Midőn a felsőbb (~~[illegible]~~) egyenletek' feloldatását folytatandók, a második vagy is egyenletnek (ha számokban [illegible] egyébként) feloldásáig [illegible] [illegible] [illegible]: a [illegible] régebben adatottak még némely előismeret kell, [illegible] még a következőkben.

1. Hogy $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + V$ és hogy ha $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots V = 0$ úgy $-a, -b, -c \ldots$ ezen egyenletben x értékei, $x+a$, $x+b \ldots$ pedig a egyenlet első felének osztói, — az már régen tudva van. De hogy megfordítva, akármely $x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \omega = 0$ adott egyenlet, ~~[illegible]~~ balfele, [mehet] bizonyos $x+h$, $x+g$, $x+f \ldots$ alakú szorzataiból [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] még is felbontható [illegible] combinatiókat, [illegible] [illegible] [illegible] harmadik vagy negyedik [illegible], s következőleg hogy akármely (nemcsak [illegible]) felsőbb rangú egyenletben van x értékeket kitevő számos megadható bizonyos számban — ez igaz ugyan, de korlátolag csak a legújabb időkben bebizonyíttatott ki [illegible] Gauss és Cauchy által, — [illegible] [illegible] [illegible] egy szintén [illegible] [illegible] [illegible], addig [illegible] ~~[illegible]~~ tekintetbe [illegible] a [illegible]. [illegible] belőle folyó következtetésekkel.

környékeivel együtt – mihelyest – (vagy mi ismét minden ugyanaz fogja ki.)

a) Minden egész számtényezős egyenletnek n-ik fokú vagy alakú kifejezés, első – s n-edik – fokú egész valós (reális) számtényezős ~~tényezőkre~~ összetevőkre bontható – s pedig

b) Csak egyképpen – vagy

c) egy ily kifejezésből előállított egyenletnek nem lehet több x-beje, mint a fokszáma van stb.

2. Állván tehát most ismét igazul hogy mindig

$$\overbrace{x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \dots}^{\mathrm{I}} + A_n = \overbrace{(x+a)(x+b)}^{\mathrm{II}} \dots (x+v)$$

tegyük kérdésbe azt: mi kifejezés jön ki I. helyett, ha II-ben minden összetevőt ugyanazon számmal megnagyobbítjuk (v. kisebbítjük) – s az a mi kijön, miben fog különbözni I.-től? Algebrai nyelven szólva.

$(x+a+m)(x+b+m)(x+c+m) \dots (x+v+m) = ?$ Mire a felelet számbeli ötlőleg kettős lehet. u.m.

a) Ha a főösszetevő összetevőkbeli három tagot így összefoglaljuk kettes csoportban –

$[(x+m)+a].[(x+m)+b] \dots [(x+m)+v]$. s I.-ben mindenütt ~~megnagyobbítva~~

~~mindenütt~~ x helyett $(x+m)$-et tevén, így fölírandjuk az új összetevőt.

u.m. $(x+m)^n + A_1(x+m)^{n-1} + A_2(x+m)^{n-2} \dots + A_n$ 1)

b) ha pedig ugyanazon összetevőket így rendezzük ~~fogunk írni~~

~~[illegible]~~

ugyanis képzünk egy

$[m+(x+a)]\cdot[m+(x+b)]\cdot[m+(x+c)] \ldots [m+(x+v)]$.

s ennek egymással szorzatát képezzük m szerint rendezve

$$m^n + \left.\begin{matrix} x+a \\ +\ x+b \\ +\ x+c \\ \vdots \\ +\ x+v \end{matrix}\right\} m^{n-1} + \left.\begin{matrix} (x+a)(x+b) \\ +\ (x+a)(x+c) \\ \vdots \\ +\ (x+b)(x+c) \\ +\ (x+b)(x+d) \\ \vdots \end{matrix}\right\} m^{n-2} + \ldots \ldots (x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+v) \qquad 2)$$

hol m^n-nek tényezője = 1.

m^{n-1} ... tényezője $(x+a)(x+b)$ .. egy [illegible] a I. beli

szorzatainak összes

sorában

m^{n-p}-nek tényezője nem egyéb mint a [illegible]

eredeti szorzatainak p-szám combinatióinak összes

~~[illegible]~~ végösszegei. C_1, C_2, C_3 .. által

jelölve .. 2) lesz egyszerűen

$$m^n + C_1 m^{n-1} + C_2 m^{n-2} \ldots + C_n \qquad 3)$$

vagy fordított rendben

$$C_n + C_{n-1} m + C_{n-2} m^2 \ldots \ldots m^n \qquad 4)$$

s mivel 1) éppen azon series kifejezése mint 2), tehát

$$1) = 2) = 3) = 4) \quad \text{– vagy is}$$

$$(x+m)^n + A_1 (x+m)^{n-1} \ldots\ldots + A_n = C_n + C_{n-1} m + \ldots\ldots + m^n \qquad 5)$$

Vagy ha $(x+m)$-nek ezen egyenlet első felében különböző emeléseit kifejtjük (binomialis series)

$$\left.\begin{array}{l}
x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} m + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} m^2 + \ldots\ldots + m^n \\
+ A_1 x^{n-1} + \frac{n-1}{1} A_1 x^{n-2} m + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} A_1 x^{n-3} m^2 + \ldots\ldots + A_1 m^{n-1} \\
+ A_2 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} A_2 x^{n-3} m + \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2} A_2 x^{n-4} m^2 + \ldots + A_2 m^{n-2} \\
\vdots \\
A_{n-2} \cdot m^2 \\
A_{n-1} m \\
+ A_n
\end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} x^n \\ A_1 x^{n-1} \\ + A_2 x^{n-2} \\ \vdots \\ + A_n \end{array}\right\} m^0 + \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1} x^{n-1} \\ + \frac{n-1}{1} A_1 x^{n-2} \\ + \frac{n-2}{1} A_2 x^{n-3} \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{array}\right\} m + \left\{\begin{array}{l} \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} \\ + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} A_1 x^{n-3} \\ + \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2} A_2 x^{n-4} \\ \vdots \\ + A_{n-2} \end{array}\right\} m^2 \ldots\ldots m^n =$$

$$= C_n m^0 + C_{n-1} m + C_{n-2} m^2 \quad \dots \quad \dots \quad m^n \qquad 6)$$

Tovább ~~Vagy~~ az ~~[illegible]~~ egyenletek egyik ~~[illegible]~~ alapigazság szerint

I II

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_n = C_n \quad \text{, mit különben ; [illegible]}$$

$$n x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} \dots A_{n-1} \cdot 1 + 0 = C_{n-1}$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} A_1 x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} A_2 x^{n-4} \dots A_{n-2} \cdot 1 \cdot 0 = C_{n-2} \qquad 7)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} A_1 x^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3} A_2 x^{n-5} \dots = C_{n-3}$$

$\vdots$

$l = i.$

Ezen egyenletekben a I. és II. alá írt kifejezések rendelése.

a) A felső sorban, I. alatt, a általunk felvett kifejezés, mely akár mely függvénynek kör képe, II. alatt, azon számoknak, melyeknek száma a II alatt, ugyanis számú Combinatiójuk tagjai vagynak, tehát azoknak összege — mikénti kellett.

b) Második, harmadik ~~sorban~~, sat. sorokban I. alatt új új x-es kifejezések, melyeknek ~~[illegible]~~ kiről mindenik, megelőzőjétől magában [illegible] le [illegible] hatá. ha mint ha az összes tagot ~~[illegible]~~ összes kif kifejezésben. [illegible] a benne levő x emeletei [illegible] sorban, ugyis x-el kezdődik sorban megáll ki jön a következő

$F_1(x) = C_{n-1}$

$F_2(x) = C_{n-2}$

$\vdots$

$F_{n-1}(x) = C_1 = a+b+c \quad +v.$

$F_n(x) = 0$

3. Végre ha kiadjuk, a kifejtésig van

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+v) = F(x)$$ és

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-v) = f(x)$$ között

A legelső [illegible] legegyszerűbb viszonya következtében egyszerre felelhetjük, hogy $a, b, c, \ldots v$ különböző számú combinatióját összesít $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$-el jelelve

l. i. $F(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_n$ állandó

$f(x) = x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots \pm C_n$ a szerint mint n páratlan vagy páros szám

és mivel $F(x)$-ben ~~x-be~~ egyenletben, x helyébe tehető

$-a, -b, -c, \ldots -v$

$f(x)$-ben pedig $+a, +b, +c \ldots +v$. egyszerre folyik, hogy ha az első $F(x)$ egyenletben a páros helyeken álló számok előjeleit meg változtatjuk, egy oly egyenlet állít elő, mely x-helyébe ugyanazon értékek, de ellentett jellel [illegible]

4

kettősek osztásaival, amint ismét az ismét első leszármaztatottjai harmadik osztásaival – s így tovább. – ezen folytonosan mindig egy előző. s ismét előző leszármaztatottra egymást követő sorai nevezetesen, az alap kifejtett egyenletek leszármaztatottjainak, s tehát: 1) az alap kifejtett első leszármaztatottja, első leszármaztatottja – Ennek egy, Ds. 2) az alap kifejtett második leszármaztatottja két annyi mint második leszármaztatottja, harmadik leszármaztatottja hat annyi mint egy az mint harmadik leszármaztatottja s így tovább. A leszármaztatottakat jelölésére s harmadik római számokkal jelölt vonásokkal szoktunk a leszármaztatottaktól megkülönböztetni pl. x, x', x'', x''', x^{iv} . stb. vagy $F(x)$ $F'(x)$ $F''(x)$ $F'''(x)$ $F^{iv}(x)$ . . . stb.

Láthatni a fönebbi jelölésből következő hogy ugyanazon $F(x)$-ek állnak

~~$F_1(x) = F'(x)$~~

$$1 . F_1(x) = 1 . F'(x)$$
$$1 . 2\, F_2(x) = F''(x)$$
$$1 . 2 . 3 .\, F_3(x) = F'''(x)$$
$$1 . 2 . 3\, 4 .\, F_4(x) = F^{iv}(x)$$

stb.

ebből

$$1 . F_1(x) = 1\, F'(x)$$
$$F_2(x) = \frac{F''(x)}{1 . 2 .}$$
$$F_3(x) = \frac{F'''(x)}{1 . 2 . 3 .}$$
$$F_4(x) = \frac{F^{iv}(x)}{1 . 2 . 3 .}$$

stb.

Mely jelölésekkel harmadikat tehát a fönebbi stb. 1) számolott befoglalt egyenletet így is írhatjuk le

$F(x) = C_n$

$F_1(x) = C_{n-1}$

$F_2(x) = C_{n-2}$

$\vdots$

$F_{n-1}(x) = C_1 = a+b+c \ldots + v.$

$F_n(x) = 0$

3. Végre ha kitűzzük, mi kölcsönös viszony van

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+v) = F(x)$$ és

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-v) = f(x)$$ között

A legelső tétel legegyszerűbb szabályai következtében egyszerre felállíthatjuk, hogy $a, b, c, \ldots v$ különböző számú combinatióinak összegeit $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$-el jelelve

t. i. $F(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_n$ ellenben

$f(x) = x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots \pm C_n$ a szerint mint n páratlan vagy páros szám.

és miért, $F(x)$ben ~~xben~~ egyenletben, x becsi értéke

$-a, -b, -c, \ldots -v$

$f(x)$ében pedig $+a, +b, +c \ldots +v.$ egyszerre folyik, hogy

ha akármely $F(x)$ egyenletben a páros helyeken álló számok előjegyzéseit megváltoztatjuk, egy oly egyenletet állítunk elő, melyben x becsi ugyanazok ugyanazon számban, de mind ellenkező előjegyzéssel ——

Leszállva már adott egyenletek föloldásaira. [illegible]

1) Legtöbb is azt a megfejtést teszi, hogy (mert ~~[illegible]~~ egyenletek módja [illegible] — [illegible] X-nek több egyenlő [illegible] — vagy miként módja [illegible]. X-nek több egyenlő alkotója (tényezője) [illegible], melyet az egyenlet magából [illegible], s ily egyenlő alkotók [illegible] [illegible] — [illegible] az egyenlet [illegible] s így könnyebben föloldható lesz. E [illegible] [illegible] a következő [illegible] [illegible].

Ha X-ben azt [illegible] [illegible] [illegible] több [illegible] fordulnak elő, úgy X és X_1 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] s ha [illegible], a legnagyobb közös [illegible] [illegible] X-et egy oly Y-ra [illegible], melynek egyenlő [illegible] alkotója [illegible] [illegible] X-é, [illegible] [illegible].

A [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] a [illegible], — [illegible]

$$X = C_n = (x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+v)$$

$$X_1 = C_{n-1} = (x+b)(x+c)(x+d) \ldots (x+v)$$
$$+(x+a)(x+c)(x+d) \ldots (x+v)$$
$$+(x+a)(x+b)(x+d) \ldots (x+v)$$
$$+(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+j)$$

vagy [illegible]

mostani véve. $X_1 = \frac{X}{x+a} + \frac{X}{x+b} + \frac{X}{x+c} + \cdots + \frac{X}{x+v}$

hogy ha mi feltétel elmút, X-nek elhozni kénék, akkor egy vagy több rendbeli egyenlők fordulnak elő. pl.

~~Hanem~~ $a = b = c = d$, $k = l = m$ levén, akkor

$x+a = x+b = x+c = x+d$, $x+k = x+l = x+m$ és egyik csoport

egyenlők száma p, másiké q … lesz egyfelől.

$X = (x+a)^p \cdot (x+k)^q \quad x+t \cdot x+u \ldots x+v$ vagy másként írva

$X = (x+a)^{p-1} \cdot (x+k)^{q-1} \cdot x+a \cdot x+k \cdot x+t \cdot x+u \ldots x+v.$

hol látni való, hogy a vágások után, minden féle alakokból előfordul egy-egy. De sok és úgy.

másfelől

ezen esetben lesz.

$$X_1 = p\frac{X}{x+a} + q\frac{X}{x+k} + \cdots \frac{X}{x+t} + \frac{X}{x+u} \cdots \frac{X}{x+v}$$

$$\left.\begin{aligned}
&= \cancel{p}(x+a)^{p-1} \cdot \cancel{q}(x+k)^{q-1} \cdot (x+k)(x+t) \ldots (x+v) \cdot p \\
&+ (x+a)^{p-1} \cdot (x+k)^{q-1} \cdot (x+a)(x+t) \ldots (x+v) \cdot q \\
&+ (x+a)^{p-1} \cdot (x+k)^{q-1} \cdot (x+a)(x+k)(x+u) \ldots (x+v) \\
&\;\vdots \\
&+ (x+a)^{p-1} \cdot (x+k)^{q-1} \cdot (x+a)(x+k)(x+t) \ldots (x+j)
\end{aligned}\right\}$$

vagy

$$X_1 = (x+a)^{p-1} \cdot (x+k)^{q-1} \times \left\{\begin{aligned}
&(x+k)(x+t) \ldots (x+v) \, p \\
&+ (x+a)(x+t) \ldots (x+v) \, q \\
&+ (x+a)(x+k)(x+u) \ldots (x+v) \\
&\;\vdots \\
&+ (x+a)(x+k)(x+t) \ldots (x+j)
\end{aligned}\right.$$

Következik

$(x+a)^{p_i} \cdot (x+k)^{q_i}$ is közös, meg pedig legnagyobb közös osztója

X-nek és X_1-nek. Van tehát közös osztójok — és ezt közönséges leg-

nagyobb közös osztóval, ugyan X-ből kijön

$$\frac{X}{(x+a)^{p_i} \cdots (x+k)^{q_i}} = Y = (x+a)(x+k)(x+l) \cdots (x+v) \quad \text{vagyis egy}$$

oly kiplet melynek osztói ugyanazok mint X-nek, de mindenik csak

egyszeres, tehát $Y = 0$-nak gyökei ugyanazok mint X-nek.

Miből, ha ebből következik az adott egyenletben mindazon

elsőfokú tényezők X-beli kiegészítésére. X-ből, deriváltja

legyen X_1, keressük ki X és X_1 legnagyobb közös osztó-

ját; ennel osztva X, kijön egy oly kiplet Y,

melyben nem fog [illegible], de föltétlenül [illegible] [illegible].

X-beli x [illegible], tehát $Y = 0$ egy oly egyenlet (pedig előbb

[illegible] meg feladatnak X-nek mindenik gyökét megadja.

Ha már [illegible] [illegible] (mint egyebaránt közös [illegible]

[illegible] hogy X-ben mindenik [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] a volt közös osztóban $= K$, ennek [illegible]

úgy bánhatunk mint előbb X-el, az új közös osztó K_1

-vel s. a. t. és így tovább míg az [illegible] gyökök

is mind kijönnek. — [illegible] próbát lehet tenni

a következő egyenleten

$$x^6 - x^5 - 10x^4 + 8x^3 + 32x^2 - 16x - 32 = 0$$

(melynek [illegible] 4 ok rationalis gyökkel bírván, [illegible] [illegible])

2) Miután már nem szabad lenni – a egyszerű [illegible] feltételes egyenletekből kiegyeztetni, – s így a előttünk fekvő módot még könnyebbítettük.

Első kérdés, Van-e, vagy nem a feloldandó egyenletnek racionális tehát egész számban feloldása – Ezt már fennebb leírt móddal meg fejtjük, s a másodikra találtunk egy könnyebb [illegible] által kiegyeztetni, vagyis [illegible] [illegible] [illegible] tanított) oly egyenletet, melynek nincs több racionális x-beli megoldása, hanem vagy ~~egy~~ irracionális vagy [illegible] [illegible], [illegible] imaginárius[illegible]. – [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] a) alattiakat [illegible] [illegible] [illegible] figyelembe [illegible] [illegible] fordíthatjuk. –

~~1) Van-e a feloldandó egyenletnek ([illegible]) valós x-beli, az már kitűnik, hogy [illegible] esetben, [illegible] a egyenletnek rangja s x-nek tagjaival előjegye [illegible] [illegible] ha rangja páratlan számú, s [illegible] van ha a rangja páros ugyan de x-nek tagjainak előjegye (–). Azonban lehet még úgy is ha nem [illegible] feltétel [illegible] pl. az egyenletnek $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$.~~

(Folytatás az egyenletekről, mely 113 az előbb kezdve
volt s at végire akadott 1) számnak nem utána kama-
rának kitörlésével, helyébe jön, mint hogy az oly igazságot
az többit kimutatni mehet ezzel egy elvoltak módon,
de papíroson bírom nem, most pedig, teljesen [illegible]
[illegible] valaggyal bizonyosnak).

1) Van-é a föloldandó egyenletnek irrationális egyes-
de való gyöke ─ (melyekről mi számos különösebb [illegible]
tabulájába, [illegible] mint a rationálisokat)
ennek eldöntésére. Addig ali csak egy módon van feltalál-
va abból álló ─ hogy (egyszerűség kedvéért a adott
egyenletből, adni rationális gyököt, s a különös egyenlőben-
hez; s ha lenne volna hogy [illegible] tevőbe) ─ Van igenis
is ~~irrationális~~ való gyöke az egyenletnek, s csak akkor van, ha
benne két különböző számot helyettesítve x helyében,
egyik helyettesítés ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ az a [illegible] 0-nál
nagyobb (másik 0-nál kisebb az − előjegyű számot
ad eredményül; mert ezt hogy éppen 0. legyen az ered-
mény ─ (mikor akkor a helyettesített szám maga volna
egyik keresett gyök), ami nem fordulhatván elő, mihelyt
föl teszszük, hogy az ily helyettesítési próbák mindig (ratio-
nális számmal történt, mikor mi mivel az adott
egyenlet képlet bővebb kitett ─ f. l. s. ─

Ezen alap jelző értelmét és igazságát, ezen elvet mindjárt

legnagyobbrészt így világosíthatni föl.

Ha egy egyenletben x helyébe különböző számokat (helyettesítünk) tagjával az egyenleti kifejezés becsül különböző számok jő-

nek ki. pl. legyen az egyenlet pl. $x^4+x^3-10x^2-4x+24=0$

az egyenlet kifejezésnek (az egyenlet bal felét) melyet most röviden $f(x)$-el jelöljük, becse

lesz akkor

ha $x=0$	$f(x)=24$	ha $x=-1$	$f(x)=18$
$x=1$	$f(x)=12$	$x=-2$	$f(x)=0$
$x=2$	$f(x)=0$	$x=-3$	$f(x)=0$
$x=3$	$f(x)=30$	$x=-4$	$f(x)=72$

tört számokat [illegible] is

ha $x=\frac{1}{2}$	$f(x)=19\frac{9}{16}$	ha $x=-\frac{1}{2}$	$f(x)=23\frac{9}{16}$
$x=1\frac{1}{2}$	$f(x)=4\frac{1}{16}$	$x=-1\frac{1}{2}$	$f(x)=9\frac{9}{16}$
$x=2\frac{1}{2}$	$f(x)=6\frac{9}{16}$	$x=-2\frac{1}{2}$	$f(x)=-5\frac{1}{16}$
		$x=-3\frac{1}{2}$	$f(x)=22\frac{11}{16}$

Ezen x különböző becsének megfelelő különböző egyenletkifejezés

becseket, [illegible] a legjobban [illegible] ki ábrázolhatni, fel véve

két Sark egyenest s [illegible] eltávolítva, az x-ről vett becsét, fel-

távolítva az $f(x)$ kifejezés megfelelő becsét [illegible] ([illegible]

[illegible]) s [illegible] a feltávolítás végeit folyto-

nos vonallal, (mely görbe [illegible] az egyenlet egyenletmegoldó

[illegible]) egybe kötjük – [illegible] itt látható.

Az egyenleti görbe, amidőn [illegible] majd közeledik az alláugyenéhez majd távolodik

tőle, s itt három helyt találkozik is vele, [illegible] a feltávolítás $f(x)$

[illegible] becsét ábrázolja, ott hol $f(x)=0$, vagyis nem eltávolít-

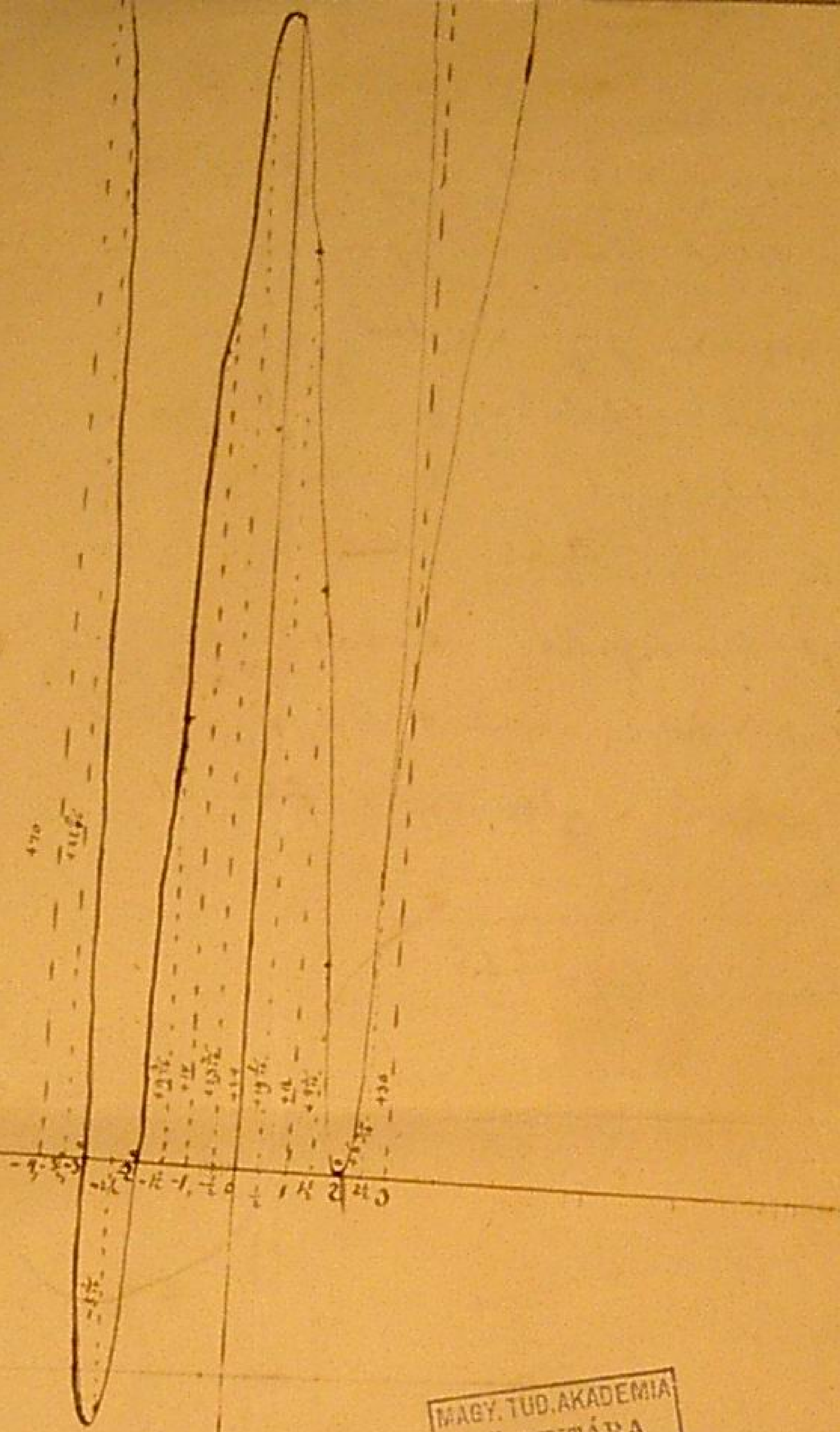
ható $f(x)$ becse 0-val [illegible], a feltávolítás is $=0$, ott a görbe ~~egyben~~

találkozik a alsó egyenessel. [illegible] két [illegible] [illegible] [illegible].

1) általában [illegible] itt -2-vel és -3-mal [illegible] az következik, hogy a -2 és

-3 ~~[illegible]~~ [illegible] x-nek, (a szembetett felvett számok) $f(x)$-et – [illegible] [illegible] – [illegible]

2) [illegible] a [illegible] 2-vel, [illegible] [illegible] hogy [illegible] kit[illegible], [illegible] $f(x)=0$.



változatok, nem képzelt tartományban állanak egy mástól mint −2 s −3nál, kerülnek együvé ekkor a az egyenlők s tehát a egyenletnek két egyező töve vagy — jobban mondva két egyenlő száma tartozván van itt $(x-2)(x-2)$ mint igaz is. E szerint látni való, hogy minden át járás, egy egy különböző valós törés, minden ... egy egy pár egyenlő szám szintén valós képes föltételes, s ... s tehát minden egyenletnek ... egyenletek ... száma $= p$, ... $= q$, valós gyökerei száma $= p + 2q$.

(ha van a külömbözőket alapúl véve [illegible], így van $p+q$) , ha tehát

az egyenlet magasabb rangu $p+q$ vala, így a többi gyök is x-beni

(mindenkor [illegible] van párosával) mindig képzelt kifejezések melyek

az egyenlet görbéjének ~~[illegible]~~ az abscis tengelyével nem találkozásában

vagynak elrejtve — s ha egy egyenlet görbéje az abscis tengelyével

nem találkozhatik, így minden gyöke képzelt x-

beni, vagy képzelten [illegible] lehetnek. Így

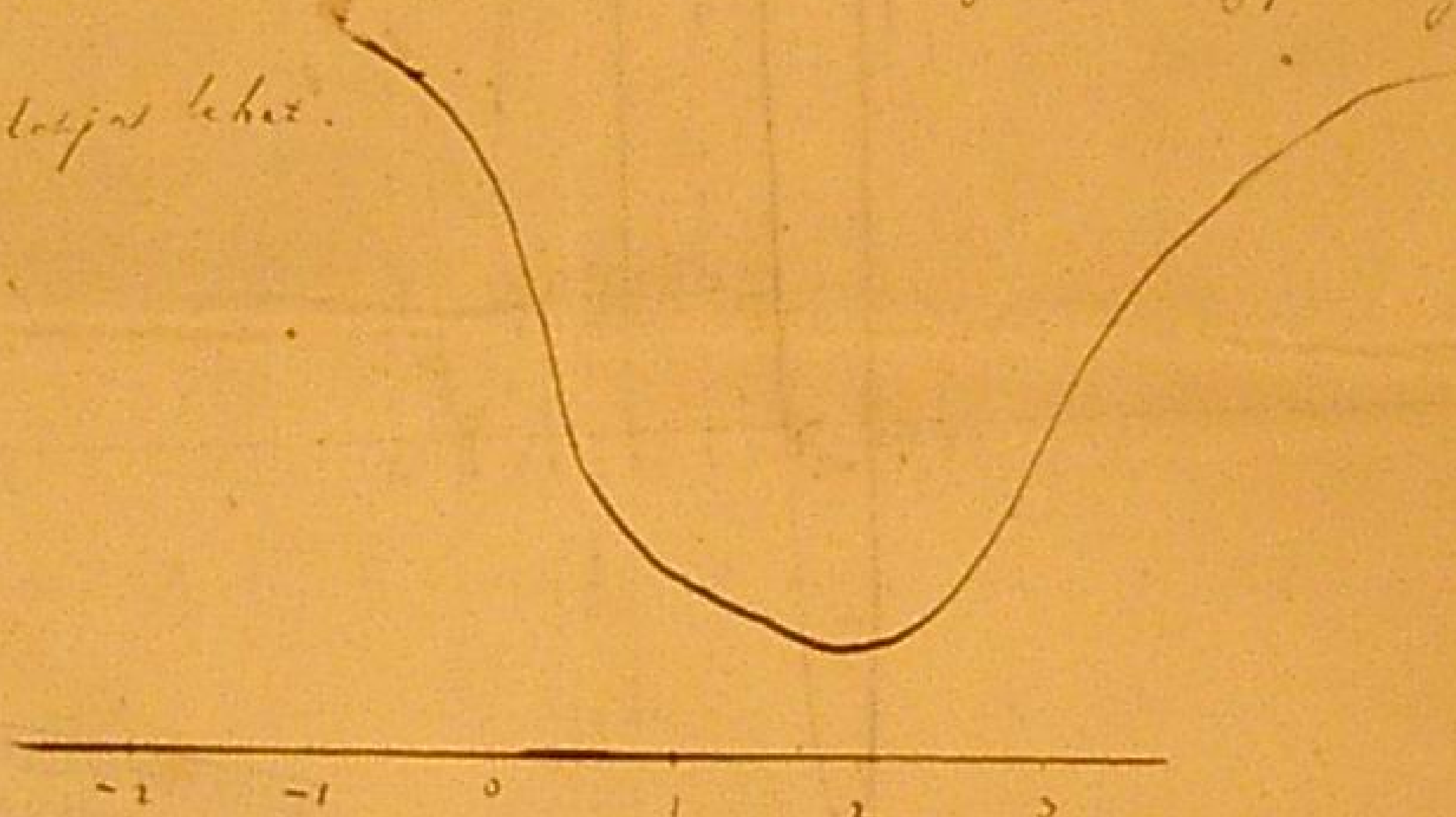
pl. az az egyenlet $x^2-4x+5=0$ [illegible], [illegible] könnyű is

látni $f(x)$-nek csak + előjeggyel (bizonyos × határozott) lehetnek, tehát egyenlet

görbéje az abscis tengelyt ~~felső [illegible]~~ nem is érintheti, annál

kevésbé vágja is nem vágja, [illegible] egyenlet görbéjének

[illegible] alakja lehet.



Az eddigiek [illegible] tehát [illegible] következő.

a [illegible]. (mindig a [illegible] alakba [illegible] egyenletekre [illegible])

1° Minden páratlan rangu egyenletnek van legalább egy

valós beccse :- Mert.

Minden egyenlet kifejezések [illegible] alakja lévén ez.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + L = \cancel{[illegible]}$$

$$x^n \times \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \dots + \frac{L}{x^n}\right)$$

Ezen

Ennen utolsó alakjában tekintve a adott kifejezést, látjuk hogy a két-
tényezőből alakuló szorzatnak egyike X^n; s tehát X helyett
+ előjegyű nagyobb nagyobb számokat téve $+\infty$, annak érté-
ke akármely nagy, s pedig + előjegyű következtethető. A másik tényező
alakjában, ha mégis mindig maga $\varphi(X)$ el[illegible] [illegible]
első tag +1, ezváltozatlan, a többi tagok pedig akár + akár − elő-
jegyű volt legyenek a mit X-ét helyettesítünk, annak növekedésével ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ határ nélkül közelítnek a 0-hoz egyenlően, s te-
hát összesítvebben is, s következőleg maga $\varphi(X)$ mindkét
esetben ~~[illegible]~~ hajlamos közelíthető +1-hez. a
két előbbi bizonyítva.

1) Ha a adott $f(x)$ utolsó (vagy x nélküli) tagja + előjegyű,
0-t helyettesítvén X helyett, az $f(x)$ becsül ki jön $+L$
tehát 0-nál nagyobb, ellenben $-a$-t [illegible] vagy − előjegyűleg
akármi számot helyettesítvén maly $\varphi(X)$-t ~~[illegible]~~ +1-hez
annyira közelítővé tesz hogy bizony legyen > 0, s tehát +
előjegyű, minthogy − és + összes egyenessel − ered-
ményt adnak, lesz $f(x)$ bizony ($-a$ helyettesítéssel) $= -M$, s
következőleg 0 és $-a$ között van $f(x)=0$ egyenletnek (legalább egy)
való gyöke, ~~mely pedig~~ ezen − előjegyű.

2) Ha a adott $f(x)$ utolsó tagja $-L$ vagy 0 helyettesí-
tésnek kapott $-L$, ~~[illegible]~~ ellenben a ~~[illegible]~~ [illegible]
ge nagyságos $+\alpha$ helyettesítésnek kijön $+N$ $f(x)$ bizonyosan ~~[illegible]~~;
s következőleg amikor 0 és $+\alpha$ között van legalább egy
való gyöke $f(x)=0$-nak, s így akár + akár − előjegyű is
legyen $f(x)$ utolsó tagja, mindenkor lesz a adott egyenlet-
nek legalább egy való gyöke. − előjegyű ha annak utolsó

feltéve hogy [illegible] − előjegyű [illegible]

tag +, teli előjegyű ha a utolsó tag –, s tehát mindig ellen-
kező jegyű a $f(x)$ utolsó tagjaival. —
Páros rangu egyenletekre hasonlóan okoskodván ily általánosságban
mit sem állíthatni, hogy a melyikkel x^n ben, x helyébe akár ta-
kár $-a$-t tegyünk. Mert mindig $+a^n$ jön ki; s mind-

2) Páros rangu egyenleteket illetőleg egyik a tételek ...

a. Páros rangu egyenlet, melynek utolsó (x nélküli) tag-
ja – előjegyű, legalább két valós gyökkel bír, — egy
~~...~~ $+a$-val s
egy $-b$-vel, a az előjegyben ellenkezőkkel. — Mert
0-at téve x helyébe lesz $f(x) = f(0) = -L$, $+a$-t helyette-
sítve lesz $f(x) = f(+a) = +M$, s $-\alpha$-t helyettesítve lesz
$f(x) = f(-\alpha) = +N$, s így a tétel szerint, egy valós gyö-
kének kell van a egyenletnek 0 és $+a$, s egynek 0 és $-\alpha$ között.

3.) Nem és megjegyzésünk itt egy észrevételt, mind a 1. mind a 2.
pont alattiaknak kiterjedését, melyekben kimutatva, hogy
$-L$-ű egyenletnek akár páratlan rangu legyen az (1 tétel),
akár páros (2 tétel), mind két esetben van legalább egy
+ előjegyű valós gyöke. – Mikor itt az a pontos megjegyzést teendő,
hogy nincs is több egynél (t.i. + előjegyű valós gyöke) – ha a $-L$-t
megelőző tagok mind + előjegyűek, vagy a megelőzők is – de
a ezt megelőzők mind + előjegyűek – s így tovább, vagy általá-
ban ha $f(x)$ elöl néhány folytonosan vett +, s aztán következő-
leg is mind folytonosan vett – előjegyű tagokból áll, s tehát
ily alakú $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Hx^{n-p} - Ix^{n-p-1} - Kx^{n-p-2} - \dots - L = 0$

mert ikki ~~[illegible]~~ in itt is

$$f(x) = x^{n-p} \times \left(\left[x^{p} + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + \ldots + H\right] - \left[\frac{I}{x} + \frac{K}{x^{2}} + \ldots + \frac{L}{x^{n-p}}\right]\right)$$

vagy a zárjelbeli zárjeles két tagot hívd az elsőt $\varphi(x)$nek a másodikat $\psi(x)$nek nevezd

$$f(x) = x^{n-p} \times (\varphi(x) - \psi(x)).$$

— Már ha tekintjük

a) $\varphi(x) = x^{p} + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + \ldots + H$-t, ez ha [illegible] x helyébe [illegible] 0 teszünk is $= +H$ tehát tetszőleges [illegible], ha pedig 0-nál nagyobb s folytonosan nagyobbodó [illegible] x helyébe, [illegible] (1. $\varphi(x)$nek) növekedésével a végetlenig [illegible] két [illegible] a, és b. [illegible] helyettesítéseinél $f(x)$ kisérő [illegible] (egyelőre [illegible] [illegible], [illegible] nagyobb s nagyobb [illegible], kisebb s kisebb [illegible] ellenben

b) $\psi(x)$ el éppen ellenkező áll a dolog, mert ebben ugyan azokat helyettesítvén x-ig mint $\varphi(x$ be$)$ — s tehát először 0-at lesz $\psi(x) = \varphi(0) = \infty$ mert [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] és [illegible] annál nagyobbak $\psi(x)$ be- [illegible] a végetlenig). ha x [illegible] ~~[illegible]~~; — de a mint x helyébe $+a$ - $+b$ — s így tovább nagyobbakat nagyobbakat helyettesítünk, mind [illegible] inkább apad $\psi(x)$ [illegible], s a, b. [illegible] kellően nagyobbításának [illegible] — a 0-hoz közelítés [illegible] — Mi [illegible] tehát — a helyettesítendő ~~[illegible]~~ 0-n kezdve s felfelé folytonosan előbb $\varphi(x) < \psi(x)$ — [illegible] (ha [illegible] [illegible]) — végül $\varphi(x) > \psi(x)$ [illegible] [illegible] tehát [illegible] folytonos

növekedése emennek pedig folytonos apadása között. egyszer
de csak egyszer ... kell ... mindkettő az egyenlőség áll egyet-
len s az + a, vagy + b, vagy + C tehát, melyeknek helye ... az
az történt, ~~a adott egyenletnek~~ ~~val~~ helyettesítve, melynél volt $\varphi(x)=\psi(x)$
tehát $\varphi(x)-\psi(x)=0$ s azért
$x^{n-p}(\varphi(x)-\psi(x))$ is $=0$, s az + a, vagy + b, vagy + C mindenik gyöke,
mégpedig + előjegyű gyöke, s egyenlőre egy + előjegyű gyöke, $f(x)=0$
egyenletnek, nem következvén ki azért hogy ~~még több~~ – előjegyű gyökei
több is
~~(s mindegyike – előjegyűek)~~ ne lehetnének.

Akartam a eddigi adott szabályokat is egyik oldalukat ki-
mutatni hogy hol elégtelen, s hol valótlan van némely egyen-
letnek, éppen hogy ~~hol~~ hol van is hol feltétel, vagy hol van
határozatlan, éppen ezért ezután újabb vizsgálatok kellenek, melyek
körül, az egy ... mi sem mellőzhetők. –

Ismételvén azon megjegyzést, hogy ... valamely egyenletnek
háromféle gyökei lehetnek, 1) +, 2) – előjegyűek, melyek valók.
3) képzeletek, melyekben sem + sem – előjegyűek nem ... ;
mint ... az is 2°) hogy, ... adott egyenlet képlettel ($f(x)$ben)
~~s~~ ~~tehát~~ ~~– ... jegyei vagy az~~ hogy
~~egy~~ a első tag mindig + előjegyűnek, (s 1 ...)
vétetvén fel, a többi tagok előjegyei lehetnek elegyesek.
s minden egyenlő jegyűek sorozatai jegyfolytatásnak, minden
különböző jegyűek sorozatai jegyváltásnak neveztetik,
s tehát ~~hogy~~ akármely teljes képletű egyenletben, melyben ... x ...
... 0-ig egy sem hiányzik, a jegyfolytatások is ...

a jegyváltások számának összege, mindig $= n - s$ ezeknek előre bocsátása után lássunk rendel az ide tartozó állításokat, s fő adatokat.

1. Akármely $f(x)=0$ egyenletben, a + előjegyű becsek száma nem lehet nagyobb, mint a $f(x)$ben előforduló jegyváltásai.

Legyenek $f(x)=0$ban + előjegyű becsek $+\alpha, +\beta, +\gamma$ .... akárhány számmal. Lesz $f(x)$ osztható $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ .. val, s ez kijön $x$nek egy más kifejezése, melyet nevezünk $\varphi(x)$nek, s melyben, f. e. $x$nek nincs több + előjegyű becse.

E szerint $f(x) = \varphi(x)\cdot(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ .... s tegyük kérdésben: miként áll jegyváltások számában $f(x)$ $\varphi(x)$hez?

De fejtsük meg a kérdést ezen módon.

$\varphi(x)(x-\alpha)$ban legalább is eggyel több jegyváltás van, mint $\varphi(x)$ben – mert:

akármely x kifejezésnek, tehát $\varphi(x)$nek is – teli tagokban vevén a jegyeket általános képe ez lehet

~~[illegible]~~

$\varphi(x) = x^a + Ax^b + + \dots + Ex^f - Gx^h - Hx^i \dots - Lx^n + Px^q + + + - \dots - + Rx^s + Sx^t \pm Ux^z \pm Yx^u \dots \pm W$, azaz egynéhány + előjegyű tag folytatólag, melyek között az előző x^a, az utolsó Ex^f lévén, aztán egynéhány (– hol a egynéhány lehet $=1$ s $=0$ valamint a következőknél is) – előjegyű tag, melyek között az előző Gx^h utolsó Lx^n alkalmazója, aztán ismét néhány +, néhány – jegyűek, s így tovább, míg végre vagy csupa +, vagy csupa – előjegyű tagokon végződik az egész, melyek között az előző + ban végződő esetben Rx^s, – ban végződő esetben pedig ... a utolsót (x előtt) minden ... W képzelt-

Ugyebár ... hogy A B ... L ... R ...

közöl akármelyik lehet 0, (csak W nem) s a, b, c

nem közvetlenül következő számok is lehetnek, csak hogy minden tovább-

vált álló kisebb az előbbiekkel

Lássuk most mi változás történik az $\varphi(x)$ben előfordulói jegyzések-

kel ha $\varphi(x)$t szorozzuk $(x-\alpha)$val?

Az x-el szorzás minden jegyet minden hatványlaicot annyi hagy a mi volt $\varphi(x)$ben, te-

hát a jegyzések számán is nem változtat – de minden tagbeli x mitevőjét eggyel neveli –

Következik a $-\alpha$ való szorzás; s az ebből kijövő tagoknak

az x-el szorzástól kijött tagokkal összevonása – ~~[illegible]~~

elő azokat második (szorzás) sorbeliekkel ...

A második sorbeli minden tag kijött szorzás tag ellenes jegyű

lesz az első sorbeli egymagyarázottal –

~~Minden~~ A második sorbeli (előzőbbel) n-dik tag összevonódik a első sor-

beli $n+1$-dikkel.

Ezen összetevések ~~[illegible]~~, ~~meglehet~~, x^{n+1}től Ex^{t+1}ig s, hol

$\varphi(x)$ben volt nem volt egy jegyzés is) meglehet hogy ...

– egy – s meglehet több jegyzések – meglehet hogy nem egyet-

is ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ de a utolsó Ex^{t} minden ... ha ... egy – elő-

jegyű tagot, s tehát egy jegyzést ... $-\alpha$ val szorzás-

ra ad – előjegyű tagot az ~~felső~~ alsó sorba, ez ...

a ~~[illegible]~~ – ... tagot a felső sorba, tehát

-, -nal egyszerűen mint azaz -1 rendűnyien, és a konst-
ha $a x^n$-ről $\Sigma x \delta$-ig semmi fordult volna elő még más
jegyzet, az számegyjegy ennen egyet, mint az eredeti
$\varphi(x)$ben is volt. Havaló osztódásnál bizonyítékul hogy
minden következő jegyzetek száma legalább megmarad (ha
nem szaporodik). A utolsó osztásnál, hol már a egyen-
képlet, egyenlő ~~egyenlő~~ előjelű tagokkal bővül.
Ha a osztás s hányadosban a fenntebbiekkel egyenlő októl
olyan jegyzetek marad hányadosban, mint volt $\varphi(x)$ben, de
legutolsó tagja, mely Wurzel, $-\alpha$ való szorzásból jön ki,
s semminél össze nem ütődik, ellenkező jegyű lesz mint
$\varphi(x)$ben volt. S így, végül $\varphi(x)(x-\alpha)$ban leg-
alább eggyel több jegyzet lesz mint $\varphi(x)$ben volt.

Hasonló következtetéssel kijön hogy $\varphi(x-\alpha)(x-\beta)$ban
legalább ~~leg~~ eggyel több a jegyzet mint $\varphi(x)(x-\alpha)$ban, s tehát
legalább kettővel több mint $\varphi(x)$ben. S így tovább
menve, míg eredmény lesz az az a következtetés, hogy ~~leszen~~
~~$\varphi(x)$ szorzatból képletnek~~ $\varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$ban
vagy $f(x)$ben legalább annyi (ha nem több) jegyzet
fordul elő, mint az hány + előjegyű gyöke van $f(x)=0$ egyen-
letnek, vagy más szóval: $f(x)=0$ egyenletnek ~~leg-~~
~~többi~~ a + előjegyű gyökei száma nem lehet nagyobb
mint az $f(x)$ben előfordulandó jegyzetváltás. M. B. V.

2. $f(x)$ben ~~mindenben~~ változtassuk meg minden ~~páratlan kitevőjű illető~~ $x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5}$ st. ~~tartó~~ tartó
tag előjegyét. Ez áll egy új képlet melynek neve legyen
$\psi(x)$. S tudjuk hogy $\psi(x)=0$ + előjegyű gyökei

$f(x)=0$ nak $-$ előjegyű becsei. A két legutolsó állítás

szerint, $\varphi(x)=0$ nak nincs több $+$ előjegyű becse, mint a hol jegy-

jegyváltozása van ($\varphi(x)=0$ben) . tehát $f(x)=0$ nak nincs

több $-$ előjegyű becse mint a hol jegyzet fordulatai

$\varphi(x)=0$ ben.

E két állítás tehát, ahánynak egyenletben lehetnek a teljes-

en hajós jegy előfordulható $+$ s $-$ előjegyű. s tehát ~~való~~

minden lehető való becsétől számainak maximumát meg hatá-

rozza.

3 Ezen két állításból két következmény folyt.

a) Ha $f(x)=0$ teljes egyenlet (x^n-től x^0-ig egy emelet-

ben hiányzó tenned) $\varphi(x)$ ben éppen annyi számú jegy ~~jegy~~

ese lesz mint $f(x)$ben jegyfolytatás. pl. ha

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x - 2i \quad \text{lesz.}$$

$$\varphi(x) = x^6 - 3x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 2i$$

az utolsóban van jegyzetváltozás 3, amabban jegyfolytatás

3.

Innen

a 1 s 2) állításokat egybefoglalván alkalmazva így is lehet kifejez-

Teljes egyenletben, a $+$ előjegyű becsek száma nem nagyobb

mint a jegyváltozás, a $-$ előjegyű becsek száma nem

nagyobb mint a jegyfolytatásoké. — egy nagy fontos

szabályt, melyet tulajdonképen Descartes tanított fel, de

most közönségesebben még is Harriot állításának szokott neve-

tetni.

teljes egyenlet s egyszersmind

b) Ha $f(x)=0$. ~~tulajdon~~ olyan hogy mind való becse, mennyiségei

ezekből éppen annyi van $+$ előjegyű, hogy a jegyváltozás

száma $f(x)$ben, s annyi $-$ előjegyű, hogy a jegy

folytatásoké —.

4. Az előadott módszer – mely minden más eddigelé [illegible] hasonlítva egyszerűbb – megadja tehát az adott egyenletben előfordulható + és – előjegyű, s tehát általában valós gyökök számának maximumát s tehát a képzeteseknek minimumát. De meg kell vallani hogy ama maximum melynél több (valós) nincs, s tehát az a minimum, melynél kevesebb (képzetes) nincsen, [illegible] igen tágas határon járnak, [illegible] és sokkal határozottabb határokat [illegible] megítélni [illegible] mint el gyakran a könnyebb elemi módokat. (Olivier [illegible])

Legyenek az adott egyenlet gyökei – (vannak még valók, képzetesek különböztetés nélkül) a, b, c, d . . . . . . tehát

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + L = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots \quad 1)$$

Tudjuk hogy tehát

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm L = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots \quad 2)$$

vagy is 1)et s 2)t másként írva.

$$\left(x^n + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots\right) + \left(Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots\right) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots \quad 3)$$

$$\left(x^n + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots\right) - \left(Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots\right) = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots \quad 4)$$

s 3) s 4)et egymással szorozva

$$\left(x^n + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots\right)^2 - \left(Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots\right)^2 = (x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)\ldots \quad 5)$$

Ha $x^n + Bx^{n-2} + \ldots$ vagy t, az az adott egyenlet ~~páratlan~~ $n, n-2 \ldots$ ~~[illegible]~~ kitevőjű tagjainak összegét négyedik [illegible] melyből kijön egy oly képlet melyben x csak páros [illegible] fordul elő – legyen tehát ezen kijövő másod képletet neve $\varphi(x^2)$; ezentúl [illegible] a dolog $Ax^{n-1} + Cx^{n-3} +$ ~~vagy~~ az az adott egyenlet $n-1, n-3 \ldots$ kitevőjű tagjainak összegét ~~legyen~~ második [illegible]

Legyen ennek második emelete vagy $\psi(x^2)$ tehát

$$\varphi(x^2) - \psi(x^2) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) \ldots \qquad 6)$$

vagy $x^2 = z$ nek nevezve

$$\varphi(z) - \psi(z) = (z - a^2)(z - b^2)(z - c^2) \ldots \qquad 7)$$

Itt szembetűnő hogy egyenlet melynek [illegible] teszi $\varphi(z)-\psi(z)$ gyökei $a^2, b^2, c^2 \ldots$ lesz. Ebből [illegible] adott egyenlet gyökeinek [illegible] fogjuk [illegible].

Azon módszer szerint adott egyenletből (könnyű számítással) lehet másik egyenletet találni, olyat melynek gyökei, az adott egyenlet gyökeinek második emeletei lesznek. — Ezen számításnál pedig így történik, hogy az adott egyenlet x^n, x^{n-2} … és tagjainak összegét külön, az x^{n-1}, x^{n-3} tagjainak összegét ismét külön második emeletre emelvén, az utóbbit az elsőből levonjuk, — (s [illegible] a [illegible] [illegible] [illegible] x helyett z-t írunk). — Alkalmazván az adott egyenlet való és képtelen gyökeinek meghatározására, [illegible] [illegible] [illegible] a következőket adván.

Az adott egyenletben kétféle gyökök fordulhatnak elő, u.m.

a) Való gyökök — vagy +, vagy − előjeggyel. — Mivel pedig − előjegyűek [illegible] szintúgy mint + előjegyűnek második emeletei + előjegyűek, tehát az adott egyenletben találtatni [illegible] való gyököknek második emeletei ~~+ előjeggyel~~ ismét [illegible] ~~mind~~ + előjeggyel vagynak meg az általa lett egyenletben.

b) Képtelen gyökök. — Képtelen kifejezéseknek második emeletei — vagy ismét képtelen (pl. az oly alakúnak $a \pm b\sqrt{-1}$, melynek második emelete $a^2 - b^2 \pm 2ab\sqrt{-1}$,) vagy [illegible] − előjegyűek (pl. az oly alakúnak $a\sqrt{-1}$, melynek második emelete $-a^2$). És így az adott egyenletben nem lehet több való gyök, mint az általa lettben + előjegyű van. —

S íme a szabálynak új próbaköve, valamely adott egyenlet valós gyökei számának maximuma, s tehát a képzelmes gyökei számának minimuma kimutatására.

Alkalmazzuk egy példán, s így a tanult módja is egyszerűleg legvilágosabban kitűnvén,

Legyen a adott egyenlet ez

$$x^5+x^3+3x^2+16x+15=0.$$ Vessük előbb a régi szabály próbája alá (melyet Gaussnak neveznek, minthogy a többek adott alakban öszvegezvén bele előbb).

Minthogy egy jegyváltozást sem foglal el, tehát a lehet + előjegyű gyökök száma = 0, s a negatív valós gyöke az adott egyenletnek nem lehet. Mi változtassuk az alkalmas jegyű benne lesz: $x^5+x^3-3x^2+16x-15=0$, mert foglal 3 jegyváltozást, tehát ezen egyenlet + előjegyű, s következőleg az adottnak − előjegyű gyökei nem lehet több háromnál, de egy lehet. S következőleg a valós gyökei maximuma $= 0+3=3$ s a képzeletek minimuma $5-3=2$. Így adja a Gauss-i szabály.

2. Olvassuk most próbára jön ki ... lesz:

$$\varphi(x^2)=(x^5+x^3+16x)^2=x^{10}+2x^8+33x^6+32x^4+256x^2$$

$$\psi(x^2)=(3x^2+15)^2=\qquad 9x^4+90x^2+225$$

$$\varphi(x^2)-\psi(x^2)=x^{10}+2x^8+33x^6+23x^4+166x^2-225$$

vagy helyettesítés z: $z^5+2z^4+33z^3+23z^2+166z-225$

hol, csak egy jegyváltozást foglal el, az adott egyenlet valós gyökeinek számának maximumául 1 jön ki, s tehát öt gyöke közül 4 mulhatatlanul képzelem, a mit egyenként is mutatnak: -1, $-1+\sqrt{-2}$, $-1-\sqrt{-2}$, $\frac{3+\sqrt{-11}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{-11}}{2}$.

Mégegy ...

5 A harmadik, s tökéletesen kielégítő, azaz a valós gyökök számát meghatározó módszer (mely még egy kis előmunkát kíván) különösen van a valós gyökök közelítőleges kikeresésére magát illeti.

Tudjuk, hogy két szám között, melyek közül egyiknek helyettesítése (x-nél) f(x)-ben +a-t, a másiknak helyettesítése −b-t ad, mindig van az egyenletnek legalább egy valós gyöke. A föladás elve tehát az, hogy két olyan szomszédos egész számot, melyek között egy valós gyök fekszik, s így ... kikeresni.

A módszer tehát abból áll, hogy az egyenletnek x helyett helyettesítjük egymás után a kisebb számokat, u. m. 0, +1, +2 ... −1, −2, ... s megnézzük, melyik két szomszédos szám helyettesítése ad ellenkező jegyű eredményt, pl.

Legyen a föladandó egyenlet $x^3-6x-7=0$ (melynek ... módjaival próbálva legfölebb egy valós gyöke lehet, vagy + vagy − előjegyzésű). A helyettesítések eredményei ezek:

Ha helyettesíttetik	kijő eredményül
0	−7
1	−12
2	−11
3	+2

s tehát az egyenletnek egy valós gyöke fekszik +2 s +3 között.

Magunk vizsgálat nyomán kitűnik, hogy ezen egyenletnek $x^5+x^4+x^2-25x-36$ ~~[illegible]~~ melyben (ismét ... szerint) csak egy +, s két − gyök lehetséges, valós gyökei vannak: 1ör +2 s +3 között, 2or −2 s −1 között, 3or −2 s −3 között).

6. Ha nem helyettesítési próbálgatások [illegible] hosszadalmas [illegible] út mutatók lehetnek, ha nem [illegible] helyiértéket kel[illegible] ni meghatározni, hol az ismeretlen [illegible] változtatható, s tehát [illegible] [illegible] igen próbálgatás, [illegible] egyszerű nagyobb ~~[illegible]~~ + [illegible] nagyobb. s így [illegible] kisebb (mi a kifejtésben legnagyobb) ~~[illegible]~~ előjegyzésű, mind kisebb [illegible] a [illegible] egyenletek, [illegible] lehet [illegible] feladat tehát a [illegible] felbontani [illegible] is (mint [illegible] egyenletek, [illegible] nagyobb [illegible] [illegible] (mint [illegible] több [illegible] de egy [illegible] újabb módszer melynek ~~[illegible]~~ találója Newton de [illegible] a [illegible]().

A) + előjegyzésű [illegible] felső határa —

Jegyezzük meg előbb, hogy [illegible] ~~[illegible]~~ egyenletekben mely[illegible] [illegible] képletnek [illegible] helyettesítsünk x-et [illegible] + a, [illegible] nagyobb + előjegyzésű [illegible] [illegible] [illegible] megjegyezhetjük, ~~[illegible]~~ ~~egy~~

a) ilyen egyenlet legnagyobb gyöke [illegible] a [illegible] [illegible] [illegible] tehát [illegible] egyik [illegible] egyik felé ~~[illegible]~~ tehát akármit helyettesítsünk [illegible] x-et vagy [illegible] +, vagy [illegible] — előjegyzésű [illegible] a kettő [illegible] tehát [illegible] egy [illegible] de

b) [illegible] hogy [illegible] egyenlet[illegible] x helyébe [illegible] hogy [illegible] (az egyenlet képletnek) [illegible] + jegyzés, tehát a [illegible] egyenletekben [illegible] + jegyű lehet.

Ezt előre bocsátván

Legyen a [illegible] s [illegible] megfejtendő egyenlet,

$f(x)=0$ . . mihelyt lehetnek egy képzelve [illegible] −előjegyü és +elő-

jegyü benne, és a' valóságban legnagyobb [illegible] hatványnak [illegible]

legyenek a' képzelve benne α, β, γ – a' −előjegyüek

(nagyság szerint rendezve)
$-a, -b, -c \dots$ a +előjegyüek $A, B, C \dots$ lesz ~~[illegible]~~

$$fx = (x-\alpha)(x-\beta) \times (x+a)(x+b)(x+c) \times (x-A)(x-B)(x-C) \dots$$

$$\qquad \mathrm{I} \qquad\qquad\qquad \mathrm{II} \qquad\qquad\qquad \mathrm{III}$$

fx tehát három szorzatnak szorzata, melyek közül I. mindenesetre +

benne minden tagja ha x helyébe [illegible] II. minden +jegyü

ha x helyébe [illegible] +előjegyüt tehetünk és végre III.

+előjegyü ha x helyébe +A-nál [illegible] nagyobbat helyettesí-

tünk x helyett – és ennélfogva tehát 3 +előjegyü

szorzatának szorzata az az fx is előjegyü. – Ennen

előjegye így. Ha' minden egyenletben a benne előforduló legnagyobb

+előjegyü gyöknél (vetve), benne [illegible] nagyobb helyettesítünk x helyett

a nagyobb képlet benne $+C$ [illegible] nagyobb lesz –

Ebből még lehetne [illegible], a egyenlet képlet benne [illegible]

+A-nál [illegible] kisebbet helyettesítetünk, x-t, pl. ha olyat

mely A-nál és B-nél kisebb, de C-nél nagyobb, mert egy

$x-A$, $x-B$ −előjegyü tényezőinek [illegible] −előjegyüek, III

tehát $\mathrm{I} \times \mathrm{II} \times \mathrm{III} = f(x)$

még is + előjegyü [illegible] mindezeknél fogva ~~[illegible]~~ hogy

[illegible] [illegible] helyettesítése [illegible] $f(X)$ benne + [illegible]

ezt értem, hogy $f(x)=0$ benne mindenütt + benne [illegible] na-

gyobbnak nem [illegible] – Ellenben

a' Sturm [illegible] helyettesítési [illegible] – [illegible]

$f(x) = X$, benne X_1, X_2, X_3 . . . közül [illegible]

+ előjegyü benne [illegible] – [illegible] nagyobb mind A-nál

[illegible] egyenlet +előjegyü benne mindenütt [illegible]

Ennek eldöntésére, [illegible] hogy $X, X_1, X_2 \ldots$ [illegible] egyenlet mit $f(x+m)=$ egyenletben [illegible] f [illegible] egyenlet [illegible] egyes tagjainak [illegible] ([illegible]) [illegible] $f(x)$ [illegible] (adott egyenlet kifejtésben) x helyett ($= x +$ [illegible]) mindenütt $x+m$ [illegible], [illegible] ki járó kifejtés m [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ki jön:

$$X + X_1 m + X_2 m^2 \ldots\ldots X_n = 0$$

[illegible] új egyenlet kifejtés [illegible] egyik [illegible] $f(x)$ [illegible] kifejezésben [illegible] $\mathrm{I} \times \mathrm{II} \times \mathrm{III}$ [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] x helyett mindenütt $x+m$ [illegible], lesz tehát

$$X + X_1 m + X_2 m^2 + \ldots\ldots X_n \cancel{= (x+1) \times)((x+m}$$

$$= \big((x+m)-\alpha\big)\big((x+m)-\beta\big) \ldots\ldots \times$$

$$\times\big((x+m)+a\big)\big((x+m)+b\big) \ldots\ldots \times$$

$$\times\big((x+m)-A\big)\big((x+m)-B\big)\big((x+m)-C\big) \ldots$$

$$\overset{1)}{=} \big(m+(\alpha-x)\big)\big(m+(\alpha-\beta)\big) \ldots\ldots \times$$

$$\overset{2)}{\times} \big(m+(x+a)\big)\big(m+(x+b)\big) \ldots\ldots \times$$

$$\overset{3)}{\times} \big(m+(x-A)\big)\big(m+(x-B)\big)\big(m+(x-C)\big) \ldots\ldots$$

melynek [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\alpha-x,\ \beta-x \ldots,\ -a+x,\ -b+x \ldots\ A-x,\ B-x,\ C-x \ldots$$

Tudjuk, hogy [illegible] egyenlet [illegible] [illegible] egy $+$ előjegyű [illegible], [illegible] egyenlet kifejtésének [illegible] tagja $+$ előjegyűek, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $x - c$ [illegible] A [illegible] A, B C [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] egy

vagy többi
egy $+$ határokon belül foglaltatik X_1, X_2, X_3 . között legyen (egyszerre
bármely . . . X-ek) legalább egyik (valamelyiknek ~~közötti~~ — nak kell, hogy
s akkor . . . $+$ . . ., mely a X-ken a X_1, X_2, X_3 -nak
helyettesítésekor . . . a $+$ előjelű . . . (egy . . .), hogy
sem nagyobb A-nál s ~~kisebb~~ mint akik B, C, D.
. . . ~~. . . a adott $f(x)$-ben . . .~~
. . . . nagyobb . . .
. . . X, X_1, X_2 . . . helyettesítésekor
mind $+$ . . .) *a legkisebbet* . . . a . . .
. . . $f(x)$ egyenletben előfordulható $+$ . . . nagyobb
. . . nagyobb . . . a legkisebb, . . . $f(x)$-nek
. . . felső határa —. . . *a . . .* . . .

B) A . . . előjelű . . . alsó határa —.

Ha a . . . egyenlet . . . ellenkezőre
változtatjuk, . . . új egyenlet $+$ . . . felső határa, . . .
az adott egyenlet — . . . alsó határa.

C, D) Alsó határ . . . Még . . . a . . . . . .
. . . . a . . . $+$ . . . alsó,
s — . . . felső határát . . . . . . $+$ . . .
. . . . . . adott egyenlet ~~. . .~~ . . . $+$ . . .
között . . . . . . nagyobb. . . . . . —. . . .
. . . . . . — . . . kisebb. —
. . . . — . . .

C) . . . ~~. . .~~ $+$ . . . alsó határát . . . . . . $\frac{1}{x}$ . . .,
mint . . . $x = \frac{1}{y}$ . . . $f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right)$ . . .

valamivolt $f(x)=0$ vagy

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + L = 0$ s így

$\frac{1}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + \frac{B}{y^{n-2}} + \dots + L = 0$ vagy törteket elegyedésen

$1 + Ay + By^2 + \dots Ly^n = 0$ vagy

$Ly^n + Ky^{n-1} + \dots 1 = 0$

Hanem ezen egyenletnek f teheto tövei pl. ezek a, b, c, d, így $f(x)=0$ nak tövei (mihelyt pl. $x=\frac{1}{y}$) az utóbbinak mások mint $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ... s ha a, b, c, d ... között leg nagyobb a, hogy ezeknek $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ... között leg kisebb $\frac{1}{a}$, miből folyólag $f(x)=0$ tövei alsó határának keresésére a módszer az lesz, ~~$f(\frac{1}{y})=0$ töveinek~~ keressük ki $f(\frac{1}{y})=0$ egyenlet ~~tövei~~ -ből y töveinek felső határát, s tövére vivén $=\frac{1}{h}$ lesz ~~[illegible]~~ $f(x)$ töveinek alsó határa; sőt még akármely egyenlet [illegible] [illegible] a határokat, a [illegible] tagok [illegible] függenek – (nem a kikerdő [illegible] x vagy y [illegible]) mondhatnók így is: keressük ki $f(\frac{1}{x})$-ből ~~x~~ töveinek felső határát ... stb. – Sőt még [illegible] hogy az így eredő $f(\frac{1}{x})=0$ ha a törteket [illegible] [illegible] nem egyéb történik, mint az adott egyenlet [illegible] [illegible] [illegible] rendét fordulva – [illegible] az egyenlet [illegible] [illegible]

Az adott egyenlet tagjaiba [illegible] vagy x^n-é, ~~[illegible]~~ ... x^0-ig [illegible] az elsőből [illegible] [illegible] legkisebbnek, [illegible] leg[illegible] [illegible], x^{n-1} [illegible] x^1-ig [illegible] így tovább. – Ak[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] – s a mely leg kisebb + szám, — a Dx … s mi [illegible] kaphatva

határa [illegible] + beszének [illegible], [illegible] (s a [illegible] adott

egyenlet + beszének alsó határa. [illegible]

[illegible] függvény [illegible], [illegible] hogy a [illegible]

[illegible] kaplat felső [illegible] 1 [illegible]

[illegible] fel, [illegible] ~~felső~~ a [illegible] felső (?) [illegible]

adottba [illegible]) határt, [illegible]

[illegible], 1 [illegible] kezdődő [illegible] —

(mit [illegible])

[illegible] D) [illegible] hogy [illegible]

[illegible] — a adott egyenlet — beszének felső határaival

[illegible] a fordított [illegible] kaplat — beszének alsó

határa —.

Egy példa.

Legyen az adott egyenlet $x^4-2x^3-21x^2+2x+2=0$

1) A + beszé felső határainak keresésére a [illegible] ~~egyenletek~~ kaphatók

$$X = x^4-2x^3-21x^2+2x+2$$

$$X_1 = 4x^3-6x^2-42x+2$$

$$X_2 = 6x^2-6x-21$$

$$X_3 = 4x-2$$

[illegible] a felső határa + 6 (egyik határa)

2) A + beszé alsó határa keresésére [illegible] kaplatok [illegible]

$$Y = 2x^4+2x^3-21x^2-2x+1$$

$$Y_1 = 8x^3+6x^2-42x-2$$

$$Y_2 = 12x^2+6x-21$$

$$Y_3 = 8x+2$$

[illegible] felső határa 3, s $f(x)$-ben alsó + határa $\frac{1}{3}$ vagy [illegible] 0

[illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] határa [illegible] hogy $\frac{1}{3}$ s $\frac{1}{2}$ között [illegible]

[illegible]

A legalsó – határt keressük most a következő egyenletnek

$X = x^4+2x^3-21x^2-2x+2$

$X_1 = 4x^3+6x^2-42x-2$

$X_2 = 6x^2+6x-21$

$X_3 = 4x+2$

tehát felső határ itt (egész számban) = 4

tehát $f(x)$ben alsó – határ = -4

Végre felső ~~[illegible]~~ – határt keresünk

$X = 2x^4-2x^3-21x^2+2x+1$

$X_1 = 8x^3-6x^2-42x+2$

$X_2 = 12x^2-6x-21$

$X_3 = 8x-2$

felső határ 3, tehát alsó $\frac{1}{3}$

tehát felső – határ = $-\frac{1}{3}$ vagy

egész számban 0 .

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Valóban, az adott egyenlet gyökei most.

$5,64575\ldots$, $0,35425\ldots$, $-(0,26795\ldots)$ $-(3,73205\ldots)$ –

S már most képesek vagyunk az egyenletek feloldásá-nak elömenyeit ~~[illegible]~~ amaz tudatával fejteni ki, hogy 1829 óta csak egyet ismerünk oly módszert, mely által az adott egyenletről tökéletesen meg lehet határozni, [illegible] pontos, hány képzeletes, hány valós, s ezek közt hány + s hány – előjelű gyök van. – Ezen módszernek találója Sturm, – s hogy nagyszerűségét minél tökéletesebben átlássuk, foglaljuk egybe [illegible] röviden előbb a következőket

1. Minden egyenletnél, melyet ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] $f(x) = 0$ -val jelképezzük, van egy + jegyű ~~[illegible]~~ felső és egy – jegyű alsó

különbségei, melyek között ha [illegible] (akár) nagy vagy mint nagyobb a [illegible] (számot)

[illegible] vagy mint kisebb (ha számban nagyobb) számo-

mat helyettesítünk, x helyett, bizonyosak lehetünk, hogy $f(x)$ ben

illen 0 ~~nem~~ (soha többé nem) jönend, hanem mindig 0-tól mind kisebb kisebb különb-

ségnek jönend ki. — Az állítás így [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] (egyenlet) (f így pedig (ezt [illegible] föltételt [illegible]) [illegible] [illegible] különböző)

2. Ha tehát $f(x)=0$ nak vagynak valósítandói, akkor [illegible]

[illegible] [illegible] $+h$ és $-h'$ között [illegible], [illegible] tehát [illegible]

[illegible] az x is helyettesítendő (bizonyos) számokat, [illegible] [illegible] [illegible] 0-ig,

s 0-n még [illegible], — hogy [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~

[illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] helyettesítésekkel bizonyosak lehetünk ~~[illegible]~~

hogy $f(x)=0$ nak [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$=0$ [illegible] [illegible] [illegible] az $f(x)=0$ egyenletnek. [illegible]

[illegible] $f(x)$ nek [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $+h$ és $-h'$

között vagyon és pedig [illegible] [illegible] [illegible] különbö-

ző [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] $f(x)=0$ egyenlet

3 Legyenek $f(x)=0$ egyenletnek feloldói [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] a, b, c ... $-k$, $-l$ ..... melyeket

tehát ha helyettesítünk, [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] 0 jön ki.

Tegyük [illegible], hogy nem [illegible] hogy mik jönek ki [illegible]

[illegible] a, b, c ... $-k$, $-l$ [illegible] egyenletnek [illegible]

helyettesítésekor $f(x)$ be — ([illegible] így [illegible] feloldói [illegible]) — [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] a feloldó — [illegible]

Egyszersmind szembeötlő hogy

1) ha a-nál nagyobb, vagy ha semmi helyettesíttetik, az eredmény $+\mathcal{E}$, azaz $+$ előjegyű szám lesz; ha a és b között $-$ előjegyű, ha b és c között ismét $+$ előjegyű s így tovább minden két [illegible] egy [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] helyettesített számoknak megfelelő eredményeket. Végre az utolsó $-$ [illegible] [illegible] [illegible] helyettesítésnél [illegible] [illegible] egyféle jegyű eredmény jön ki, $+$ [illegible] ha páros volt a valódi gyökök száma, $-$ jegyű ha páratlan, és pedig

2) [illegible] [illegible], hogy akármily kicsiny legyen is a helyettesített szám nagyobb mint a, [illegible] [illegible] nagyon kicsi, de mindenesetre nagyobb 0-nál $+$ valamivel nagyobb, $+\mathcal{E}$ s akármi kicsiny kisebb a-nál, [illegible] [illegible] -0-valami, s akkor $-\mathcal{E}$ jön ki. Vagy algebrai nyelven [illegible] ki $f(a)=0$ $f(a+i)=+\mathcal{E}$, akármily kicsiny legyen is i és $f(a-i)=-\mathcal{E}$ ismét akármily kicsiny legyen i, de nem [illegible] akármily nagy is, mert ha i talán $= a-b$, s akkor $a-i=b$, s így $f(a-i)=f(b)=0$, ha $i > a-b$, s akkor $a-i<b$ így $f(a-i)=+\mathcal{E}$ [illegible] lehetne [illegible]

3) Az is [illegible] világos, hogy ha $f(x)=0$ [illegible], nem egyenlet, [illegible] [illegible] [illegible] egy más számot, pl. α ~~[illegible]~~ helyettesítünk ~~[illegible]~~ egyfelől lesz, mindenesetre ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $f(\alpha) \gtrless 0$, [illegible] vagy $+\mathcal{E}$ vagy $-\mathcal{E}$, a szerint [illegible] a mint ~~hogy~~ páros s páratlan, vagy pedig páratlan s páros ~~[illegible]~~ számú gyökök között ~~[illegible]~~ esik a helyettesített α. De másfelől hogy $f(\alpha+i)$ s $f(\alpha-i)$ [illegible] [illegible] előjegyű eredményt [illegible] [illegible] $\mathcal{E}$-ül, az ~~[illegible]~~ attól függ, hogy [illegible]

mellett i-, mert ha pl. α a b és c ~~között~~ közé esik, vagy és nagyobb mint $b-\alpha$, ~~és~~ úgy $f(\alpha+i)$, ha nagyobb mint $\alpha-c$ úgy $f(\alpha-i)$ ellenkező függvény mindenesetre $f(\alpha)$ val. De míg ~~f~~ ~~α~~ ~~δ~~ $i < \begin{cases} b-\alpha \\ \alpha-c \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} f(\alpha+i) \\ f(\alpha-i) \end{matrix}\right\}$ ...

kettő hasonfüggvény $f(\alpha)$ val. És mivel ~~α~~ egyfelől α, másfelől a két körülfogó b és c között ~~mindig~~ van ~~van~~ ha vonni mi kicsiny de mindenesetre valami különbség-

letezik vala hogy α-hoz lehet tenni és, elvenni is belőle oly kicsiny i-t hogy $f(\alpha+i)$ és $f(\alpha-i)$ is ugyanazon egyfeles függvények, t.i. $f(\alpha)$-val hasonfüggvények legyenek.

4. Függvény mi megelőzött $f_1(x)$ és, a mi $f(x)$ nek első határozottjait és vizsgálat alá, vala együtt. S lesz-e mi különbség vagy megegyezés ha t. Σ és Σ_1 között ~~...~~ az alapra is csak ~~...~~ első határozott képlet kijövő basis között ha mindenkor ugyanaz. Sőt mi lehet-e vagyis x-et?

1. Ha lehetett vettetik ~~...~~[dött] $f(x)$ be, $f(x)=0$ egyenlet valamely basis a, b, c, ... t és ξ, t.i. $\Sigma = 0$. Ha ezen vettetik ugyanazon a, b, c, ... t $f_1(x)$ be, is, az állítom, hogy a mostani kijövő Σ_1 semmi esetben nem lehet $= 0$, s mi igaz tovább, mert ha (pl. de teszem ~~...~~) Σ_1 is $= 0$ volna, úgy $x-d$ oly mind $f(x)$ mind $f_1(x)$ osztható volnának, mi pedig feltettük hogy az oly $f(x)$-nek mi semmi mostani függvényesíteni törzsgyarán maga alább egyenlő basis el mutasson,— és tehát megelőző egyenlet [alap]képlet ~~...~~ első határozottja

ik közös osztóval nem bírnak.

2. Nem lehet ~~tehát~~ éppen úgy, hogy $\Sigma_1 = 0$, de különös [illegible] előjegyű lehet tehát? Erre is könnyen meg feleletkezünk. – Mert látnunk [illegible], hogy ha i-t elég kicsinek vesszük $f_1(d+i)$ s $f_1(d)$ hasonló ~~előjegyűk~~ Σ-t adnak. $f_1(d+i)$ pedig ~~[illegible]~~ hogy mindig hasonló előjegyű Σ-t d $f(d+i)$-vel azt könnyű megmutatni. Legyen [illegible] a kifejtés tagjai [illegible] ~~$f(d+i) = f(d) + f_1(d)i + f_2(d)i^2 + \dots$~~

$$f(d+i) = f(d) + f_1(d)i + f_2(d)i^2 + \dots$$

s következőleg

$$f(d+i) - f(d) = f_1(d)i + f_2(d)i^2 + \dots$$

s ha, miként itt feltettük, $f(d) = 0$ akkor

A

$$f(d+i) = f_1(d)i + f_2(d)i^2 + \dots$$

Már ha i-t elég kicsinek vesszük, akkor a bal olyan előjegyű lesz mint első tagjáé az $f_1(d)i$-é, s tehát $f(d+i)$-et hasonló előjegyű $f_1(d)i$-vel, i pedig mindig (t, egyenlő jegyű; + előjegyű) [illegible] hasonjegyű $f_1(d)$-vel. M.B.V. – S más szóval így kimondható hogy $f_1(a)$ $f_1(b)$ … ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ mindig oly előjegyűek ~~[illegible]~~ mint Σ-t adó $f(x)$-ben az $f(a)$-val ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $f(b)$-vel … felülről szólván Σ-k, s tehát (a, b, c … t mindig ~~[illegible]~~ felülről lefelé szálló nagyságú sorban lévén) p.l. $f_1(m)$ ~~[illegible]~~ Σ_1-je + előjegyű ha m, az $f(x)=0$ ~~egyenlet~~ gyökei sorában, páratlan, – előjegyű pedig ha páros ~~[illegible]~~ számú helyet foglal.

5 Lépjünk ismét még egy fokkal tovább, és $f(x)$től és

$f_1(x)$től vonjunk ki új képleteket – csak nem mal,

a móddal ~~melyet~~ miként két adott elem, vagy algebrai

két képlet között a legnagyobb közös osztót keressük, hanem

Osztva ti. $f(x)$et $f_1(x)$el míg lehet, de a még tovább

osztandó $f_1(x)$et alsóbbrangú képletre jutunk, és ezeket a

maradékokat, – melyekben minden tagnak előjegyét előbb meg

változtatjuk, (és ~~[illegible]~~ ~~áll~~ az „csak nem" mely ennek különbség

osztjuk az előbbi osztót ~~[illegible]~~ és míg lehet, az

új maradékot; ~~[illegible]~~ melynek jeggyeltemetése után, az előbbi

osztót és így mindaddig míg utolsó maradékul egy-

szerűen oly képlet, melynek előjegye sohasem megvál-

toztatandó. – Ezen osztást mindig ~~bejövő változ-~~

~~tatott jegyű maradékok, (melyek az újabb osztásokhoz~~

~~szolgálandók)~~ ~~akkor is~~ ~~az~~ ~~képlet~~ Sturm-meghat-

~~[illegible]~~ működőknek hívott osztóig, tehát előbbi

$f_1(x)$ s ennek az egymásutáni kiosztott osztásokból maradé-

kok meg változtatott előjegyekkel, és végre a bé-

fejező s egyszersmind változtatott jegyű utolsó maradék,

melyhez már még további nullosztás+ – akkor-

nak egy sajátlagos képlet- Sturm- meghat- (a

[illegible] – s [illegible] meg különböztetésül)

+ [illegible] ismeretlenünk, s [illegible] számosítását,

jelöljük így formában: $F(x)$ még $= f_1(x)$, $F(x)$ $F(x)$

[illegible] ismét X-e [illegible] maradék

$\mathcal{F}(x)$ … $\mathcal{F}(x)$ is ennek kifejezések számaiból, olyan hogy minden alap kifejezésnek annyi rendbeli hányadosa van hányadik rangu maga. S ennek között az utolsó mint $\mathcal{F}(x)$ mindig x-nélküli kifejezés vagy egyik a már szám — melyik

6 hányadosnak pedig ugyan az mi a első hányadosnak vagy első hányadosok, azaz $f_1(x) = f'(x) = {}^1\mathcal{F}(x)$ vagy

$$X_1 = X' = {}^1X$$

6. Is így könnyű látni hogy $\mathcal{F}(x)$-ben a [illegible] mind f-nek $\mathcal{F}$-el osztásából [illegible] kijő, midőn a maradékot r-nek nevezzük, és lesz: $\frac{f(x)}{\mathcal{F}(x)} = {}^1p + \frac{r}{\mathcal{F}(x)}$ vagy

$r = f - {}^1p\mathcal{F}$, tehát ~~r = f~~ $-r = {}^2\mathcal{F} = {}^1p\mathcal{F} - f$, s így tovább: ${}^1p, {}^2p, {}^3p$ … jelelvén azon számokat ~~mely~~ melyek f-nek ${}^1\mathcal{F}$-el, ${}^1\mathcal{F}$-nek ${}^2\mathcal{F}$-vel … osztásából kijőnek

I

$f = f$

${}^1\mathcal{F} = {}^1\mathcal{F}$

${}^2\mathcal{F} = {}^1p\,{}^1\mathcal{F} - f$

${}^3\mathcal{F} = {}^2p\,{}^2\mathcal{F} - {}^1\mathcal{F}$

${}^4\mathcal{F} = {}^3p\,{}^3\mathcal{F} - {}^2\mathcal{F}$

…

${}^n\mathcal{F} = {}^{n-1}p\,{}^{n-1}\mathcal{F} - {}^{n-2}\mathcal{F}$

vagy

II

${}^1f = f$

${}^2f = {}^1\mathcal{F}$

(mindenüvé (x)-et odaértvén.)

s ezektől meg fordítva

$f = {}^1p\,{}^1\mathcal{F} - {}^2\mathcal{F}$

${}^1\mathcal{F} = {}^2p\,{}^2\mathcal{F} - {}^3\mathcal{F}$

${}^2\mathcal{F} = {}^3p\,{}^3\mathcal{F} - {}^4\mathcal{F}$

${}^{n-1}\mathcal{F} = {}^np\,{}^n\mathcal{F} - {}^{n+1}\mathcal{F}$ …

~~Ezen számokat s egy kifüggésüket [illegible] hányados~~

~~sorozatnak [illegible] különbségüket [illegible]~~

7. Jelöljük így a Σ-t is, azon számokat melyek $f, {}^1\mathcal{F}, {}^2\mathcal{F}, {}^3\mathcal{F}$ … ${}^n\mathcal{F}$ helyett kijőnek, ha bennök rendeikbe ugyan azon számot helyettesítjük x-ért

Legyenek tehát pl. $f(q) = \varepsilon$, ${}'f(q) = {}'\varepsilon$, ${}''f(q) = {}''\varepsilon$, [illegible] hol ε, $'\varepsilon$, $''\varepsilon$, $'''\varepsilon$ ... közűl néha egy, néha kettő s a több, lehet 0, lehet némelyik +, némely − és függés [illegible] s ~~[illegible]~~ s éppen úgy [illegible] ránézve ε-k előjegyeinek egyezésében, vagy különbözőségében [illegible] föltevések, a [illegible] föl adva [illegible] a [illegible] [illegible] lesz.

8. Nem lehet oly q-t helyettesíteni a [illegible] hogy két [illegible] ε [illegible] egyszerre 0 [illegible] ([illegible] $'f(x) = 0$ [illegible] ${}^{k+1}f(x) = 0$ [illegible]). [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] két [illegible] [illegible] [illegible] – Mert ha pl. θ [illegible] helyettesítése

[illegible] ${}^{k}f(x)$-t, [illegible] ${}^{k+1}f(x)$-et ${}^{k}\varepsilon = {}^{k+1}\varepsilon = 0$ [illegible] [illegible], vagy $x - \theta$ [illegible], [illegible] ${}^{k}f(x)$-et, [illegible] ${}^{k+1}f(x)$-et [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] többszöri [illegible] [illegible] ${}^{k+2}f(x)$-is, éppen úgy abból folytólag ${}^{k+3}f(x)$-is, abból folytólag ${}^{k+4}f(x)$-is – s végre $'f(x)$ s $f(x)$-is [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] két [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\varepsilon = 0$ [illegible] [illegible] [illegible].

9. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $'f(x) = 0$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] helyettesítésével [illegible] $'\varepsilon = 0$.

saz ${}^{r,i}\Sigma$ sa ${}^{r''}\Sigma$ ne lehetne $= 0$, hanem mindenik valamely számu-
nyi pedig egyik a másiktól mindig ellenkező jegyűekre [illegible] egyenlő

Mert általában lévén ${}^{q-1}f(x) = q\varphi\,{}^{q}f(x) - {}^{q+1}f(x)$ lesz számaink egyenesben

is $${}^{q-1}f(\theta) = q\varphi\,{}^{q}f(\theta) - {}^{q+1}f(\theta)$$ és ha ${}^{q}f(\theta) = 0$, tehát

$${}^{q-1}f\theta = -\,{}^{q+1}f(\theta)$$ vagy ${}^{q-1}\Sigma = -\,{}^{q+1}\Sigma$. M.B.V. Önként értetődő

hogy ezen ~~[illegible]~~ f-re f-re, melyeket egyikfelől nem

[illegible], nem alkalmazható. és tehát ~~[illegible]~~ [illegible] ~~[illegible]~~

állo f-re [illegible].

Keresünk [illegible] a [illegible] állo [illegible] ([illegible] való [illegible]

[illegible] egyelőttünk állo $f(x) = 0$ egyenletnek) [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

10. Ellenkezik [illegible] előbb minden $f(x)$ ben, [illegible] ${}^{\prime}f(x)$ ben

[illegible] ${}^{\prime\prime}f(x)$ ben ... ${}^{n}f(x)$ig ugyanazon egy [illegible],

az $f(x) = 0$ bal. [illegible] legnagyobbikainál nagyobb [illegible]

melynek neve legyen α.
Lesz [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~

1) Σ + előjegyű
2) ${}'\Sigma$, ${}^{2}\Sigma$, ${}^{3}\Sigma$ ... ${}^{n}\Sigma$ között ~~lehet~~ ~~némelyik [illegible]~~

~~[illegible]~~ nem lehet. [illegible] mind Onál nagyobb vagy kisebb,

[illegible] + [illegible] – előjegyűek lehetnek, nem lehet egy-

[illegible] [illegible] [illegible] lehet $= 0$. [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] α. ~~[illegible]~~ nagyobbnak [illegible] [illegible] hogy egyik

~~[illegible]~~ ezen O.k. [illegible] [illegible] + [illegible] – [illegible] álljon

[illegible] [illegible] mindig [illegible], ~~+~~ Σ maga [illegible] +

[illegible] [illegible]. Van tehát most. Σ, ${}'\Sigma$, ${}^{2}\Sigma$ ... [illegible] rendre tekintve egy +os tagokkal (vagyis +Σ-ra) [illegible] nem

tudom mit ~~fel~~ ~~jegy~~ felejtenállok vagy eszökkel haladó

~~[illegible]~~

jegy sornak pl. a

$\Sigma,\ {}^1\Sigma,\ {}^2\Sigma,\ {}^3\Sigma,\ {}^4\Sigma,\ {}^5\Sigma;\ {}^6\Sigma$

$+\quad +\quad -\quad -\quad +\quad -\quad +$ s mármost

előbb meg határozni előbb hogy mi jegy sorba kell ezen fordul elő-

helytelen [illegible] a határozandó α-t.

Meg ~~[illegible]~~ lehet hogy még mielőtt α [illegible] le [illegible]

(s tehát Σ még mind + maradván) ${}^1\Sigma$, vagy ${}^2\Sigma$, vagy ${}^3\Sigma$ [illegible]

változtatja előjegyét, de ez által a egész sorban

előfordulni jegyeknek általános [illegible] nem változhat-

nak — mert mielőtt valamelyik ${}^1\Sigma, {}^2\Sigma, {}^3\Sigma$ ... ellenkező

jegyű lenne, ~~[illegible]~~ által előbb a 0-n kell át-

átmennie. s ~~[illegible] ([illegible]) az a α-t [illegible]~~

~~megfelelőleg [illegible] előbb [illegible] [illegible] vagy [illegible] $\Sigma = 0$~~

~~Σ-t [illegible] [illegible] [illegible] még α [illegible]~~

~~(= αti) volt, még változatlan jegyű Σ-t [illegible] még, s ha~~

~~[illegible] [illegible] [illegible] ${}^n\Sigma$ [illegible] [illegible] 0.~~

0 körül pedig [illegible] a Σ [illegible] [illegible] két [illegible]

nem 0-t, s egymás [illegible] ellenkező ~~[illegible]~~ jegyeket [illegible]

ő [illegible], s tehát még az [illegible] egy [illegible] megelőzőleg [illegible] ~~[illegible]~~

~~pedig~~ s [illegible] + [illegible] — előjegyet [illegible] az Σ-nek

meg ~~[illegible]~~ (α-nak [illegible]) 0-n [illegible] [illegible]

két ellenkező jegyűek között [illegible] ki, [illegible]

tehát a jegyeik [illegible] változni, mert —

míg a $-a$ nagya $+$ vagy $-$ ával, az állott s a két ellenkező jegyű
ellenkezett számok együtt alkotnak egy jegyesit s egy jegy-
folytatást, most nagya kezdetű alapítás magas egy
jegyfolytatás, de mind egy jegyeset s így a jegyesek
nek alapja számot az egész sorba nem adja, s
a α-nál tovább adódván, így előáll $\pm\Sigma$ nagy, míg pedig
az előtt jegyének ellenkezőjével de a kettő két ellenkező jegy
közé esvén egy új folytatást, nagy. De egy mindenik
jegyesit most sem számítatik – Lám való hogy az
mindig így történik Σ-a határ $^m\Sigma$ (mert $^n\Sigma$ változó-
lan mennyiség) – s ha van $\alpha > a$, határtalanig – határ
határnak bezárt közé kiesik, s alapul azon a bekezdés-
tett körülmények ... akár melyik, különböződ között álló
Σ 0-on csak akkor mehet keresztül, s tehát jegyét csak
akkor változtathatja meg, két ~~ellenkező~~ ~~...~~ jegyes
számból fogja kezdeni s egyes azt jegyet változni, mert
a jegyesnek ... sem ... sem ...
hat... De

11. Egészen másként áll a dolog Σ-val, a alap képlet
bennek, melyek ~~...~~ egyfelől számból állnak a többi tör-
Σk ... állanak. Σn mit tudjuk folytonos $+$ mind, míg
a $< \alpha$, s egy számból azt ... hogy növekedvén α
a határt elérnie, mi Σ is $+$, s annak mind addig míg $\alpha = a$
s tehát $\Sigma = 0$, sőt Σ egyre $+$ ... mind ha α-t a-n alul;

kaphatjuk. Ha akkor maga Σ-ban mily függvénnyel szálljon
α alább mint a ... — Σ-ra ugrott át, így két-
α-nak α-ni számával egy új függvény támadott, egyszer
... tehát az ujra a ~~függ~~ egyenlet gyökeinek száma
ismét az ... α ... alatt ... kell, ~~az~~ ...
... mulhatatlanul, míg egy új ~~fun~~ taggal ...
Így C-nél, D-nél, — k, — l — m ... s a gyökök
...ból, vagy következik a ... hogy $f(x)$, $\varphi(x)$
$\varphi(x)$ ... φx ... az $f(x)$ lehető leg nagyobb + gyökének
mind nagyobb, s lehető leg alsó − g-nél kisebb szá-
mokat helyettesítvén, az ezeknek kijövő Σk-sorában annyi jegy
számával fordul elő, mennyivel több, hogy való gyöke van, az ... $f(x)=0$
egyenletnek. — S általában, ha akár mely két számot helyette-
sítünk az alap képletben, s ... a két kijövő
Σ-sorozatbeli jegyeknek számainak különbsége kimutatja
azon egyenletnek azon két szám között találtató való
gyökeinek számát; és így ha egyik α-nak lesz 0, másik
a + felé ... felső határa, kitűnik a + gyökök száma,
ha 0 és a gyökök alsó − határát helyettesítve kitűnik
a − gyökök száma. S ugyan ezen ... helyettesítése
által megtudhatjuk, ha vallyon két ... szám (egyik
meg ... , ... való gyök vagyon — ... avagy ...)
... [illegible] ... tekintve a $^1Σ = 0$
... , ... semmi függés ... [illegible]

Álljon már itt egy egészen kidolgozandó példa, melyből még valami újat is akarok tanulni. –

Legyen a vizsgálat alá veendő egyenlet a

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

tehát

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$'f(x) = 3x^2 - 7$$
$$''f(x) = \frac{14}{3}x - 7$$
$$'''f(x) = \frac{1}{4}$$

~~helyettesítve~~ ~~téve~~ ~~itt~~ –

$f(x) = 0$ nak felső korlátja kikeresésére a következőket vesszük

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$f_1(x) = 3x^2 - 7$$
$$f_2(x) = 3x$$
$$f_3(x) = 1$$

tehát a felső + határ $= +2$ egész számban

Az alsó határ fölkeresésére

$$f(x) = x^3 - 7x - 7$$
$$f_1(x) = 3x^2 - 7$$
$$f_2(x) = 3x$$
$$f_3(x) = 1$$

tehát az alsó − határ egész számban $= -4$

A kombinációkban tehát $+2$ és -4et helyettesítve kijönnek a következő Σk.

$\alpha = 2$	$\alpha = -4$
$\Sigma = +1$	$\Sigma = -29$
$'\Sigma = +5$	$'\Sigma = +41$
$''\Sigma = +\frac{49}{3}$	$''\Sigma = -\frac{35}{3}$
$'''\Sigma = +\frac{1}{4}$	$'''\Sigma = +\frac{1}{4}$

és amott 0 jegyváltás itt 3 jegyváltás

tehát a valós gyökök száma $= 3 - 0 = 3$. Lássuk már közül

hány $+$ hány $-$ előjegyű és $+2$ már közbe helyettesítve és helyettesítsünk most 0-t. Kijön $\Sigma = +7$

$'\Sigma = -7$

$^2\Sigma = +7$

$^3\Sigma = +\frac{1}{4}$ tehát a 4 je-

gyek száma = 2, és a + benne $= 2 - 0 = 2$, van tehát

és 2 +, és egy − előjegyű gyök

Vizsgáljuk van-e most között vagy egy 0 és +1 közt

0-t már van helyettesítve. helyettesítsük az 1-et.

kijönek $\Sigma = +1$

$'\Sigma = -4$ tehát a jegyeknek száma itt is = 2

$^2\Sigma = +\frac{35}{3}$

$^3\Sigma = +\frac{1}{4}$ mint $\alpha = 0$-nál, tehát 0 és 1 között

nincs való gyök. tehát mind a kettő

~~lesz 1 és 2 közt~~ van 1 és 2 közt

A − gyök csak −3 és −4 közt, mert most $\alpha = -3$

lesznek $\Sigma = +1$

$'\Sigma = +20$ tehát csak két jegyet, és egy −3 és −4

$^2\Sigma = -7$

$^3\Sigma = +\frac{1}{4}$ közt fekvő egy gyök.

De nem lehet és nem is kell venni hogy a [illegible]

előálló [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-

mint ha egy [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] a [illegible]-

Ugyan is könnyen [illegible] hogy ha a kijövő Σ-k közül

akár egyet [illegible] [illegible] valamely számmal, vagy különböző

[illegible] + előjegyű számokkal, [illegible] [illegible]

előjegyeit, [illegible] egyedül van [illegible] ne változnak

s tehát [illegible] [illegible] és ugyan a [illegible] [illegible]

Közelítő földési módszerek

1. Newton módszere, közelítő oldásoknak alapja volt, melyet egy példára alkalmazva világosítunk föl. –

Legyen a földandó egyenlet a $x^3-2x-5=0$

Tudva levő módon ki jön, hogy ezen egyenletnek csak egy való gyöke van $+2$ és $+3$ között, a keresés tehát ~~[illegible]~~ mind nagyobb x 2-nél. Nevezzük azt y-nak; tehát

$x = 2+y$ s ezt a Dott egyenletbe behelyettesítvén

$(y+2)^3 - 2(y+2) - 5 = 0$ vagy fordítva rendel írva, s ál-

tal írva

$$\left.\begin{array}{l} 5 \\ 4 + 2y \\ -8 - 12y - 6y^2 - y^3 \end{array}\right\} = 0$$

$1 - 10y - 6y^2 - y^3 = 0$ és a többiek [illegible] gyél igen, minél fogva

ezen ~~egy~~ harmadrangú egyenlet földésének ~~[illegible]~~ a [illegible] y-t meg határozni nem volna lehetséges. De meg [illegible] ~~[illegible]~~ hogy ha harmadrangú egyenlet általános föld-

dási [illegible] tökéletesebb bevezetni kedvünk lett vala.

[illegible] [illegible] a feladott egyenlet [illegible]

[illegible] [illegible] s hogy további itt [illegible] föl

[illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] jött ki csak 3d rangú egyen-

let a feloldandó, csak 3d rangú volt. [illegible]

[illegible] ~~[illegible]~~ pl. 7d rangú, akkor y egyenlet is [illegible]

rangú, s így általában nem feloldható lett [illegible] oknak kedvéért folytatjuk [illegible] a közelítést.

Ha $1-10y-6y^2-y^3=0$ [illegible]. De mivel y való- ként tehát [illegible] kevés [illegible], s annál kisebb [illegible] minél nagyobb [illegible]. Így itt is y^3 [illegible] lehet- s tehát annak elhagyásával, $1-10y-6y^2=0$ vagy [illegible] közelítőleg igaz, s [illegible] fel [illegible] 2d rangú egyenlet. Lesz:

$$6y^2+10y=1 \quad ; \quad y^2+\frac{5}{3}y=\frac{1}{6}$$

$$y=-\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{5^2}{6^2}+\frac{1}{6}}=$$

$$=\pm\frac{1}{6}\sqrt{31}-\frac{5}{6}$$ ([illegible] y_1

$$y=\frac{\sqrt{31}-5}{6}$$ közelítőleg [illegible]

$y=0.0946\ldots\ldots$ tehát $x=2,0946$ [illegible] $\frac{1}{1000}$ részben [illegible] a valóságtól.

Ha még további közelítést akarunk tenni, az előbbi [illegible] s műveletet ismételhetjük [illegible] formán

$$x=2,0946+z=A+z \quad ([illegible]) \quad \text{Innen}$$

$$(A+z)^3-2(A+z)-5=0 \quad \text{vagy}$$

$$A^3+3A^2z+3Az^2+z^3-2A-2z-5=0$$; [illegible] z^3 [illegible] s az egyenletet rendezve

$$z^2+(3A^2-2)z=5+2A-A^3$$ s innen

$$z = 1 - \frac{3A^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)^2 - (A^3 - 2A - 5)}$$, mi a jelen esetben

hol $A = 2{,}0946$, $A^2 = 4{,}38735$; $A^3 = 9{,}1897$, ~~[illegible]~~ levén,

$$z = -5{,}581025 \pm \sqrt{32{,}82215 - 0{,}0005}$$ vagy mind a − jegyet

tartva meg elhagyva jönne ki.

$$z = -5{,}581025 + \sqrt{32{,}82165} = -5{,}581025 + 5{,}5810241$$

miből kijön hogy z − előjegyű, tehát $x < 2{,}0946$.

tehát $x = 2{,}0945 \ldots$ s a többi tizedesek pedig ugyan addig kijönnek vala, ha y. közelítőleg szintén addig figyeltük ki. De ezt nem tekintendőket. – a negyedik fokbéli műveletek azt is teszik, miképp egy meghatározást kívánó, kiindulván abból, állott hogy miként látni való, a közelítésnek ezt módszere is, mely ~~[illegible]~~ egy második rangú egyenletnek föloldását kívánva, ~~[illegible]~~ első helyettesítési alkalmával még meg-győz, de már a második harmadiknál több hosszadalmasságba bonyolítva s az a rendes föloldó. Newton-tanában ~~[illegible]~~ Ynak z-nek négy-nek s harmadik s a többi helyre z^t emelését s meghatározni kívánás – s ugyan a első meleléti tekintetekben értelmében előbbi a közelítő rendre rendre – hogy a különbséget ugyanazon egyenlete

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

$x = y + 2$ tehát mint láttuk volt.

$1 - 10y - 6y^2 - y^3 = 0$ s a 2ik emeletieket elhagyván

$1 - 10y = 0$, innen $10y = 1$, $y = 0{,}1$. ($x = 2{,}1$ az első közelítés

s nagyobb az igazi gyöknél.

Legyen tehát $x = 2{,}1 - z$ tehát

$(2{,}1 - z)^3 - 2(2{,}1 - z) - 5 = 0$ s innen, a z fölötti emeléseket elhagyván

$2{,}1^3 - 3 \cdot 2{,}1^2 z - 2 \cdot 2{,}1 + 2z - 5 = 0$ azaz

$$11{,}23z = 0{,}061$$

$$z = \frac{0{,}061}{11{,}23} = 0{,}00534\ldots$$

$x = 2{,}1 - 0{,}00534 = 2{,}09466\ldots$ szorosabb közelítés a negyedik tizedesig. Miként kellene a módot tovább folytatni világos.

Ezen közelítési módból, általános formulát vonhatni következőleg.

Legyen a feloldandó egyenlet

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots L = 0$$

Legyen x-nek első közelítése $= a$ (melyről igen jó ha kevesebb mint $\frac{1}{100}$ részben különbözik az igazi gyöktől, s azt az maga egyedül a többi előtt föltalálja más mód

Ennek, másodrangu egyenlet utján számittatik ki.) Leg-

yen tehát $x = a + y$, és y a keresendő ? végre, az

adott egyenletben helyettesitvén $a+y$-t, ki jön

$$(a+y)^n + A_1(a+y)^{n-1} + A_2(a+y)^{n-2} + \dots\dots A_n = 0$$

vagy, binomi tan szerint kifejtve, és y hatványai szerint el-

rendezve.

$$a^n + n a^{n-1} y + \frac{n.n-1}{2} a^{n-2} y^2 + \dots\dots$$

$$+A_1 a^{n-1} + A_1(n-1) a^{n-2} y + A_1 \frac{n-1.n-2}{2} a^{n-3} y^2 + \dots\dots$$

$$+A_2 a^{n-2} + A_2(n-2) a^{n-3} y + A_2 \frac{n-2.n-3}{2} a^{n-4} y^2 + \dots\dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$+A$

$$+A_{n-2} a^2 + A_{n-2}.2.a.y + \dots\dots$$

$$+A_{n-1} a + A_{n-1}.1.a^0 y$$

$$+A_n + 0.$$

s y nak második, s annál inkább feljebb emelt hatványai mellő-

zésével,

$$(a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} \dots A_n) + (n a^{n-1} + A_1(n-1) a^{n-2} + A_2(n-2) a^{n-3} \dots \dots 2A_{n-2} a + A_{n-1})\, y = 0$$

vagyis

$$y = -\frac{a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \dots A_n}{n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \dots 2A_{n-2} a + A_{n-1}}$$

s a

$$x = a + y =$$

$$= a - \frac{a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \dots \dots A_n}{n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \dots + 2 A_{n-2} a + A_{n-1}} =$$

$$= \frac{(n-1) a^n + (n-2) A_1 a^{n-1} + (n-3) A_2 a^{n-2} + \dots \dots + A_{n-2} a^2 - A_n}{n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + \dots \dots \dots + A_{n-1}}$$ dacsak

közelítőleg.. melyből ujabb közelítésnél hasonlóan ezen formula alkalmazásával még ujabbat- és ujabbat- lehet mind közelebb hozzá lehet közelíteni. - Pl.

[illegible] egy közelítése legyen k_1-nak és a még közelebbieket [illegible]

k_1-nek k_2-nek nevezvén lesz 3ad rangu egyenletnél illetőleg, mindig

~~k_{n+1}~~

$$k_{n+1} = \frac{2k_n^3 + A_1 k_n^2 - A_3}{3k_n^2 + 2A_1 k_n + A_2}$$

Negyedrangunál - $k_{n+1} = \dfrac{3k_n^4 + 2A_1 k_n^3 + A_2 k_n^2 - A_4}{4k_n^3 + 3A_1 k_n^2 + 2A_2 k_n + A_3}$

Ötödrangunál $k_{n+1} = \dfrac{4k_n^5 + 3A_1 k_n^4 + 2A_2 k_n^3 + A_3 k_n^2 - A_5}{5k_n^4 + 4A_1 k_n^3 + 3A_2 k_n^2 + 2A_3 k_n + A_4}$

Alkalmazzuk az előbbi a fenebbi egyenletre melyben $n = 3$, $A_1 = 0$, $A_2 = -2$, $A_3 = -5$

Az első közelítés $= k_1 = 2$, tehát

második közelítés $k_2 = \dfrac{16 + 5}{12 - 2} = 2,1$

harmadik közelítés $k_3 = \dfrac{2 \cdot 9,261 + 5}{3 \cdot 4,41 - 2} = 2,09456$ ... mi egészen az ötödik tizedesig, [illegible] [illegible]

Nem lehet azonban elvitatni nálkül tagadni, hogy Newton-nak e módszere némelykor könnyű helyett tévedésre vezethet a keresett gyök igazi értékétől. Adván pl. az adott egyenlet számértékei olyanok, hogy [illegible] tünk, pl. a keresett gy. nagyobb [illegible] magában foglalja tegnék gy. ugyanazt, de a számértékek a [illegible] jár, s így ördöged majd több az mit elmellőzünk mint az mit megtalálunk. – Ezt

a) Adták azon tanácsot, hogy a keresett gyök számértéken kívül, még egy két gyök leendő közelségével, tehát, másodrangú egyenlettel, keressük ki. –

b) ~~Fourier Lagrange~~ Fourier és mások, utat mutattak az ily természetű ellen érvelésre. De módszerük körülményes munkálatba vezetnek. – L. A.

2. Lagrange módszere, a közelítést lánctörtek alakjában eszközli. E sokkal sem gyakorlat de sokszor körülményes –. Módszere a következő példából eléggé kitűnik.

Példa. Legyen a feloldandó egyenlet ez

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0$$

Előleges vizsgálat kimutatja hogy két való + gyöke van 2 és 3, s 3, 4 között. Keressük a nagyobbat.

3 egyik határozott [illegible], s a negyedik [illegible] egész [illegible] az meg-határozandó, mi csak való tört lehet, nevezetesen $\frac{1}{y}$ csak. Tehát

lesz $x = 3 + \frac{1}{y}$, mit az adott egyenletben helyettesítvén

kijön $\left(3+\frac{1}{y}\right)^4 - 4\left(3+\frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(3+\frac{1}{y}\right) + 27 = 0$ s ettől ki-

fejtvén, s a törteket kiegyenlítvén lesz

$$9y^4 + 3y^3 - 42y^2 - 8y - 1 = 0$$

Előlegesen (de kerekítendőkre) vizsgálatok kimutatják mindenkinek, ezen egyenletben y-nak egy becse van $+6$, $+7$ között. tehát $y = 6 + \frac{1}{z}$ s

következőleg $x = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{z}}$

Hasonló módon kellene most ezen legutolsó egyenletben y helyett $6+\frac{1}{z}$-t helyettesíteni, s kifejtés s [illegible] törtegyenlítés után, keresni azon egészet, mely között z esik; kijönne hogy az 7 s 8 közé esik tehát

$$z = 6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{v}}$$ s következőleg $x = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{v}}} \ldots$

Látni való, miként lehet így a számokat ~~[illegible]~~ határozni s x-et. Ezen végtelen lánctörttel fogunk ki-nevezni, minden további becse nagyobb megközelítő eredményt ad. De a munka [illegible] s kerekítendőkre voltaképen nagyobb nem lehet.

Elhallgatva még néhány s ismét néhány jegyzetbe kerek kérdései módszereket, állgondpont meg amely melyet Legendre kérdett jegyzetben, s mely biztosságos-legkönnyebb kérdéssel egyesít, s egyszersmind gyakorlatibb mind, ? műveleti végtelenül logarithmus kiszámítá-sának ád helyet. Alapművei a következők:

1 Akármely (adott egyenletet, bizonyos normális alakra) átalakíthatni olyanná, melynek első fele x^n, második kettős fele egy osztat legyen, mindkét felé-nek nevezőjében mind számlálójában csupa + előjegyű tagokkal. Mert

a) Vigyük át mindenik – előjegyű tagot, az által mindenik + jegyet kap.

b) bontsuk fel az egyenlet előbbenidt felét két részre, melyeknek egyike legyen x^n.

c) ezen második részével osszuk az egyenlet mindkét felét.

Pl. $x^5-3x^4-2x^3+4x^2+6x-6=0$. Ezt átvivén alakra így írhatjuk

$$x^5+4x^2+6x=3x^4+2x^3+6$$

$$x^5\left(1+\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right)=3x^4+2x^3+6$$

$$x^5=\frac{3x^4+2x^3+6}{1+\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^4}}=\frac{3x^8+2x^7+6x^4}{x^4+4x+6}$$

2) Sőt az ily alakra vont egyenletnek mellette ~~nagyon~~ ~~sok~~ egyszerűsít-
sokat lehet (Stellig) végtelen írni, mi szerint az n^{dik} s mikor több ...

a x-re bontott k egyenletek – pl.

2. $$x' = \frac{3x^8+2x^7+6x^4}{x^4+4x+6}$$ osszuk x^4-el mindjárt

$$x' = \frac{3x^4+2x^3+6}{x^4+4x+6}$$. Amiben ezen, az nem mindig fordul elő, mert [illegible]

3. Általában kapunk így [illegible] egyenletekhez

$$x^n = \frac{Ax^m + Bx^n \dots + M}{1+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\dots\frac{h}{x^n}}$$ hol minden x-i [illegible] [illegible] + [illegible]

4. X-nek egy [illegible] a mit [illegible] [illegible] [illegible], a egyenlet [illegible]. [illegible] X-nek [illegible] [illegible] ha egyfelől [illegible] [illegible] [illegible], másfelől [illegible] [illegible] mit M-nél [illegible] vagyunk [illegible] [illegible] [illegible] egy [illegible] D [illegible].

5. Most [illegible] a nehézségeket.

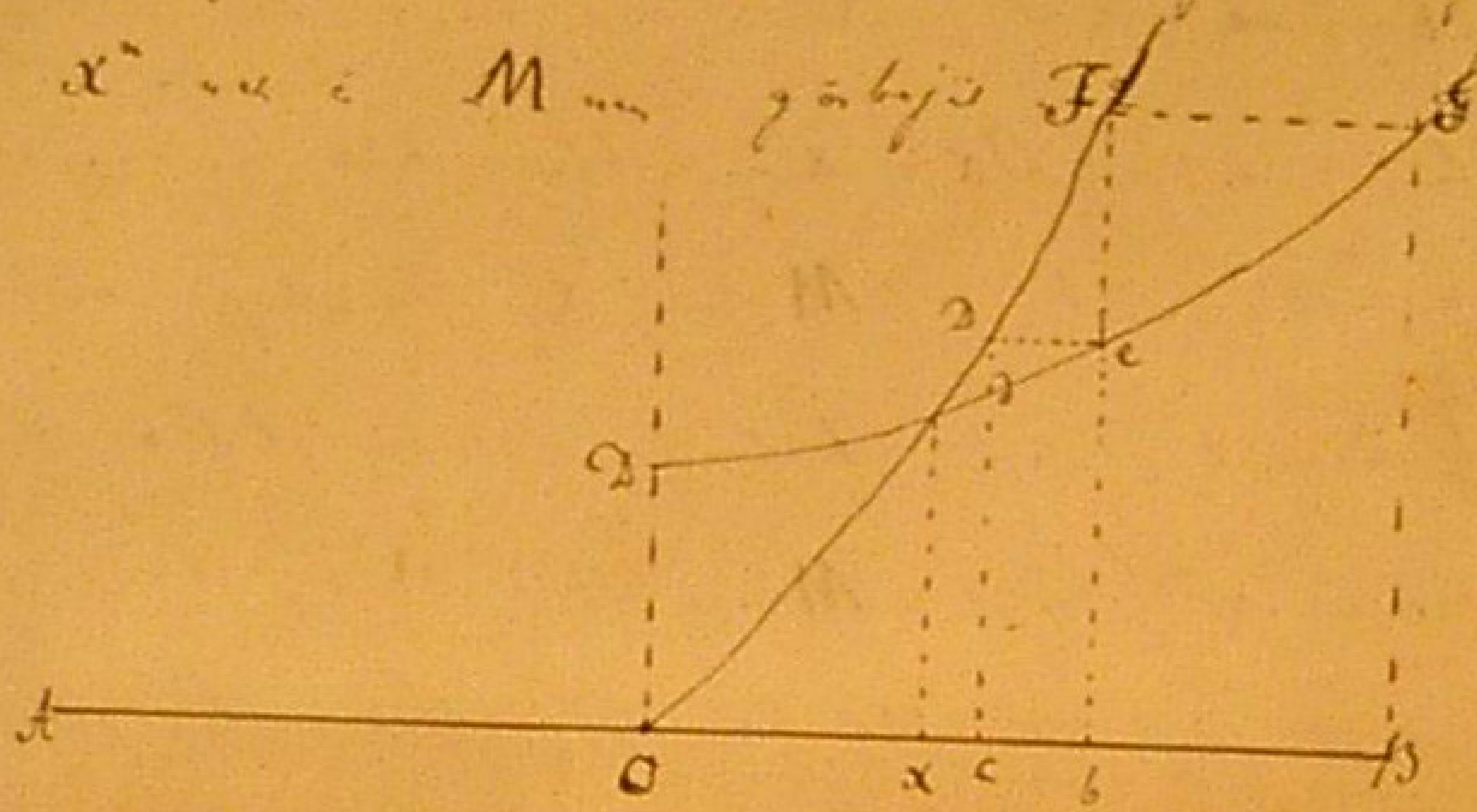
1) X-nek vagy van való [illegible] vagy nincs – (mit a adott egyenlet [illegible] megmutatnak) – ha nincs, [illegible] [illegible] [illegible]

2) Ha van való [illegible] [illegible] (a egyed [illegible] egyenletet [illegible] előbb [illegible]) – vagy van + [illegible] vagy D-el –, hol mi + [illegible] a egész egyenletet [illegible] kell változtatni – [illegible] fel. Tehát D-[illegible] [illegible] [illegible] az egyenletet [illegible] [illegible] vagy vagyunk + [illegible]

3) Ha több + benne, [illegible] előtt [illegible] legnagyobbat [illegible] [illegible] elvonttanban.

~~4.) [illegible] legnagyobb [illegible]~~ —

4.) Ha világosabb [illegible] nagyobb [illegible] [illegible] lesz X-nek és M-nek görbéje



Abscissája AB-n elvont [illegible] kezdő pont O, s a + elvont B felé, a − elvonás A felé esnek. Most [illegible]

[illegible] hogy az X-ben ha $x = 0$, $= \varepsilon$, $= 0$ [illegible]

[illegible] X-nek görbéje O-nál kezdődik [illegible] X-ben ha x helyett [illegible] + [illegible] ε + lesz, tehát X-nek görbéje

feltűnik O-tól kezdve felül [illegible] AB-n. [illegible] X-nek [illegible]

nagyobb [illegible] helyettesítünk X-ben, annál nagyobb lesz az

feltűnés, tehát X-nek görbéje folytonosan távolodik AB-től

[illegible] nagyobbra [illegible] OF-nél. Ellenben [illegible]

M-ben ahol x helyett O-t helyettesítünk a elvonás $= \varepsilon$ lesz,

O-nál nagyobb, mert M benne lesz [illegible] $\frac{A}{h}$, melyek

[illegible] + [illegible] > 0 [illegible], tehát M [illegible]

[illegible] $+ > 0$, [illegible] M görbéje O-nál az

X^n görbéjének baljára jár. b) ~~mennél nagyobb X-nek [illegible]~~

~~[illegible]~~ ha M-ben x helyett annak valamely

becsét, melyen is f.t.-ben legnagyobb + becsé lehetséges [illegible]

[illegible] feltéve $\mathcal{E}$ lesz $= X^n$, tehát M görbéje

X^n görbéjét is vágja. S így annak jobbjára megyen

át, ~~[illegible]~~ ámbár [illegible] helyett X-nek egy becse van. c) [illegible]

hogy ez a $Ox = x$ egy becse [illegible] legnagyobb. X-nek [illegible]

neveledésével. M és X^n görbéje többször [illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] van el [illegible] felette [illegible]

[illegible] [illegible] M-nek [illegible] X^n-nek becse, mig pedig a

előbbinek nagyobb becse volna. f.t. ellen [illegible].

M [illegible] [illegible] M görbéje alldobb X^n

görbéjének jobbjára [illegible]. S tehát [illegible]

[illegible] D G-nél mig pedig B) feltagjaiban [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible], mit M-nek [illegible]

[illegible] egyenlőre [illegible].

6 X^n görbéje [illegible] [illegible], ~~[illegible] $\mathcal{E} = X$~~ [illegible]

[illegible] [illegible] legyen α n-dik [illegible] vagy $\mathcal{E} = \alpha^n$, te-

hát ~~α~~ [illegible] $\alpha = \sqrt[n]{\mathcal{E}}$

[illegible] legyen $\varphi(x) = 0$

7 M egyenletben. ~~(s. M görbéjét.~~ vegyük ~~[illegible]~~ nagyobb

[illegible] $= \alpha$ [illegible] X-nek legnagyobb egy becse. lesz

$\mathcal{E}_{\bullet} = \varphi(\alpha)$ [illegible] ha $\alpha = OB$, ~~φ~~ lesz $\mathcal{E} = \varphi(x) = BG$.

G-től [illegible] az [illegible] [illegible] GT. ~~[illegible]~~