1. oldal nagylap

ELMÉLETI ÁTALÁNOS SZÁMTAN
(ALGEBRA)

Első szakasz
KÖZ-ÉRTELMŰ SZÁMTAN
(Ugyan azon egyű számok tana)

37§ Előadásnak tárgya és rendje

Az elméleti általános számtan (algebra) első szakaszában, ugy tekintjük a számokat, miként azok legtermészetesebb, mesterkéletlen értelemben veendők, minden szám t.i. azon egyek számjául melyek hozzá kimondatnak, kiíratnak vagy bármikép kijelentetnek, értetnek és pedig épen azon egyek épen akkora számjául, mennyi rólok kimondatik. Azon beszédek, melyekben az adósság forintjainak száma, a vagyon egy nemének (ellenkező egyű számjának), az északra utazás a délre utazás egy esetének, a garasok száma a forintok számának (törtszámának) stb mondatik, tulajdonképen nem egyebek elvitt értelmű vagy tropusi beszédnél, amelyeknek szabályaival is (mint már fenebb említők) szükséges lesz megismerkedni, de mi ezt csak jelen tanulmányunk második szakaszában teendjük, addig pedig, az első szakaszban, a közértelmű számtanban, a dolgok és számok bevett értelménél maradunk, s mikor a nélkül mondanók a számot, hogy egyjét is hozzá mondanók vagy odaértetni feltennők: akkor mindig akármiféle egyeket – a kimondott számokat – akarunk értetni, és ha két szám öszveadásáról, (egyjeik megnevezése nélkül) akarunk szólani, megjegyezzük, hogy azon két szám alatt akármit, csakhogy mindkettő alatt ugyanazon egyet kell érteni, mint ezt már előzményeinkben is megjegyeztük (Lásd 7§)
Mi előadásunk rendjét illeti: előre bocsátván azon alapigazságokat, melyeknek alkalmazása az Algebra minden tanaira kiterjed s melyek magokban is világosabbak mintsem további bizonyítást szükségelnének, vagy csak engednének is (Axioma) – ezután előadjuk az egyes számtani műveleteket illető külön algebrai igazságokat, mégpedig két folyamatban, vagy lépcsőn, melyek elsejében csak az egyszerűbb és elemibb igazságokra terjeszkedünk (Alsóbb számtan), a másodikban pedig a bonyolultabb s bajosabb felfogásuakra is kiereszkedünk (Felsőbb számtan)

§38 Alap-igazságok
1.) $a = a$
Minden szám egyenlő önmagához
2.) Ha ($A \gtrless B$)
Úgy $A \gtrless B$
Egy szám sem egyenlő magán kívül máshoz
3.) Ha ($A = B$ $C = B$) ugy $A = C$
Ugyanazon számhoz egyenlő számok, egymás közt is egyenlőek

1. oldal nagylap háta

4.) Ha ($A = B$ $C \gtrless B$)
Ugy $A \gtrless C$

Ugyanazon számhoz egyenlő és nem egyenlő számok egymás közt sem egyenlők, jelesen az egyenlő kisebb a nagyobbnál és nagyobb a kisebbnél

5.) Ha (A = B M = N)

Ugy: 1.) $A + M = B + N$

2.) $A - M = B - N$

3.) $A . M = b . N$

4.) $A : M = B : N$

5.) $A^M = B^N$

6.) $\sqrt[M]{A} = \sqrt[N]{B}$

7.) $_M A = {}_N B$

Megfelelőleg egyenlő tényezőknek egyféle eredményei egyenlők

6.) Ha (A = B M < vagy > N)

Ugy: 1.) $A + M \lessgtr B + N$

2.) $A - M \lessgtr B - N$

$M - A \lessgtr N - B$

3.) $A . M \lessgtr B . N$

4.) $A : M \lessgtr B : N$

$M : A \lessgtr N : B$

5.) $A^M \lessgtr B^N$

6.) $\sqrt[M]{A} \lessgtr \sqrt[N]{B}$

$\sqrt[A]{M} \lessgtr \sqrt[B]{N}$

7.) $_M A \lessgtr {}_N B$

$_A M \lessgtr {}_B N$

Megfelelőleg egyenlő és nem egyenlő tényezők egyféle eredményei sem egyenlők és pedig:
a) egyenes műveleteknél a nagyobbeli nagyobb, a kisebbeli kisebb, minden esetben;
b) fordított műveleteknél is 1) a nagyobbeli nagyobb, a kisebbeli kisebb, ha a nem egyenlők teszik az adott öszvetet (kisebbitendőt) az adott szorzatot (osztandót), s az adott hatványt, az egyenlők pedig a másik tényezőt; de 2) a nagyobbeli kisebb, a kisebbeli nagyobb, ha az egyenlők állanak adott öszvetül, adott szorzatul, adott hatványul, és a nem egyenlők a másik tényezőül.
Ezen hat alapigazságra, melyek a dolgok természetéből minden józan észtől beláthatólag következnek, s annál fogva (mint már megjegyeztük) további bizonyítást nem igényelnek, de nem is engednek, tanítmányaink folytában bátran fogunk hivatkozni.

39<u>§ Előadási rendszerünk további átnézete</u>

Az utolsó alapigazság kimondja azt, hogy ha két tényezőpárban, megfelelőleg egyik tényező közös (ugyanaz) a másik pedig különböző: az eredmények nem lehetnek egyenlők és hogy a két eredmény közül melyik lesz nagyobb, melyik kisebb, de hogy épen mi lesz a két eredmény vagy helyesebben mi lesz a két eredménynek egymáshozi viszonya, miben fognak

2. oldal nagylap

2. <u>Páros szám</u>, minden páros szám maradék nélkül osztható 2–vel, azaz többese 2–nek s következőleg kettőse is valamely számnak s megfordítva: minden szám mely valamely számnak kettőse, páros szám. Ez a kifejezés tehát 2a, 2b, 2n stb minden lehető páros számot,

és csakis páros számot foglal bejelentésében, következőleg így olvasható: akármely páros szám, s valóban a vagy b stb helyébe rendre számokat 0, 1, 2, 3, 4 stb helyettesítünk, kijőnek 0, 2, 4, 6, 8, … szóval a páros számok sora.
3. Páratlan szám. Minden páratlan szám egygyel nagyobb valamely páros számnál s viszont, minden valamely párosnál egygyel nagyobb szám, páratlan. S így, akármely páratlan szám algebrai kifejezése lesz: 2a + 1, melynek értéke, a helyébe rendre a számok sorát téve: 1, 3, 5, 7, …. Szintén ily értelmű volna 2a – 1 csakhogy ez, azon egy esetben ha helyébe 0-t teszünk, értelmetlenné válik.
4. Bizonyos számmal osztható vagy nem osztható számok. A fönnebbiekhez hasonló okoskodás nyomán 3a, 4a, 5a stb jelentése, akármely 3-al, 4–el, 5–el stb osztható szám. 3a + 2 annyit tesz mint akármely a 3–ali osztásban maradékul 2–t hagyó szám; 12a – 1 annyi mint akármely szám, melynek nagyobb szomszédja maradék nélkül osztható 12–vel, 10^a a 10 nek akárhányadik hatványa, vagy oly szám mely leíratik 1–el és utána tett néhány zéróval stb stb.
36§ Ovás és fönhagyás
Legvégre egy ovással s egy fönhagyással válunk meg algebrai nyelvtanunk jelen első folyamától
1. Ne legyen tilos, valahányszor majd kifejtendő körülmények ugy hozzák magokkal, fölvett jeleléseink fölvett értelmétől ideig óráig eltávoznunk sőt azokat meg is cserélnünk, pl kis a-val, x–el bizonyos számot, nagy A–val akármely számot fejezni ki, vagy uj jegyeket is venni föl stb csakhogy mindezt olyankor előre megmondjuk, s mikor ily előleges megjegyzést nem tettünk, jegyeink mindig a fönebbi meg állított értelemben lesznek veendők.
2. Algebrai ismereteink terjedésével uj jelölések szüksége fog keletkezni, ezek a régiekeni módosítást fogják magok után vonni; s mint egy nemzet nyelve, az idők folytában, ugy fog a mienk is változni, idomulni, szélesbedni, tudományunk egymást követő szakaszaival, bevégződni pedig csak magával az egész rendszerrel, s így az algebra nyelvtanának s szótárának itt csak ezúttal van vége.

3. oldal nagylap

Egymástól különbözni, ezt az érintett alapigazság határozatlan hagyja, és épen ezen kérdésnek megfejtése, annak egész terjedelmében, teszi már az Algebra tárgyát, mely azt veszi vizsgálat alá, hogy tudatván akármelyik számtani műveletnél két tényezőnek eredménye, ezen eredmény mikép fog módosulni, ha a tényezők közül egyiket így vagy amúgy változtatjuk, ezen kérdésnek minden lehető összveiratandó feleletek, s az azokból következtetésképen kivonandó állítmányok és szabályok fogják tenni azon algebrai igazságokat, melyeknek elemibb könynyebben felfogható részét ezen első lépcsőzeten, a bonyolultabbakat s nehezebb felfogásuakat pedig egy másik lépcsőzetű szakaszban, elő fogjuk adni. Ez alkalommal ki fog tűnni az is, hogy egy csak zárjelezéssel leírható eredmény, csaknem minden esetben átalakítható, más vele egy értékűvé, melyet zárjel nélkül le lehet írni, műszóval burkolt képlet hasonértékű fejletté, azért ilyenekben t.i. burkolt képleteknek fejletteké, és viszont fejletteknek burkoltakká változtatásában is fogjuk magunkat az illető vezérelvek s szabályok megállítása mellett gyakorolni.
Mind ezekben pedig menet módunk következő lesz:
A két számtani műveletet elkülönözzük három csoportra, melyek közül az első az öszvezést és ennek fordítottját a kivonást, a második a szorzást, s ennek fordítottját az osztást (ide beiktatjuk a szorzás határozatlan fordítottját, a szorzótársak keresését is), a harmadik a hatványozást s ennek fordítottjait a gyökérvonást és logarithmozást foglalja magába. Ezen csoportozatok szerint rendre veszszük vizsgálat alá a műveleteket s legelőbb is
I.) az első csoportbeli műveletre, s itt is az első műveletre az öszvezésre nézve, alapul vevén azt, hogy ha akármely két számot öszve adunk, ki jő azoknak öszvete, az az hogy

$a + b = a + b$
már kérdésbe teszszük továbbá, hogy ha nem a–hoz b-t adunk, hanem vagy a-hoz egyebet mint b-t, vagy b-t egyébhez mint a–hoz, akkor is a + b lesz az eredmény vagy egyéb? S ha (miről kételkedni már a 6-k alapigazság sem enged), egyéb: ez miben fog az előbbi eredménytől különbözni? Ezen vizsgálatoknál pedig ugy fogjuk találni, hogy midőn azt teszszük kérdésbe, a-nak vagy b–nek változtatása mily változást okoz az eredményben. Kérdésünk eldöntése csak ugy fog valami érdekes és gyakorlati hasznu sikerre vezetni, ha a és b helyébe nem ténylegesen akármely számot vagy betűt helyettesítünk, hanem magát a–t és b–t, csakhogy pótolva vagy kisebbítve valamivel, tehát ha kérdéseink ezek lesznek:
$(a + c) + b = ?$
$(a – c) + b = ?$
$a + (b + c) = ?$
$a + (b – c) = ?$
Szintugy kivonást illetőleg alapul tevén hogy
$a – b = a – b$
kérdéseink a–nak és b–nek változtatásával, lesznek:
$(a + c) – b = ?$
$(a – c) – b = ?$
$a – (b + c) = ?$
$a – (b – c) = ?$

3. oldal nagylap háta

II. A második csoporthoz tartozó két műveletet illetőleg már gyakorlati sikerre vezetőknek találandjuk az ily kérdéseket, ha a két tényezőt, mind az ezen csoportozatba tartozó két művelet szerint, ugymint valamivel szorozva és osztva – mint az előbbi csoportozat műveletei szerint, ugymint pótolva és kisebbítve – változtatjuk, minél fogva az ide tartozó kérdések lesznek:
Szorzást illetőleg, alapképlet: $ab = ab$,
A második csoport műveletei szerint változtatva
$(ac).b = ?$
$(a:c).b = ?$
$a.(bc) = ?$
$a.(b:c)$ (?
az első csoport műveletei szerint változtatva pedig:
$(a + c)b = ?$
$(a – c)b = ?$
$a(b + c) = ?$
$a(b – c) = ?$
Osztást illetőleg alapképlet $ab^{-1} = ab^{-1}$;
A második csoport műveletei szerint változtatva:
$(ac)b^{-1} = ?$
$(ac^{-1})b^{-1} = ?$
$a.(bc)^{-1} = ?$
$a.(bc^{-1})^{-1} = ?$
az első csoport műveletei szerint változtatva:
$(a + c)b^{-1} = ?$
$(a – c)b^{-1} = ?$
$a(b + c)^{-1} = ?$
$a(b – c)^{-1} = ?$

III. A harmadik csoporthoz tartozó műveleteket illetőleg pedig gyakorlati haszon lesz, ha az alapképletbeli mindkét tényezőt, mind a három műveletek szerint (a csoportok során viszszafelé menő renddel) változtatjuk, u.m.
Hatványozást illetőleg, alapképlet $a^b = a^b$,
A harmadik csoport műveletei szerint változtatva:

$(a^c)^b = ?$
$(a^b)^b = ?$
$a^{b^c} = ?$
$a^{b^{\frac{1}{c}}} = ?$
(A logarithmozás szerinti változtatásokat a második lépcsőre halasztva).
A második csoport műveletei szerint változtatva:
$(ac)^b = ?$
$(ac^{-1})^b = ?$
$a^{bc} = ?$
$a^{bc^{-1}} = ?$
Az első csoport műveletei szerint változtatva:
$(a + c)^b = ?$
$(a - c)^b = ?$

4. oldal nagylap

$a^{b+c} = ?$
$a^{b-c} = ?$

Gyökérvonást illetőleg, az alapképlet $a^{\frac{1}{b}} = a^{\frac{1}{b}}$;
A harmadik csoport műveletei szerint változtatva:
$(a^c)^{\frac{1}{b}} = ?$
$\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{\frac{1}{b}} = ?$
$a^{b^{\frac{1}{c}}} = ?$
$a^{\frac{1}{bc}} = ?$
A második csoport műveletei szerint változtatva:
$(ac)^{\frac{1}{b}} = ?$
$(ac^{-1})^{\frac{1}{b}} = ?$
$a^{\frac{1}{bc}} = ?$
$a^{\frac{1}{bc^{-1}}} = ?$
Az első csoport műveletei szerint változtatva:
$(a + c)^{\frac{1}{b}} = ?$
$(a - c)^{\frac{1}{b}} = ?$

$a^{\frac{1}{b+c}} = ?$

$a^{\frac{1}{b-c}} = ?$

Logarithmozást illető kérdések itt elmaradnak, azért mert minderre, miben logarithm fordul elé, a tárgynak némileg a többiek feletti nehézségéért jelen tanulmányaink második lépcsőjére halasztatnak.

A fönt bírt, öszvesen 48 kérdésre adandó indokolt és bebizonyítandó feleletek, merítik ki az Algebra első lépcsőjének egész terjedelmét: oda számítván még számos, ezekből következésül kivonandó igazságokat, módszereket s arithmeticai (nyilvános számokkali) műveletek kimagyarázását s egyszersmind sok egyéb, ezen kérdések feleleteiből felvilágosítható pontokat.

I. Első csoport öszvezést és kivonást illető algebra-igazságok

40§ Öszvezés

Alapképlet: a + b = a + b;

Kérdések:

1.) (a + c) + b = ?

2.) (a – c) + b = ?

3.) a + (b + c) = ?

4.) a + (b – c) = ?

Könynyű átlátni, hogy mindezen kérdésekre feleletül nem azon eredmény illhetik, mely a és b öszvezéséből származott, hanem

1. Ugyanazon pótló mellett, a mennyivel nagyobb volt a pótlandó annyival nagyobb lesz az eredmény, s a mennyivel kisebb amaz, annyival kisebb lesz ez is, és

2. ugyan azon pótlandó mellett viszont annyival lesz nagyobb vagy kisebb az eredmény, a mennyivel nagyobb vagy kisebb a pótló.

Ezen egyszerű igazságok önként folynak az öszvezésnek azon fenebb adott értelmezéséből, mi szerint az nem

4. oldal nagylap háta

egyéb, mint valamely egyik különböző számjainak egymás folytábani öszveszámlálása. Igen természetes, hogy minél nagyobb számon kezdjük a számlálást s haladunk tőle a számok során fölfelé bizonyos számu lépéseket, annál nagyobb számhoz jutunk, s minél kisebb számon kezdve számlálunk, ugyan annyit mint az imént, annál kisebb számhoz érkezünk, és pedig annyival nagyobbhoz vagy annyival kisebbhez, mennyivel nagyobb vagy kisebb szám volt kiindulásunk pontja. (Különböző pótlandók és ugyanazon potló). Szintugy, ha bizonyos számon kezdve, egyszer többet, másszor kevesebbet számlálunk, (ugyanazon pótlandók, különböző potlók) annyival fogunk nagyobb vagy kisebb számhoz érkezni, mennyivel többet vagy kevesebbet számlálunk, ugyanazon kiindulási ponttól kezdve.

Igaz feleletek lesznek tehát a következők:

(a + c) + b = (a + b) + c

(a – c) + b = (a + b) – c

a + (b + c) = (a + b) + c

a + (b – c) = (a + b) – c

Míg lehetőségig zárjeletlenítve így állanak:

1.) a + c + b = a + b + c

2.) $a - c + b = a + b - c$
3.) $a + (b + c) = a + b + c$
4.) $a + (b - c) = a + b - c$
melyekben, ha szóval mondjuk ki, következő igazságokra találunk
1.) Ha akármely számhoz akármely más két szám adandó, mind csak egy lesz az eredmény
 <u>akár</u> előbb az egyiket azután a másikat. –
 <u>akár</u> előbb emezt azután amazt, - (1)
 <u>akár</u> előbb a két hozzáadandót öszvezvén, ezt az öszvetet adjuk hozzá (3)
2.) Ha egy számhoz egy mást hozzáadni, egy harmadikat pedig kivonni kell, mind csak egy lesz az eredmény
 <u>akár</u> előbb a hozzáadandót adjuk hozzá s ezen öszvetből vegyük el a kivonandót
 <u>akár</u> előbb vegyük el a kivonandót s a maradékkal öszvezzük a hozzáadandót (2)
 <u>akár</u> a kivonandót vonjuk ki a hozzáadandóból s a mi fennmarad azt adjuk hozzá (4)
 Példák az 1) esetre:
 $12 + 4 + 7 = 12 + 7 + 4 = 12 + (7 + 4)$;
 A 2) esetre
 $12 + 7 - 4 = 12 - 4 + 7 = 12 + (7 - 4)$.
4.) <u>A folytatás</u>
De továbbá igen egyszerű megfontolással következik még a fenebbiekből, jelesen (1) ből a–nak mely akármely számot jelenthet helyébe 0 – t téve:
$0 + b + c = 0 + c + b$; vagy
$b + c = c + b$; azaz
két számnak mind csak egy az öszvete akármelyikhez adjuk a másikhoz vagy akármelyiket vegyük pótlandónak s a má-

5. oldal nagylap

sikat potlónak, közülök. Szám példában
$5 + 13 = 13 + 5 = 18$
És továbbá ebből viszont foly, hogy akár hányból álló öszvezendők sorát bármikép változtassuk is, csak hogy egyet is közülök el ne hagyjunk, vagy ujat közéjök ne igtassunk, a végeredmény mindig csak ugyan az lesz, mert ezen öszveadandók sorában akármely két szomszédság helyét egymással föl lehet cserélni, a nélkül hogy az egész képlet értéke változnék. Pl. ha az öszvezendők:
$a + b + c + d + e + f$, ezek közül akár melyik szomszédpár pl. c és d helyet cserélnek, amikor is lesz belőlök az a sor:
$a + b + d + c + e + f$: mely hogy egyértékű az előbbivel, könnyen leírnók, hogy kezdete $a + b$, mindkettőnek közös, s tehát egy eredményt ad, ehez adatik egyikben előbb c s azután d, másikban előbb d azután c, tehát ezek hozzáadása által ugyanazon eredmény származik (1) szerint, azon túl rendre ismét ugyanazok adatnak az eddig egyenlő eredményekhez, s tehát végül is egy eredmény jön ki. S mind tovább, így mind csak szomszédokat cserélve föl egymással, mindeniket akármely , tetszésünk szerinti helyre el lehet juttatni: önként foly a kimondott nevezett igazság. Mit latinosan így szokás kifejezni Ordo addendorum non mutat summa. Algebrailag pedig így lehetne:
$a + b + c + \ldots + l + m + \ldots + v =$
$b + a + d + \ldots + c + n + v + \ldots + r =$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

42§ <u>Kivonás</u>
Alapképlet : $a - b = a - b$
Kérdések:
1.) $(a + c) - b = ?$
2.) $(a - c) - b = ?$
3.) $a - (b + c) = ?$
4.) $a - (b - c) = ?$
Könnyű átlátni, hogy
1. Ugyanazon kivonandó mellett, a menynyivel nagyobb vagy kisebb a kisebbítendő szintén annyival lesz nagyobb vagy kisebb a maradék is; és
2. Ugyanazon kisebbítendő mellett, a mennyivel nagyobb vagy kisebb a kivonandó, megfordítva épen annyival lesz kisebb vagy nagyobb a maradék
Igen természetes, hogy minél nagyobb számból vonunk ki bizonyos számot, annál több, s minél kisebből, annál kevesebb marad, ellenben minél nagyobb számot vonunk ki bizonyos számból annál kevesebb lesz a maradék s minél kisebbet annál nagyobb a maradék. Tehát
$(a + c) - b = (a - b) + c$
$(a - c) - b = (a - b) - c$
$a - (b + c) = (a - b) - c$
$a - (b - c) = (a - b) + c$
mik lehetségig zárjeltelenítve így állanak:

5. oldal nagylap háta

1) $a + c - b = a - b + c$
2) $a - c - b = a - b - c$
3) $a - (b + c) = a - b - c$
4) $a - (b - c) = a - b + c$
Ha már az így leírottakat szóban fejezzük ki, látni való hogy
1.) Az első semmi újat nem mond hanem csak azt ismétli mi az öszvezési (2) már kifejezett
2.) A (2) és (3) pedig azt az igazságot foglalják magukba, hogyha akármely számból más két számot kell kivonni, mind csak egy eredmény jön ki:
    <u>akár</u> előbb egyiket azután a másikat.-
    <u>akár</u> előbb emezt és azután amazt.
    <u>akár</u> a kivonandót előbb öszveadván, ezt az öszvetet vonjuk ki belőle. Végre
3.) A (4) nek értelme az hogy, mind csak egy eredményre jutunk akár két akármely szám különbségét vonjuk ki valamely számból, akár ezen különbség kisebbítendőjét vonjuk ki előbb s a maradékhoz adjuk hozzá a kivonandóját. Természetes, mert ha valamely számból, különbséget kel kivonnunk, midőn ezen különbségnek kisebbítendőjét vonjuk ki, <u>igen sokat</u> vonunk ki, s tehát <u>igen kevés</u> lesz a maradék, és pedig annyival többet vonunk ki s annyival kevesebb a maradék a kelleténél, mennyi ama különbségnek kivonandója, ezt tehát azon maradékhoz <u>hozzá kell adnunk.</u>

43§ <u>Folytatás</u>

Ezek további folyadékai, jelesen
(1) nek, hogy akárhány, egymást követő s akármily előjegyekkel bíró tagok sorában, két oly tagnak helyét, melyek közül egyik + másik – előjegyű, az az egyik öszvezendő, másik kivonandó, egymással föl lehet cserélni, az egész képlet értékének változása nélkül; és
(2) nek, hogy szintén ily helycserés lehet tenni két oly taggal, melyeknek mindenike – előjegyű

És mivel már fenebb (41§ ban) adott, s itt hozzájok pótolt igazságok szerint, akármily előjegyű szomszédtagok helyeit egymással föl lehet cserélni, a képlet értékének változása nélkül, s mivel azon okoskodás, hogy folyvásti szomszédonkénti helycseréléssel, akármely tagot akármely helyre el lehet juttatni, kétségtelen, állani fog azon átalánosabb nevezetes igazság is, hogy akárhány és minő tagokból álló öszveti és különbségi képlet értéke nem változik, bármikép változtassuk benne a tagok sorát.
Azonban még itt, oly – előjegyű (kivonandó) tagoknak, melyek előtt vagy semmi sem vagy nálok kisebb áll (mint kisebbítendő) értelmet adni nem tudván, fen marad az imént előadott igazság értelméhez pótlékul hozzágondolandó ezen föltétel: „a mennyiben a sorozat a képletet értelmetlenné nem teszi”

44§ Burkolt öszveti képletnek fejletté változtatása

Burkolt öszveti képletnek nevezzük azt, melyben két vagy több zárjelekbe foglalt akárminő képleteknek öszvete fejeztetik ki. Pl. (a + b – c) + (a – b + d – c) + ($\sqrt[3]{a^2} + \frac{b}{2^c} d$) egy ily burkolt öszveti képlet, amely három öszvezendő zárjeleket azaz zárjelek tartalmát, mind öszvezési jelekkel kapcsolva egymáshoz,

6. oldal nagylap

foglal magába.
Fejlett képlet, nem téve ezen névhez, öszveti és különbségi vagy egyéb melléknevet pedig egy vagy több + és – előjegyekkel egymáshoz kapcsolt tagok egyeteme. Pl.:
$a - b^2 + \frac{3ab}{2} + b^4 - \sqrt{c^3}$ ily egy fejlett képlet, melyben az egyes tagok viszont részint öszvezendőknek részint kivonandóknak jelöltetnek.
Az előttünk álló kérdés tehát ez: lehet-e akármely burkolt öszveti képletet, vele tökéletesen hasonbecsű fejletté változtatni, és ha lehet, miként. Mire ez a felelet, hogy lehet igen is, és pedig igen egyszerűen, mert
1. A legelől álló zárjel tartalma zárjel nélkül írva is le, ugyanazt teszi (ugyan annyi értékű) mint zárjellel; tehát ezen első zárjeli zárvonalakat el lehet hagyni.
2. A második zárjel foglalatját két darabra lehet felbontani, melyek egyikét tegyék a benne foglalt tagok az utolsón kívül, ujabb zárjelbe foglalva, másikat az utolsó tag egyedül ezen zárjelbe kívül. Pl. ha a két zárjelet öszveadandó képlet volt
(a + b – c) + (d – e – f + g + h); ez a fönebbi igazságok szerint lesz egyenlő
= a + b – c + ((d – e – f + g) + h) =
a + b – c + (d – e – f + g) + h =
a + b – c + ((d – e – f) + g) + h =
a + b – c + ((d – e) – f) + g + h =
a + b – c + (d – e) – f + g + h =
a + b – c + d – e – f + g + h =
miből azon eredmény világlik ki, hogy a második zárjel egyes tagjai változatlan előjegyeikkel (az első taghoz a d–hez a ki nem írt + de oda értett + jegyet most valósággal ki is írván) az első zárjelbeli egyes, s szintén változatlan előjegyű tagok után írattak, s ugyanez történnék egy harmadik, negyedik s akárhány öszvezendő zárjelek tartalmával is, akkor is, ha a bennök foglalt tagok nem csak egyszerű betűk, hanem már szorzati, hatványi, osztati, gyökér s logarithm eredmények volnának. Miből akárhány, öszvezendő zárjeleknek hasonbecsű fejlett képletté alakítására nézve azon egyszerű szabály következik, hogy minden zárjelekben foglalt tagok, saját változatlan előjegyeikkel zárjel nélkül írassanak, egymás után. Az így előálló

fejlett képlet, melyet mások kate???? szoktak a burkoltak öszvetének nevezni, egybecsű lesz a zárjelek öszvetével; s ez a burkolt öszveti képleteknek ily móddal fejletté változtatása viseli a közönséges algebrai könyvekben az <u>algebrai öszveadás</u> címét.

45§ <u>Fejlett algebrai képletnek burkolt (zárjeles) öszvetivé átalakítása</u>

A közelebbi §ban mondottak megfordításából önként foly mikép kelljen fejlett algebrai képletet, burkolt öszvetivé átalakítani, t.i. az adott fejlett képlet tagjait ossszuk föl célunk vagy kényünk szerint akárhány csoportra (csak nem feledve, hogy az egyes csoportokban legelöl álló – jegyű tagnak, nem tudunk értelmet adni); minden csoportban az elől álló tag + jegyét, ha tetszik hagyjuk el, a csoportokat foglaljuk zárjelekbe, s a zár

6. oldal nagylap háta

jelek közé helyezünk + jegyeket. Látni való, hogy az igy eredő burkolt képlet egyértékű lesz az adott fejlettel. S ha a fönebbi szabályok szerint ujra fejletté alakítattnék át, mulhatatlanúl az előbbit adná. Pl. e fejlett képletből:

a + b – c – d + e – f + h + k – l + m + n+ +p – q

lehet először

(a + b – c – d) + (e – f + g) + (h + k – l – m) + (n + p – q)

Továbbá ebből, ha tetszik

((a + (b - c – d)) + ((e – f) + g) + ((h + (k – l – m)) + n + (p – g))

Vagy akár

(a + (b - c – d)) + (((e – f) + (g + h)) + (k – l – m)) + (n + p – g))

Ezen példából is látszik, hogy egy fejlett képletet, többféleképp lehet, hasonbecsű burkolt öszveti képletté alakítani át. Hányképp? Erről csak tanítmányaink második lépcsőjén fogunk határozotabbban szólhatni.

46§ <u>Burkolt különbségi képleteknek fejletté átalakítása</u>

Burkolt különbségi képletnek nevezzük azt, melyben egy zárjel tartalma, egy más zárjel tartalmából kivonandónak jelöltetik közbetett – előjegygyel-

Ha már éppen azon móddal, melyet az öszveti burkolt képletek fejletté alakításának kimagyarázásában követtünk, a kivonási alapképleteknek, jelesen ezeknek:

(3) a – (b + c) = a – b – c

(4) a – (b – c) = a – b + c

Szemünk előtt tartásával, a burkolt különbségieket is vizsgálat alá veszszük, szintúgy kitűnnek ezen esetnek is szabályozó elvei, mint a következő példa mutatja:

(a + b – c) – (d – e – f + g + h) =
= a + b – c – ((d – e – f + g) + h) =
= a + b – c – (d – e – f + g) – h =
= a+ b – c – ((d – e – f) + g) – h =
= a + b – c – (d – e – f) – g – h =
=a + b – c – ((d – e) – f) – g – h =
= a + b – c – (d – e) + f – g – h =
= a + b – c – d + e +f – g – h

Miből az ily burkolt képletnek fejletté alakításáról, mit közönségesen algebrai kivonásnak szokás nevezni, következő szabály felállítható: az első t.i. a kisebbítendőt magába foglaló

zárjel tagjai saját előjegyeikkel, utánok a kivonandó minden tagjai, ellenkezőre, t.i. a + - ra, a - + ra változtatott előjegyekkel, írassanak egymásután, s kész az adottal hasonbecsű fejlett képlet; s csak botor fog csodálkozni azon, hogy az így előálló maradék több tagból álland, mint allott a kisebbítendő, jelesen annyiból, hányból állottak a kisebbítendő és kivonandó együtt.
Ha két, három s akárhány zárjelbe foglalt képletek lennének kivonandók, a művelet nem változnék, hanem mindegyikre egymásután ugyanazon szabály volna alkalmazandó. Pl.

7. oldal nagylap

szám, mely másodhatvány volna, s tehát másodgyökérrel bírna, nincs több a kilencnél, gyökereikkel együtt emlékezetünkben tartván, akármely háromnál kevesebb számjegyű számról egyszerre megtudjuk mondani, másodhatvány (quadrat szám)-e s ha az, mi a gyökere s ha nem azt legalább is mennyivel kellene kisebbnek lennie, hogy az legyen, más szókkal mi a hozzá legközelebb álló kisebb quadrát szám, s az adottnak ettőli különbsége.
3.) $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$ stb, átalában a 10 akármely hatványának (1 ből és 0 ból álló számnak) második hatványa szintén csak 1 ből és 0 ból áll, még pedig két annyi 0 ból mint a gyökér, tehát mindig páros számuakból, $(10^m)^2 = 10^{2m}$, s megfordítva minden számnak mely 1–gyel s utána álló páros számu 0–kkal iratik le, van második gyökere és ez ismét 1, félannyi 0–val utána, amint a hatvány: $\sqrt{10^{2m}} = 10^m$.
3.) $(10a)^2 = 10^2 a^2, (100b)^2 = 100^2 b^2$, átalában $(10^m c)^2 = 10^{2m} c^2$
Például: $50^2 = 2500$, $700^2 = 490000$, $6000^2 = 36000000$ stb, miből következik, hogy akármely szám mely hátul páros számu 0-kból, s ezekez megelőző, egy vagy akár kétjegyű másodhatványból áll, szintén másodhatvány s gyökere az első jelentő számok gyökere, toldva félannyi 0–val mint mennyi az adott hatványban volt. Ellenben ha a kezdő számok másodhatványt alkotnak, de a 0–k száma páratlan, vagy párosok a 0–k, de a megelőző számok nem másodhatvány, az egész szám sem lesz az, s ez az utolsó esetben könnyű megmondani, mi a hozzá legközelebb járuló, ugyanannyi 0 végződő kisebb másodhatvány, t.i. az mely legközelebb jár az első számokhoz, toldva annyi 0–val, hány az adott számban van. Pl. 57000000–hoz legközelebbi hat 0–ju kisebb quadrátszám 49000000, melynek másodgyökere 7000.
4.) Ha már nem csak két, hanem akárhány jelentő számmal bíró s ezeken kívül 0-kkal toldott vagy nem toldott, szóval akármely nyilvános számról kérdezik, másodhatvány-e s mi a másodgyökere, vagy ha nem az, mi a hozzá legközelebb álló kisebb másodhatvány s annak a másodgyökere? – annyit mindenesetre első tekintetre képesek vagyunk megismerni, hogy a kérdés alatti gyökér hány számjegyű mert:
a., már láttuk, hogy egy tagu számoknak másodhatványaik vagy egy vagy két taguak, s a legkisebb kéttagu számnak (10–nek) másodhatványa (100) már három tagú, tehát megfordítva, egy vagy két tagú számnak is, vagy ha neki nem volna, legközelebbi quadrát-szomszédjának, csak egy számjegyű gyökere lehet;
b. A legkisebb kéttagu számnak (10) másodhatvány (100) három tagu, a legnagyobbnak sincs öt tagu, mert a legkisebb öttagu számnak (10000) gyökere (100) is három tagu. Tovább folytatva az okoskodást, a szemlélet könnyen meggyőz, hogy akárhány tagu szám másodhatványa, vagy két annyi, vagy annál egygyel kevesebb tagu mint maga; pl. 7 tagunak vagy 14 vagy 13 tagu, 25 tagunak vagy 50 vagy 49 tagu; m tagunak vagy 2m

7. oldal nagylap háta

vagy (2m-1) tagu; miből megfordítva következik, hogy akármely páros tagu számnak másodgyökere félannyi tagu, mint ő maga, páratlan tagunak pedig félannyi tagu mint saját tagjainak egygyel pótolt száma; tehát m- tagu számnak másodgyökere vagy m/2 vagy (m+1)/2 tagu.
5, A fenebbi 3. szám szerint akármely (nem csak egy vagy két tagu) quadrat-számhoz, ha páros számu 0–kat ragasztunk, quadrat számnak marad, a gyökere lesz ugyanaz mint amannak, toldva feleannyi 0–val, mennyi a hatványhoz járult, pl. 339889 másodhatvány 583–nak, tehát 339889000000 másodhatványa 583000–nak, s ez másodhatványa amannak.
6.) Mindezeket előre bocsátva, vegyük fül előbb egy oly számot, melynek másodgyökere kéttagu s tehát maga vagy három vagy négytagu, pl. 441 s ezen példán kísértsük meg fölállítani az ily számokbóli másodgyökér vonás szabályait. Okoskodásnak fonala a következő lesz:
441–nek (másod) gyökere két tagu, mert maga három tagból áll; ezen két tag közül az elsőt, a tízeseket, a–nak, a másodikat, az egyeseket, b–nek nevezvén, az adott számnak kell lenni= $a^2 + 2ab + b^2$ – nak, az az: azt (441-et) három oly darabra kell felszaggathatni, melyek közül egyik = a^2 , (nehány tíznek quadratuma), a másik = b^2 (nehány egynek quadratuma), a harmadik = 2ab (azon tízeknek s ezen egyeknek kettős szorzata) legyen.
A mihez legbiztosabban hozzá vethetünk, sőt kétség nélkül is kitalálhatjuk, az a^2, mert tudjuk hogy a tízek quadratuma nem egyéb, mint az egyeké, két 0–val toldva, más szóval: valamely, egy vagy kéttagu quadrat szám, százszor véve, már pedig az adott számban mindöszve is csak négy száz van, mit ugy veszünk észre, hogy a hátulsó két tagot elszakítván, meg nézzük mi áll az elszakított tagok (vagy mint mondani szokták: osztály) előtt; ily formán 4|41, áll pedig 4, mi itt = 400, s mivel 4 épen quadrát szám (= 2^2) nyilvánvaló hogy a^2 nem lehet egyéb mint 400 s következőleg a = 20, vagy is a kéttagu gyökér első (tízes helyű) számjegye kettős (2.)

$$\sqrt{4\,|\,41 = 2.}$$

mit az eredmény első helyére be is írunk így: $\frac{4\,00}{41}$ most a^2 = 400–at kivonván

Mely maradékból $2ab + b^2 = 2.20.b + b^2$–nek kell kitelni, kérdés tehát, b = ? Felelet, b oly szám, melyet ha 2.20 = 40–el szorzunk csaknem 41, de mégsem épen annyi jőjön ki, hogy még fenmaradjon valami, ugyancsak ezek 1 eredményi tag kettősét 41 alá írom, s keresvén benne 1-szeresen hogy ez az 1 = b, s hogy ezen hozzávevés alapos is, megpróbálhatom, szorozván t.i. vele a 2a = 2.20–at, miből kijön 2ab = 40, további önmagát, miből kijön b^2 =1.1 = 1 s ha már az a $2ab + b^2$ = 40 + 1 = 41 épen annyi mint az előbbi maradék, s tehát a^2 = 400–zal együtt annyi mint az előnkbe adott szám, ugy az másodhatványa lesz 20 + 1 = 21 nek

8. oldal nagylap

s tehát az annak másodgyökere. Az egész művelet folyamát így mutathatjuk ki:

$\sqrt{4|41} = 21$

$\underline{4\,00}$

41

$\underline{40}$

40

$\underline{1}$

$\underline{41}$

= =

Más példa kérdessék $\sqrt{2209} = ?$

Itt a két utolsó tagot elszakítva hátul, lesz a két első 22 mely itt 2200, mely maga nem quadrát szám s tehát nem lehet $= a^2$ hanem a közelebbi kisebb = 1600, ez tehát a^2 s annál fogva a = 40; 40 nek másodhatványát = 1600–at kivonva az adott számból, marad 600, melyben 2.40 = 80–at keresvén, 7–szer ugy találom meg, hogy valami fen is marad, próbálván tehát b = 7–et, lesz 2ab = 2.40.7 = 560, $b^2 = 49$; 560 + 49 = 609, tehát hozzá vetésünk, hogy b = 7, igazolva van s az egész gyökér 40 + 7 = 47

A művelet folyama így néz ki

$\sqrt{22|09} = 47$

$\underline{16\ 00}$

6 09

$\underline{80}$

5 60

$\underline{49}$

$\underline{6\ 09}$

= =

Harmadik példa: $\sqrt{784} = ?$

Itt $a^2 = 400$, mit kivonván marad 384, tehát a = 20, ennek kettőse = 40, ezt 384ben megkapom 9–szer ugy, hogy marad is valami, próbálván ezért b–nek 9–et venni lesz 2ab = 40.9 = 360; $b^2 = 9^2 = 81$; 360 + 81 = 441 < 384, rosz volt tehát azon fölvétel, hogy b = 9, veszem tehát csak 8 nak, így 2ab = 40.8 = 320, $b^2 = 8^2 = 64$; 320 + 64 = 384, tehát igazolva van a második fölvétel s

$a + b = 20 + 8 = 28 = \sqrt{784}$

Közelebbi fejtményeinkből már következő műveleti szabályokat vonhatunk ki, nyilvános számokbóli (most még csak kéttagu) gyökér kikeresését illetőleg:

a. Az adott számból hátulról két tag elszakíttatván, az ez által osztassék két osztályra (classis) melyek elsejében, egy vagy két számjegy lehet.

b. Az első osztály vagy quadrat-szám vagy nem, ugy a mint ott áll s tehát igaz értékében is, két 0-val toldva. Ha az ugy neki, ha nem az ugy a legközelebbi kisebb quadrat-számnak gyökere írassék első tagul,(tízesi helyre) az eredménybe, s mindkét esetben az eredménybe írt

szám, igaz értékének másodhatványa az adott szám alá íratván (tudni való hogy két végső jegye két 0 lesz) vonassék ki abból.
c. Most a kijött eredményi tagnak, igaz értékében véve kettőse kerestessék a maradékban, mire tanácsos is azt

8. oldal nagylap háta

azt alája írni, s a hányszor meg találjuk benne, ugy hogy valami fön is maradjon, azon szám írassék második tagul, egyesi helyre az eredménybe.
d. Az első tagban, a fönebbiek szerint véve, soha sem csalatkozunk, de csalatkozhatunk ezen másodikban, erre nézve tehát mulhatatlanúl szükséges a próba. Ez abban áll: az első tagnak már előbb kicsinált kettősét szorozzuk a második taggal, ugyan ezt (a második tagot) szorozzuk önmagával is, a két számot öszve adjuk, s ha öszvetök épen annyi, mennyi az első tag quadrátumának kivonása után maradt volt, ugy a második tag fölvételében nem hibáztunk; ha több, ugy a második tagot kisebbnek kell föl vennünk, ha kevesebb, s tehát uj maradékot hagy, jele hogy az adott szám nem másodhatvány, de a hozzá legközelebb álló kisebb másodhatvány (melynek gyökere az eredmény) kijön; ha belőle (az adott számból) ezen utolsó maradékot kivonjuk.
e. Ezen műveleti lépéseket gyakorlatban egy kis munka kíméléssel vihetjük véghez, mely abból áll hogy a 0–kat mivel azok a művelet rendében végül fordulnak elő, ne írjuk ki, hanem a jelentő számokat csak ugyan illető helyeikre igtatván, a 0–k helyeit üresen hagyjuk. Ehez képest például 1521–ből gyökérvonás képe ez volna

$\sqrt{15|21}$ = = = 39

$\underline{\;9\;}$

6 21

$\underline{\;6\;}$

54

$\underline{\;81\;}$

= =

Innen a gyakorlatban nem mondjuk (e példára alkalmazva) hogy 1521-ből vonatik ki 900, hanem csak 15 ből 9, s a maradék mellé lehozatik a következő osztály (21), mi az előbbivel eredményben egyre megyen ki. Hasonlóan így mondjuk: az eredményi első tagnak (nem valódi, csak egyesi értékében) vétessék kettőse, s ez a lehozás által megpótolt maradék alá írassék ugy, hogy hátul egy hely üresen maradjon és aztán kerestessék csak a felette állóban (az utolsó számjegyet nem tekintve) ez is, mint szembe ötlő, csak szóbeli különbség.
f. De a 0-k elhagyása által származó szívességet, még egy további rövidítésre lehet használni. Tudván ugyan is (58§ból) hogy szorzatok öszvete, annyi mint az öszvet szorzata, a gyökér második tagját, mikor illető helyére az eredménybe beírtuk, írjuk be egyszersmind az első tag kettősének végén hagyott üres helyre is, s az így kipótolt egész sort, egyszerre szorozzuk vele, így egyszerre jön ki $(2a + b)b = 2ab + b^2$. E szerint az előbbi példa, s még egy uj, így lesz:

$\sqrt{15|21} = 39$ $\sqrt{72|25} = 85$

9	64
6 21	8 25
69	1 65
6 21	8 25
= =	= =

7. Lépjünk át már oly számokbéli gyökérvonásra, melyeknek gyökere három tagu.
Kérdessék $\sqrt{321489}$ = ? Szakítsunk el az adott számból

9. oldal nagylap

hátul egy két számjegyű osztályt vagy jobban mondva szakítsuk őt két darabra, melyeknek egyikét, két utolsó számu jegye lesz 321489 = 321400 + 89.
3214–nek (a két hátulsón kívüli jegyekkel kifejezett számnak) keressük ki gyökerét, vagy ha az nincs, a hozzá legközelebbi kisebb quadrát-számnak gyökerét, az előbb módon, így:

$\sqrt{32|14} = 56$

25

7 14

1 06

6 36

= 78

Ebből így okoskodunk: 3214 nem quadrát szám, hanem 3214 – 78 = 3136 az, s ennek gyökere 56; tehát 313600 is az, s gyökere 560, s az egész adott számból, mely 321489 – 313600 = 7889, kivonván 560 másodhatványát marad 7889, t.i. az előbbi maradék (78) toldva a legelőbb leszakított osztálylyal (89) s most 560–t, az eddig ki jött eredményi részt vevén a–nak tehát 313600–t a–nak, s a még hiányzó harmadik tagot, az egyeseket ismét b–nek nevezvén, az a^2 kivonása után maradó 7889 – ből: $2ab + b^2 = (2a + b)b$ – nek kell kitelni. Ismét kettősét vevén tehát a már kijött eredményi résznek, 2.560 = 1120–at keresem 7889-ben, ugy hogy valami maradjon is, találom 7-szer. Ezt írom tehát 3-k eredményi tagnak, megpróbálom s lesz 2ab = 1120.7 = 7840; $b^2 = 7^2 = 49$; ezek öszvete 7840 + 49 = 7889, tehát helyes volt a fölvétel s az egész gyökér = 560 + 7 = 567
A művelet (itt is az előbbi szám e. és f. pontjaiban tárgyalt rövidítéseket alkalmazva) teljesen ily alakban áll.

$\sqrt{32|14|89} = 367$

25

714

1 06

636

7889

1127

7889

= =

Más példa (maradékkal)

$$\sqrt{9|94|07} = 315$$

$$\begin{array}{l} \underline{9\quad} \\ \quad 94 \\ \underline{\quad 61} \\ \underline{\quad 61} \\ \quad 33\ 07 \\ \underline{\quad\ \ 6\,25} \\ \underline{\quad 31\,25} \\ \quad\ \ 1\,82 \end{array}$$

Tehát 99407 nem másodhatvány, s a legközelebbi kisebb quadrátszám 99407 – 182 = 99225, melynek gyökere 315.

8. Hasonlóan lehet, a fönebbi okoskodás továbbvitelével megmutatni, hogy a háromtagu gyökérvonáson alapul s szintugy megy véghez a négytagu, ezen az öttagu, s így tovább

9. oldal nagylap háta

vább akár meddig. Mihez képest már az egész kimerítő szabályt aláfoglalva, akárhány tagu gyökérvonás végbevitelének módja a következőkből fog állani.

a. Az adott szám, hátul kezdve szaggattassék két két számjegyes osztályokra; a legelöl álló osztályban e szerint vagy szintén két vagy csak egy számjegy marad

b. Ha az első osztály magában véve quadrat szám, annak, ha nem az, a hozzá legközelebbi kisebb quadrát számnak gyökere írassék be első eredményi tagul, s ezen bejegyzett tag quadratuma az első osztály alá íratván, vonassék ki abból.

c. A maradék mellé hozassék le a következő osztály

d. A kijött eredményi tagnak írassék a kettőse s ez írassék a lehozottakkal megtoldott maradék alá, egy üresen maradó helylyel a végén, s kerestessék felette állóban (ennek utolsó számjegyét oda sem értve); a hányszor megtaláltatik, írassék be második eredményi tagul is, az üresen hagyott helyre is.

e. Ezen uj eredményi taggal szoroztassék a közelebbről megpótolt sor s a szorzat vonassék ki az iménti (pótolt) maradékból. Az ujabb maradékhoz hozassék le az adott számból a most következő osztály.

f. Ismét vétessék kettőse, az egész eddig kijött eredménynek, ez ismét írassék a (pótolt) maradék alá, a vég-hely üresen hagyásával, ismét kerestessék a felette állóban az utolsó számjegyet oda nem értve, az osztat ismét írassék be az eredménybe is az üres helyre i, ismét szoroztassék vele, de csak vele, nem az előbb már állott tagokkal is, a volt és megtoldott osztó, ismét vonassék ki a szorzat, s a maradékhoz hozassék le a következő osztály.

g. E módszer folytattassék a hátra levő osztályok elfogyásáig, mindig csak egy egy osztályt hozva le egyszerre, mindig a már kijött egész eddigi eredménynek kettősével osztva s mindig csak az ez által eredő osztati taggal szorozva. Jegyezzük meg, hogy ha valamelyik kijövő szorzat nagyobb lesz az előbbi (pótolt) maradéknál, melyből ki kellene vonatnia: jele hogy a közelebbi tag az eredményben igen nagynak volt véve, azt tehát szállítani kell; ha pedig valamelyik kettős szorzat nem találtatnék meg a felette állóban, a miben keressük, jele hogy az eredményben 0- t kell írni, s akár azzal végezni a szorzást, mikor maradékul az előbbi (pótolt) maradék jön ki, akár ehez egyenesen egy uj osztályt lehozni. Végre.

h. Az osztályok elfogyása után vagy maradt fön utolsó műveleti maradék vagy nem. Ha nem, ugy az adott szám másodhatvány, s gyökere a mi kijött. Ha igen, ugy az adott szám nem másodhatvány s a legközelebbi kisebb quadrát-számot felyül haladja annyival, mennyi a végmaradék s ennek kivonása után kijön a megtalált gyökér másodhatványa.
Próbája a gyökérvonási műveletnek abból fog állani, hogy a kijött gyökér másodhatványoztatván (önmagával szoroztatván) ha az adott szám quadrát volt, ugy közvetlen, ha szám adatása után, annak kell kijőni.

Végül még pár példa, s néhány feladat:

10. oldal nagylap

1.

$$\sqrt{42|87|63|04} = 6548$$

36
6 87
1 25
6 26
62 63
1364
52 16
10 47 04
130 88
10 47 04
= = =

2.

$$\sqrt{25|24|05|76} = 5024$$

25
24
1 00
0 00
24 05
10 02
20 04
4 01 76
1 00 44
4 01 76
= = =

3.

$$\sqrt{5|34|56|72|48|67} = 231207$$

4
1 34
49
1 29
5 56
4 61
95 72
46 22
92 44
3 28 48
4 62 40
3 28 48 67
46 24 07
3 23 68 49
4 80 18

Tehát az adott szám nem másodhatvány, s a közelebbi kisebb quadrat számnál 48018–al nagyobb.
Keressen a tanuló másodgyökeret következő számokból:
3017964096; 119025; 76972953; 31376808225;
169391396352025; 24938762945; 524938762934; 21160000;
24689023472958302; 18512370048 stb. stb.

163§ Harmadgyökérvonás nyilvános számokból

Miután a másodgyökérvonás alapelveit s módszerét terjedelmesen kifejeztük, nem szükség a harmadgyökvonásnál szintoly részletességbe bocsátkozni, hanem az esetnek átalános hasonlatosságára hivatkozva, elég érthető lesz a mit rövidebben is fogunk előadni.

1.) Egytagu számok harmadhatványai (cubusok) táblája:

Gyökérszámok	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Harmadhatványok	1	8	27	64	125	216	343	512	729

A mivel $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$, átalában $\left(10^n\right)^3 = 10^{3n}$, tehát az idézett 9 harmadhatványnak, s nem különben akármely számnak mely ezekből s ezekhez végül járuló nehány három zéróból áll, harmadgyökerét azonnal tudjuk.

2.) Egy tagu szám harmadhatványa vagy egy vagy kettő vagy három tagu, a legkisebb két tagué (10) már négy (1000), a legkisebb három tagué (100) már hét tagu (1000000) s tehát a két taguak harmad hatványai vagy négy vagy öt vagy hat taguak, miből a következést tovább vive s megfordítva, könnyű megismerni, hogy akárhánytagu, előnkbe adott számnak harmadgyökere hány tagu? T. i. ha tagjai száma hárommal osztható, harmad-annyi tagu a gyökér mint a hatvány; ha nem osztható lesz az 1-el vagy 2–vel nagyobb szám mint a hatvány tagjai száma, ezen hárommal osztható számnak harmada lesz a gyökér tagjainak száma. Pl. 21 tagu szám harmadgyökere 7 tagu, 19 tagué szintén 7 tagu; 11 tagué 4 tagu stb. Átalában, ha a megadott szám m tagu, a gyökér

10. oldal nagylap háta

m/3, (m+1)/3 vagy (m+2)/3 tagu lesz, a szerint a mint m, m+1 vagy m+2 osztható 3–mal, mit csupa számlálás utján ugy is ki lehet találni – szakasztassék el hátulról kezdve az adott számból, hármanként annyi osztály, ahány kitelik, mikor az első osztályba egy, két vagy három számjegy marad, s a hány ily osztály (az első netalán csonkát is oda értve) telik ki az adott számból, annyi tagu harmadgyökere, ha van, vagy a hozzá legközelebbi kisebb cubust ha maga nem harmadhatvány.

2.) Két tagu gyökérnek kivonása (4, 5 vagy 6 tagu számból) itt is arra megy ki, hogy az adott hatványt azon négy alkotóra szaggassuk föl melyekből egy kéttagu képlet cubusa áll. Itt is tehát a gyökér első tagját (a tizest) a–nak, második tagját (az egyest) b–nek nevezvén az adott hatványt következő négy tagra kell szaggatni: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

A művelet, példán legkönnyebben fölfogható lesz. Legyen az adott szám, melynek harmadgyökere kerestetik: 54 872.

A = az hány lesz (0–ra végződik) tehát a^3–nak három 0-n kell végződnie; három 0-n végződő, s az adott számhoz legközelebb járó cubus pedig 27000, mi abból tűnik ki, hogy a három utolsó számjegyet elszakasztván, az elől maradó 54-hez legközelebbi kisebb cubus 27. Ennél fogva világos hogy a^3 nem lehet más mint 27 000, tehát a = 30; ezt írjuk tehát (vagy helyett csak 3–at, mivel egy tag még jön utána) első eredményi tagul; s magát a 27000-et kivonjuk az adott számból ily formán

$$\sqrt[3]{54|872} = 3$$

$$\underline{27\,000}$$

$$27\,872$$

, már ezen 27872-ből ki kell telni $3a^2b + 3ab^2 + b^3$–nak; s hátra van még hozzá vetni, mi lehet b? A hátra levő három közüli első tagnak, u.m. $3.30^2.b$–nek nyilván valamivel kisebbnek kell lenni 27872–nél, hogy a más kettő számára is maradjon valami; tehát b egy olyan szám lesz, amennyiszer 3.30^2 t 27872-ben ugy kapjuk meg, hogy valami fenn is maradjon. E végre $3.31^2 = 2700$–t írjuk alája a 27872–nek s keressük benne; bámulatunkra megtalálhatjuk, akár tízszer is, de meggondolva, hogy b semmi esetre 10 nem lehet, mert így a

+ b = 30 + 10 = 40 volna, a mi lehetlen, mert $40^3 = 64000$, veszszük próbából b-t 9-nek, ehez képest lesz

$3a^2b = 3.30^2.9 = 24300$
$3ab^2 = 3.30.9^2 = 7290$
$b^3 = 9^3 = 729$

öszvesen 32359 > 27872

tehát kitűnik hogy b igen magasan volt véve 9nek próbáljuk tehát 8-nak lesz

$3a^2b = 2.30^2.8 = 21600$
$3ab^2 = 3.30.8^2 = 3760$
$b^3 = 8^3 = 512$

öszvesen 27872 épen annyi mint a maradék.

Igazolja tehát a próba, hogy b = 8 s tehát az egész gyökér (a + b) = 30 + 8 = 38

11. oldal nagylap

4.) A végző 0-k itt is elmaradhatnak, de azon rövidítésnek mi szerint a másodgyökérvonásnál a kijött utolsó eredményi tagot az osztó végében hagyott üres helyre is leírtuk s így egy szorzással találtuk ki a hatványbeli két hátra levő tagot, itt alkalmazása nem igen lehet. Külön számítjuk ki s illető helyikre, az az egy egy helylyel hátrább esőleg írjuk, tehát a három kívánt tagot, s öszveadván, hasonlítjuk öszve a volt maradékkal.
Íme egy egészben kidolgozott példa:

$$\sqrt[3]{438|976} = 76....(a+b)$$

$$a^3 = \underline{343...}$$

$$95976$$

$$\underline{3a^2 = 147..}$$

$$3a^2b = 882......$$

$$3ab^2 = ..756....$$

$$\underline{b^3 = ...216...}$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 95976$$

5.) Ha két tagu gyökeret tudunk venni, tudunk három tagut is, mert az adott szám utolsó három számjegyét elszakasztva az elől állókból vonunk két tagut, a maradékhoz hozzá toldjuk ezt az elszakasztott három tagot, a már kijött két gyökéri tagot veszszük ujabb a-nak, ennek másodhatványa hármasát keressük a maradékba, a két végső számjegyet nem tekintve, ugy hogy valami fen is maradjon; ehez képest hozzá vevén a harmadik vagy utolsó taghoz, hogy hozzá vetésünk helyes volt, megpróbáljuk a maradékban még feltaláltatni kellető három képlet kiszámítása, öszveadása s vele való öszvehasonlítása által. Pl.

$\sqrt[3]{41\,|\,063\,|\,625} = 345$	1759625
27	3468..
14 063	17340..
2 7 . .	2550.
10 8..	125
1 44.	17559625
64	= = =
12 304	

Szintugy következik háromtagu gyökérvonásból a négytagu kikeresése, s így tovább akármeddig, minél fogva már akárhánytagu számbóli harmadgyökér-vonás szabályait, kimerítőleg terjesztjük elő:

a.) Az adott szám szaggattassék osztályokra, hátulról kezdve eléfelé, minden osztályba három számjegyet rendezvén, minél fogva az első osztályba egy, két vagy három számjegy esik.

b.) Az első osztálynak, ha van, ha pedig nincs, a legközelebbi kisebb cubusnak harmadgyökere írassék első eredményi tagul s ennek harmadhatványa vonassék ki az első osztályból, a maradék mellé hozassék le a következő (második) osztály.

11. oldal nagylap háta

c.) Vétessék a kijött eredményi tagnak, azt csak egyedül tekintve másodhatványának hármasa, s ez írassék be a lehozottal megpótolt maradék alá ugy, hogy hátul két számjegy üresen maradjon s kerestessék a fölötte állóban (t-i- abból és a két utolsó jegyet oda nem értve); a hányszor megtaláltatik benne, az a szám, vagy biztos hozzá vetés után kisebb is írassék második eredményi tagul.

d.) Ezen ujabb eredményi taggal szoroztassék a közelebbi osztó s a szorzat írassék ismét két helynek üresen hagyásával. Vétessék ugyan ezen uj eredményi tag másodhatványának hármasa s ez szorozatván az előtte kijött taggal (csak mint egyessel), a szorzat írassék az előbbi alá, egy helylyel odább nyújtva, t.i. már csak egy helyet hagyva végül üresen, vétessék ugyan az uj eredményi tag harmadhatványa s ez írassék a más két sor alá, már egy véghelyet sem hagyva üresen. A közelebb kijött három sorszám öszvete vonassék ki az előbbi megpotolt maradékból, s az ujabb maradékhoz hozassék le a következő osztály.

e.) Vétessék most (s a következő hason esetekben) az addig kijött egész eredménynek másodhatványa, s ennek hármasa, ez ismét írassék be ugy a maradék alá, hogy végül két hely maradjon, kerestessék a felette állóban, az osztat írassék következő eredményi tagul, ennek segélyével alkotassék három uj szám, u.m. 1.) ezen uj tag s a közelebbi osztó szorzata ($3a^2.b$) 2.) az uj tag másodhatvány hármasának az előbbi tagok egészéveli szorzata; 3.) az uj tag harmadhatványa. Ezek írassanak egymás alá, egy egy taggal tovább terjedőleg; adassanak öszve, öszvetük vonassék ki az előbbi maradékból; az ujabb maradék mellé hozassék le a következő osztály, s a művelet ugyan azon eljárási móddal folytattassék míg több lehozni való osztály nincs.

f.) Ha végül maradék nem jön ki, az adott szám cubus volt, s gyökere a kijött szám; ellenkező esetben a hozzá legközelebbi kisebb cubus (melyé a gyökér) a maradékkal kisebb az adott számnál.

g.) Próbája a műveletnek lesz, ha a kijött harmadgyökér harmadhatványra emeljük s a maradékot (ha volt) ehez adván kijön az adott szám.

Végre jegyezzük meg mind a másod mind a harmadgyökérvonásról, hogy ha a maradék elfogy, de a lehozandó osztályok nem, ezek azonban csupa 0-kból állanak, a gyökér lesz az ami már kijött, toldva annyi 0-val, hány csupa 0-kból álló osztály még lehozandó. De ha volna maradék, rendes módján folytatandó.
Végül egy pár példa s nehány feladat:

12. oldal nagylap

Képet kivágni az algebra 22 oldalból

A tanuló számítsa ki következő számok harmadgyökereit:
3461134081 (az utolsó példa beli számhoz legközelebbi kisebb cubus); 49836032; 40353607; 340068392; 115145914625; 18970074963; 8108486729; 280754038592; 165794875577856; 328509000000; 397144793370057698;930110496292828068З stb.

12. oldal nagylap háta - Üres

1. oldal

Algeb 2

A szorzásnak fordítottja a szorzótársazás, vagy ugynevezett osztás, melyben megadatik a szorzásbeli eredmény vagy a szorzat, s az egyik szorzótárs, s kérdetik a másik szorzótárs. Itt tehát eredítők az adott szorzat, s az adott szorzótárs (az osztandó és az osztó), eredmény a kérdett szorzótárs vagy az osztat.
3. Az emelésnek két fordítottja van u.m.
a) a gyökérvonás s gyökerezés, ha adatik az emelet s a logarithm és kérdetik az alap v. gyökér, mely azon logarithm emeletre emelve azt az emeletet adja. Itt tehát az eredítők az adott emelet s az adott logarithm eredmény a kérdett alap vagy gyökér, és
b) A logarithmozás, ha adatik az emelet és az alap s kéretik a logarithm vagy hogy mily fokra kell emelni azt az alapot, hogy az az emelet jöjjön ki. Itt tehát eredítők az adott emelet és az adott alap, eredmény a kérdett logarithm.
A hét számtani műveletek, ezek szerint a következők

1. oldal háta

1. Öszveadás 2. Szorzás 3. Emelés 4. Potlótársazás 5. Szorzótársazás 6. Gyökerezés 7. Logarithmozás
S minden számot kerülő beszéddel ki lehet fejezni mint ezen műveletek eredményét hét számmal s azon művelet jelölő jellel mellyel a kifejezendő szám a hét kifejezettből származik, mely jelek a következendők
1. Öszvet képpen : A két számot melyek által egy harmadikot ki akarjuk fejezni, leírjuk egymás után, s közükbe teszünk egy felálló keresztet. P.o. 7-et kerülőleg kifejezhetjük így 4 + 3, mert az jelenti azt a számot mely ki jön ha 4hez hármat adunk az pedig éppen hét.. így 12 + 21 33nak, 171 + 57, 228nak kerülő kifejezései. Így a + b teszi két számnak, melyek közöl egyiket önkényűleg 0-nak másikat b-nek neveztünk, öszvetét vagy akármely két számnak öszvetét. A keresztet szóval ugy mondják ki: meg vagy plusz.
2. Potlótárs képpen: Az adott öszvet elől íratik, utána az a jegy – (egy vízfektű vonáska) s ezután az adott potlótárs

2. oldal

p.o. a 4et e szerint így lehet le írni 10 – 6, mely jelenti azt a számot, mely 6nak potlótársa 10re, tehát éppen a négyet, így ezen kifejezések 18 – 2, 100 – 37, 1218 – 523 16t, 63at, 695öt jelelnek. Így a – b jelenti egy b nevű számnak a- rai potlótársát, vagy akármely két szám különbségét. A vonást más szóval így mondják ki minus, vagy hijján.
3. Szorzat képpen: Ennek három módja van divatban
a) leírjuk a két szorzótársat s közükbe egy dűlt keresztet x vagy
b) egy pontot – vagy
c) semmit sem teszünk, pl. ezekben – 3x5 és 3.5 háromnak és ötnek szorzata az az tizenöt van leírva, de a semmi közte nem tett csupasz számokra nem lehet alkalmazni, mert azok a számtan rendszerhez képest így írva egyebet jelentenének pl. 35 nem, nem tizenötöt hanem harmincötöt, ellenben csupa betűvel kifejezett számoknál igen is, s azért ab éppen azt teszi mit axb vagy a.b t.i. mindenik egy a s egy b nevű

2. oldal háta

számnak vagy akármely két számnak szorzatát. A keresztet vagy pontot vagy semmit szóval így mondják ki: szor vagy szer, latinul ductum in vagy multiplicatum per
3. Szorzótárs vagy osztatképpen: ennek szintén két módja van
4. a) elől írjuk az adott szorzatot v. osztandót, utána két egymás felett álló pontot (:) ezután az adott szorzótársat az osztót. Pl. a 6 tot kifejezhetjük így 12:2 mert ez jelenti azt a számot, mely ki jön ha 12hez szorzótársazzuk a 2t vagy ha 12t osztjuk 2vel és pedig éppen 6. Második mód felül írjuk az adott szorzatot vagy osztandót, alája egy alatta egészen átmenő vízfektű vonást s ez alá az adott szorzótársat vagy osztót. Pl. 6t így fejezhetjük ki ezen a módon $\frac{12}{2}$, mert ez is jelenti azt a számot, mely ki jön ha 12 hez potlótársazunk 2 t, vagy 12t osztunk 2vel. A két pontot vagy a közbe tett vonást szóval így mondják ki: osztva val v. vel latinul divisum per.
5. Emelet képpen: leírjuk az alapot v, gyökeret s ennek jobb vállához a logarithmot s az egész jelenti azon gyökérnek anyiadik emeletét. Pl. 81et így írhatjuk

3. oldal

le 3^4 az az háromnak negyedik emelete mert ez éppen 81. A kimondás úgy van mint ezen példában, vagy rövidebben: három fel négy vagy még rövidebben: három négy.
6. Gyökér képpen: Leírjuk az emeletet s felibe egy ily alaku jegyet $\sqrt{\;}$, s ennek felső öblibe a logarithmot, mely kifejezés aztán jelenti azon emeletnek anyiadik gyökerét hány az öbölbe van írva. Pl. $\sqrt[3]{64}$ jelenti a négyet, mert 64nek 3^k gyökere 4. Kimondása egy van. Hatvannégynek harmadik gyökere 4
7. Logarithm képpen: Írunk egy lefelé fordított öblű jegyet milyet a gyökérjelelésnél felfeleállót írtunk. Ennek haslásába írjuk az emeletet, öble alá pedig az alapot v. gyökeret, melynek a felül írt szám anyiadik emelete hány a kifejezendő logarithm pl.
$_5$125 teszi azt a számot a hányadik emeletre kell emelni az ötöt, hogy kijöjjön százhuszonöt, ez a szám

3. oldal háta

szám pedig 3, mert ötnek 3^k emelete 125; szóval így mondatik, 125 nek 5 alapú logarithma. Ha már egy ilyen kerülő beszédi kifejezésben, valamelyik szám a leírandók közül, ismét kerülő beszéddel van kifejezve, ezt a másikba írandót zárjelbe írjuk s úgy teszszük az egész zárjelet hova kell, hova t.i. tennők ezt a számot ha közvetlen nevével vagy jelével volna kifejezve. P.o. (15 + 6) : (10 – 3) ez egy osztati kép, melyben az adott szorzat vagy osztandó egy öszvet u.m. 15nek és 6nak öszvete tehát 21, az osztó vagy az adott szorzó pedig egy különbség 10nek és 3 nak különbsége u.m. 7, tehát az egész teszi 21nek hétteli osztatát, tehát hármat. Szintúgy ezeken

$${}_5\left((31-6)\times\sqrt[3]{125}\right)^{(2+4)} = 1000000$$

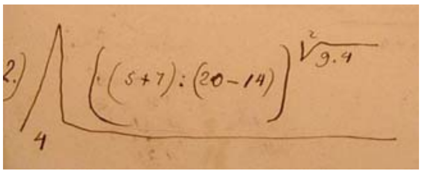
$$\left(\frac{6}{3}\right):\left(\frac{2}{1}\right) = 1$$

Mely zárjelekből nemelyik

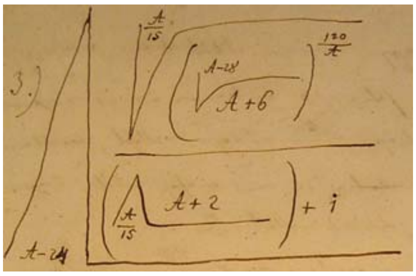
4. oldal

ket el is lehet hagyni, mikor ebből kétes értelmű nem származik, jelesen a közbenvonásozott osztatok s azoknak mind felsője mind alsója mellől, továbbá a gyökér és logarithm jelelések mellől.
Még néhány példa gyakorlás végett.
Olvastassanak ki, fejtessenek fel s kerestessenek ki erdeményeik ezeknek.

1.) $\dfrac{\left((a+b)-(a-b)\right)\times\left((a:b)\times ab\right)}{(a-b)^{a-b}}$ mi az eredmény ha a = 8, b = 4, vagy mi ha a = 10, b = 8

2.) 

4. oldal háta

3.) 

Mi az eredmény ha A = 30

4.) $\left(\left((a+b)^{a-b}\right)-(a-b)\right):\left(\left((a+b)(a-b)\right)+(a+b)\right)$ mi az eredmény ha a = 6, b = 4, mi ha a = 7, b = 6

5.) $\dfrac{\left((m-n)+(7-m)\right)\times\left(\left((3+m):(4-m)\right)^7\right)}{\sqrt[2]{m+n}}$ mi az eredmény. Ha m = 6, n = 3

5. oldal

Lesz $(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$

$\left(2a+3b-a^2\right)^2$ ből vitessék ki 3 osztóul lesz

$\left(2a+3b-a^2\right)^2 = \frac{\left(6a+9b-3a^2\right)^2}{3^2}\frac{\left(6a+9b-3a^2\right)^2}{9} =$

Vitessék ki $(a + b)^3$ ból 8 úgy hogy künnvalóban nyolc, nem pedig nyolcnak 3^k emelete legyen. Tehát más szókkal a zárjel tartalmát azzal kell osztani, minek 3^k emelete lesz nyolc, tehát 2-el, és így lesz $(a+b)^3 = 2^3\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^3 = 8\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^3$

Átalában, ha az adott emeletes zárjel $(a)^m$, s az kívántatik, hogy oly kivitelt tegyünk belőle, melynek következtében a zárjel előtt álljon b, látni való hogy a zárjel tartalmát $\sqrt[m]{b}$ el el kell osztani; s így kívül esik melléje $\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = b$

5. oldal háta

2. Kivitel gyökérjel alól

$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{b}\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{\frac{ab}{b}}$

$\sqrt[m]{ab^{-1}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab^{-1}b} : \sqrt[m]{b}$

Szóban kifejezve: A gyökérjel alól kiviendő szám a zárjelből enyésztessék ki; az az a zárjel tartalma osztassék vele, ha szorzóul szoroztassék ha osztóul állott abban, önmaga pedig miután azon gyökér vonatott belőle, mely a gyökérjelben áll, tétessék szorzóul a zárjel mellé, ha benn is szorzó, osztóul ha osztó volt.

Vagy már a tulajdonképpi, s nem tulajdonképpi kivitelt egygyüvé foglalva átalában. A kiviendővel osztassék vagy szoroztassék a zárjel tartalma, ő magából vonassék az illető gyökér, s ez tétessék

6. oldal

a zárjel mellé szorzóul az első osztóul a második esetben.

Ha az van megadva a minek künn kell lenni, ennek vétessék előbb annyiadik emelete ahány a gyökér jelben áll, s ezzel tétessék az osztás vagy szorzás.

Példák.

$\sqrt{32a} = 4\sqrt{2a}$

$\sqrt{100a^2-25b} = 5\sqrt{4a^2-b}$

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a} = \frac{\sqrt{a^2+8a}}{2}$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3:(a+b)}$

Stb.

$\sqrt{a+b}$ ből vitessék ki szorzóul a lesz = $\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{b}{a}}$

$\sqrt{a+b}$ ből vitessék ki szorzóul a, úgy hogy kívül legyen a

6 oldal háta

tehát a gyökér jel alatt a^2 val kell osztani s lesz

$$\sqrt{a+b}=a\sqrt{\frac{a+b}{a^2}}=a\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\ \text{ stb.}$$

3. Kivitel elegyes (emelés és gyökér) mutató alól

$$(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}(b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(\frac{ab}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(ab^{-1}\right)^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right):b^{\frac{m}{n}}=\left(ab^{-1}b\right)^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$$

Tehát marad a két szabály egyesítése. T.i. a kiviendővel osztunk vagy szorzunk azon jel tartalmát, s magát a kiviendőt azon emeletre emelve, s azon gyökeret vonva belőle, melyek a zárjelnél állottak. Írjuk melléje. Szorzóul az első, osztóul a második esetben

7. oldal

Több tagu képlet is kiigtatható, s természetesen ugyanazon szabályok szerint, csak ilyenkor a kiigtatott képlet is uj zárjelet fog kívánni. Pl.

$$\left(5a^2-5b^2\right)^3=(a+b)^3(5a-5b)^3\ \text{ vagy}=(a-b)^3(5a+5b)^3$$

$$\left(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-a^4\right)^m=(a+b+c)^m$$

$$\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+bc^2+b^2c-2abc-a^3-b^3-c^3\right)^m$$

$$\left(\frac{A+B}{m+n}\right)^p=\frac{(A+B)^p}{(a+b)^p}$$

Szoros értelemben kivitelnek csak akkor nevezhetjük az ily átalakítást, mikor az a mi benn volt, ott lenni meg szűnik, mi látni való hogy csak azon

7. oldal háta

esetben lehetséges, ha a kiviendőnél a zárjel tartalmát, s tehát mikor ez több tagu minden tagját osztván vagy szorozván az a betű vagy egyéb szám, melyet kiviendünk öszveöntés által ki enyésztetik; de szélesebben terjesztve a kivitel fogalmát, s csak annyit értve rajta hogy a kiviendő künn legyen – nem pedig azt is hogy benn lenni megszűnjék, ily értelemben kivihetünk mindent még azt is a mi soha sem volt benne a zárjelben csak oszszuk a kiviendővel azt mi benn van, vagy szorozzuk ha tetszik, s őt magát az illető emeletre emelve, tegyük kívül a zárjel mellé szorzóul az első, osztóul a második esetben.

Pl. $(a+b)^m$ ből vitessék ki szorzóul a

8. oldal

hättuli s osztandójának 1eli osztatából származott, mi csak anyi mintha szorzója szoroztatott volna, s osztóján 1-eli hasonló okból anyiszorta nagyobb és kisebb az elölről számlálva harmadik a másodiknál, mint a hátulról harmadik a hátulról másodiknál, s így azok is egyenlők. S átalában – az elölről s hátulról egyenlő távolságra öszvesiető (kombináció) osztatai akármely számnak, egymás köztt mindig egyenlők, de
c) Legnevezetesebb tulajdon, az ily öszvesiető osztatoknak, ezen szabályban van kimondva. Akármely szám két egymást követő osztatának öszvetei annyi mint az egygyel nagyobb szám annyiadik öszvesiető osztata, hanyadik vala a más kettő közöl az utolsó:
Példában 10 nek negyedik és ötödik öszvesiető osztata együttvéve annyi, mint 11 nek ötödik öszvesiető osztata, az az

$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}$, mit a próba igazol is mert

8. oldal háta

$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}=210$, $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=252$; $\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}=462$
s 210 + 252 = 462
minek hogy így kell lenni átalában akármely számnak (m nek) akárhányadik (p–dik) öszvesiető osztata
$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-(p-1))}{1.2.3...p}$ ugyanazon számnak következő t.i. (p+1)dik öszvesiető osztata pedig
$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-p)}{1.2.3....(p+1)}$ és

9. oldal

<u>Pótlékok s igazítások az Algebrához</u>

Nyomtatás Pag 1.
Ezen lappal kezdődik az egész, s ezen első lapok szóról szóra utánanyomandók azok mik mellette való ???? ki húzva ????senek

(még ez a cím is: ELŐZMÉNYEK – Továbbá: a ritkán nyomott szavak, s a dűlt betűkkel írattak, szintén úgy megtartandók. Egyébiránt ezen lapokon szintúgy mint az egész könyven át – minden nemére és formára a nyomtatásnak tárgyat szintúgy mint stílust és orthogaphiát illetőleg, neked Kedves fiam! Teljesen felhatalmazó szabadság adatik ezennel komolyan és ünnepélyesen, s arra kéretel, hogy az egész közlöttet mint egy már megvoltat

9. oldal háta

voltat, s uj kiadásban tetszés szerint használandót ugy tekintvén igazítva is rajta valóban, legkisebb zsenírozás nélkül meglevén én győződve arról hogy a lényeges gondolatokban csupa üres változtatási viszketeg tégedet meg nem szállhat. S már most következnek az igazítások és pótlékok, melyek beírandók az itt feljegyzett lapokon, s a kiírt számok helyére.

Pag 21 1).
De szintén ily beszédmódnak még nehány nagyon nevezetes esetei fordulnak elő a

10. oldal

Számtan sajátságos nyelvében, melyekről s jelesen a tört számokról s az ellenkező mennyiségekről majd magok helyén u.m. a számtan tropusi szakaszában – mert ezen beszédmódok valóságos tropusok – magunk is tüzetesen fogunk értekezni, addig pedig mind ezen nemeiről a számoknak hallgatván, s csak az egész, és a kimondott egyről értetődő számokra szorítkozván fogjunk hozzá, saját számtani rendszerünk fölépítéséhez.

8. A számok tulajdonai stb
Pag 72.
2) Álljon tehát itt
AZ ALGEBRA S ANALYSIS rövid nyelvtana és szótára
§1

10. oldal háta

Pag 87 3) egy uj számot alkotni öszve, melyben az egyet tegye a szorzandó, a számot a szorzónak száma. S még számlálni hogy ezen egyben hány oly egy van melyben levének a szorzandó egyei.
Pag 88. 4) Zeroszor öt forint pedig zero forint, mert ha öt forint zero számmal vétetik abban egy forint sem leszen.
Pag 100 s azon túl reád bíratik a nyomtatásbani fejtegetést választani egészben vagy kivonatban, pl: a magaddal felvitt tanácsokat követni.

11. oldal

A túl írt jegyzetek kiterjednek a nyomtatott könyv végéig. Azután kezdődik a kézirat melynek homlokára irandó czímzetül. S azt követő ide írt folytatással

Elméleti átalános számtan

(Algebra)

Első szakasza

Közértelmű számtan
§1 Előadásunk tárgya
Az elméleti átalános számtan első szakaszában úgy tekintjük a számokat mint azok legtermészetesebb, mesterkéletlen értelemben mutatják magokat. Minden szám mely itt említtetik valóságos értelemben lesz véve, azon egyek számjául, melyek hoz-

11. oldal háta

zájok kimondatnak vagy kiíratnak vagy bármiként kijelentetnek. S azon egyek akkora számjául mekkora rólok kimondatik. Azok a beszédek melyekben az adósság és a vagyon egy neménck, az északra utazás a délre utazás egy esetének, a krajczár forintnak, a kupa vékának neveztetik, tulajdonképpen nem egyebek átvitt értelmű vagy trópusi beszédnék, melynek fogalmaival és szabályaival is megösmerkedni szükséges lesz, de ezt mi csak későbbre, elméleti számtanunk második szakaszában, a sajátlag úgy nevezett trópusi számtanban fogjuk tenni, most pedig ez

12. oldal

Első szakaszban, úgy mint a közértelmű számtanban, a dolgok és számok közönségesen bévett értelménél maradunk, s ha azt mondjuk pl. „tíz kutya", ezen valósággal kutyákat s nem juhokat, s éppen tíz kutyát nem fél kutyát fogunk érteni, mikor pedig számot mondunk anélkül, hogy egyét is hozzája mondanók vagy oda értetni feltennők, olyankor mindig azon számu akármit akarunk értetni, s ha két szám egybeadásával fogunk szolani, megjegyezzük, hogy azon két szám alatt akármit, csak mind kettő alatt ugyanazt az egyet kell értetni, miként

12. oldal háta

Ezt már előzményeinkben megjegyeztük volt a dik lapon.

§" Előadásunk rendje. Lásd az írásban tovább

Alg 21 (ív) a 26 és 27§ közzé

§27 Második nemű öszveöntés 2) kapcsolattal az első rendűvel
Ennek az öszveöntésnek helye van két vagy több oly tagok köztt, melyeknek mindenikében megvagynak ugyanazon közös elemek, de ezen közösökön kívül vagynak még mindenikben külön elemek is a többiekben vagy legalább a többiek mindegyikében fel nem találhatók, pl. ezen

13. oldal

Ha mindebből kijön a negyedik, ha benne mindenütt helyébe d + 1/e – t teszünk mikor is ki jön felsőnek edc + e + c alsóul edcb + ed + eb + cb +1 s tehát az egész tört lesz $\frac{edc+e+c}{edcb+ed+eb+cb+1}$ mely megvizsgálás nyomán azonnal kimutatja hogy a mondott szabálylyal még ????, mint $\frac{edc+e+c}{edcb+ed+eb+cb+1}=\frac{(de+1)e+c}{(dcb+d+b)e+cb+1}$ s hogy mindenkor is azzal meg kell egyeníteni?? kitűnik a következő megfontolások után.
Ha a lánctörtben eléforduló alsókbeli egészeket renddel elneveznénk $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n$ – nek a kijövő kerekített törtek pedig $\frac{F_1}{A_1},\frac{F_2}{A_2},\frac{F_3}{A3},\dots$ már látszik hogy $\frac{F_3}{A_3}=\frac{F_2.a_3+F_1}{A_{2.}a_3+A_1}$ ebből hogy $\frac{F_4}{A_4}=\frac{F_3.a_4+F_2}{A_{3.}a_4+A_2}$. De mi ??? ?
Igy: $\frac{F_2}{A_2}$ ből lesz $\frac{F_3}{A_3}$, ha F_2a_3 helyett $F_2\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)$ et s az alsóban A_2a_3 helyett $A_2\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)$ et írunk tehát

13. oldal háta

$$\frac{F_3}{A_3}=\frac{F_2\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)+F_1}{N_2\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)+N_1}=\frac{F_2\left(\frac{a_3a_4+1}{a_4}\right)+F_1}{N_2\left(\frac{a_3a_4+1}{a_4}\right)+N_1}=\frac{\frac{F_2(a_3a_4+1)+a_4F_1}{a_4}}{\frac{N_2(a_3a_4+1)+a_4N_1}{a_4}}=\frac{F_2(a_3a_4+1)+a_4F_1}{N_2(a_3a_4+1)+a_4N_1}$$

$=\frac{(F_2a_3+F_1)a_4+F_2}{(N_2a_3+N_1)a_4+N_2}$ már pedig lévén mint láttuk $\frac{F_2.a_3+F_1}{A_{2.}a_3+A_1}=\frac{F_3}{A_3}$ tehát

14. oldal

$\frac{F_4}{N_4}=\frac{F_3.a_4+F_2}{N_{3.}a_4+N_2}$ Szóról szóra így lehet bebizonyítani hogy

$\frac{F_5}{N_5}=\frac{F_4.a_5+F_3}{N_{4.}a_5+N_3}$ és hogy $\frac{F_6}{A_6}=\frac{F_5.a_6+F_4}{N_{5.}a_6+N_4}$ s a ??? n akár mely számot jelentsen lesz

$\frac{F_n}{A_n}=\frac{F_{n-1}.a_n+F_{n-2}}{N_{n-1.}a_n+N_{n-2}}$ mi által egy adott lánctörtben rendre rendre mind inkább követhető törtek egymás után egymásbóli kidolgozásának fonala kezünkben van.

§5 A lánctörtek egymás után következő becseinek figyelmesebb átvizsgálata
Ha egy adott lánctörtnek egymásután következő becseit szorosabb vizsgálat alá veszszük, s amelyből

14. oldal háta

melynek nem $\frac{F_0}{A_0}$ vagy rövidebben X_0 , t.i. magát az első felső és első alsó melléktört nélkül teszen, azután a 2^k t mely kijön az első alsóhoz egy melléktörtet ragasztva, (de annak alsójához tartozó további nélkül) melynek neve $\frac{F_1}{A_1}$ vagy X_1, $\frac{F_2}{A_2}$ vagy X_2. $\frac{F_3}{A_3}$ vagy X_3……

s átalában $\frac{F_n}{A_n}$ vagy X_n.ugy találjuk, hogy az egymás után következő egybesiető törtek váltogatva nagyobbak és kisebbek, az egész tört egész becsénél t.i. X_0 nagyobb X_1 kisebb X_2 nagyobb X_3 ismét kisebb s így végig X_{2n}, mindig nagyobb X_{2n+1}, mindig kisebb a tört valódi becsénél melyet a rövidség okáért v-vel fejezünk ki, tehát $X_{2n} > v$, $X_{2n+1}<v$, mert akármi légyen az adott tört

Pl. $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}}$ hogy X_0 v, itt $\frac{1}{4}$ nagyobb az egész törtnél vagy vnél világos merthogy

$\frac{1}{4}$ ben az alsó mégis 4, kisebb mintha még adunk hozzá valamit a tört

15. oldal

§ 113 II Miként eszközöltetik az ellenkező számok által, akármely potlótársazási képlet értelmesztése?
A fönebbi czikkben kifejtett magyarázat valamely számnak más ugyanazon egyű számbeli kivétele egyre megyen ki ugyanazon szám ellenkezőjének hozzáadásával, akár 4 mérföldet vesz el 10 mérföldből, akár -4 mérföldet adjak 10 mérföldhez, mindegy lesz az eredmény, t.i. mindig 6 mérföld, mert négyet egyszeresen véve marad 6, s kerülő uton -4 et adok 10 hez, az amabból le vont 4-et s maga is megsemmisülvén marad ismét a másikból 6

15. oldal háta

íly értelmes lesz az eset, akkor is mikor kisebb számból nagyobb kivonandó, mert ekkor is ellenkező egyű de oly számot adván ugyan ahoz, s már hozzá adásról tudván hogy az mi a kívánt kivonással egy eredményű, s ez a nagyobb számú ellenkező a kisebb adott öszvetet egészen elenyésztetvén, s önmagából is ugyanannyi számu elenyészvén, lesz az eredmény magának t.i. az ellenkezőnek azon része mennyivel száma nagyobb volt az adott öszveténél. S ezekhez képest akár az adott öszvet akár az adott potlótárs legyen nagyobb a másik eredítőnél, mindenik esetben a kivonás két ellenkező szám öszveadásává változván által, minthogy az ily öszveadásnak mindég van értelmes eredménye, lesz hasonló eredménye akármely két szám egymásból

16. oldal

Differentialis calculus alapvonalai
§1, Határok Ha $f(x) \sim h$ és $F(x) \sim H$ stb
1.) $f(x) + F(x) \sim h + H$
2.) $f(x) + F(x) + g(x) + \ldots \sim h + H + g + \ldots$
3.) $A + f(x) \sim a + h$
4.) $(a + f(x)) + (b + F(x)) + (c + g(x)) \ldots \sim a + b + c + \ldots + h + H + g + \ldots$
5.) $af(x) \sim ah$
6.) $f(x).F(x) \sim h.H$
7.) $f(x).F(x).g(x)\ldots \sim h.H.g\ldots$
8.) $f(x)^a \sim h^a$
9.) $f(x) - F(x) \sim h - H$
10.) $\frac{f(x)}{F(x)} \sim \frac{h}{H}$
11.) $\sqrt[a]{f(x)} \sim \sqrt[a]{h}$
12.) $f(x) - a \sim h - a$
13.) $a - f(x) \sim a - h$
14.) $\frac{f(x)}{a} \sim \frac{a}{h}$ stb stb.

§2 Alapkérdéstárgyban
$f(x) = X$;
Ha már $x = a$ lesz $f(a) = A$
Ha $x = b$ lesz $f(b) = B$
Tehát

16. oldal háta

$\frac{A-B}{a-b}=?$ vagy $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=?$ vagy levén a > b, és pedig a = b + i s tehát a – b = i,
$\frac{f(b+i)-f(b)}{i}=?$

§3 <u>A fő esetek</u>

1.) Ha $f(x) = x^m$;
2.) Ha $f(x) = m^x$;
3.) Ha $f(x) = {}_e x = lx$ $\frac{f(b+i)-f(b)}{i}=?$
4.) Ha f(x) = sin x;
5.) Ha f(x) = arc.sin x

I. Ha $f(x) = x^m$; tehát
$f(b) = b^m$;
$f(b+i) = (b + i)^m = b^m+\frac{m}{1}b^{m-1}i+\frac{m(m-1)}{1.2}b^{m-2}i^2+...=$
$= f(b)+i(mb^{m-1})+i^2\left(\frac{m(m-1)}{1.2}b^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^{m-3}i+....\right)$
II.) Ha $f(x) = m^x$; tehát
$f(b) = m^b$,
$f(b+i) = m^{b+i} = m^b m^i = m^b.e^{ilm} = m^b\left(1+i.lm+\frac{i^2l^2m}{1.2}+\frac{i^3l^3m}{1.2.3}+....\right) =$

$m^b+i.lmm^b+\frac{i^2l^2mm^b}{1.2}+\frac{i^3l^3mm^b}{1.2.3}+....=f(b)+i\left(lm.m^b\right)+i^2\left(\frac{l^2mm^b}{1.2}+\frac{il^3mm^b}{1.2.3}+....\right)$

17 oldal

II. Ha f(x) = lx; tehát
f(b) = lb
$f(b+i) = l(b+i) = l(b(1+i/b)) = lb+\frac{1}{b}i-\frac{1}{2b^2}i^2+\frac{1}{3b^3}i^3-....$
$= f(b)+i\left(\frac{1}{b}\right)+i^2\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{i}{3b^3}-\frac{i^2}{4b^4}+....\right)$
IV. Ha f(x) = sin x, tehát
$f(b) = \sin b = b-\frac{b^3}{1.2.3}+\frac{b^5}{1.2.3.4.5}-\frac{b^7}{1.2...7}+....$
$f(b+i) = \sin(b+i) = (b+i)-\frac{(b+i)^3}{1.2.3}+\frac{(b+i)^5}{1.2.3.4.5}-....=$
$b + i - \left(b^3+3b^2i+3bi^2+i^3\right)\frac{1}{1.2.3}+(b^5+5b^4i+10b^3i^2+10b^2i^3+5bi^4+i^5).\frac{1}{1.2.3.4.5}-... =$

$$b-\frac{b^3}{1.2.3}+\frac{b^5}{1.2.3.4.5}-...+i\left(1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^4}{1.2.3.4}-\frac{b^6}{1.2...6}+....\right)+$$

$$+i^2\left(-\frac{b}{1.2}+\frac{2b^3}{1.2.3.4}-....-\frac{i}{1.2.3}+\frac{2b^2i}{1.2.3.4}....-\frac{bi^2}{1.2.3.4}-....\right)=$$

$$=f(b)-i(\cos b)+i^2\left(-\frac{b}{1.2}+\frac{2b^3}{1.2.3.4}-....-\frac{i}{1.2.3}+\frac{2b^2i}{1.2.3.4}....-\frac{bi^2}{1.2.3.4}-....\right)$$

17. oldal háta

V. Ha f(x) = arcsin x = $x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7}+...$

f(b) = arcsin b = $b+\frac{1.b^3}{2.3}+\frac{1.3.b^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.b^7}{2.4.6.7}+...$

f(b+i) = $(b+i)+\frac{1.(b+i)^3}{2.3}+\frac{1.3.(b+i)^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.(b+i)^7}{2.4.6.7}+...=$

b + i + $\left(b^3+3b^2i+3bi^2+i^3\right).\frac{1}{2.3}+(b^5+5b^4i+10b^3i^2+10b^2i^3+5bi^4+i^5).\frac{1.3}{2.4.5}-...+$ … =

$$= \begin{array}{l} b+\frac{1.b^3}{2.3}+\frac{1.3.b^5}{2.4.5}+... \\ +i\left(1+\frac{b^2}{2}+\frac{1.3.b^4}{2.4}+...\right)+ \\ +i^2\left(\frac{b}{2}+\frac{2.3.b^3}{2.4}+\frac{3.3.5.b^5}{2.4.6}+...\right)= \end{array}$$

$$f(b)+i\left(\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\right)+i^2\left(\frac{b}{2}+\frac{2.3.b^3}{2.4}+\frac{3.3.5.b^5}{2.4.6}+...\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}=\left(1-b^2\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

* Jegyzet: Minthogy $=1+\frac{1}{2}b^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}b^4}{1.2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}b^6}{1.2.3}+....=$

$$=1+\frac{b^2}{2}+\frac{1.3.b^4}{2.4}+\frac{1.3.5.b^6}{2.4.6}+...$$

18. oldal

Tehát átalában
x^m, m^x, lx, sin x, arcsin x nél
f(b+i) = f(b) + i.C + i^2D, így

$\frac{f(b+i)-f(b)}{i} = \frac{f(b)-f(b)+iC+i^2D}{i} = C+iD;$ és ha i ~ 0 ugy
C + iD ~ C vagy
$\frac{f(b+i)-f(b)}{i} \sim C$ vagy
$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} \sim C$ vagy
$\frac{f(b+dx)-f(b)}{dx} \sim C$ vagy
$\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} \sim C$ vagy jelölve
$\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} = f'(x)$

F'(x) = C; s így
1.) f(x) = x^m nél, C = f'(x) = mx^{m-1};
2.) f(x) = m^x nél, C = f'(x) = $m^{x} \cdot lm$
3.) f(x) = lx nél, C = f'(x) = 1/x
4.) f(x) = sin x nél C = f'(x) = - cos x (hiba)
5.) f(x) = arcsin x nél; C = f'(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
**Jegyzet: dx, Δx mint szorzat csak jelölés

18. oldal háta

$\frac{f(+dx)-f(b)}{dx} \sim f'(x)$ (differentialis quotiens)
$f(x+dx)-f(x) \sim f'(x)dx$ (differential)
d(f(x+dx)-f(x)) = f'(x)dx
és így
I. $dx^m = mx^{m-1}$ – hiányzik a dx
II. $dm^x = m^x.lm.dx$
III. dlx = $\frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$
IV. d sin x = cos x.dx
V. d arcsin x = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

§4. Öszvetett képletek differentiáljai.

1.) d(F(x) + f(x)) = dF(x) + df(x) Pl.
$d(x^m + lx) = dx^m + dlx = mx^{m-1}dx + dx/x$
2.) d(F(x) – f(x)) = dF(x) – df(x) = F'(x)dx – f'(x)dx
3.) d(F(x) + f(x) – φ(x) + Φ(x) + ψ(x)-…) = dF(x) + df(x) –dφ(x) + Φ(x) + ψ(x) -…=
f'(x)dx + f'(x)dx – φ'(x)dx + ….
*Jegyzet: d jelöli e szót: differential

19. oldal

5.) d(p.f(x)) = p.df(x) = p.f'(x)dc pl.
$dpx^m = pmx^{m-1}dx$

6.) $d\left(\frac{f(x)}{p}\right) = \frac{1}{p}df(x) = \frac{df(x)}{p}$

7.) d(f(x).g(x)) = ?

$\frac{d(f(x).g(x))}{d} = \frac{f(x+d).g(x+d) - f(x).g(x)}{d}$ Levén pedig

$f(x+d) = f(x) + df'(x) + d^2P$ és
$G(x+d) = g(x) + dg'(x) + d^2Z$ tehát

$f(x+d).g(x+d) = f(x).g(x) + f'(x).g(x) + g'(x).f(x) + d^2R$; ebből
$F(x+d).g(x+d) - f(x).g(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x) + d^2R$, végre

$\frac{f(x+d).g(x+d) - f(x).g(x)}{d} = f'(x).g(x) + g'(x).f(x) + d^2R$ melyik ~ = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)

Tehát
d(f(x).g(x)) = = f'(x).dx.g(x) + g'(x).dx.f(x)
vagy nevezve f(x) = y és g(x) = z
dyz = ydz + zdy; vagy nevezve yz = v
dv = ydz + zdy; $\frac{dv}{v} = \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}$

19. oldal háta

8.) d(f(x).g(x).h(x)) = ?
Nevezve f(x) = y; g(x) = z; és h(x) = v; yzv = w;
dw = d(yz.v) = vd(yz) + yzdv;
d(yz) = ydz + zdy, és
vd(yz) = vydz + vzdy, tehát
dw = vydz + vzdy + yzdv; vagy

$\frac{dw}{w} = \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} + \frac{dv}{v}$ e szerint

d(f(x).g(x).h(x)……) = d(yzjv….) =
dw = zjv…dy + yjv….dz + yzv…dj + yzj…dv + …

$\frac{dw}{w} = \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dj}{j} + \frac{dv}{v} + ...$

8.) $df(x)^n = nf(x)^{n-1}\,dx$

9.) $d\frac{f(x)}{g(x)} =$? nevezve f(x) = y; g(x) = z; és $\frac{y}{z} = v$

Minél fogva y = zv, és dy = d(vz) = vdz + zdv, tehát

$dv = \frac{dy}{z} - \frac{vdz}{z}$, s

$dv = d\frac{y}{z} = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2} = \frac{zdy - ydz}{z^2}$

20. oldal

$$a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+....$$

Melynek igazsága viszont a 3.) alattinak igazságára hagy vissza következtetnünk.

4.) $(a+b)^{-\frac{1}{m}}=a^{-\frac{1}{m}}+\frac{-\frac{1}{m}}{1}a^{-\frac{1}{m}-1}b+-\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m}-1\right)a^{-\frac{1}{m}-2}b^2+...$ hiba a harmadik tagban

mert$\left((a+b)^{-\frac{1}{m}}\right)^{-m}=(a+b)^{\frac{m}{m}}=(a+b)^1=a^1+\frac{1}{1}a^0b+\frac{1.0}{1.2}a^{-1}b^2+....=a+b$

melyel 4.) van igazolva

5,) $(a+b)^{-\frac{m}{n}}=a^{-\frac{m}{n}}+\frac{-\frac{m}{n}}{1}a^{-\frac{m}{n}-1}b+-\frac{m}{n}\left(-\frac{m}{n}-1\right)a^{-\frac{m}{n}-2}b^2+...$

$$\left((a+b)^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{n}{m}}=(a+b)^{\frac{nm}{mn}}=(a+b)^1=a^1+\frac{1}{1}a^0b+\frac{1.0}{1.2}a^{-1}b^2+....=a+b$$

Minek igazsága magának 5.) nek igazságát föltételezi.
Ez így az ugyanazon egyűség megszorító föltételétől megszabadított, vagy különböző egyű számtan hajlékonysága az az: az algebrai formuláknak a legkülönbözőbb nemű számokra egyiránt kiterjedése, ki van mutatva a binomi tannak, az algebra eddig átvizsgált mezején eléforduló formulák legbonyolultabbikának példáján.
Ezen itt előadott fejtegetés is igazolja azon szélesen terjedő s a különböző egyű számtan létezése is bévett eszméi által

20. oldal háta

által lehetővé vált szabályosságok, miszerint azon szabályok és igazságok, melyek az ugyanazon egyű számokról bebizonyíttatnak, rendszerint hogy ne mondjuk: mindig ??? illenek és igazak maradnak a különböző egyű számok által teremtett számokat illetőleg és ebből foly azon nevezetes következés, hogy a közértelmű számtanban, az egész Algebrának lényege benfoglaltatik, s az ott előadott igazságok (mint a binomi tan példája is mutatja) szintugy kiterjednek a különböző egyű számokra is. Ámbár azt hogy ez kivétel nélkül így van, épen minden lehető esetre kiterjesztve, állítani nem merjük, részint azért, mert azt ellenvetésen felül bebizonyítni nem volnánk képesek, részint mivel egyes példák egyszer is másszor is kimutatták, hogy ezen állításhoz némi megszorító feltételek csakugyan járulhatnak.