Sz. 1

Számitástan (Analysis)

Tanitványok számára

Sz K-tól

Marosvásárhely 1852

2 oldal

§1 Tanítmányunk tárgya

Ha valamely dolog számának tudása iránt érdekelve vagyunk, annak ismeretére kétképpen juthatunk el u.m. számlálás és számítás által.
1. Számlálunk ha a fennforgó tárgy egyének számát közvetlen nézlet által vizsgáljuk meg – mely számlálás terjtani tárgyaknál merésnek is neveztetik.
2. Számitunk ha valamely dolognak számát más dolognak már esmért számjából, s tehát közvetőlegesen határozzuk meg. T.i. Sok különbféle dolgok vagynak egymás iránt, vagy természet törvényei, vagy emberi szabályozások által oly viszonyba helyezve, miszerint egyiknek száma által meg van határozva a másik is, s tehát az egyiknek száma tudatván, tudható a másik is, pl. a szabadon hulló kőnek utja s hullási ideje köztt természeti törvénynél fogva ez a viszony áll, ha a hulló kő hullási idejét perczekkel mérjük, a haladási utat

2 oldal háta

pedig egy oly rúddal melynek hoszsza 15 párisi láb, az útnak hoszsza mindig anyi olyan rúd lesz, hány az ezen út megtételére fordított idő perczeinek második emelete – ha tehát pl. négy percz alatt a kő hullásbani útja mellyel ez alatt haladott = 4x4 = 16 emlitett nagyságu rud = 240 párisi láb. S éppen az ilyen járást midőn egy dolognak nem esmért számát egy más dolognak esmért számjából következtetve kitaláljuk nevezik számításnak, s az ezt vizsgáló tanítmányt számítástannak neveztük, de nem mind ezekkel egybehangulag görögösön Analysisnek,

§2 A számítástan alapvonalai

Hogy valamit kiszámíthassunk szükséges
1ör tudni egy más dolognak számát
2or a kiszámítandó dolognak már tudott számu dologtól függési viszonyát, az az hogy amannak szá

3 oldal

mából miként lehet következtetőleg kihozni ennek számát.
Lássuk hát hányféle ily függés lehetséges? Anyiféle hány számtani művelet van, tehát átalában hatónak nevezvén azt a tárgyat melynek számától függ a másiké, függőnek azt melynek száma függ a másiktól.

$1^ő$ neme a függésnek, ha a függőnek száma mindig bizonyos számmal nagyobb vagy kisebb a ható számjánál. P. o. az én éveim száma mindig öttel nagyobb az én öt évvel utánam született öcsémnél. S tehát ha megmondják hogy ő hány éves, én is megmondom hogy én hány vagyok, 5 t tevén az ő évei számához. Pl. ha ő 15 én vagyok 20, ha ő 43 ½ én vagyok 48 ½ stb, vagy ha én vagyok 60 ő 55, ha én 12 ½ ő 7 ½ stb. Algebrai jeleléssel kifejezve, ha a ható száma = H, a függő száma = F, s mindig F = H ± A
2^k neme a függésnek ha a függő száma mindig bi

3 oldal háta

zonyos számmali szorzata vagy osztata a hatónak
F = H.A, F = H:A pl. A mostani piaci árak szerint minden véka búza kel három forinton, tehát az eladott gabona árának forintjai három anyi számok mint vékák, tehát ha 10 véka gabona adatott el ára 30 forint, ha 200 annak ára 600 f stb.
A függésnek ez a neme proportió nevet visel, életben leggyakrabban eléforduló számításoknál fordulván elő különösöbb figyelmet érdemel –
3^k neme a függésnek ha a függő száma bizonyos emelete vagy gyökere a hatónak, mint vala a kő hullásának példájában. Algebrailag kifejezve $F = H^A$ vagy $F = \sqrt[A]{H}$ -

4. Ezen függések fordulhatnak elé ismételve és elegyesen is két tárgy között, pl. Ha a Mathusalem évei számából ki veszem a leányom mostani éveinek számát hatszorosan véve s a maradé

4 oldal

kot hárommal osztván s a harmadnak a második gyökerét vévén ki jön ismét a leányom éveinek száma. Látni való, hogy az van ezen függésben ki mondva, a mit algebra nyelvén így lehetne kifejezni

Mathusalem éveinek számát nevezvén = M leányom éveit = L
$\sqrt{\frac{M-6L}{3}} = L$ - Az ily ismételt és elegyes nemű függések valamint egy egyenlet alakban fejeztetnek ki úgy feloldások is, az egyenlet feloldásának szokott neveztetni.
A már érintett okból legnagyobb fontossággal bírván azok a függések melyeket a 2^k s szintúgy melyeket a negyedik pont alatt említettünk, mi időnk rövidségéhez képest itt figyelmünket csak ezekre fogjuk kiterjeszteni.

§3

I. Mértékszeres Függések – Proportiók
Mértékszeresnek mondjuk két dolognak egymástóli függését mikor egyiknek száma a má

4 oldal háta

sik számának bizonyos számmali szorzata. Algebrailag mondva ki mikor F = H.A, vagy pedig mikor azon két dolog számjainak szorzata mindenesetre ugyanazon bizonyos szám. Algebrailag ki fejezve mikor F/H = A. Az első neveztetik egyenes, a másik viszszás mértékszerességnek.

1. Az egyenes mértékszerességnek ösmertető jele az hogy ha az egyik dolog számját kettővel, hárommal a-val szorozzuk a másiknak megfelelő száma is ugyananyiszorta lesz nagyobb kétszerte, háromszorta, a-szorta. S tehát ha kettővel, hárommal osztjuk, a másiknak is megfelelő számja ugyan annyiszorta kisebbedik, s tehát a két ily függésben álló dolgok növekedés vagy apadás tekintetében egy azon uton járnak, ugy mint ha egyik nevekedik a másik is igen, ha egyik apad a másik is azt teszi, még pedig mintha mindkettőt egy iránt vagy ugyan annyiszorta –

5 oldal

Ehez képest egyenes mértékszeres függésben álló dolgok közöl egyiknek számát a másiknak számjából ki találni (ki számítni) csak anyiból áll, hogy az adottnak hatónak számját szorozzuk azon közös szorzóval hány szorta a függőnek számja mindig nagyobb, vagy oszszuk azzal hányszorta kisebb szokott lenni amannál.
Pl. ha a búza vékájának ára forintokban három anyi mint a véka számja (más szókkal ha egy véka buzának ára 3 forint) tehát hét vékának ára lesz 7x3 = 21 forint stb.
Ez a szorzat, melylyel a ható számját szorozni kell hogy kijöjjön a függőnek a számja, néha egyenesen meg van adva mind a fönebbi példában a három s ebben az egész számításban nincs semmi további nehézség, néha pedig csak oldalaslag adatik meg az által hogy mind a hatónak mind a függőnek egy egy, egymásnak megfelelő számjai adatnak meg. Pl. 4 véka buzának ára 12 forint. Menyi tehát 7 vékának? Mivel kell tehát szorozni 7et hogy ki jöjjenek árának forintjai ? F

5 oldal háta

A mivel szorozva 4 et kijött 12, azzal kell szorozni 7 et is hogy kijöjjön a vékák 7 számának megfelelő ár. Négyet pedig hogy kijöjjön 12 kell szorozni 12/4el vagy tizenkettő 4eli osztatával, tehát ily esetben a szorzót, melylyel a ható adott számját szorozni kelljen ki találjuk ha a függőnek egy már adott számját, az annak megfelelő ható számjával osztjuk, mire emlékeztetni fog az ily eseteknek következő célszerű leírás módja: melyet így olvasunk ki

V	F
4	12
7	?

4 vékának ára 12 forint, hát 7 vékáé menyi, mire a felelet ezen lépcsőinek egyszerű okoskodással fog kijönni

Ha 4 vékának ára	12 forint
Tehát 1 vékáé	12/4 „
Tehát 7 vékáé	12/4x7 = 12.7/4

Vagy mi után a kérdést az adott minta szerint írtuk le

6 oldal

az igaz feleletet adni fogja egy tört, melynek felsője egy szorzat a leírtak közötti társatlan számnak (a 12nek), a társasak közül pedig az alsónak a tört alsója pedig a társas felső.
Példa

K	Sz
27	12
15	?

Az az

27 kaszás le kaszál egy nap 12 szekér szénát, hát 15 kaszás ugyanegy nap hasonlóan dolgozva, hány szekér szénát kaszál le?
F: 12.15/27 = 20/3 szekeret.

§4

2.) Viszszás mértékszeres függések –
A viszszás mértékszeres függésnek ösmertető jele az hogy ha az egyik dolognak számját kettővel, hárommal, a val szorozzuk a másiknak megfelelő számja kétszerte, háromszorta a szorta lesz kisebbé, s tehát ha kettővel, hárommal – a val osztjuk, ez ugyananyiszorta

6 oldal háta

lesz nagyobbá. Így tehát a két egymáshoz ilyen összefüggésben álló dolgok, nevekedés és apadás tekintetében nem egy úton, hanem ellenkező úton járnak, t.i. ha egyik nevekedik másik apad, ha az apad az nevekedik meg, ugyananyiszorta nevekedik egyik mint a másik, miből következik hogy a két dolog egymásnak megfelelő számjainak szorzata mindig ugyanazon egy bizonyos szám. Pl. ha egy rétemet lekopasztja legeléssel 20 marha 5 nap alatt, tehát ugyanazt teszi 10 marha 10 nap, 5 marha 20 nap, 4 marha 25 nap és 20x5 = 10x10 = 5x20 = 4x25 = 100
Itt tehát az egyik (az adott vagy a ható) számjából a másiknak (a kérdettnek, a függőnek) számját hogy kitaláljuk vagy tudnunk kell közvetlenül azt hogy a kérdett szám az adottat hányra kell hogy kitöltse szorzással pl. ha kérdik: 10 marha hány nap éri meg

7 oldal

a réttel? S megmondják, hogy a napok számával szorozva a marhák számát 100-nek kell ki jőni, egyszerre tudom, hogy ezen napok száma nem lehet más mint 10, mert csak 10x10 = 100, de ha ezt nem mondom meg egyenesen sem, hanem csak mind két egymástól függő dologból meg adnak egy egy számot, egymásnak megfelelőket, csak megadott számokat egymással szorozva mi kapjuk meg a kívánt szorzatot, s ebből a kérdett számot. Vagy ha itt is a fönebbi írási schemát, s okoskodást követvén. Ha mondják hogy

M	N
20	5
10	?

Húsz marha mag öt nap, s kérdik hát tíz marha hány nap éri meg? Okoskodásunk ez lesz, ha 20 marha meg éri 5 nap, tehát 1 marha meg érné 20 anyi ideig, tehát 5.20 nap. S tehát 10 marha ennél tízszerte rövidebb ideig, tehát 5.20/10 napig. Vagy szabályban

7 oldal háta

bályban fejezve ki, viszszás mértékszeresség esetében, s íly leírás mód mellett, az igaz feleletet kifejezi egy tört, melynek felsője egy szorzat, szorzata a társatlan számnak (itt az 5 nek), s a két társas szám közöl a felsőnek, alsója pedig a társas alsó.
Tehát az egyenes és viszszás mértékszeresség eseteit egyben hasonlítva, a két esetre illő szabályok, ugyanazon modon leírás mellett, abban egyeznek, hogy a) mindeniknél a feleletet egy tört fejezi b) ennek felsője mindeniknél egy szorzat s c) ezen szorzat egyik szorzótársa mindeniknél a társatlan szám, de különböznek abban, hogy a) egyenes mértékszeresség esténél a felsőben esik, másik szorzótársul a társas alsó, alsónak pedig jön a társas felső,

ellenben b) viszszás mértékszerességnél, a felsőbeli szorzótárs lesz a társas felső, az alsó lesz a társas alsó.

§5 Öszvetett mértékszeres függések

Sokszor egy dolognak száma más kettőnek, háromnak s többnek is

8 oldal

számjától függ, még pedig mindeniktől külön külön, s mindeniktől mértékszeresen, egyenesen vagy viszszásan. Pl. hány szekér szénát kaszáljanak le a kaszásaink függhet a) a keszások számától, b) a napok számától melyeken kaszálnak, c) az órák számától, melyeket munkára fordítnak. S mindeniktől mértékszeresen, a hányszorta több a kaszás, anyiszorta több a szekér, habár a munkanapok és órák száma ugyanaz marad is, ahányszorta több a dolgozó napok száma, ugyanazon kaszás szám s napi dolgozó óra mellett, annyiszorta nagyobb a szekérszám, s ismét nem változván sem a kaszások, sem az napok száma, ha változik a napontai órák száma, ismét ahányszorta ez nagyobb v. kisebb, lesz nagyobb v. kisebb a lekaszált szekerek száma is. Hogy tehát az ily több rendbeli hatással lévő körülmények köztt is, a mindeniktől függő tárgy mennyiségét hibátlanul kitalálhassuk, legczélszerűbb s egyszerűbb a már használthoz hasonló leírás módot, s hasonló okoskodást követni. Példában
Ha tudatik vagy megadatik, hogy

8 oldal háta

K.	O.	Sz.	N.
12	10	30	20
20	12	50	?

12 kaszás 10 órát dolgozván napjában 30 szekeret lekaszál 20 nap alatt, s kérdetik, hogy 20 kaszás, 12 órát dolgozva napjában, 50 szekér szénát hány nap alatt vág le?
Az okoskodás, legtermészetesebben a következő kérdéseken vezethető keresztül

$1^{ő}$ kérdés	K.	O.	Sz.	N	$1^{ő}$ Felelet
	1	10	30	?	20.12
					2^{k} Felelet
2^{k} kérdés	1	1	30	?	20.12.10
					3^{k} Felelet
3^{k} kérdés	1	1	1	?	20.12.10/30
					4^{k} Felelet
4^{k} kérdés	20	1	1	?	20.12.10/30.20
					5^{k} Felelet
5^{k} kérdés	20	12	1	?	20.12.10/30.20.12

9 oldal

	K.	O	Sz	N	
6^{k} kérdés	20	12	50	?	6^{k} Felelet
					$\frac{20.12.10.50}{30.20.12}$ nap

Vagy szóban után fejtve:

Ha 12 kaszás, napjában 10 órát dolgozva, 30 szekér szénát 20 nap alatt vág le, hát nem 12 hanem csak 1 kaszás ugyananyi órát dolgozva naponként ugyancsak 30 szekér szénát hány nap fog levágni? Látva való, hogy egynek 12szer anyi idő kell, mint 12nek tehát neki kell 20.12 nap.
Enyi kell tehát 1nek ha napjába 10 orát dolgozik, de hátha minden nap csak 1 órát fordítna dologra, kétség kívül tíz anyi napot kellene dolgoznia tehát 20.12.10 napot.
S ezt is azon esetben ha 30 szekér szénányi kaszálni valója lenne, de hát hát ha csak egy szekér van ? Ekkor természetesen 30szor kevesebb nappal beéri – tehát $\frac{20.12.10}{30}$ nappal. Ez tehát a következetes felelet arra a kérdésre hogy a feltett adatok nyomán, egy kaszás, napjában egy órát dolgozva, egy szekér

9 oldal háta

szekér szénát hány nap kaszálhat le? Ebből már szinte lépcsőnként felemelkedhetünk a kérdett adatokhoz illő feleletet kitalálására u.m.
Ha egyéb körülményeket ugy hagyván csupán 1 kaszás helyett 20at vévén fel, és 20szorta hamarább végzi a dolgát, tehát $\frac{20.12.10}{30.20}$ nap alatt. S ezt is ugy ha napjába csak egy órát dolgozik, de ha napjába 12 órát fordít munkára ugy 12 szerte előbb készen lesz, tehát $\frac{20.12.10}{30.20.12}$ nap alatt, és pedig 1 szekér szénával, de ha 50 szekér kaszálni való van, erre 50 szerte több idő kívántatik, s tehát $\frac{20.12.10.50}{30.20.12}$ nap
Mi a végső felelet.
És ha már ha szemlére veszszük, hogy az adatul adott a kezdőleg feltett számok közül, melyek estek a feleletül ki jövő törtnek felsőjébe s melyek annak alsójába szorzótársaknak, ugy találjuk, s könyü átlátni hogy annak így is kell lenni, miképpen a) a társatlan szám mindig felül esik b) a társasak

10 oldal

közöl mindig egyik alól egyik felül, még pedig c) azoknál melyek a társatlanhoz egyenes mértékszerű függésben állanak a felső esik alul, az alsó felül, a viszszás mértékszerben állóknál pedig a felső esik felül, az alsó pedig alul.
Pl. ezen függési kérdésnél

NSz	Cz	V	N
20	3	100	80
45	4	?	150

Húsz napszámos, napjában 3 czipót kapván 100 véka gabonát elfogyaszt 80 nap alatt, hát 45 napszámos, naponta négy négy czipót fogyasztván 150 nap alatt hány vékát emészt fel? Megjegyezvén hogy a fogyasztandó vékák számához egyenes mértékszerben áll mind a napszámosok, mind a napontai czipók, mind a fogyasztási napok száma, lesz a felelet adott szabály szerint = $\frac{100.45.4.150}{20.3.80} = \frac{1125}{2}$ Ellenben ha a kérdés az volna

10 oldal háta

11 oldal

társak állanak, melyeknek szorzásaikból nagyocska szorzatok jőnek ki, s ezeket kell aztán egymással osztanunk. Ezen a bajon segíthetünk, s a kidolgozást egyszerűsíthetjük, akkor mikor a felsőben és alsóban fordulnak elő oly szorzótársak, melynek közös osztója lévén ugyanazon számmal oszthatók, mert ezen számmal osztván egy szorzótársat (akármelyiket) a felsőből s egyet az alsóból, a kijött törtnek becse nem változik, mert egy szorzótárs osztása osztja az egész szorzatot ugyanazon számmal, melylyel a szorzótárs osztatott, s tehát a tört felsője s alsója egy számmal osztatván annak becse nem változik. Pl.

S.á.	O	l.m.	l.sz.	N.	Ö.
12	10	2	3	10	50
20	16	3	4	?	14

Ha 12 sánczásó naponta 10 órát dolgozva 2 láb mélységű s 3 láb szélességű sánczot 10 nap alatt kiás 50 ölöt, hát 20 sánczásó napjában 16 órát dolgozva 3 láb mélységű s 4 láb szélességű sánczból 144 ölöt

11 oldal háta

ölöt hány nap alatt ás ki? Minthogy minél több a sánczásó, s minél több órát dolgozik naponta annál kevesebb nap alatt végzik el a munkát, ellenben minél több láb szélességű, több láb mélységű a sáncz, s minél több öl van ásnivaló, annál több nap kell hozzá, tehát a kérdett napok száma a két első tárgyhoz viszszás, a három utolsóhoz pedig egyenes mértékszeres függésben állván lesz az igaz felelet = $\frac{10.12.10.3.4.144}{20.16.2.3.50}$. Ezt a kifejezést egyszerűsíthetjük s lesz belőle szerre = $\frac{1.3.1.1.4.144}{2.4.2.1.5}$ továbbá = $\frac{1.3.1.1.1.144}{2.1.2.1.5}$ =

$$\frac{1.3.1.1.1.72}{1.1.2.1.5} = \frac{1.3.1.1.1.36}{1.1.1.1.5} = \frac{3.36}{5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}$$

Mely osztásoknál mikor valamelyik szorzótársból 1 lesz az egész kihagyható, mert úgy is a szorzaton

12 oldal

nem változtat.

2^k baj ha szorzó társak közt törtek vagynak vagy csupa törtek vagy elegyes törtek. Ezeket tehát elenyésztethetjük t.i.

a) ha csupa tört fordul elé, azt szorozzuk alsójával, mikor is egészszé változik, de ugyanazzal szorozzuk a tört másik alkotóját, a felsőt vagy alsót, hogy az egésznek becse ne változzék

pl.	CS	nV	K	V
	10	½	50	8
	30	2/3	100	?

10 cséplő napjában ½ véka gabonával fizetve50 kalangya elcsépléséért kapott öszvesen 8 vékát, hát 30 cséplő, napjában 2/3 vékával fizetve, 100 véka után menyit fog kapni. Az

egyenes és viszszás mértékszerességre tekintettel léve lesz a felelet

$$=\frac{8.30.\frac{2}{3}.100}{10.\frac{1}{2}50}=\frac{8.30.2.100.2}{10.1.50.3}$$ s már

12 oldal háta

Az első nemü egyszerűsítést alkalmazva reá

$$=\frac{8.2.2.2}{1.1.1.1}=64$$

b) ha a szorzótársak közt elegyes tört fordul elé ez öszveöntés által fattyu ugyan de csupa törtté kell változtatni - s akkor a mondottak szerint enyésztetik el –

Sz	d.F.	é.F
25	12 ½	2500
100	33 40/60	?

25 szobából álló házat, minden szobára hónaponként 12 ½ forint házbért számítva bizonyos idő alatt bé vettem 2500 forintot, hát egy más házamnál, melyben 100 szoba van, s minden szoba bérét hónaponként 33 f. 40 kr a szabta, ugyanazon idő alatt menyit kapok. A felelet

lesz ez: $=\frac{1250.100.33\frac{40}{60}}{25.12\frac{1}{2}}$ a törtek öszveöntése után

13 oldal

$$=\frac{1250.100.\frac{238}{60}}{25.\frac{25}{2}}$$ a felsőbeli utolsót s tehát az alsót is 60al, az alsóbeli utolsót s tehát a felsőt 2vel szorozván lesz =

$\frac{1250.x00x238x2}{25x25x60}$, s ezen még az első nemű egyszerűsítéseket meg tevén leve = $\frac{4760}{3}$

Jegyzetek 1.) Minthogy ezen utolsó nemű egyszerűsítésben a felül vagy alól eléforduló törtszám alsója onnan ahol van kienyészik, túlfelől pedig eléáll szorzóul, azért ezt a műveletet röviden az alsók túlugratásának szoktuk nevezni –

2.) Ezen második nemű egyszerűsítést czélirányosan mindig előbb próbáljuk az elsőnél –

§7 Mértékszeres függések különböző alakja

13 oldal háta

A mértékszeres függés esetei, különböző alaku kérdéseknél fordulhatnak elé.

1. Első alak a milyenek valának az eddig eléfordultak, melyek csak további melléknév nélkül, függéseknek neveztetnek – ezekről már kimerítőleg szollottunk –

2. második az egyenetlen, de mértékszeres osztás és a mértékszeres elegyítés esete

A pénz és a mértékek átváltoztatása – szolljunk még ezekről is nehány szót.

3. Az egyenetlen, de mértékszeres – osztás esete
Ha valamely számlálható tárgyat pl. egy summa pénzt többek között nem egyenlően de mértékszeresen fel kell osztani.
1^{or} Ha megadatik a részesedés mértékszeres közvetlen p.o. Egy 5000 fr. értékű örökséget 4 örökös között fel kell osztani ugy hogy egyiknek 1, másiknak 2, harmadoknak 3 negyediknek 4

rész jusson, az az a másodiknak két anyi, a harmadiknak 3 anyi, a 4^{k}nek négy anyi mint az elsőnek. Látni való hogy megoldásunk ugy lesz helyes hogy a részeket le írván u.m.

Az	$1^{ő}$é	-	1
	2^{k}é	-	2
	3^{k}é	-	3
	4^{k}é	-	4
			10

Ezen számokat öszveadom, s formálom belőlök rendre ezt a négy mértékszeres függést –

1)	v	f
	10	5000
	1	?
2)	10	5000
	2	?
3)	10	5000
	3	?
4)	10	5000
	4	?

Tíz részre esik 5000 f

Hát 1 részre, hát 2 részre, 3 részre, 4 részre – Felelet a közönséges függési regula lesz

az $1^{ő}$re $\frac{5000x1}{10} = 500$

2^{k}ra $\frac{5000x2}{10} = 1000$

3^{k}ra $\frac{5000x3}{10} = 1500$

4^{k}re $\frac{5000x4}{10} = 2000$

Melyek öszvesen tesznek 500 + 1000 + 1500 + 2000 = 5000 vagyis az egész örökség.

2^{or} Ha a részesedés mértékszeresen követőleg adatik meg, t.i. megadatván az adat, melyből természetesen foly a részesedés mértéke. Pl. egy közös kereskedésbe járult $1^{ő}$ részvényes

200 f al, 2^k 350 f al 3^k 400 al. Nyertek 1000 forintot. Miként oszszák fel azt? Természetesen azon mér-

15 oldal

tékszerrel, melyben betételeik állanak, tehát betételeket véve mértékszer szabályzóknak. Lesz az elsőnek részesedését mutató szám

$1^ő$jé 200
2^ké 350
3^ké 400

Öszve 950
Tehát az első része lesz ezen függés szerint

r.	f.
950	1000
200	?

$$= \frac{1000x200}{950} = 210\frac{10}{19}$$

A második ezen függés szerint

r.	f.
950	1000
350	?

$$= \frac{1000x350}{950} = 368\frac{8}{19}$$

A harmadiké ezen függés szerint

	950	1000
400	?	

$$= \frac{1000x400}{950} = 421\frac{1}{19}$$

15 oldal háta

S a háromnak részei öszvesen = 1000 f., miként kell.
Ha a részesedés mértékszeresen nem csak egy körülménytől pl. a közelebbi példában a betételek menyiségétől függ, hanem több meg számlálható vagy mérhető körülményektől, akkor ezeknek befolyása is tekintetbe veendő úgy hogy leíratván az együvé tartozó, s a mértékszeres béfolyással levő adatok számjai megfelelőleg szemben egymással p.o.
Közös kereskedésben bé teszen s benn hagyja a pénzét

	Betétel	Bennhagyás és ideje
1ő	200	3 holnap
2k	300	5 ,,
3k	400	2 ,,

A két rendbeli, egyaránt mértékszeres béfolyással levő adatok számjai szoroztatnak egymással, mikor is ki jön részesedési mérték

16 oldal

szernek az

$1^ő$ részére	200x3 = 600
2^k ,,	300x5 = 1500
3^k ,,	400x2 = 800

minek helyességét ezen szempontból is által lehet látni hogy a ki 200 forintot tett bé s azt 3 holnapig hagyta benn, annyi mintha 600 forintot tesz be s 1 holnapig hagyja benn, a ki 300 forintot 5 holnapig hagy benn anyi mintha 1500 forintot egy honapig hagyna ott, s végre a ki 400 forintot 2 holnapig hagy benn anyi mintha 800 ft viszont egy honapra adott volna, s így a 600, 1500 és 800 ft. Mind ugyanazon időre mért betételek egyenlő hitelűek a különböző időkre tett különböző betételek mértékszereivel, tehát így a szabályozói a részesedésnek, ezekre alapítván tehát az alábbi műveletmódot, lesznek a részesedés meghatározására szolgáló függések rendre ezek, fel téve hogy az osztandó nyereség = 2500 f.

1. első egésze

290 2500

600 ? $= \frac{2500x600}{2900} = 517\frac{7}{29}$

16 oldal háta

A másodikéra

r f

2900 2500

1500 ? $= \frac{2500x1500}{2900} = 1293\frac{2}{29}$

A harmadikéra

r f

2900 2500

800 ? $= \frac{2500x800}{2900} = 689\frac{19}{29}$

Mely részek öszvete = 2500, miként kell is.

2. A mértékszeres elegyítés esete

Sokszor némely anyagok bizonyos mértékben elegyítve egy bizonyos czélra szolgáló más anyagot alkotnak pl. 10 font kén 15 font szén és 76 font salétrom finom angolpuskaport. De természet szerint anyit öszvesen menyi az öszvea???? külön-külön . pl. itt 100 fontot. De ha az volna a kérdés hogy nincs 100 font, hanem pl. 40 v. 250 font ugyan e féle, tehát ugyan ezen anyagokból s ezen mértékszerrel elegyítendőkből, készítéséhez melyekből menyi kell.

17 oldal

az ily hasonló kérdésekre felelünk, a mértékszeres elegyítés szabály v. u. m. regula alligationis szerint, mely nem egyéb mint az egyszerű függésnek ezen esetre alkalmazása

Fpp	fk
100	10
40	?

Ha 100 font puskaporhoz kell 10 font kén, hát 40 font puskaporhoz menyi kell?

$F = \frac{10x40}{100} = 4$

Fpp	f.Sz.
100	15
40	?

Ha 100 font puskaporhoz kell 15 font szén, hát 40 fonthoz menyi? F = $\frac{15x40}{100} = 6$

Ha 100 font puskaporhoz kell 75 font salétrom, hát 40 fonthoz menyi? F = $\frac{75x40}{100} = 30$

S így hasonló esetekben –

17 oldal háta

4. Pénz vagy mértékek másnevűvé változtatása

Tudva van menyire különböznek különböző országok és helyek pénzei s egyéb mértékei egymástól névben és értékben – ha tehát egy pénzet vagy mértéket másra át kell változtatni, az az a hason értéket más nevűben ki kell fejezni, ez csak a rendes mértékszeres függési számítás szerint történik feltéve, hogy néha a kétféle pénzből vagy mértékből egymásnak megfelelő számot tudunk. pl.

Fr- l.	B. k.
123,5	87,3
1	?

123,5 franczia litre teszen 87,3 bécsi kupát, menyi kicsi kupát teszen egy litre, F = $\frac{87,3x1}{123,5} = 0,7069$

Ha pedig az egy másra átváltoztatandó pénz vagy mértékek mértékszerese nem közvetlenül egyik a másikkal hasonlítva, hanem közvetőleg több rendbeli más mértékek által adatik meg, ilyenkor a feloldás

18 oldal

módja neveztetik láncregulának, s legegyszerűbben így kezelhető, pl.

100 kilogr.	= 213,8 porosz font
100 porosz font	= 125,9 angol font
100 ang. Font	= 66,6 bécsi font

Ebből könyen kijön hogy 100 kilogr, hány bécsi font, mert egyenlőknek egyenlőkkeli szorzatai egyenlők tehát az első hasábbelieket egymással, s a tulsó hasábbelieket szintén egymással szorozván a ki jövő két szorzat egyenlő vagyis

100 kilogr x 100 por font x 100 ang font = 213,8 por font x 125,3 ang font x 66,6 bécsi font vagy mivel 100 kilogr = 100x1 kilogr, 100 por font = 100x1 por f. stb igy irván le 100x1 kilogr x 100x1 por font x 100x1 ang f = 213,8 x 1 por font x 1253 x 1 ang font x 66,6 x 1 bécsi font s továbbá egyenlőket ugyanazzal osztván a mi kijön szintén egyenlő lesz, tehát mind a két szorzatot osztván azokkal mik mind kettőben közösök lesz

100x100x100 kilogr = 213,8x125,3x66,6 bécsi font

18 oldal háta

vagyis 1000000 kilogr = 1784156,724 bécsi font – miből aztán rendes mértékszeres számítás utján akárhány kilogrammról ki lehet találni hogy hány font. Pl. 1 kilogr (1,784156724 bécsi font –
A módszer pedig rövidbe mondva el abból áll hogy az egymásra átváltoztatandó pénz vagy mértéknemét, az azokat láncszemenként egybekötő egymásnak megfelelő számértékeket együtt rendezzük el két hasábba – melyek közül egyikben áll melyet átváltoztatni, a másikban az a mivé átváltoztatni akarjuk, ezeken kívül mindenik hasábban egy egy számja a közvetítőknek. A két hasábból kihagyván azt ami közös egységét, a többiekből kijövő két szorzat egyenlő, s adja a kérdés feloldásához szükséges alapadatokat

§8 Egyenletek s azoknak feloldása

Egyenletek által dolgozzunk ki olyan számítási feladatokat, midőn a függőnek egy vagy több hatóktóli függése nem egyszerűen csak

19 oldal

a fenebbieknek, hanem vagy ismételve több egynemű vagy több különnemű függéseket is foglal magába pl. Pythagorastól kérdették tanítványai számát. Fele ugymond a Theologiát negyede a Philologiát tanulja, hetede már végzett a még három most kezdő.
Ebből ki lehet találni hogy hány volt a tanítványok összes száma t.i. 28. Miként? Erre kimerítő útmutatást később adandunk. Itt elég légyen enyire terjeszkedni. 1.) a függés feltételei, melyek szerint az a mi kérdetik függ attól vagy azoktól a mi tudatik, írassanak le algebrai nyelven, egy algebrai mondatban vagy egyenletben. P.o. az éppen most felhozott példában azt mondatván hogy a tanítványok öszszes száma áll részint theológusokból, részint philologusokból, részint végzettekből, részint kezdőkből, tehát ezeknek együtt kell tenni a tanítványok összes számát, melyet elnevezve A nak lesz a Theologusok száma = A/2, a philologusok száma = A/4, a végzetteké A/7 a kezdőké pedig 3 s te

19 oldal háta

hát leírandó az hogy ezeknek öszvete anyi mint a tanítványok összes száma az az
A!2 + A/4 + A/7 + 3 = A
A leírt egyenleten oly átalakításokat viszünk véghez melyek az egyenlőséget változtatják ugyan, de oly egyenleteket formáljanak, melynek egyik fele csupa A, másik pedig csupa ösmeretes számokból álljon, melyek aztán esméretes műveletekkel az A t amely kérdetik ki fogják fejezni. Miféle esetben így történhetik.
28 al szorozván az egész egyenletet, vagyis annak mind két felét, vagyis minden tagját, minthogy az 5^k alapigazság szerint egyenlőknek egyenlőkkel szorzásából ismét egyenlők jönnek ki, lesz tehát
14A + 7A + 4A + 84 = 28A
Az egyenlet mindkét feléből elvéve 28A t lesz
14A + 7A + 4A + 84 – 28A =0 (Ez kihúzva). Vagy öszveöntést alkalmazva
25A + 84 = 28A Az egyenlet mind

20 oldal

két feléből elvéve 25A t, lesz

84 = 28A – 25A = 3A vagy külön írva 3A = 84. Végre ezen egyenletnek mind két felét 3 al osztván lesz A = 28. Mikor az egyenlet fel van oldva, vagy a kérdett A nak menyisége kifejezve.
Ezen példa feloldásának hasonlatosságára akár mely ily egyenletre tartozó számítási kérdések feloldása két teendőre oszlik u.m.
Első a kérdéssel megmondott, s illetőleg odaértődött, vagy tudott feltételeknek algebrai nyelven egyenlet alakban leírása
Második a le írt egyenleteknek feloldása az az oly szintén igaz egyenletté átalakítása, melyben a kérdett vagy kitalálandó, s betűvel jelelt szám, egyfelől egyedül tagtárs, emeletmutató s számszorzó nélkül, másfelől mind esmeretes számokból álljanak, s ennél fogva amannak becse ezek által

20 oldal háta

ki legyen fejezve.
A mi az elsőt illeti, azt ezúttal csak példákon fogjuk gyakorlatilag tanítni igyekezni
A másodikról pedig világos és kimerítő szabályaink vagynak .
1. Példa Évi javadalmamnak egy negyedét nőmre egy ötödét magamra egy hatodát cselédeimre költöm, gyermekeimre elkél az egésznek harmada s a mi még fennmarad teszen 60 forintot melyet adóba kell fizetnem. Kérdés menyi ezen évi egész jövedelem. Jelelve azt A-val, a mondottak szerint.
A/4 + A/5 + A/6 + A/3 + 60 = A hogy ezt az egyenletet (és más hasonlókat is) feloldjuk 1) először az elöforduló alsókat el kell enyésztetni, mi meg történik ha az egész egyenletet, az az annak minden tagját, a bennük található alsók legkisebb közös osztandójával szorozzuk. Itt ez a legkisebb közös osztandó = 60, s ezzel az egyenletet szorozván kijön
15A + 12A + 10A + 20A + 3600 = 60A melyben már egy alsó sincs
2) Második lépés lesz egy oly átalakítás melynek következ

21 oldal

keztében mind azon tagok melyekben A az az esmeretlen eléfordul az egyenlet egyik felén, mind azok pedig melyekben csupán esméretes számok fordulnak elé az egyenlet másik felén találtassanak, mi meg történik ha azt a mi ott van hol nem akarjuk hogy legyen kivonjuk az egyenlet mind két feléből ha (+) előjegyű, vagy hozzáadjuk az egyenlet mindkét feléhez ha (-) előjegyű, mi által onnan a hol volt ki enyészik, az egyenlet másik felében pedig elé áll ellenkező előjegygyel, mint a milyennel eredeti helyén bírt. Rövidebben mondva ugyanezt, ha akármely tagot az egyenlet azon feléről ahol van ellenkező jeggyel az egyenlet másik felére teszünk által az egyenlet igazsága nem változik, s tehát ezen móddal eléforduló tagokat kedvünk szerint ott gyűjthetjük egyben a hol tetszik, jelezve czélunk szerint az esmeretlent (az A t magokba foglaló tagokat) egyfelől, s csupa esmereteseket másfelől. Így lesz tehát a jelen esetben
3600 = 60A – 15A – 12A – 10A – 20A
3) Harmadik lépés az öszveöntés melyet alkalmazva itt

21 oldal háta

kijön 3A = 3600
2. Az egyenlet mind két felét elosztva azon számmal mely az esmeretlen mellett szám szorzóul áll, tehát itt 3 al, mikor is kijön
A = 1200 miben az egyenlet fel van oldva.

§9 Másodrangu tiszta egyenletek

Ha a feladat algebrailag leírva egy olyan egyenletet ad melyben, első és második pont alatt felhozott kitisztítás és öszveöntés után, az ösmeretlen számot jelelő betű második emeleten áll, első emeleten pedig az egész egyenletben sehol elé nem fordul, neveztetik az (t.i. az egyenlet) második rangu, de tiszta második rangu egyenletnek. S feloldása éppen azokon a lépéseken megyen át mint az első ranguaké melyet láttunk, csak hogy a negyedik lépés után még hátra van, az egyenlet mind két feléből második gyökeret vonni. Mint a következő példánál láthatjuk

22 oldal

2 Példa Egy törvényszéknél mely állott nehány bíróból, egy elnökből s egy jegyzőből, felosztandó bírság gyűlt bé 120 forint, s mikor osztályra került a dolog némelyek azt vitatták hogy az elnök is a többiekkel egyenlően osztozzék, ellenben egy fukarabb bíró ennek ellentmondott azon további kívánattal hogy még a jegyző se kapjon részt, mert ugy mond így mindeniküknek 5 forinttal jut több mint elnök pártoló collegáink javaslatainak elfogadása esetében. Hány bíróból állott a törvényszék?
Egyenletbe írás – A bírák kérdett száma legyen A val jelölve tehát ha az elnök is osztozik lesz a részesedők száma = A + 1, ha pedig még a jegyző sem kap részt úgy az osztozók száma = A – 1, s levén az osztandó summa 120 f. tehát ebből az első esetben egyre esik $\frac{120}{A+1}$, a másodikban pedig $\frac{120}{A-1}$, s midőn a megjegyzés szerint ez 5 el nagyobb amannál tehát

$$\frac{120}{A+1}+5=\frac{120}{A-1}$$

4. Átalakítás és feloldás a)

22 oldal háta

a) az alsók kienyésztetése. Az eléforduló alsók legkisebb közös osztandója = (A + 1)x(A – 1) = A^2 – 1, mivel szorozva minden tagot ki jön
120(A – 1) +5A^2 – 5 = 120(A + 1) vagy a burkoltak helyében fejlettet téve:
120A -120 + 5A^2 – 5 = 120A + 120
b) Általvitel – hogy az A t magában levő tagok egyfelől az A-tlanok másfelől legyenek
120A + 5A^2 – 120A = 120 + 120 + 5
c) Egybeöntés 3A^2 = 245
d) A nak szám szorzótól megszabadítása
A^2 = 49
e) Gyökvonás
f) A = 7 Tehát a bírók száma az elnökön kívül és jegyzővel 7, mint az utánpróbálás valósítja

§10 Másodrangu alapegyenletek

Ha a tudva levő egyszerűsítések után az ismeretlent

23 oldal

kifejező betű egy tagban második, másban első emeleten fordul elé az egyenlet mondatik másodrangu de elegyes egyenletnek, ilyenkor is az első lépések ugyanazok mint eddig míg az átalakítás addig van víve hogy az ismeretlent magába foglaló tagok mind egyfelől álljanak, a csupa ismertet pedig másfelől. S hogy ide jutván ezen tul mit kell még tenni lássuk egy példán

3^k példa Egy szolgált katonákból s ujoncokból álló csapatnak vezére ajándékoz 225 forintot a magát jólviselt legények köztt ki osztandót. Ujonc köztök van 150, s ezek azt követelik hogy a pénz minden katonák s tehát köztök is osztassék fel, de ezt a vének ellenzik mert így mindenik 10 forinttal kevesebbet kap, mit kapna ha csak ők magok lennének az osztozók. Kérdés, hány legényből áll az egész csapat s tehát hány benne a szolgált katona.

<u>Egyenletbe – tétel</u> A legénység számát jeleljük A val s tehát a szolgáltak száma A – 150.

Elosztva 225 forintot az egész között egy egy személyre jut $\frac{225}{A}$

csak a szolgáltak közt egyre jut $\frac{225}{A-150}$, s mivel ez amannál 10 el mondatik nagyobbnak

tehát $\frac{225}{A}+10=\frac{220}{A-150}$

<u>Feloldás</u> a) Az alsók kienyésztetése történik

A (A – 150) = A^2 – 150A vali szorzás által, miből is ki jön

225A – 33750 + $10A^2$ – 150A = 225A

b) átvitel után

225A + $10A^2$ – 1500A – 225A = 33750

c) öszveöntés után

$10A^2$ – 1500A = 33750

Már most következik a mi új u.m.

d) az az A^2–t szabadítom meg számszorzójától, az egész egyenletet osztva 10 el mikor is ki jön

A^2 – 150A = 3375

e) Az egyenlet első felét megtoldom még egy taggal mely azt három taguvá még pedig egy kétttagunak második emeletévé tegye, s az evégre hoz-

zá toldandó ezen harmadik tag lesz az első emeletű A szorzója felének második emelete (itt $\left(\frac{150}{2}\right)^2=75^2=5625$, melyez az egyenlőség fenn maradásáért az egyenlet másik feléhez is hozzátoldunk így lesz

A^2 – 150A + 5625 = 3375 + 5625 öszveöntve A – 150A + 5625 = 90000

f) Mivel egyenlőknek egyenlő rangu gyökerei is egyenlők tehát

$\sqrt{A^2-150A+5625}=\sqrt{90000}$ vagy

A – 75 = $\sqrt{90000}$ s

g) még egyszer át víve A = 75 + $\sqrt{90000}$ mi szerint A ki volna találva ha 90000nek volna második gyökere mihez 75 t adván ki jön A, de mivel annak második gyökere nincs ez mutatja azt hogy A nem létező szám vagy a föladat pontbani megfejtése lehetlen dolog, mi noha úgy van, mindig ezzel mutatja ki magát hogy megfejtésül nem létező számra vezet.

24 oldal háta

Lássunk már egy oly nemű más példát, mely nem vezet lehetlen számra
4[k] Példa Két paraszt egymás melletti földjébe vetnek buzát, a kettő együtt 24 vékát. Ha nekem minden vékán melyet elvettem, anyi vékát terem, hányat te vetettél el, szól az egyik a társához, ugy remek 135 véka termésem lesz. Kérdés menyit vetett egyik menyit a másik.
Egyenletbe tétel Egyik, jelesen a szoló vetett legyen A vékát, s mivel ketten együtt 24 vékát vetettek el tehát a másik vetett 24 – A vékát, s ha amannak véka számát u. m. A t szorozzuk ennek vékáji számával u.m. 24 – A val ki kell jönni 135 nek vagy is
$Ax(24 - A) = 135$ vagy
$24A - A^2 = 135$
Feloldás a) Itt ugyan az A t magokba foglaló