot még tovább folytatva
sin 7x = 7sin x - 56sin x^3 + 112sin x^5 – $64x^7$ (hiba sin x^7 helyett)
sin 9x = 9sin x – 120sin x^3 + 432sin x^5 – $560x^7$ + $256x^9$ (hiba sin x^7 és sin x^9)
sin 11x = 11sin x – 220sin x^3 + 1232sin x^5 – $2784x^7$ + $2752x^9$ – 1024sin x^{11}
ha ezen soroknak rendre rendre egymásból, jelesen minden következőnek a két megelőzőből alakulásának törvényét vizsgá-

9. oldal

lat alá vetjük, könnyen átlátható hogy
1) Minden uj sorban
a) az egyes tagok egymást követve sin x-nek kettővel magasabb emeletét foglalják magokban, mint a megelőző azon sorbeli fog
b) a tagok száma minden sorban egygyel több mint a megelőző sorban
c) az előjegyek minden sorban +-on kezdődvén tagonként váltogatók, végre
d) a mi a számszorzókat illeti, ezek közöl mindenik tag ugy jön ki, ha a szomszéd felső sorbelit közvetlen felette álló tagját kétszer, az ezt ugyanazon sorban megelőzőt négyszer véve, ezeknel öszvetéből a felette második szomszéd tag számszorzóját kivonjuk
Ezen szabályok szem előtt tartásával tehát, az x akárhányadik többesének sinusát, magának x-nek sinusával s annak és csak annak emeleteivel kifejezhetjük, de csupán rendre. Pl. ha sin 100x volna kifejezendő, csak az első 99 megelőző többes sinusának kifejezése nyomán – mi türhetetlen hosszadalmasság volna. Keressük ki azért akármely sin nx (n-et csakugyan ama föltételhez kötve hogy páratlan) kifejezésének általános képét – vagy a mi egyet teszen egy ily kifejezés átalános tag képét. E végre csak hamar észre veszszük miként az első többeseknek pl. sin x, sin 3x, sin 5x stb kifejezéseire illik ez az

9. oldal háta

ez az alak.

$$\sin nx = \frac{n}{1}\sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - ..... \qquad 17)$$

Mert e szerint

$$\sin 1x = \frac{1.\sin x}{1} - 0 + 0 - ... = \sin x$$

$$\sin 3x = \frac{3.\sin x}{1} - \frac{3.8}{1.2.3}\sin x^3 + 0 - 0 + ... = 3\sin x - 4\sin x^3$$

$$\sin 5x = \frac{5\sin x}{1} - \frac{5.24}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{5.24.16}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - 0 + 0 - ... = 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5$$

Stb stb miként már fenebb is tanáltuk vala
n = 5ig tehát 17) igaz. Ugy de ebből következik hogy
n = 7-re, s ebből hogy n = 9re – s így tovább akármely (páratlan) n-re véve is áll, ha tudni illik megbizonyítjuk hogy mihelyt áll s ezen képlet igazsága akármely n – 4 és n – 2 re nézve, már

csak ebből folyólag állania kell n re nézve is, mit a szorzás és öszvezés és kivonás legelemibb szabályai azonnal kimútatnak. Tegyük föl tehát, hogy áll az idézett képlet n – 4 és n – 2 re nézve, az az tegyük fel igaznak hogy:

10. oldal

$$\sin(n-4)x = (n-4)\sin x - \frac{((n-4)((n-4)^2-1^2))}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{(n-4)((n-4)^2-1^2)((n-4)^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - ...$$

és

$$\sin(n-2)x = (n-2)x - \frac{((n-2)((n-2)^2-1^2))}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{(n-2)((n-2)^2-1^2)((n-2)^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - ...$$

Lássuk a már megállított folytatási szabály alkalmazásával mi jön ki sin nx-ül?
sin (n – 2)x kifejezésében akármely tag közképe ez

$$\pm\frac{(n-2)((n-2)^2-1^2)((n-2)^2-3^2)...((n-2)^2-m^2)}{1.2.3....(m+1)(m+2)}\sin x^{m+2}$$

Tehát ugyan abban a megelőzője ez

$$\mp\frac{(n-2)((n-2)^2-1^2)((n-2)^2-3^2)...((n-2)^2-(m-2)^2)}{1.2.3....(m-1)m}\sin x^{m}$$

sin (n – 4)x kifejezésében pedig az ugyanannyiadik tag mint itt az első ez

$\pm\frac{(n-4)((n-4)^2-1^2)((n-4)^2-3^2)...((n-4)^2-m^2)}{1.2.3....(m+1)(m+2)}\sin x^{m+2}$ Lássuk már mi lesz sin nx-ben az ugyanannyiadik tag? F. lesz egy alsóra vétel után

$$\left\{\begin{array}{l}\pm\frac{2(n-2)((n-2)^2-1^2)((n-2)^2-3^2)...((n-2)^2-m^2)}{1.2.3....(m+1)(m+2)}\pm\\ \pm\frac{4(n-2)((n-2)^2-1^2)((n-2)^2-3^2)...((n-2)^2-(m^2-2^2)(m+1)(m+2)}{1.2.3....(m+1)(m+2)}\pm\\ \pm\frac{(n-4)((n-4)^2-1^2)((n-4)^2-3^2)...((n-4)^2-m^2)}{1.2.3....(m+1)(m+2)}\end{array}\right\}\sin x^{m+2}$$

Vagy szorzótársakra bonczolás és öszvezés után

10. oldal háta

T = ± 2.n-2.n-1.n+1.n+3……..n+m-4.n+m-2
n-3.n-5.n-7………n-m.n-m-2

±4.n-2.n-1.n+1.n+3……..n+m-4 m+1.m+2 sin x^{m+2}
n-3.n-5.n-7………n-m

±n-4.n-3-n-1-n+1………n+m-4
n-5.n-7.n-9…….n-m-2.n-m-4

1.2.3…………………m+1.m+2

Vagy is elnevezve A = n+1.n+3……..n+m-4
n-3.n-5.n-7………n-m

T = ±2.n-2.n+m-2.n-m-2.A ±4.n-2.m+1.m+2.A ± n-4.n-m-2.n-m-4.A.sin x^{m+2}
1.2.3…………………..m+1.m+2

$$\frac{\pm n^3+2n^2m+m^2n-2n^2-2nm}{1.2.3....m+1.m+2}A.\sin x^{m+2}=\frac{n.n+m-2.n+m}{1.2.3...m+2}A\sin x^{m+2}=$$

s tehát éppen azon

$$\frac{n.n^2-1.n^2-3^2.....n^2-m^2}{1.2.3......m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$

képlet, mely e szerint a páratlan többesek sinusai átalános képletének bizonyul be.

11 oldal

Folytatás a trigonometriai képletekről

Állván tehát ezek szerint minden esetre (ha csak n páratlan) hogy

$$\sin nx=\frac{n}{1}\sin x-\frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin x^3+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5-..... \qquad 17)$$

Vagy akár

$$\sin nx=n\sin x\left(1-\frac{(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin x^2+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^4-.....\right) \qquad 18)$$

Vegyünk fel akármely y ívet, melynek tehát sinusa = sin y, s oszszuk azt akárhány = n egyenlő (de páratlan számu) részekre, s legyen egy ily rész = x, tehát lesz y = nx

A A B

$$\sin y=\sin nx=n\sin x\left(1-\frac{(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin x^2+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^4-.....\right)$$

És a B alatti képlet zárjeles részét végetlennek gondolva, továbbá írjuk B alá ezen, szintén végetlennek föltett képletet

C

$$n\sin x\left(1-\frac{n^2}{1.2.3}\sin x^2+\frac{n^2.n^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4-.....\right)$$

S vegyük vizsgálat alá mi változás esik ezen A, B és C alatti képletek becsén, ha n-et és x-et változtatjuk, Képzeljük tehát n-et határtalanul növekedni, de egyszersmind éppen oly mértékszerben apadni x-et, így minden új nagyobb n’-ből, de ugyanannyiszor kisebbedett x’-ből alakuló n’x’ folyvást egyenlő marad az előbbi nx hez, s tehát y hoz, s tehát sin y is csak az előbbi lesz s így n-nek akármely növekedésével x-nek megfelelő

11. oldal háta

apadása mellett egyik A alatti képletnek becse nem változik. De egészen másként áll a dolog a B és a C alattiakkal. Vegyük vizsgálat alá előbb az utósót. C két elemből áll, egyik a végetlen kivüli n.sin x; másik a zárjelbe foglaltak együtt, hol felsőül ismét csak n.sin x emeletei fordulnak elé; és már nyilván való hogy n.sin x, az az a kicsin, s mind inkább inkább kisebbendő x is summának anyiszor hány részre y is osztatott, mind inkább inkább és pedig határtalanul kisebbedik magának y ívnek becseken, magok a kis x ívek sinusai mind inkább inkább együvé esvén íveikkel, melyeknek száma n, így tehát lévén n.sin x = y s következőleg $n^2.\sin x^2 = y^2$ határtalan közeledéssel, az egész C alatti képlet, ha való értelemben lesz

D

$$C = y\left(1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} - .....\right)$$

De mi lesz végre sorsa – n-nek ezen növekedése s x-nek a megfelelő apadása mellett a B alatti képletnek, ez az utolsó kérdés .

B is két elemből áll, egyikből a végetlen kívül az itt is n.sin x, s tehát mint tudjuk, tényleges közeltaggal válik belőle = y, a mik a zárjelen belül állanak tagokul, azok köztt az első, már láttuk = 1, tehát ugyanaz mi C-ben is első. S ezek

12. oldal

Nem változnak, a többiről pedig ismét nem lesz bajos átlátni, hogy az érintett növekedés s apadás mellett, viszont határtalanul közeledéssel mindenik azzá vélik, mi alatta C-ben áll; mert (a sin x emeleteiről s az alsókról melyek mind kettőben egyaránt állanak nem is szólva) a mi a számszorzókbeli felsőket illeti, igaz ugyan hogy B-ben mindenütt ily alakok állanak $n^2 - 1$, $n^2 - 3^2$, $n^2 - 5^2$, …ott hol C-ben megfelelőleg csak n^2–ket tanálunk

, de mivel amazokban az -1^2, -3^2, -5^2, …stb mindig ugyanazoknak maradnak, n-nek akármily növekedése mellett is, látni való hogy ezen állanak $n^2 - 1$, $n^2 - 3^2$, …,$n^2 - p^2$,

Stb becsei határtalanul közelednek a csupa n^2–khöz. Ennek világosabb átlátása végett csináljunk csak azt, miben bizonyosan senki sem fog kétkedni, hogy akármely két képlet együtt növekedő becsei, nyilván határtalanul közelednek egymáshoz, ha osztatuk becse határtalanul közeledik az 1-hez (mi más csak is szókkal azt teszi). Már vegyük bármelyik Bbeli elemet melyeknek közképe $n^2 - p^2$, hol n növekedő p pedig állandó. C-ben minden elem n^2 lévén, e kettőnek osztata = $\frac{n^2 - p^2}{n^2} = 1 - \frac{p^2}{n^2}$, s ezen osztat miként szembeötlő, p-nek változatlan maradása, s n-nek határtalan növekedése mellett, határtalan közeledő

12. oldal háta

1-hez, s következőleg áll hogy a B-ben foglaltató elemek mindegyike a C beliekben, s tehát az egész B becse C becséhez határtalanul közelíthető, ez pedig viszont határtalanul közeledő lévén D-hez, mi után legelőbb meg volt mutatva hogy A minden esetre A = B, tehát határtalan közeledéssel lesz A = D vagy is

$$\sin y = y\left(1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} - .....\right) \text{ vagy}$$

$$\sin y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} ..... \qquad 19)$$

Ez a nevezetes formula adja a sinus hoszszát, ha az ív hoszsza (világért sem fokmértékben) adva van.

A sinus ezen kifejezéséből nem lesz bajos kitanálni a cosinusét is azon a sinus formula szerint $\cos y = \sqrt{1 - \sin y^2}$, mely végre sin y 19) beli becsét második emeletét venni, azt 1-ből kivonni s a maradék másodgyökerét kellene venni. Más szókkal, ama hason értelmű formula szerint cos y^2 + sin y^2= 1 keresni kellene egy oly képletet, melynek másod emelet sin y fönebbi becsének második emeletéhez adva 1-et tegyen.

13. oldal

Hoszszadalmas lehozás helyett adjuk készen magát a képletet

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + ... \qquad 20)$$

S csak az van hátra hogy ezt a mit adunk, annak miül adtuk t.i. cos y igaz kifejezésének lenni megmútassuk. E végre az igért bebizonyításig legyen ezen képlet neve +C valamint rövidség okáért a sinus bebizonyított kifejezésnek neve S.

Lesz

$$C + S = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - .... \qquad 21)$$

$$C - S = 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - .... \qquad 22)$$

Szembeötlő hogy ezen két képletnek minden tagjaikban, azoknak betűjét mutatóját számszorzóját és osztóját értve pontban megfelelőleg egyeznek s csupán előjegyeik különböznek, s itt is csak nyílván, hogy 22) akármely n-dik tag előjegye 21)-ben n + 1 –ével egyezik, egyébiránt folyvást két + s két – váltogatván egymást.

Továbbá

$$\begin{aligned}(C+S)^2 = C^2 + S^2 + 2CS = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + ...\\ y + y^2 - \frac{y^3}{1.2} - \frac{y^4}{1.2.3} + ...\\ -\frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.1.2} + ...\\ -\frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^4}{1.2.3} + ...\end{aligned} \qquad 23)$$

13. oldal háta

s itt a tagokat alkotó hasábokban előjegyek szabályosságára különös figyelmet kell fordítani. Ez a szabályosság miként szembeötlő a következőkből áll

1) y-nak páratlan emeleteit magokba foglaló hasábok egyes tagjaiban, a jegyek minden egyes tagnál ugyanazok, vagy mindenik + vagy mindenik – jelesen

2) mindenik + az 1ő, 5k, 9k átalában 4n + 1k emeletek hasábjaiban, mindenik -, a 4n – 1 emeletű hasábokban, és így

3) csupán a páratlan rangu emeletes hasábokat tekintve ezekben kezdve + -on az elsőnél azonban a két jegy váltogatva cseréli egymást ellenben

4) a páros rangu emeletek hasábját alkotó tagok előjegyei váltólag (+) és (-), a felső sorban +-al kezdődvén a négygyel osztható számu ranguaknál, -al a csak kettővel oszthatóknál

$$\left(C-S\right)^2 = C^2 + S^2 - 2CS = 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + ...$$

$$- y + y^2 + \frac{y^3}{1.2} - \frac{y^4}{1.2.3} + ...$$

$$- \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.1.2} + ... \qquad 24)$$

$$+ \frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^4}{1.2.3} + ...$$

14. oldal

Itt is szabályosság mutatkozik az előjegyekben részint a 23) alattival egyezőleg, részint ellenkezőleg u.m.

1) mint a 23) ban, de
2) Itt a 4n – 1 ranguak hasábja lesz csupa +, a 4n + 1 ranguaké – lesz, s tehát
3) Ez az első emeletnél – al kezdődve cserélgetik előjegyűket a páratlan rangu hasábok végre
4) Illetőleg itt is sorrol sorra ugy áll minden 23) ban

Már most tegyünk egy észrevételt. Mind 23)ban mind 24)ben a páros rangu emeletek hasábja értve mindenkor külön-külön = 0, mert akármelyik ily hasábnak közképe ez $\frac{\pm y^n}{1.2...n} \mp \frac{y^n}{1.2....(n-1).1} \pm \frac{y^n}{1.2....(n-2).1.2} \mp \frac{y^n}{1.2...(n-3).1.2.3} \pm ..... \pm \frac{y^n}{1.2....n}$ mely képlet, ha benne az első tagot u.m. $\frac{\pm y^n}{1.2...n}$-et A-nak nevezzük a következő alakra viszsza vihető

$$A(1 - \frac{n}{1} + \frac{n - n - 1}{1.2} + \frac{n - n - 1.n - 2}{1.2.3} ..... + 1) = A(1-1)^n = A.0^n = 0$$

14. oldal háta

Kihagyván tehát a páros emeletek hasábját, mint 0 becsűeket mind 23)ból mind 24)ből, lesz

$$\left(C+S\right)^n = C^2+S^2+2CS = 1+y-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7}+...$$

$$\mathrm{y}-\frac{y^3}{1.2.1}+\frac{y^5}{1.2.3.4.1}-\frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.1}+...$$

$$-\frac{y^3}{1.1.2}+\frac{y^5}{1.2.3.1.2}-\frac{y^7}{1.2.3.4.1.2.3}+...$$

$$-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.1.2.3}-\frac{y^7}{1.2.3..1.2.3.4}+...$$

$$+\frac{y^5}{1.1.2.3.4}-\frac{y^7}{1.2.1.2.3.4.5}+...$$

$$+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\frac{y^7}{1.2.1.2.3.4.5}+...$$

$$-\frac{y^7}{1.1.2.3.4.5.6}+...$$

$$-\frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7}+...$$

$$+...$$

$$+...$$

Vagy is miként egyszerre szembeötlő

$$(C+S)^2 = C^2+S^2+2CS = 1+2y-\frac{(2y)^3}{1.2.3}+\frac{(2y)^5}{1.2.3.4.5}-\frac{(2y)^7}{1,2...7}+\frac{(2y)^9}{1.2..9}-... \qquad 25)$$

és mivel fönebbi megjegyzésünk szerint (C-S)^2 ből jára?? ; y páros emeletei mind kienyésznek, a párosak emeletek hasábjai pedig (C+S)^2 -éjitől csak abban különböznek hogy kivéve az első tagot mindenütt + és – áll, hol a másikban – és + , tehát

$$(C-S)^2 = C^2+S^2-2CS = 1-2y+\frac{(2y)^3}{1.2.3}-\frac{(2y)^5}{1.2.3.4.5}+\frac{(2y)^7}{1,2...7}-\frac{(2y)^9}{1.2..9}-... \qquad 26)$$

15. oldal

S végre 259 t és 269t egybeadva kijön
(C+S)^2 + (C-S)^2 = 2C^2 + 2S^2 = 2(C^2 + S^2) = 2 s innen C^2 + S^2 = 1, tehát C^2 = 1 – S^2 = 1 – sin y^2 = cos y^2 s legvégre, áll bebizonyítva hogy C = cos y M.B.V.
A 19) és 20) alatti ezen két alapformulákat szóval is elég ??? ki lehet fejezni, u.m. az sinus alkotja az ív páratlan emeleteinek sorát, mindenik emeletet osztva egytől addig terjedő számok szorzatával hányadik az emelet, s az így kijövő tagokat + al kezdve váltogatott előjegyekkel rendre egymás után. A cosinust pedig alkotják az ív páros emeletei (y^0 = 1) szerint fejezve ki, s hasonló szabályu alsókkal, s szintoly jegyváltogatással mint a sinusnál.
De szokás ugyan ezen sorokat (Euler után) egy sajátlagos modorral
1. ???? képtelen képlet alakjában fejezni ki, melyek a következők

$$1)\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2} \qquad 27)$$

$$2)\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2} \qquad 28)$$

Hogy ezen képletek cos y-t és sin y-t fejezik ki, azt csak abban az értelemben kell venni, hogy valamikor ezen kifejezésekkel az algebrai ösmeretek törvényei szerint valamely műveletet vinni véghez, abból valamely értelmes eredmény származik, ez az eredmény mindig ez lesz, ami kijönne ha ugyan-

15. oldal háta

ezeket sin y és cos y 19) és 20) alá beírt értelmes becseivel vittük volna véghez. Mutassuk ki csak két esetben, melyek közöl az első közvetlenül ezen képtelen kifejezések igazságát mutatja ki a mondott értelemben.

Azon ösmeretes formulát mi szerint: $e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3} + ...$ alkalmazva

$$e^{y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(y\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} + ... =$$

$$= 1 - + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - ..... \qquad 30)$$

S ezeknek nyomán

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2...6} + \frac{y^8}{1.2...8} - ... = \cos y \text{ és}$$

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{2y\sqrt{-1} - \frac{2y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{2y^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{2y^7\sqrt{-1}}{1.2...7} + ...}{2\sqrt{-1}} = \qquad \text{MBV.}$$

$$y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2...7} + \frac{y^9}{1.2...9} - ... = \sin y$$

16. oldal

Továbbá az is kijön hogy

$$\left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\right) = 1 \text{ mert kifejtve lesz}$$

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} - 2}{-4} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} - 2}{4} = \frac{-e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

S valóban, miután a sinusi vagy cosinusi képletekről egyik mondat bébizonyíttatott, a bébizonyításból a másikat levonni ezért ezuton szokás, de mi képtelen kifejezéseken semmit építni nem akarunk, s legfelebb ezt ugy leírjuk azokat, mint értelmes, de hasznos kifejezések emlékezetben tartására alkalmazható, mnemonicai segédjeleket s abban is méltányolva hasznokat, hogy sokszor valamely fontos eredmény kitanálására igen rövid uton elvezetnek, melynek azután már ki van tanálva (mert vizsgálatban az alaposabb rész), értelmes képletek általi bébizonyítása rendszerint könyű. Adjunk erről is egy nevezetes alkalmazási példát.
A 27) és 28) egyenletekből kijön

16. oldal háta

1) törtek elenyésztetésével

$$2\cos y = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}; 2\sin y.\sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}$$

2) ezen két egyenletek öszveadása által

$$2\left(\cos y + \sin y.\sqrt{-1}\right) = 2.e^{y\sqrt{-1}} \quad \text{vagy} \quad e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sin y.\sqrt{-1}$$

3) kivonással

$$2\left(\cos y - \sin y.\sqrt{-1}\right) = 2.e^{-y\sqrt{-1}} \quad \text{vagy} \quad e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sin y.\sqrt{-1}$$

4) Egyenlőknek logarithmai is egyenlők, s jelesen itt természetes logarithmnál maradva

$$\log\left(e^{y\sqrt{-1}}\right) = y.\sqrt{-1} = \log\left(\cos y + \sin y.\sqrt{-1}\right) = \log\cos y(1 + \sin y.\sqrt{-1}) = = \log\cos y(1 + \text{tang y}.\sqrt{-1}) \qquad 31)$$

Szintugy

$$\log\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right) = -y.\sqrt{-1} = \log\left(\cos y - \sin y.\sqrt{-1}\right) = \log\cos y(1 - \sin y.\sqrt{-1}) = = \log\cos y(1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}) \qquad 32)$$

31)ből kivonva a 32)t

$$2y\sqrt{-1} = \log\cos y(1 + \text{tang y}.\sqrt{-1}) - \log\cos y(1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}) =$$

$$\log\frac{\cos y(1 + \text{tang y}.\sqrt{-1})}{\cos y(1 - \text{tang y}.\sqrt{-1})} = \log\frac{1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}}{1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}} \qquad \text{és}$$

5) tehát ama ösmeretes log képlet szerint

$$\log\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + ...\right) \text{ lesz}$$

$$2y\sqrt{-1} = \log\frac{1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}}{1 - \text{tang y}.\sqrt{-1}} = 2\left(\text{tang y}.\sqrt{-1} - \frac{\text{tang y}^3.\sqrt{-1}}{3} + \frac{\text{tang y}^5.\sqrt{-1}}{5} + ...\right) =$$

17 oldal

$$= 2\sqrt{-1} = \left(\text{tang y} + \frac{\text{tang y}^3}{3} + \frac{\text{tang y}^5}{5} + \frac{\text{tang y}^7}{7} + ...\right) \text{ as végül}$$

8) az egyenlet mindkét felét osztva $2\sqrt{-1}$-el, ki jön

$$y = \text{tang y} + \frac{\text{tang y}^3}{3} + \frac{\text{tang y}^5}{5} + \frac{\text{tang y}^7}{7} + ... \qquad 32^*)$$

Egy nevezetes formula, mely ha valamely ívnek tangense van adva, abból magának az ívnek hoszszát kiszámítni képessé teszen.

S most mi után ezen formulát a képtelen becsek segédével kitanáltuk (rendszerint az ily módon, t.i. algebrai szokott szabályok alkalmazásával történt feltanálást bébizonyításul is elfogadott szabály) megtörténhetik a bébizonyítás. (s megtörténhetett volna a feltalálás) – értelmes képletek által is, de sokkal hoszszadalmasabban jelesen, ha

$$\sin y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} .....$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + ...$$

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \text{tang y} = \frac{\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} .....}{1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + ...} = Ay + By^2 + Cy^3 + ... \qquad 33)$$

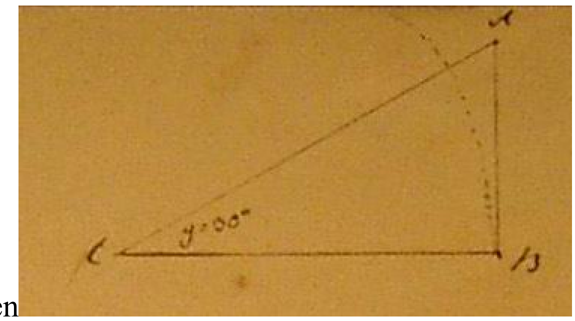
A, B, C nyilvános számokba tanáltatnak ki
Ekkor ezen egyenletet tang y $= Ay + By^2 + Cy^3 + ...$ megfordítjuk azaz y becsét fejezzük ki tang y emeleteivel, ez elég egyszerűen megyen, de elég hoszszadalmas és ugy történik meg, hogy felvéve e határtalan számszorzóju egyenletet
y = α.tang y + β.tang y^2 + γ.tang y^3 + …. 34)

17. oldal háta

tang y, tang y^2, tang y^3, … s a többieket ki fejezzük 33)ból s ezen becseket helyettesítvén 34)be nyerünk egy oly egyenletet melyben csak α, β, γ…. stb mellett, csak y emeletei és A, B, C ismeretlenekkel fordulnak elé. Ebből tehát ama régebbi alapszabályoknál, hogy az egyenletet 0-ra visz y minden külön emeleteinek számszorzóji együtt vesz = 0, végetlen egyenletek alakulván, meghatározódnak α, β, γ…. stb s becseik 34)be helyettesítvén – ki lesz fejezve y tang y emeletei által. Ha Önnek kedve van, gyakorlás végett ezen műveletben tegye meg s képtelenek útján föltanált eredményt igazolni szerencséje leend. Végső megjegyzésünk abban áll, hogy az utolsó 32*) alatti formula legalkalmasabb minden mások fölött π-nek vagy a kerület mértékének kiszámítására lévén t.i. sok tangens melynek hoszsza tudatik. Igy pl. legegyszerűbb tudatván hogy tang 45º = 1, tehát
$arc 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...$ s tehát
$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + ...$ Ez a Leibniztől föltalált legrégibb sor (e végre), de a gyakorlatilag csaknem használhatatlan, mert rémítő??? legyen öszvesiető.
Ellenben elég könynyűséggel eredményre vezet s erre használtatott is egy más melynek alapja két esztendővel

18. oldal

Ha y = 30º tudva van hogy AB = tang 30º, CB = 1; AC = 2AB (Megjegyzés: $AB = \overline{AB}$)
S tehát $AC^2 = AB^2 + CB^2 = AB^2 + 1 = 4AB^2$



Tang y^2 = 1/3 , tang $y = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ s innen

y = arc 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3^3.3} + \frac{3^2\sqrt{3}}{3^5.5} + \frac{3^3\sqrt{3}}{3^7.7} - ... = \sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} - \frac{1}{7.3^4} + ...\right)$ vagy a jegyek váltogatásának kienyészteti sorra a tagokat páronként öszveöntve s szabályos alakra vonva

$\pi = 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^1} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + ...\right)$ hol a szabály szembeötlő. Gyakorlás végett számítassék ki π a béirt sorozatból csak 6 tagot véve.

A trigon. képl. vége