1 oldal

Midőn a felsőbb egyenletek tana folytatódik, akárhányadik rangu ily egyenletnek (ha számszorzóji regurálisok) föloldására út mutatást adni szándékozunk: a már régebben elmaradottakhoz még némely előzményeket kell pótolnunk a következendőkben.

1. Hogy $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + V$
2. és hogy ha $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + V = 0$ úgy
3. $-a, -b, -c \ldots$ ezen egyenletben x nek böcsei, $x+ a$, $x + b \ldots$ pedig az egyenlet első felének osztóji, az már rég tudva van, de hogy megfordítva, akármely $x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \omega = 0$ adott egyenlet balfele, melyet bizonyos $x + h$, $x + j$, $x + f$, …. alaku szorzótársakból nem mi szerkesztünk öszve, szintén még is fölbontható ily szorzótársakra, jelesen anyira hanyadik rangu maga. S következőleg hogy akármely (normális alakra viszszavitt) felsőbb rangu egyenletben van x számu meg adható becse nyilvános számban – ez is igaz ugyan, de kielégitőleg csak a legujabb időkben bizonyíttatott be jelesen Gauss és Cauchy által – Mi ez utolsónak egyszerűbb bizonyitását adandjuk alant, addig ily nevek tekintetére elhisszük az állitmányt, minden belőle folyó következményekkel

1 oldal háta

következményekkel együtt, milyenek (vagy már szókkal mondva ugyanazt fejezik ki)

a) Minden egész számszorzóju egyébaránt akárhányadik rangu algebrai képlet, első s második szinten egész valo (realis) számszorzóju szorzótársakra bonczoltatni. Ez pedig
b) csak egyképpen, vagy
c) egy ily képletből alakított egyenletnek nem lehet több x becse, mint a hanyadik rangu stb.

2. Állván tehát ezek szerint igaznak, hogy minden esetben

$$\overset{\text{I}}{x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \ldots + A_n} = \overset{\text{II}}{(x + a)(x + b) \ldots (x + v)}$$

tegyük kérdésbe ezt: mi képlet jön ki I helyett, ha II-ben mindenik szorzótársat ugyan azon számmal megnagyobbítjuk (v. kisebbítjük) – a az a mi kijön, miben fog különbözni I-től? Algebrai nyelvem szólva.

$(x+a+m)(x + b+m)(x +c +m) \ldots (x + v + m) = ?$ Mi ez a felelet. Szembe ötlőleg kettős lehet u.m.

a) Ha a fönforgó szorzótársbeli három három tagot így osztályozzuk két kis csoportban $[(x + m) + a][(x + m) + b] \ldots [(x + m) + v]$ s I-ben minden x helyett $(x + m)$ et teszünk, úgy is az új szorzat jön ki

$$(x + m)^n + A_1 (x + m)^{n-1} + A_2(x + m)^{n-2} \ldots A_n \ldots) \qquad 1)$$

b) ha pedig ugyanazon szorzótársakat így osztályozunk

2 oldal

$[m + (x + a)][m + (x + b)][m + (x + c)] \ldots [m + (x + v)]$

S ezeket egymással szorozzuk ki jön, miként tudva van

$$m^n + \left.\begin{matrix} +x+a \\ +x+b \\ +x+c \\ . \\ . \\ +x+v \end{matrix}\right\} m^{n-1} \ldots \left.\begin{matrix} +(x+a)(x+b) \\ +(x+a)(x+c) \\ \ldots \\ +(x+b)(x+c) \\ +(x+b)(x+d) \\ \ldots \end{matrix}\right\} m^{n-2} + \ldots (x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+v) \quad 2)$$

Hol m^n-nek számszorzója = 1
m^{n-1} …. Számszorzója (x+a)(x+b)… egy szóval az I. beli szorzótársak öszvete sáv alakban
m^{n-p} – nek számszorzója nem egyéb mint a már emlitett eredeti szorzótársak p-számu combinatiojinak vagy rövidség okáért ezen öszveteket C_1, C_2, C_3 .. el jelelve, 2) lesz anyi mint
$m^n + C_1 m^{n-1} + C_2 m^{n-2} \ldots + C_n$ 3)
vagy fordított renddel írva
$C_n + C_{n-1}m + C_{n-2}m^2 + \ldots m^n$ 4)

2 oldal háta

S mivel 1) éppen azon szorzók szorzata mint 2) tehát
1) = 2) = 3 = 4) – vagy is

$(x+m)^n + A_1 (x+m)^{n-1} + A_2 (x+m)^{n-2} \ldots A_n = C_n + C_{n-1}m + C_{n-2}m^2 + \ldots m^n$ 5)
Vagy ha (x + m) nek ezen egyenlet első felében különböző emeletét kifejtjük (binomi tan szerint)

$$\left.\begin{matrix} x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} m + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} m^2 + \ldots + m^n \\ + A_1 x^{n-1} + \frac{n-1}{1} A_1 x^{n-2} m + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} A_1 x^{n-3} m^2 + \ldots + A_1 m^{n-1} \\ + A_2 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} A_2 x^{n-3} m + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} A_2 m^2 + \ldots + A_2 m^{n-2} \\ \ldots \\ A_{n-2} m^2 \\ A_{n-1} m \\ + A_n \end{matrix}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{l} x^n \\ +A_1x^{n-1} \\ +A_2x^{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ +A_n \end{array}\right\} m^0 + \left.\begin{array}{l} \frac{n}{1}x^{n-1} \\ +\frac{n-1}{1}A_1x^{n-2} \\ +\frac{n-2}{1}A_2x^{n-3} \\ . \\ . \\ +A_{n-1} \end{array}\right\} m + \left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} \\ +\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}A_1x^{n-3} \\ +\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}A_2x^{n-4} \\ . \\ . \\ +A_{n-2} \end{array}\right\} m^2 + \ldots + m^n =$$

3 oldal

$= C_n m^0 + C_{n-1} m + C_{n-2} m^2 + \ldots + m^n$ 6)

S ennek az egyenletről egyik nagy alapigazság szerint

I		II	
$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n$	$=$	C_n	mit különben is tudunk
$nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + (n-2)A_2x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} + 0$	$=$	C_{n-1}	

$$\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}A_1x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}A_2x^{n-4} \ldots A_{n-2} + 0 + 0 = C_{n-2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}A_1x^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}A_2x^{n-5} \ldots\ldots = C_{n-3}$$

....

Ezen egyenletekben az I és II alá eső képletek renddel

a) A felső sorban I alatt az általunk felvett képlet, mely akármely ily szorzónak közképe, II alatt, azon szorzóknak, melyeknek szorzata I alatti, anyidik szám combinatioja hányan vagynak, tehát azoknak szorzata - miként kell is

6) Második, harmadik sorban, stb sorokban I alatt uj uj x-es képletek, melyek közöl mindenik, meg előzőjéből nagyon szabályosan le származtatható, mert ha akármelyik tagot akármelyik képletben szorzunk a benne levő x emeletmutatójával s osztunk anyi x-el hányadik sorban maga áll ki jön a következő

3 oldal háta

$F_1(x) = C_{n-1}$

$F_2(x) = C_{n-2}$

.

.

$F_{n-1}(x) = C_1 = a+b+c+\ldots+v$

$F_n(x) = 0$

4. Vajon ha kérdjük mi különbség van

$(x + a)(x + b)(x + c)\ldots..(x + v) = F(x)$

és

$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots..(x - v) = f(x)$ között

A szorzás legegyszerűbb szabálya következtében egyszerre felelhetjük hogy a,b,c,…,v különböző rendű combinátióit öszvetét C_1, C_2, C_3, C_n–el jelelve lesz
$F(x) = x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots.C_n$ ellenben
$f(x) = x^n - C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots.\pm C_n$ a szerint mint n páratlan vagy páros szám
és mivel F(x) egyenletben x becsei ezek –a, -b, -c, …-v
f(x) ben ezek +a, +b, +c, …+v egyszerre foly, hogy ha akármilyen F(x) egyenletben a páros helyeken álló számszorzók előjegyét megváltoztatjuk, egy oly egyenlet áll elé melyben x becsei ugyanazok ugyan számban de mind ellenkezők előjegyben

4 oldal

kettőveli osztás nélkül, annak ismét első leszármazottját hárommali osztás nélkül. S így tovább annak folytonoson mindig csak első s ismét első leszármazottak egymást követő sora neveztetik, az alapképlet leszállítottjainak, s tehát az alapképlet első leszármazottja s első leszállítottja kétakkora, mint második leszármaztatottja, harmadik leszállítottja kétakkora mint ugyanannak harmadik leszármaztatottja s így tovább. A leszármaztatottakat felülről írt s hárman túl római számmal jelelt vonásokkal szokás a leszállítottaktól megkülönböztetni pl. x, x’, x’’, x’’’, x^{IV} stb míg F(x), F’(x), F’’(x), F’’’(x), $F^{IV}(x)$, stb.
Látni való a fönebbi jeleknek szabályából, hogy ugyanazon F(x) et illetőleg

$$1.F_1(x) = 1.F'(x) \qquad 1.F_1(x) = 1.F'(x)$$

$$1.2.F_2(x) = F''(x) \qquad F_2(x) = \frac{F''(x)}{1.2}$$

$$1.2.3.F_3(x) = F'''(x) \qquad F_3(x) = \frac{F'''(x)}{1.2.3}$$

$$1.2.3.4.F_4(x) = F^{IV}(x) \qquad F_4(x) = \frac{F^{IV}(x)}{1.2.3.4} \text{ stb}$$

Mely jeleléseket használva tehát a fönebbi 7) szám alatt béfoglalt egyenleteket így is írhatjuk le
$F(x) = C_n$

4 oldal háta

$F_2(x) = C_{n-1}$
.
.
.
$F_{n-1}(x) = C_1 = a + b + c + \ldots + v$
$F(x) = 0$

3. Végre ha kérdjük, mi különbség van
$(x + a)(x + b)(x + c)\ldots.(x + v) = F(x)$
és
$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots.(x - v) = f(x)$ között

A szorzás legegyszerűbb szabályai következtében egyszerre felelhetjük, hogy a, b, c, …, v különböző rendű combinatiojai öszvetét C_1, C_2, C_3, …, C_n el jelelve lesz
$F(x) = x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n$ ellenben

$F(x) = x^n - C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots \pm C_n$ aszerint mint n páratlan vagy páros szám, és mivel F(x) egyenletében x becsei ezek – a, - b, - c, …. – v
f(x) ben ezek + a, + b, + c, ….+ v egyszerre foly, hogy ha akármely F(x) egyenletében a páros helyen álló számszorzók előjegyét megváltoztatjuk, egy oly egyenlet áll elé, melyben x becsei ugyanazok ugyan számban, de mind ellenkező előjegyben

5 oldal

Le szállva más adott egyenletek föloldására itt
1) Legelőbb is azt a megjegyzést teszszük hogy némely egyenletben mint mondani szokták – x nek több egyenlő böcsei – vagy miként mondani kellene x nek több egyenlő alkotóji (binomi osztóji) lehetnek, melyek az egyenlet rangját ok nélkül nevelik, s az ily egyenlő alkotók mindenike - egyen egyen kívül – kiigtatható lévén az egyenlet alább szállítható s így könyebben föloldható lesz. Ez pedig meg esik a következő érdekes állítmány nyomán

Ha x ben akár egyik akár több alkotók is többszörösen fordulnak elé úgy X és X_1nek közös osztójuk ???? vagynak, s ha ezek közöl a legnagyobb közös osztóval osztjuk X et egy oly Y jön ki osztatnak, melynek alkotóji éppen azok mint X é, de mindenik csak egyszer véve
A bébizonyítás nagyon könyen foly a fönebbiekből, ugyanis minden
$X = C_1 = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots(x + v)$
$X_1 = C_2 = (x + b)(x + c)(x + d) \ldots (x + v)$
$+ (x + a)(x + c)(x + d) \ldots (x + v)$
$+ (x + a)(x + b)(x + d) \ldots (x + v)$
$+ (x + a)(x +b)(x +d) \ldots (x + j)\ldots$ vagy

5 oldal háta

másként irva
$$X_1 = \frac{X}{x+a} + \frac{X}{x+b} + \frac{X}{x+c} + \ldots. + \frac{X}{x+v}$$

Hogy ha ama feltétel szerint, X-nek alkotóji között akárhogy egy vagy több rendbeli egyenlők fordulnak elé pl. a = b = c = d, k = l = m s egyik csoport egyenlők száma p a másiké q lesz egyfelől
$X = (x + a)^p.(x + k)^q \ldots (x + t)(x +u)(x + v)$ vagy másként írva

$X = (x + a)^{p-1}.(x + k)^{q-1} \ldots (x + a)(x + b)(x + c)\ldots(x + t)(x +u)(x + v)$
Hol látni való, hogy a zárjelek után, mindenféle alkotóból eléfordul egy egy, de csak is egy, másfelől ezen esetben lesz

$$X_1 = p\frac{X}{x+a} + q\frac{X}{x+k} + \frac{X}{x+c} + \ldots. + \frac{X}{x+v}$$ itt hibás (Sz. Gy.)
$= (x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1} (x + k)(x + t)----(x + v).p$
$+ (x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1} (x + a)(x + t)----(x + v).q$
$+ (x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1} (x + k)(x + k)(x + u)----(x + v)$
.
.
$+ (x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1} (x + a)(x + k)(x + t)----(x + j).p$

Vagy

$$X_1 = (x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1}. \begin{array}{l} (x + k)(x + t)\text{----}(x + v)p \\ + (x + a)(x + t)\text{----}(x + v)q \\ + (x + a)(x + k)(x + u)\text{----}(x + v) \\ \ldots \end{array}$$

$+ (x + a)(x + k)(x + t)\text{----}(x + j)$

Következőleg

6 oldal

$(x + a)^{p-1}(x + k)^{q-1}$ 1) közös még pedig legnagyobb osztója X nek és X_1nek, van tehát közös osztójuk és 2) bármely nagyobb közös osztóval osztjuk X-et, ki jön

$\frac{X}{(x+a)^{p-1}(x+k)^{q-1}} = Y = (x+a)(x+b)(x+c)...(x+v)$ vagy is egy oly képlet melynek osztóji ugyan azok mint X nek, de minden csak egyszeresen, s tehát Y = 0 nak x becsei ugyanazok mint X nek

Miből ez a szabály következik: Az adott egyenletben, mint alant elefordulható több egyenlő x becsek kienyészetésére X ből származtassák le X_1, kerestessék ki X, X_1 legnagyobb közös osztóját: ezzel osztatják X_1, ki jön egy oly képlet Y melyben nem fog hiányzani, de fölöslegesen sem tanáltatni egyik X beli alkotó is, tehát Y = 0 egy oly egyenlet (pedig alsóbb rangu) mely feloldatván X-nek minden becsét megadja.

Ha már csakugyan tudni akarnok (mert egyébaránt véve is szükség van) hogy X ben mindenik alkotó hányszor ismételten fordul elé a volt közös osztóban = K_1 ezzel szintén ugy tehetünk mint előbb X el, az új közös osztó K_2 vel ???? s így tovább míg az is ismétlett becsek is mind ki jönnek. Gyakorlási próbát lehet tenni a következő egyenleten

$x^6 – x^5 – 10x^4 + 8x^3 + 32x^2 – 16x - 32 = 0$

(mely most már csak rational becsekkel bírólag van választva)

6 oldal háta

2) Miután már ezen szabály szerint – az egyenlő becsek feleslegét egyenletünkből kiigtattuk – s így az előttünk fekvő munkát megkönnyebbítettük.

Első kérdés: Van-é, vagynak-é a föloldandó egyenletnek rationális tehát egész számban föl oldása. Ezt már tudva lévő moddal megfejtvén, s a netalán tanált igy böcsöket osztás által kienyésztetvén, végre is jutván (meg sokszor legelőször is tanálnak) oly egyenletre melynek már több rationális x becsei nincsenek, hanem vagy a) irationalis vala b) ezek mellett s ezek nélkül imaginárius becsei. Gyakorlati alkalmazásnál ezek az a) alatti rationális adatokkal mi is figyelmünket főleg azoknak ki keresésére fordítjuk –

A következő rész áthúzva

1) Van-é a feloldandó egyenletnek (irationális ugyan de) valós x becse, azt mint tudjuk, bizonyos esetekben magának az egyenletnek rangja, s x nek tagjának előjegye elárulja 1. bizonyosan és mindenesetre van, ha rangja páratlan számu, s szintén van ha rangja páros ugyan, de X tlen tagjainak előjegyei (-). Azonban lehet még úgy is ha ezen öszvetehető ??? jegyek hiányzanak Pl. ezen egyenletnél $x^4 – 8x^2 + 15 =0$

7 oldal

(Folytatás az egyenletekről mely M …. Ez előbb kiadva volt irat végén elkezdett 1) számnak nem utána hanem annak kitörlésével helyébe jön, mint hogy ott oly igazságokra történt hivatkozás melyek szóval ugyan el voltak mondva, de papiroson leírva nem. Most pedig, teljesség tekintetéből ide csakugyan bizonyíttatnak

1) Van-é a föloldandó egyenletnek irrationalis ugyan de való becse (melyekről már százszor ismételtük hogy alkalmazásban épp úgy használtuk mint a rationálisok). Ennek eldöntésére eddig elé csak egy vezérelv van feltanálva abból álló – hogy (egyszerűség kedvéért az adott egyenletből, adva rationális becset, s a többszörös egyenlő becseket is ha lettek volna kienyésztetve tevén fel). Van igen is irationális való becse az egyenletnek és csak akkor van, ha benne két különböző számot helyettesítvén x helyében, egyik helyettesítése 0 nál nagyobb az az + előjegyű, másik 0 nál kisebb már – előjegyű számot ad eredményül; ezen eset hogy éppen 0 lesz az eredmény – (mikor aztán a helyettesített szám maga volna egyik keresett böcs), azért nem fordulhatván elé, minthogy föl teszszük, hogy az ily helyettesítési próba mindig rationális számmal történik, ilyen már nincs az adott egyenleti képlet böcsei köztt f.t.sz. –

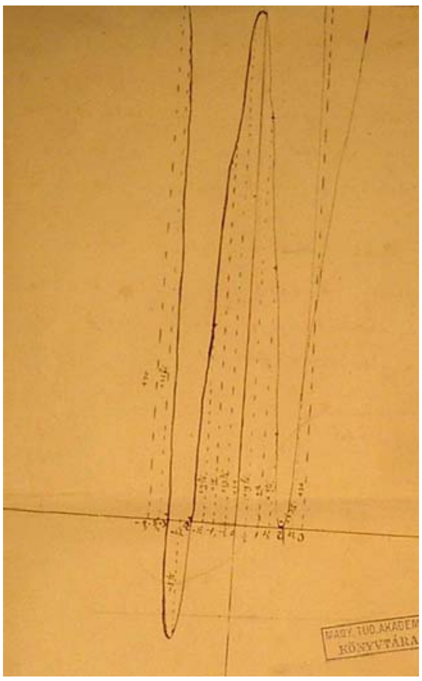
7 oldal háta

Ezen alap jelleg értelme és igazsága, szem elébe tüntetőleg legegyszerűbben így világosíttathatik föl.
Ha egy egyenletben, x helyébe különböző számokat + vagy – előjegygyel helyettesítünk, az egyenleti képlet becséül, különböző számok jönnek ki. Pl. levén az egyenlet $x^4 + x^3 - 10x^2 + 4x + 24 = 0$ az egyenleti képletnek (az egyenlet bal felének) melyet most röviden f(x)-el jelelve, becsei lehetnek

Ha	x = 0	f(x) = 24	ha	x = - 1	f(x) = 18
	x = 1	f(x) = 12		x = - 2	f(x) = 0
	x = 2	f(x) = 0		x = - 3	f(x) = 0
	x = 3	f(x) = 30		x = - 4	f(x) = 12

s véve a tört becseket is

Ha	x = ½ f	f(x) = 19 1/16	x = -1/2	f(x) = 23 7/16
	x = 1 ½	f(x) = 4 1/16	x = - 1 ½	f(x) = 9 3/16
	x = 2 ½	f(x) = 6 3/16	x = - 2 ½	f(x) = - 5 1/16
			x = - 3 ½	f(x) = 22 11/16



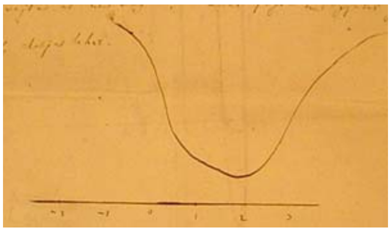
Ezen x különböző becseinek megfelelő különböző egyenletképlet becseket, szem elejébe tüntetőleg ki ábrázoljuk fel nincs két sark egyent s azokon altárokul az x föl vett becsét, feltárokul az f(x) kijött megfelelő becsét kimérvén és rajzolva (a + és a – értelmére jól figyelve) s végre a feltárók végét folytonos vonallal (mely görbe lesz mihelyt az egyenlet egynél magasabb rangu) egybe kötjük – miként itt látható.
Az egyenleti görbe - miként nevezik - majd közeledik az altár egyenhez majd távolodik tőle, s itt három helyi találkozik is vele, mert a feltárok f(x) nek becsét ábrázolván, ott hol f(x) = 0, az az a görbe azon altárnál találkozik az altár egyennel, mi kétféleképpen történhetik meg.
1) <u>átvágólag</u> mint itt – 2 nél és – 3 nál, mi azt hirdeti, hogy a – 2 és – 3 becse x-nek, s az ezek köztt felvett számok f(x) et – becscsé változtatják –
2) <u>érintőleges</u> a mint +2 nél, ami azt jelenti hogy itt két böcs, f(x) = 0 vál

8 oldal

változtatók, nem bizonyos távolságban állanak egymástól mint – 2 és – 3 nál, hanem együvé esnek, az az egyenlők, s tehát az egyenletnek két egyenlő becse vagy jobban mondva két egyenlő szorzótársa van u.m. itt (x – 2)(x – 2) mi igaz itt. E szerint látni való hogy minden átvágás egy egy különböző való böcsét, minden érintés egy egy pár egyenlő s szintén való becset föltételez, s jelel ki. S tehát minden egyenletben, ha egyenleti vonalának átvágási száma = p, érintési száma = q, való gyökerei száma = p + 2q

8 oldal háta

(ha csak a különbözőket akarjuk számlálni, úgy csak p + q), ha tehát az egyenlet magasabb rangu p + 2q nál úgy a többi x – becse (melyeknek száma csak páros lehet) mindig képtelen képletek, melyek az egyenleti görbének az altár egyenneli nem ezen találkozásában vagynak elburkolva. S ha egy egyenleti görbe az altár egyennel teljességgel nem találkozhatik, úgy annak csak képtelen x becsei vagy képtelen binomi alkotóji lehetnek. Ilyen pl. ez az egyenlet $x^2 - 4x + 5 = 0$ melyben, mint könyű átlátni f(x) nek csak + előjegyű 0 nál nagyobb böcsei lehetnek, tehát egyenleti görbéje az altár egyenest nem is metszheti, anál inkább rajta át nem vághat, minél fogva ezek egyenleti görbének csak ily alakja lehet



Az említett jelényt??? tehát alapul téve világosak a követendők. (mindig a szabályos alakba rendezett egyenletben)
1ő Minden páratlan rangu egyenletnek van legalább egy való becse – mert akármely egyenleti képletnek – és alap alakja levén ez
$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + L =$

$$x^n(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \dots + \frac{L}{x^n})$$

9 oldal

Ezen utolsó alakjában tekintve az adott képletet, látjuk hogy az két szorzótársból alakul melyeknek egyike x^n ; ez tehát x helyett + előjegyű, nagyobb számokat téve ~ ∞ az az akármilyen nagy, és pedig + előjegyű, böcse + nak mondhatik. A másik szorzótársban vagy alakítóban, melyet rövidség okáért q(x) el jelelünk, az első tag +1, ez változatlan, a többi tagok pedig akár + akár – előjegyű volt legyend az mint x ért helyettesítünk ennek növekedésével határ nélkül közeledik a 0 hoz egyenként is s tehát öszveöntve is, s következőleg maga q(x) mindkét esetben - hiány szerint közelíthető + 1 hez.
Ezt előre bocsátva
1) Ha az adott f(x) utolsó (vagy x etlen) tagja + előjegyű, 0 t helyettesítvén x helyett, f(x) becséül ki jön +L, tehát 0 nál nagyobb, ellenben - a t t.i. - előjeggyel akkora számot

helyettesítvén mely q(x) + 1 hez anyira közelítővé teszi hogy becse legyen > 0, s tehát + előjegyű, minthogy – és + szorozva egymással – eredményt adnak, lesz f(x) becse (- a helyettesítésével) = - M a következőleg 0 és - a között van f(x) = 0 egyenletnek legalább egy való becse, és az – előjegyű.

2) Ha az adott f(x) utolsó tagja –L úgy 0 helyettesítésével kijön –L, ellenben a szükséges nagyságú + a helyettesítésével kijön + N f(x) böcséül s következőleg ezen esetben 0 és + a között van legalább egy való becse f(x) = 0 nak,s így tehát akár + akár – előjegyű legyen f(x) utolsó tagja, mindenik esetben lesz az adott egyenletnek legalább egy való becse - előjegyű ha amaz utolsó

9 oldal háta

tag +, + előjegyű ha az utolsó tag -, s tehát mindig <u>ellenkező</u> előjegyű az f(x) utolsó tagjával. Páros rangú egyenletekre hasonló modon tudva ily átalánosságban azért nem állhatik, hogy azoknál x^n ben, x helyébe akár + akár – a - t tegyünk, minden esetre + a^n jön ki s ezért

3) páros rangu egyenleteket illetőleg egyéb a szabály, nem ez. Páros rangu egyenlet melynek utolsó (x etlen) tagja – előjegyű legalább <u>két</u> való böcscsel bír, egy +a val és egy –b vel, az az előjegyben ellenkezőkkel. Mert 0-át tevén x helyébe lesz f(x) = f(0) = -L, elég nagy +a-t helyettesítvén lesz f(x) = f(+a)= + M, szintén elég nagy – a-t helyettesítvén lesz f(x) = f(-a) = + N, s így az alapelv szerint, egy valós böcse van az egyenletnek 0 és +a, s egy más 0 és – a közt.

3) Nem árt megjegyezni itt egy ????féle esetet, mind az 1. mind a 2. pont alattiakra kiterjedőt, melyekben t.i. már láttuk, hogy – L ű egyenletnek akár páratlan rangú legyen az (1 szerint) akár páros (2 szerint), mind két esetben van legalább egy + előjegyű való becse. Mihez itt azt a potlékjegyzést teszszük, hogy <u>nincs is több</u> egynél (t.i. + előjegyű való becse) ha a –α t megelőző tagok mind + előjegyűek, vagy a megelőző is – de az azt megelőzők mind + előjegyűek. S így tovább vagy átalába, ha f(x) elől akárhány folytonosan csak + s ezeket követőleg ismét folytonosan csak - előjegyű tagokból áll, s tehát ily alaku $x^n + Ax^{n-1} + B^{n-2} + +\ldots+Hx^{n-p} - Jx^{n-p-1} + Kx^{n-p-2}$ ----L=0

10 oldal

mert itt is $f(x) = x^{n-p}.([x^p + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + \ldots + H] - [\frac{J}{x} + \frac{K}{x^2} + \ldots + \frac{L}{x^{n-p}}])$

vagy a zárjelbeli zárjeleket két tagok közöl az elsőt φ(x) nek a másodikat ψ(x) nek nevezve $f(x) = x^{n-p}.(\varphi(x) - \psi(x))$ – már ha tekintjük

a) $\varphi(x) = x^p + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + \ldots + H$ –t, ez ha bár x helyébe csak 0 tétetik is = + H tehát + előjegyű becset ad, ha pedig 0 nál nagyobb s folytonosan nagyobbodó számokat teszünk x helyébe, becsei is (t.i. φ(x) nek) nevekednek a végetlenig, x soha két különböző a és b számok helyettesítésével f(α) kijövő becsei egyenlők csakugyan nem lehetnek hanem nagyobb a nagyobb után, kisebb s kisebb után ellenben

b) ψ(x) el éppen ellenkezőleg áll a dolog, mert ebben ugyanazokat helyettesítvén x-re mint φ(x) ben – s tehát <u>először</u> 0 ra lesz ψ (x) = ψ (0) = ∞, más szóval minél kisebbet teszünk x helyébe annál nagyobb lesz ψ (x) becse, egészen a végetlenig ha x-et elég kicsinynek vettük; de amint x helyett + a , +b s így tovább <u>nagyobbakat nagyobbakat</u> helyettesítünk, mind inkább apad ψ(x) becse, s a, b szám tényleges nagyobbításával akármely kicsivé a 0-hoz közelítővé apasztható. Miszerint tehát a helyettesítendőket 0-nak tudva s felfelé folytonoson előbb $\varphi(x)<\psi(x)$ (ha akarjuk akárhányszor), végül $\varphi(x)>\psi(x)$ ismét akárhányszorta., tehát amannak folytonos

10 oldal háta

növekedése emennek pedig folytonos apadása közben egyszer de csak is egyszer keresztül kell menniök az egyenlőség állapotján s az +a, vagy +b vagy +c tehát melynek helyettesítése történt, tudni illik, melynél volt $\varphi(x) = \psi(x)$, tehát $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ s ezért
$x^{n-p}(\varphi(x) - \psi(x))$ is = 0 az az +a vagy +b vagy +c minden becse még pedig + előjegyű becse, s egyetlen egy + előjegyű becse, $f(x) = 0$ egyenletnek, nem rekesztvén ki azt hogy – előjegyű becsei többek is ne lehetnének.
Azonban az eddig elé adott szabályok csak anyit tudának ki mutatni hogy <u>legalább</u> is hány való becse van némely egyenletnek, s azt hogy hány van <u>legfelebb</u>, vagy hány van határozottan éppen nem. Erre tehát ujabb vizsgálatok kellenek, melyek közöl az egyszerűbbeket mi sem mellőzzük el.
Ismételvén azon megjegyzést, hogy valamely egyenletnek három féle becsei lehetnek, 1) + 2) – előjegyűek, melyek valók, 3) képtelenek melyeknél sem + sem + előjegyűnek nincs értelme; mint szintén azt is 2) hoz, akármely adott egyenlet képletében (f(x) ben) az első tag mindig + előjegyű (s 1 számszorzójunak) vétetvén fel a többi tagok előjegyei lehetnek elegyesek, s minden egyenlő jegyűek szomszédsága jegyfolytatásnak, minden különböző jegyűek szomszédsága jegycserének neveztetik, s tehát akármely teljes képletű egyenletben, melyben t.i. x nek n^k emeletétől 1ig egy sem hiányzik, s jegyfolytatások és

11 oldal

a jegycserék számának öszvete mindig = n, ezeknek előrebocsátása után lássuk renddel az ide tartozó állítmányokat, s föl adatokat

1. Akármely $f(x) = 0$ egyenletben, a + előjegyű böcsek száma nem lehet nagyobb mint az f(x) ben eléforduló jegycseréké.
Legyenek $f(x) = 0$-ban + előjegyű becsek $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$ …. akárhány számmal. Lesz f(x) osztható $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ –val s kijön x nek egy más képlete, melyet neveznénk $\varphi(x)$ nek s melyben f.t.sz. x-nek nincs több + előjegyű becse.
E szerint $f(x) = \varphi(x)\,(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ ….. s tegyük kérdésbe miként áll jegycserék számában f(x) $\varphi(x)$ hez?
9. Fejtsük meg a kérdést csak rendre..
$\varphi(x)(x - \alpha)$ ban legalább egygyel több jegycsere van mint $\varphi(x)$ ben mert:
akármely x képletnek, tehát $\varphi(x)$ nek is, tekintetbe vevén a jegycseréket átalános képe is lehet $\varphi(x) = x^a + Ax^b + + \ldots + Ex^f - Gx^h - Hx^i \ldots. - Lx^n + Px^t + + \ldots + Px^s + \ldots + Sx^t \pm Ux^z \pm Yx^v \ldots$
$\pm V$ azon egy néhány + előjegyű tag folytatólag, melyek közül az elsőt x^a az utolsót Ex^f ábrázoljon, azután egy néhány (hol az egynéhány tehát = 1 v. = 0 valamint a következőknél is) – előjegyű tag, melyeknél az elsőt Gx^h az utolsót Lx^u ábrázolja, ezután ismét néhány + néhány – jegyűek, s így tovább, míg végre vagy csupa +, vagy csupa – előjegyű tagokon végződik az egész, melyek közül az elsőt + okon végződve esetében Rx^s , – kon végződve esetében

11 oldal háta

pedig Ux^s , az utolsót (x etlent) mindenik esetben W képviseli. Egyébaránt önként érződik, hogy A B … L R … közöl akármelyik lehet 0, (csak W nem) s a, b ,c nem közvetlenül szomszéd számok is lehetnek, csak hogy minden hátrább álló kisebb az előbbállónál.
Lássuk már mi változás tartozik az $\varphi(x)$ ben eléforduló jegycserékkel ha $\varphi(x)$ t szorozzuk $(x - \alpha)$ val?
Az x el szorzás minden jegyet s minden számszorzót annak hagy a mi volt $\varphi(x)$ ben, tehát a jegycserék számán ez nem változtat, de mindenik tagbeli x mutatóját egygyel neveli.
Következik az - α val szorzás, s az ebből kijövő tagoknak az x eli szorzásából ki jött tagokkali öszveöntése. Ezeket első azokat második (szorzói) sorbelieknek nevezzük.
A második sorbelieknél minden ki jött szorzói tag ellenkező jegyű lesz az első sorbeli ugyananyiadikkal.
A második sorbeli (akárhányadik) n-dik tag öszveöntődik az alsó sorbeli n + 1-dikkel.
Ezen öszveöntések x^n től Ex^f ig is, (hol $\varphi(x)$ ben volt csak volt egy jegycsere is) meg lehet, hogy eszközölnek egy s meg lehet több jegycserét is, meg lehet hogy nem egyet is, de az utolsó Ex^f minden esetre ha alá egy – előjegyű tagot s tehát egy jegycserét, mert – α val szorozván ad – előjegyű tagot az alsó sorban, ez öszveöntődik a – G számszorzóju taggal a felső sorban, tehát

12 oldal

- al egybeöntve ismét csak – t eredményez, s e szerint ha x^n – től Ex^f ig nem is fordult volna elé még más jegycsere, ez csak ugyan adna egyet, miként az eredeti $\varphi(x)$ ben is volt.
Hasonló okoskodásnál ki világlik hogy minden következő jegycserék száma legalább is megmarad (ha nem szaporodik), az utolsó szakaszig, hol már az egész képlet egyenlő előjelű tagokkal bé végződik. Ez a szakasz kezdetére nézve a fenebbiekkel egyenlő okból olyan jegyűnek marad kezdetében, mint volt $\varphi(x)$ nél, de legutolsó tagja, mely W nek – α val szorzásából jön ki s semmivel öszve nem öntődik, ellenkező jegyű lesz mit $\varphi(x)$ ben volt. S így, végül $\varphi(x)(x - \alpha)$ ben legalább egygyel több jegycsere lesz mint $\varphi(x)$ ben volt.
Hasonló következtetésekkel ki jön hogy $\varphi(x)(x - \alpha)(x - \beta)$ ben legalább egygyel több jegycsere mint $\varphi(x)(x - \alpha)$ ben s tehát kettővel több mint $\varphi(x)$ ben – s igy tovább menve – míg eredmény lesz az az következmény hogy $\varphi(x)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ …. az az f(x) ben legalább anyi (ha nem több) jegycsere fordul elé, mint a hány + előjegyű tagja van f(x) = 0 egyenletnek vagy más szókkal: f(x) = 0 egyenletnek a + előjegyű böcseinek száma nem lehet nagyobb mint az f(x)ben eléforduló jegycseréké ….M.B.V.
2. f(x) ben változtassuk meg minden x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5} –t tartó tag előjegyét., elé áll egy képlet melynek neve legyen $\psi(x)$, s tudjuk hogy $\psi(x) = 0$ + előjegyű becsei

12 oldal háta

f(x) = 0 nak – előjegyű becsei. A bébizonyított állítmány szerint $\psi(x) = 0$ nak nincs több + előjegyű becse, mint a hány jegycsere van benne ($\psi(x) = 0$ ban), tehát f(x) = 0 nak nincs több – előjegyű becse mint a hány jegycsere fordul elé $\psi(x) = 0$ ban.
Ez a két állítmány tehát akárhány egyenletben legyen az teljes v. hiányos, eléfordulható + és – előjegyű s tehát minden lehető <u>való</u> becsek számának maximumát maghatározza.
3. Ezen két állítmány szerint két következtetés foly.
a) Ha f(x) = 0 teljes egyenlet (x^n-től x^0 –ig egy emelet sem hiányzik benne) $\psi(x)$ ban éppen anyi számu <u>jegycsere</u> lesz mint f(x) ben <u>jegyfolytatás</u> - pl. ha
$f(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x - 21$ lesz

$\psi(x) = x^6 - 3x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 21$
ez utolsóban van jegycsere 3, amabban jegyfolytatás 3. Innen az 1. és 2. állítmányokat egybefoglaltan alkalmazva így is lehet kifejezni. Teljes egyenletben, a + előjegyű böcsök száma nem nagyobb mint a jegycseréké, a – előjegyű böcsök száma nem kisebb mint a jegyfolytatásoké. Egy nagy hírű szabály, melyet tulajdonképpen Descartes tanált fel, de még könyebben még is Hariot állítmányának szokott említettni.
c) Ha $f(x) = 0$ teljes egyenlet s egyszersmind tudható róla hogy mind való becsei vagynak a azok közöl éppen anyi van + előjelű hány jegycserék száma f(x) ben s anyi – előjegyű hány a jegyfolytatásoké .

13 oldal

4. Az előadott módszer – mely minden más eddigelé javaslatban hozottaknál egyszerűbb – meg adja az adott egyenletben előfordulható + és – előjegyű, s tehát átalában <u>való</u> böcsök számának <u>maximumát</u>, s tehát képtelen becsek <u>minimumát</u>, de meg kell vallani hogy ama <u>maximum</u> melynél több (való) nincs s tehát a <u>minimum</u>, melynél kevesebb (képtelen) nincs, néha kissé tágan szabván jőnek ki, s szűkebb határokat természetesen még igazakat, mivel él gyakran a következő elmés módszer (Oliver től)

Legyenek adott egyenlet becsei (most még valót képtelent nem különböztetvén meg) a, b, c, d … tehát
$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + L = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots$ 1)
tudjuk hogy tehát
$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots + L = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots$ 2)
vagy is 1) et és 2) t másként írva
$(x^n + + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots) + (Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots$ 3)
$(x^n + + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots) - (Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots) = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots$ 4)
s 3) és 4) egymással szorozván
$(x^n + + Bx^{n-2} + Dx^{n-4} + \ldots)^2 - (Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots)^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) \ldots$ 5)
vagy
$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots + L$, az az az adott egyenlet páratlan n, n-2, … stb emeletű tagjainak öszvetét második emeletre emeljük kijön egy oly képlet melyben x csak páros emeleten fordul elé – legyen hát ezen kijövő második képletnek neve $\varphi(x^2)$; szintúgy lesz a dolog $Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + \ldots$ az az az adott egyenlet n-1, n-3 mutatójú tagjainak öszvetét második emelésével is.

13 oldal háta

Legyen ezen második emelet neve $\psi(x^2)$ tehát
$\varphi(x^2) - \psi(x^2) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) \ldots$ 6)
Vagy $x^2 = z$ nek nevezve
$\varphi(z) - \psi(z) = (z - a^2)(z - b^2)(z - c^2) \ldots$ 7)
Itt szembeötlő hogy 7) nek melyben az egyenleti képlet $\varphi(z) - \psi(z)$ – becsei $+a^2$, $+b^2$, $+c^2$, ….stb a mi ezt az érdekes igazságot foglalja magába: Akármely adott egyenletből (könyűszerüleg) lehet mást alakítani, olyat melynek böcsei az adott egyenlet böcseinek másod emeletei lesznek. Ez az átalakítás pedig úgy történik, hogy az adott egyenlet x^n, x^{n-2},… stb tagjainak öszevetét külön, az x^{n-1}, x^{n-3}, … tagok öszvetét ismét külön másod emeletre emelvén, az utóbbit az elsőből kivonjuk, (s ha tetszik mert a fenforgó ???? nem is szükséges minden x^2 helyébe z t írunk). Már most az adott egyenlet való és képtelen böcseinek megkülönböztetésére véghez vitt műveletünket használandók a következendőkre eszmélünk.

Az adott egyenletben két féle böcsök fordulhatnak elé u.m.

a) Való becsek vagy + vagy – előjeggyel. Aminthogy pedig – előjegyű számok szintúgy mint + előjegyűek második emelete + előjegyű, tehát az adott egyenletben tanálható minden való becseknek második emeletei ismét becsek mind + előjeggyel vagynak meg az átalakított egyenletben.

b) Képtelen becsek – Képtelen kifejezésnek másod emelete vagy ismét képtelen (pl amely alaknak $a \pm b\sqrt{-1}$, melynek másod emelete $a^2 - b^2 \pm 2ab\sqrt{-1}$) vagy legalább – előjegyű (pl. az ily alakzatnak $a\sqrt{-1}$, melynek másod emelete – a^2). S így az adott egyenletben nem lehet több való becs, mint az átalakítottban + előjegyű becs.

14 oldal

S ím az ajánlott új próba kő, valamely adott egyenlet való becsei számának maximuma, s tehát a képtelen böcsök számának minimuma kikeresésére –

Alkalmazzuk egy példán s így a tanulás módja is gyakorlatilag legtisztábban kitevén

Legyen az adott egyenlet ez

$x^5 + x^3 + 3x^2 + 16x + 15 = 0$. Vessük előbb a régi szabály próbája alá (melyet Gaussénak nevezhetünk, merthogy a tőlünk adott alakban ő bizonyította bé legelőbb).

Merthogy egy jegycsere sem fordul elé, tehát az lehet + előjegyű böcsek száma = 0, az az + előjegyű való becse az egyenletnek nem lehet. Már változtassuk azt ellenkező jegyű becsekkel bíróra, lesz $x^5 + x^3 - 3x^2 + 16x - 15 = 0$, most fordul elé három jegycsere, tehát ezen egyenlet + előjegyű s következőleg az adottnak – előjegyű becse nem lehet több háromnál, de anyi lehet s következőleg a való becsek maximuma 0 + 3 = 3 s a képtelenek minimuma 5 – 3 = 2. Így adja a Gaussi szabály

De ha Olivier szerint jobban jön ki mert lesz

$\varphi(x^2) = (x^5 + x^3 + 16x)^2 = x^{10} + 2x^8 + 33x^6 + 32^4 + 256x^2$

$\psi(x^2) = +9x^4 + 90x^2 + 225$

$\varphi(x^2) - \psi(x^2) = (x^5 + x^3 + 16x)^2 - (+9x^4 + 90x^2 + 225$

$\varphi(x^2) - \psi(x^2) = x^{10} + 2x^8 + 33x^6 + 23x^4 + 166x^2 - 225$

vagy ha tetszik $z^5 + 2z^4 + 33z^3 + 23z^2 + 166z - 225$

hol csak egy jegycsere fordulván elé, az adott egyenlet való böcsei számának maximumánál 1 jön ki, s tehát öt böcsek közöl 4 múlhatlanul képtelen, a mi igaz is mert a böcsök ezek: -1,

$$-1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}, \frac{3+\sqrt{-11}}{2}, \frac{3-\sqrt{-11}}{2}$$

14 oldal háta

5. A harmadik és tökéletesen kielégítő, az az a való becseknek nem csak maximumát, hanem a valóságos számát meghatározó módszer (mely még egy kis előnyt kíván) hátrább hagyván a mi már a való becsek közelitőlegi kikeresését magát illeti.

Tudjuk hogy két szám köztt melyek közöl egyiknek helyettesítése (x – ért) f(x) becset + a vá, a másiknak helyettesítése – b vé teszi, mindig van az egyenletnek legalább egy való becse. A föloldás elve tehát ezen két sorban fordul meg. a) keresni két szomszéd egész számot, melyek köztt egy való becs a mondott szabálynál fogva bizonyosan van, b) ezen közből eső becset közelítő törtben kifejezni.

A mi a) t illeti az adott egyenletben x helyett helyettesítjük egyszerűen előbb a kisebb számokat u.m. 0, +1, +2, …, -1, -2, … s megnézzük melyik két szomszéd szám helyettesítése ad ellenkező jegyű eredményt pl.

Legyen a föloldandó egyenlet $x^3 - 6x - 7 = 0$ (melynek Gauss módjával próbálva legfönebb egy való becse lehet vagy + vagy – jegyű) A helyettesítések eredményei ezek

Ha helyettesíttetik	ki jő eredményűl
0	-7
1	-12
2	-11
3	+2

S tehát egyetlen egy való becs fekszik +2 és + 3 köztt –
Hasonló vizsgálat nyomán kitűnik hogy ezen egyenletnek
$x^5 + x^4 + x^2 - 25x + 36$ melyben (ismét Gauss szerint) csak egy + s két – becs lehetséges, következő való becsek vagynak
1ő +2 és + 3 köztt, 2k -2 és -1 köztt, 3k -2 és -3 köztt

15 oldal

6. S ezen helyettesítési próbálgatások felette hoszszadalmasak és untatók lehetnek, ha nem tudunk határokat szabni melyeken túl is nincs eredmény, s tehát sok felesleges az az egész próbálgatás, az az ki mutatni egy legnagyobb + számot melynél nagyobb, s egy legkisebb (az az számban legnagyobb) – előjegyűt melynél kisebb való becse az adott egyenletnek nem lehet.
Fontos feladat tehát az ily határ számoknak felkeresése, miben itt (mint mindenben igyekeztünk), csak hogy könyebb egyszerűbb s szabatosabb módot adjunk (mert még több is van, de egy sem is ezzel – melynek találója Newton, de a bébizonyítás ????)
A) + előjegyű becsek felső határa –
Jegyezzük meg először hogy oly egyenletben melynek becsei mind képtelenek, akár mit helyettesítünk x – ért a kijövő böcs mindig + a, az az 0-nál nagyobb + előjegyű szám lesz. Erről egyszerre meggyőződhetünk, ha ????
a) ilyen egyenlet lerajzolt görbéje az altár egyent nem vághatja, mert különben való becse is volna. Tehát mindenesetre egészén az altár egyen egyik felén eset – tehát akármit helyettesítünk becsnek x ért vagy mind csak + vagy mind csak – előjegyű becsek jőnek ki. A kettő közül tehát mindig oly jegyű a milyen avagy csak egyszer – ugy de
b) azt már láttuk hogy minden egyenlet képletben lehet x helyében akkora számot tenni hogy annak a (az egyenleti képletnek) becsei + jegyűek, tehát az érintett egyenletekben minden becs csere + jegyű lehet.
Ezt előre bocsátva
Legyen az adott s megvizsgálandó egyenlet

15 oldal háta

$f(x) = 0$, melyben lehetnek a) képtelen b) – előjegyű c) + előjegyű becsek. S ez utolsók legnagyobbikának határa kerestetik. Legyenek a képtelen becsek $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, a – előjegyűek – a, -b , -c, …a + előjegyűek nagyság sorába írva le A, B, C, …. Lesz

$$f(x) = \underbrace{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots}_{\mathrm{I}} \underbrace{(x + a)(x + b)(x + c) \ldots}_{\mathrm{II}} \underbrace{(x - A)(x - B)(x - C)}_{\mathrm{III}}$$

f(x) tehát három szorzótárs szorzata, melyek közül I. mindenesetre + becsű akármit tegyünk az x helyébe, a fön. b. sz. II. szintén + jegyű ha x helyébe akármi + előjegyűt teszünk, s végre III + előjegyű, ha x helyébe + A nál bár mivel is nagyobbat helyettesítünk x helyett s ezen esetben tehát 3 + előjegyű szorzótársaknak szorzata az az f(x) is + előjegyű. Innen első igazság. Ha akármely egyenletben a benne eléforduló legnagyobb + előjegyű böcsnél (+A

nál) bármi kevéssel is nagyobbat helyettesítünk x helyett az egyenleti képlet becse + lesz az az 0 nál nagyobb levén. –
De azért még lehetne szintén + m, az egyenleti képlet becse ámbár +A nál kisebbet helyettesítettünk is x ért, pl. olyat mely A nál is B nél is kisebb de C nél nagyobb, mert így x – A, x – B ketten leendvén – előjegyűek, a III mégis + előjegyűek, ennélfogva az hogy valamely számnak helyettesítése f(x) becsét + nak adta, azt a számot, míg f(x) minden + becsnél nagyobbnak nem bélyegzi. Ellenben az a szám, melynek helyettesítése által nem csak az adott f(x) = X, hanem X_1, X_2, X_3, … közül is mindenik + előjegyű böcse jön ki, az bizonyosan nagyobb mind A nál, s tehát az adott egyenlet + előjegyű böcsei mindenikénél.

16 oldal

Ennek átlátásáért, emlékezzünk arra hogy X, X_1, X_2, …nem egyebek mint f(x + m) egyenletben az egyenleti képlet egyes tagjainak számszorzói (hátra viszszafelé folyó sorban) az az ha f(x) ben (az adott egyenleti képletben) x helyett minden x + m et tevén, az új kijövő képletet m egymást felszállólag követő emeletei szerint rendezzük ki jön.
$X + X_1m + X_2m^2 \ldots. X_n = 0$ s ez az új egyenleti képlet nem lehetvén egyéb mintha f(x) másik kifejezésébe u.m. IxIIxIII ban is minden x helyébe mindenütt x + m et teszünk, lesz tehát
$X + X_1m + X_2m^2 \ldots. X_n = ((x + m) - \alpha)((x + m) - \beta)\ldots\ldots\ldots((x + m) + a)((x + m) + b)\ldots.((x + m) – A)((x + m) – B)\ldots. = (m + (x - \alpha))(m + (x - \beta)) \ldots. (m + (x + a))(m + (x + b))\ldots.(m + (x – A))(m + (x – B))(m + (x – C))\ldots.$
Melynek böcsei miként szerkezete ki mutatja α - x, β - x, …, - a- x, - b – x, …, A – x, B – x, C – x, ….
Tudjuk hogy mihelyt valamely egyenlet böcsei köztt van avagy csak egy + előjegyű is, azon egyenlet képletének nem lehetnek minden tagjai + előjegyűek, mert okvetlül jegycserének kell bennök elé fordulnia, ha tehát x – t A kisebbnek veszszük A, B, C, … közül csak egyiknél is azonnal lesz azon egyenletnek egy

16 oldal háta

vagy több + előjelű böcsei, s tehát X_1, X_2, X_3, .. között (ugyanazon böccsel nézve bennök x-et) legalább egyik valamelyiknek – nak kell lenni s tehát ez a + szám, mely mind X ben mind X_1, X_2, X_3 – ben helyettesítve azoknak becsét mind + előjegyűvel (vagy megfelel vala 0 nak a + 0) adja, bizonyosan nagyobb A nál is annál inkább B, C, D nél, s tehát ha minden számok közül melyek ugyan ezt eddigieknek (u.m. X, X_1, X_2, mindenikbe helyettesítvén annak mind + böcsöt adnak) a legkisebbet választjuk, ez lesz az adott f(x) egyenletben eléfordulható + böcsök legnagyobbikánál is nagyobb számok köztt a legkisebb, az az az f(x) = 0 + becsének felső határa. A maradék s a végigazság
B) A – előjegyű becsök alsó határa –
Ha az adott egyenletet – tudva levő mondván – ellenbecsűvé változtatjuk, ezen új egyenletet + becsének felső határa lesz az adott egyenlet – becseinek alsó határa –
C)és D) Alsó becsek. Még az által is eszközölhetünk munka kimutatást, ha a kikeresendő + becsek alsó s – jegyek felső becsét kikeressük, t.i. azon + számot melynél az adott egyenlet lehető + becsei közöl mindnél bizonyosan nagyobb – ban s azt a – számot melynél minden lehető – becse bizonyosan kisebb. –
Ezeknek kikeresése és is az előbbiekhez csatlakozik, mert
C) a mi illeti a + becsek alsó határát és elnevezvén 1/x et y nak, minél fogva tehát x = 1/y lesz f(x) = f(1/y) s tehát

17 oldal

Valamint volt f(x) = 0 azaz
$X^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + L = 0$ s szintúgy
$\frac{1}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + \frac{B}{y^{n-2}} + \ldots + L = 0$ vagy törteket elenyésztetnek
$1 + Ay + BY^2 + \ldots + Ly^n = 0$ vagy
$Ly^n + Ky^{n-1} + \ldots + 1 = 0$
Ha már ezen egyenletnek lehető + becsei pl. ezek a, b, c, d, .. úgy f(x) = 0 nak + becsei (minthogy f.t.sz. x = 1/y) nem lehetnek mások mint 1/a, 1/b, 1/c, 1/d, …. S ha a,b,c,d, … között legnagyobb a bizonyosan 1/a, 1/b között legkisebb 1/a, miből folyólag f(x) = 0 + böcsei alsó határának kikeresése ez a módszer lesz. Kerestessük ki f(1/y) = 0 egyenlet ből y + böcseinek felső határát s öszve azzal = 1/y lesz f(x) + böcseinek alsó határa, sőt mivel akármely egyenlet böcsei csupán következőleg az azt alkotó tagok számszorzójától függenek – (nem a kikeresendő menyiség x vagy y nevétől) mondhatnók így is kerestessék ki f(1/x) ből x becseinek felső határa …. Stb. Sőt mivel látjuk hogy az így eredő f(1/x) = 0 ban a törtek kienyészetésével nem egyéb történik mint az adott egyenlet számszorzójinak cserélt rendre fordulása – adhatjuk ezt is egyszerű szabályt is.
Az adott egyenlet tagjaiban cseréltessenek meg a számszorzók az elölről első vagy x^n é a leghátulsónak t.i. x^0 hoz a leghátulsó elsőnek x^{n-1} számszorzója x^1 hez, s így tovább. A kijövő képletnek vetessenek leszármazottjai s a mely

17 oldal háta

legkisebb + szám, az eredeti s ezen leszármaztatott képletekben helyen mindenikét + becsünek adja, annak reciprocuma lesz az először adott egyenlet + becseinek alsó határa. Hol ezt a kellemetes jegyzetet teszszük miként, azon hogy az így átalakított képlet felső emeleteinek nem lesz aztán 1 a számszorzója, ne akadjunk fel, mert a keresett felső (tehát az adottban reciprocum alsó) határául csak az jön ki ami kijönne, ha őt mássá, 1 számszorzójú kezdődővé alakítnók át (mit könyű volna bebizonyítni).
Végre D) akárki önként kitalálhatja, hogy hasonló okokból az adott egyenlet – böcseink felső határának reciproka lesz a fordított számszorzós képlet – böcseinek alsó határa –
Egy példa
Legyen az adott egyenlet $x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 2x + 2 = 0$
1) A + becsek felső határának kikeresésére a leszármazott képletek ezek
$X = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 2x + 2$ melyeknek nyomán a felső határ – 6 (egész számban)
$X_1 = 4x^3 + 6x^2 + 42x + 2$
$X_2 = 6x^2 - 6x - 21$
$X_3 = 4x - 2$
2) A + becsek alsó határa kikeresésére szolgáló képletek lehetnek
$Y = 2x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 2x + 1$ tehát a felső határ 3 s f(x) ben alsó + határ 1/3 vagy egész
$Y_1 = 8x^3 + 5x^2 - 42x - 2$ számban 0. Minthogy ½ még felül esett a határon tehát látni való
$Y_2 = 12x^2 + 6x - 21$ hogy 1/3 és ½ köztt van egy becse az egyenletnek
$Y_3 = 8x + 6$

18 oldal

A legalsó – böcs kikeresésére ezek a képletek szolgálnak

$X = x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 2x + 2$ tehát a felső határ itt (egész számban) = 4
$X_1 = 4x^3 + 6x^2 - 42x - 2$ tehát az alsó határ a - 4

$X_2 = 6x^2 + 6x – 21$
$X_3 = 4x +2$

Végül felső – határ kikeresésére

$X = 2x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 2x +1$ felső határ 3, tehát alsó 1/3
$X_1 = 8x^3 - 6x^2 - 42x + 2$ tehát felső – határ – 1/3 vagy
$X_2 = 12x^2 - 6x – 21$ egész számban ismét 0
$X_3 = 8x – 6$
S valóban az adott egyenlet böcsei ezek 5,64575…., 0,35425…., - (0,26295…), -(3,73205)
S már most képesek vagyunk az egyenletek föloldásának előzményeit annak tudatásával fejezni ki, hogy 1829 óta csakugyan bírunk oly módszert, mely által akármely adott egyenletről, könyüen meg lehet határozni pontban hány képtelen hány való, s ezek közt hány + és hány – előjegyű becse van. Ezen módszernek találója Sturm. S hogy magyarázatát minél közszerűbben adhassuk – figyelembe vegyük fontolva előbb a következőket.
1. Minden egyenletnek, melyet szabály szerint f(x) = 0 val jelképezünk, van egy + jegyű felső s egy – jegyű alsó

18 oldal háta

böcs határa, melyek közöl akármi - alsókat vagy annál nagyobb + számot, akár a másodikat vagy annál kisebb – (t.i. számban nagyobb) számot helyettesítünk x helyett, bizonyosak lehetünk, hogy f(x) becséül 0 soha többé nem jön ki, sőt inkább 0 tól mind inkább inkább távozó számok jőnek ki. Az állítás igazságát kétségbe nem hozhatjuk, midőn már ezen határbecseknek még föltanálása módját is tudjuk.
2. Ha tehát f(x) = 0 egyenletnek vagynak + és pedig (mit ezennel föltétlenül veszünk) mind csak különböző való + becsei, azoknak mind ama két határok + h és - h’ közé kell esniök, s tehát hogy az x et helyettesítendő becseket h tól kezdve lefelé 0 ig s 0 n még túl – h ig folytonosan helyettesítjük, bizonyosak lehetünk hogy f(x) = 0 nak megfelelő becsei melyek bár a folytonosan apadó x helyettesítése által kijöttek, éppen anyiszor voltak = 0 hány + való becse van f(x) = 0 egyenletnek. Más szókkal f(x) nek görbéje az altár egyent csak + h és – h’ között vágja és pedig éppen anyiszor, s mind kölönböző helytt, hány való becscsel bír f(x) = 0 egyenlet.
3. legyenek f(x) = 0 egyenletnek felülről le felé szálló sorban becsei a, b, c,…, -k, -l, … melyeket tehát ha helyettesítünk benne ε = eredményül 0 jön ki. Tegyük kérdésbe, nem azt hogy mik jőnek ki eredményül, mikor nem a, b, c, … által, hanem egyebet, más számokat helyettesítünk f(x) be (erre úgy is felelni már tudnánk) – hanem kérdjünk csak anyit : mily előjegyűek lesznek ezen ε eredmények, mert ezek könnyű a felelet. Ugyanis

19 oldal

egyszerre szembeötlő hogy
1) ha az a nál nagyobb számot helyettesítünk az eredmény + ε, az az + előjegyű szám lesz, ha a és b közöttit – előjegyű, ha b és c közöttit ismét + előjegyű s így tovább minden következő egész becsen áthaladva ellenkező ez előtti két böcsök közéből helyettesített számoknak megfelelő eredményekkel, míg végre az utolsó – v becse alól akármit helyettesítünk mind csak egyféle jegyű eredmény jön ki, + becsű ha páros volt a való böcsök száma, - jegyű ha páratlan és pedig
2) Ez oly szigorúsággal, hogy akármely kicsivel legyen is a helyettesített szám nagyobb mint a, meglehet hogy nagyon kicsi, de mindenesetre mégis 0 nál + valamivel nagyobb + ε, s

akármi kicsivel kisebb a nál mindenesetre – 0 valami, tehát – ε jön ki. Vagy algebrai nyelven fejezvén ki f(a) = 0, f(a + i) = + ε, akármily kicsiny legyen is i s f(a – i) = - ε, ismét bármily kicsiny legyen i, de nem szintén bármily nagy is, mert ha talán = a – b, s talán a – i = b, úgy f(a –i) = f(b) = 0 s ha i > a – b, s tehát a – i < b úgy f(a – i) = + ε lehetne. Ellenben

3) Az is szintoly világos, hogy ha f(x) = 0 ban nem egyiket e becsek közöl, hanem egy más számot pl. α t helyettesítünk, egy felől lesz minden esetre f(α) >0 vagy <0, t.i. vagy – ε vagy – ε, ez szerint t.i. a mint páros vagy páratlan vagy pedig páratan és páros sorszámú gyökér köztt esik a helyettesített α, de másfelől, hogy f(α+ i) és f(α – i) mely előjegyű eredményt adjanak ε – ul, az attól függ hogy

19 oldal háta

mekkora i, mert ha pl. α esik b és c közé s i nagyobb mint b – α, úgy f(α + i), ha nagyobb mint α – c, úgy f(α – i) ellenkező jegyű eredményeket adnak, f(x) nél, de míg i < b – α és i < α –c f(α + i) és f(α –i) mind kettő hasonjegyű f(α) val, s mivel α egyfelől α másfelől őt közrefogja b és c köztt, mindig van ha mi kicsiny, de mindenesetre valami különbség, látnivaló hogy akármely α –hoz lehet tenni is el venni is belőle oly kicsiny i – t hogy f(a + i) és f (a – i) is ugyanazon egyféle jegyűek t.i. f(α) val hasonjegyűek legyenek –

4. Vegyük már $f_1(x)$ et az az f(x) nek első leszármazottját is vizsgálat alá, vele együtt s lássuk mi különbség vagy megegyezés lesz ε és ε_1 köztt, t.i. az alap s az első leszármazott képlet kijövő becsei köztt, ha mindenikben ugyanazon számot helyettesítjük x – ért?

1. Helyettesítsük előbb f(x) ben f(x) = 0 egyenlet valamelyik becsét a, b, c, …t stb., lesz ε = 0. Helyettesítsük ugyanazon a, b, c, …t $f_1(x)$ ben is, azt állítom, hogy a most kijövő ε_1 semmi esetre nem lehet = 0, mi igen természetes mert ha pl. α t helyettesítvén = 0 volna, úgy x – α val mind f(x) mind $f_1(x)$ oszthatók volnának, már pedig feltettük hogy csak oly f(x) teszünk mostani fejtegetésünk tárgyává melyekben egyenlő becsek nincsenek s tehát melyeknek egyenleti alapképletének első leszármazottja-

20 oldal

ik közös osztóval nem bírnak.

2. Nem lesz e szerint ily esetben ε_1 = 0, de kérdés mily előjegyű lesz tehát? Erre is könyen megfelelhetünk. Mert láttuk mi szerint ha i – t elég kicsinek veszszük $f_1(\alpha + i)$ és $f_1(\alpha)$ hason előjegyű ε-kat adnak. $f_1(\alpha + i)$ pedig, hogy mindig hasonló előjegyű ε – t ad f(α + i) vel azt könyű megmutatni. Legyen ez a leszármazottak tana szerint

$f(\alpha + i) = f(\alpha) + f_1(\alpha) .i + f_2(\alpha).i^2 + \dots$ s következőleg

$f(\alpha + i) - f(\alpha) = f_1(\alpha) .i + f_2(\alpha).i^2 + \dots$ a ha, miként itt feltétetett f(α) = 0

A

$f(\alpha + i) = f_1(\alpha) .i + f_2(\alpha).i^2 + \dots$

Már ha i t elég kicsiny törtszámnak veszszük egész A becse olyan előjegyű lesz milyen első tagjai u.m. $f_1(\alpha).i$ –é s tehát f(α+i), hason előjegyű $f_1(\alpha).i$ vel e pedig (minthogy egyik szorzótársa + előjegyű) viszont hasonjegyű $f_1(\alpha)$ val

M.B.V. – s más szókkal így kimondható hogy $f_1(a)$, $f_1(b)$, …stb mindig oly előjegyűek mint f(x) ben az f(a) val f(b) vel felülről számítandó ε – k s tehát (a, b, c, …t mindig felülről lefelé szálló nagyságú sorban értve) pl. $f_1(m)$ ε_1 – je + előjegyű ha m, f(x) = 0 böcsei sorában, páratlan – előjegyű pedig, ha páros számú helyet foglal.

20 oldal háta

5. Lépjünk ismét még tovább, s f(x) ből és $f_1(x)$ ből hozzunk ki új képleteket, csak nem ezzel a moddal miként két adott szám vagy algebrai képlet köztt a legnagyobb közös osztót keresni szokás osztva t.i. f(x) et $f_1(x)$et míg lehet, az míg tovább osztandóul $f_1(x)$ nél alsóbb rangu képletre jutunk., s ezzel a maradékkal, melyben minden tagnak előjegyét előbb megváltoztatjuk (enyiből áll a „csaknem"-mel érintett különbséggel osztjuk az előbbi osztót és ismét míg lehet az új maradékkal), viszont jegyváltoztatás után az előbbi osztót s így mind addig míg utolsó maradéknak csupán nyilván szám jő ki, melynek előjegye szintén megváltoztatandó. Erre az e szerint rendre működésbe hozott osztás, tehát először $f_1(x)$ az után az egymást követett osztásokbeli maradékok megváltoztatott előjegyekkel, s végre a béfejező s egyes csak változatott jegyű utolsó maradék, melylyel már nincs továbbá mit ugy osztani (megjegyzés: hogy mind x-et tartalmazó maradék maradjon) alkotnak egy sajátlagos képlet sort, melyet (a leszármazott – s leszállítottakétól megkülönböztetjük) leosztatozottaknak említünk s balvállra ezt számocskával jelelve ily formán ${}^1f(x)$ mely = $f_1(x)$, ${}^2f(x)$, ${}^3f(x)$

21 oldal

${}^3f(x)$, …, ${}^nf(x)$ s ezen képletek származásából világos hogy minden alapképletnek anyi rendbeli leosztatatozottja van hányadik rangu maga, s ezek között az utolsó u.m. ${}^nf(x)$ mindig x-etlen képlet vagy nyilvános szám. Az első leosztattozott pedig ugyan az mi az első leszármazott vagy első leszállíttatott, az az $f_1(x) = f'(x) = {}^1f(x)$ vagy $X_1 = X' = {}^1X$

6. Szintúgy könyű átlátni hogy ${}^2f(x)$ levén az a maradék mely f nek ${}^1f$ eli osztásából osztatlan résznek ki jő, minthogy a maradékot r – nek nevezve e szerint $\frac{f(x)}{{}^1f(x)} = {}^1p + \frac{r}{{}^1f(x)}$ vagy $r = f - {}^1p.{}^1f$, tehát $-r = {}^2f = {}^1p{}^1f - f$, s így tovább, ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p$, … jelelvén azon számokat melyek f nek ${}^1f$ el, ${}^1f$ nek ${}^2f$ vel, …. Osztójiból kijőnek

$f = f$
${}^1f = {}^1f$
${}^2f = {}^1p.\,{}^1f - f$
${}^3f = {}^2p.\,{}^2f - {}^1f$
${}^4f = {}^3p.\,{}^3f - {}^2f$
…
${}^nf = {}^{n-1}p.\,{}^{n-1}f - {}^{n-2}f$, mindenikre (x) et odaértvén s ezekből megfordítással

$f = {}^1p.\,{}^1f - {}^2f$
${}^1f = {}^2p.\,{}^2f - {}^3f$
${}^2f = {}^3p.\,{}^3f - {}^4f$
…
${}^{n-2}f = {}^{n-1}p.\,{}^{n-1}f - {}^nf$- ….

7. Jeleljük így az ε t is, azon számokat tudni illik melyek f, ${}^1f$, ${}^2f$, ${}^3f$, …, ${}^nf$ becseiül kijőnek ha bennök mindenikben ugyanazon számot helyettesítjük x – ért

21 oldal háta

Legyenek tehát pl. $f(\gamma) = \varepsilon$, ${}^1f(\gamma) = {}^1\varepsilon$, ${}^2f(\gamma) = {}^2\varepsilon$, stb hol ε, ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$, ${}^3\varepsilon$, … közöl néha egy néha kettő vagy több lehet 0, lehet némelyik +, másik – előjegyű stb. s éppen ezen különböző rangu ε–k előjegyének egyenében vagy különbözőségében fogjuk föltanálni, a kezünk alatti föladat kulcsát, mire mi a következendőket veszszük fontolás alá.

8.Nem lehet oly q-t helyettesíteni a leosztatazottakba hogy két szomszéd osztatozott ε–ja egyszerre 0 k legyenek (más szókkal ugyan azon szám nem lehet ${}^qf(x) = 0$ nek és ${}^{q\pm1}f(x) = 0$

nak is böcsei.). Ezt f ről és $_1$f ről már láttuk, de éppen abból következik ugyan az akármely más két szomszédra nézve is. Már ha pl. θ nak helyettesítése mind ^{k}f(x)–t, mind $^{k-1}$f(x) et $^k\varepsilon$ = $^{k-1}\varepsilon$ = 0 böcsre vinné, ugy x – θ val, mind mind ^{k}f(x) – t, mind $^{k-1}$f(x) et osztván lehetne, tehát ugyan azzal oszthatók volnának mind kettőnek többese, s ezen s ezen többesek különbségei, tehát $^{k-2}$f(x) is, éppen így ebből folyólag $^{k-3}$f(x) is, ebből folyólag $^{k-4}$f(x) is – s végre ^{1}f(x) és f(x) is mi lehetlen f.t.sz. tehát abból kiindulunk t.i. hogy akármely két szomszéd osztatozott ugyanazon szám helyettesítésére = 0 ε = adjanak szintén lehetlen.
9. Ha tehát valamely szám ^{q}f(x) = 0 nak böcse, az ami annak helyettesítésével lesz $^q\varepsilon$ = 0

22 oldal

sem $^q\varepsilon$ sem $^{q+1}\varepsilon$ nem lehetnek = 0, hanem mindenik valamely szám, még pedig egyik a másiktól mindig ellenkező jegyűek és egyenlők. Mert átalában levén $^{q-1}$f(x) = ^{q}p. ^{q}f(x) – $^{q+1}$f(x) lesz akármely egyenletben is
$^{q-1}f(\theta) = {}^q p.\ {}^q f(\theta) - {}^{q+1}f(\theta)$ s ha $^q f(\theta) = 0$, tehát
$^{q-1}f(\theta) = -{}^{q+1}f(\theta)$ vagy $^{q-1}\varepsilon = -{}^{q+1}\varepsilon$ M.B.V. Önként érthető hogy ezen igazság f re, ^{n}f –re, melyeknek egyik felől nincs szomszédjok, nem alkalmazható. S tehát csak az ezek köztt álló f-kre illik.
Kezdjünk már az előttünk álló kérdésnek – (hány való böcse van egy előttünk álló f(x) = 0 egyenletnek) derekas vizsgálatához és végre
10.Helyettesítsünk előbb minden f(x) ben mind ^{1}f(x) ben mind ^{2}f(x) ben ….. ^{n}f(x) ig ugyanazon egy a nál, az f(x) = 0 beli böcsök legnagyobbikánál nagyobb számot, melynek neve legyen α.
Lesz miként már tudjuk
1) ε + előjegyű
2) $^1\varepsilon$, $^2\varepsilon$, $^3\varepsilon$, …., $^n\varepsilon$ közöl meg lehet mindenik 0 nál nagyobb vagy kisebb, részint + részint – előjegyűek lehetnek, meg lehet egy kettő vagy több is lesz = 0, de ezen esetben képzeljük α t nagyobbnak véve csak anyival hogy ezen 0 k mindenike helyébe + vagy – szám álljon, mi mint láttuk mindig lehetséges. E maga most is + nak maradván. Van tehát most ε, $^1\varepsilon$, $^2\varepsilon$, … stb

22 oldal háta

rendbe tekintve egy + on kezdődve (t.i. + ε n) azon túl nem tudom mily folytonossal vagy cserékkel haladó jegysornak pl. ez
ε, $^1\varepsilon$, $^2\varepsilon$, $^3\varepsilon$, $^4\varepsilon$, $^5\varepsilon$, $^6\varepsilon$, ….
\+ + - + + - +
Előbb megszámlálván előbb hogy ezen jegy sorban hány csere fordul elé – folytonosan apasszuk a helyettesítendő α – t.
Meg lehet hogy még mielőtt α-t a ig leszállítanánk (s tehát ε még mind + maradva) $^1\varepsilon$ vagy $^2\varepsilon$ vagy $^3\varepsilon$… stb változtatja előjegyét, de ez által az egész sorban eléforduló jegyeknek átalános száma nem változhatik – mert mielőtt valamelyik $^1\varepsilon$, $^2\varepsilon$, $^3\varepsilon$, … ellenkező jegyű böcsre ugrott volna előbb a 0 böcsön kellett átmennie. 0 böcsű pedig csak az az ε lehet melynek két szomszédjai nem 0–k, s egyszersmind ellenkező jegyűek akkor mikor ő null, s tehát még azt az egy kevéssel megelőzőleg is s már akár + akár – előjegye lett legyen az ε nak, mely α nak apadásával 0 – á enyészik, mihelyt két ellenkező jegyűek közöl enyészik ki, mindjárt nem, tehát a jegycserék számában változási mert

23 oldal

míg a maga + vagy – ával ott állott is a két ellenkező jegyű szomszéd köztt, hárman együtt alkottak egy jegycserét s egy jegyfolytatást, most maga kienyészve elenyészik maga egy jegyfolytatás, de marad egy jegycsere s így a jegycserék átalános száma az egész sorban nem apad, s az α még tovább apadásával, ujra elé áll $^{q}\varepsilon$ maga, még pedig az előbbi jegyeinek ellenkezőjével, de ez ismét két ellenkező jegy közé esvén egy új folytatást igen, de egy második jegycserét most sem származtat. Látni való hogy nem mindig így történik $^{1}\varepsilon$–n kezdve $^{n-1}\varepsilon$ ig (mert $^{n}\varepsilon$ változatlan menyiség) – s nem csak α > a határáig, hanem ha akármely becsek közzén keresztül, s alapul azon a bébizonyított körülményen, mi szerint akár melyik két szomszéd köztt álló ε 0–on csak akkor mehet keresztül, s tehát jegyét csak akkor változtathatja, mikor két <u>ellenkező</u> jegyű szomszéd fogja közbe. S éppen ezért jegye változásával a jegycserék száma sem nem apaszthatja sem nem nevelheti. De

11.Egészen másképp áll a dolog ε–nal az alapképlet becseivel, melyek egyfelől szomszéd nélkül a többi társ ε k élén állanak. Ez mint tudjuk folyvást + marad míg a < α, s egyszersmind azt eszközli hogy még mielőtt α a hoz érkeznék már $^{1}\varepsilon$ is + s annak marad akkor is mikor α = a s tehát ε = 0, sőt $^{1}\varepsilon$ ugyan + nak marad ha α – t a- n alul is

23 oldal háta

kisebbítjük, de ellenben maga ε bár mily parányival szálljon α alább mint a ellenkezőre u.m. – ε ra ugrott át, s így α–nak a-n átmenetével egy uj jegycsere származott, ujjal szaporodott tehát az egész sor jegycseréinek egyetemes száma, ismét csak változandó míg α ban is alul nem száll, de ujra mulhatlanul még egy uj társsal nevekedendő. Így c – nél , d – nél, -k, -l, -n s annyiaknál, miből végkövetkezésül a jön ki hogy, hogy f(x), $^{1}f(x)$, …., $^{n}f(x)$ ben az f(x) lehető legnagyobb + becse minél nagyobb s lehető legalsó – q nál kisebb számokat helyettesítünk az amott kijövő ε k sorában anyi jegycserével fordul elé kevesebb, hány való becse van az adott f(x) = 0 egyenletnek. S átalában, ha akár mely két számot helyettesítünk az alapképletben, s leosztatozottjaiban, a két kijövő ε soraiban jegycserék számának különbsége kimutatja azon egyenletnek azon két számok köztt tanálható való becseinek számát; és így ha egyik α–nak lesz 0, másik a + becsek felső határa, kitűnik a + becsek száma, szintúgy 0 és a becsek alsó + határát helyettesítvén kitűnik a – becsek száma, s hasonló helyettesítések által megtudhatjuk, ha valjon két fönforgó szám (egész vagy tört köztt van-é való becs vagy nincs), eme vizsgálatokban mindig nem létezőként tekintvén az $^{1}\varepsilon = 0$ becseket, azoknak tehát semmi jegyet nem tulajdonítván.

24 oldal

Álljon már itt egy egészen kidolgozandó példa, melyből még valami ujat is akarunk tanolni
Legyen a vizsgálat alá veendő egyenlet az $x^3 - 7x + 7 = 0$
Tehát $f(x) = x^3 - 7x + 7$
$^{1}f(x) = 3x^2 - 7$
$^{2}f(x) = 14/3\ x - 7$
$^{3}f(x) = ¼$
f(x) = 0 nak felső böcs határa kikeresésére a leszármazottak ezek
$f(x) = x^3 - 7x + 7$
$f_1(x) = 3x^2 - 7$
$f_2(x) = 3x$
$f_3(x) = 3$, tehát a felső + határ +2 egész számban
Az alsó határ fölkeresésére

$f(x) = x^3 - 7x - 7$

$f_1(x) = 3x^2 – 7$
$f_2(x) = 3x$
$f_3(x) = 3$, tehát az alsó határ egész számban = -4
A leosztatozottaknak tehát +2 és – 4 et helyettesítvén kijőnek a következő ε k

α = 2	α = - 4
ε = + 1	ε = - 29
^{1}ε = + 5	^{1}ε = + 41
^{2}ε = + 49/3	^{2}ε = - 31/3
^{3}ε = + 1/4	^{3}ε = + ¼

És amott 0 jegycsere itt 3 jegycsere
Tehát a való becsek száma = 3 – 0 = 3. Lássuk ezek közöl hány + hány – előjegyű, + 2 már lévén helyettesítve

24 oldal háta

Helyettesítünk most 0–t ki jön
ε = + 7
^{1}ε = - 7
^{2}ε = + 7
^{3}ε = + ¼, tehát a jegyek cseréje = 2, s a + becseké = 2 – 0 = 2, van tehát 2 + és egy – előjegyű böcs.
Vizsgáljuk van-é ezek közöl vagy egy 0 és + 1 köztt. 0 már van helyettesítve, helyettesítsük az 1- et kijőnek
ε = + 1
^{1}ε = - 4
^{2}ε = + 35/3
^{3}ε = + ¼, tehát a jegycserék száma itt is = 2 mint α= 0 nál, tehát 0 és egy köztt nincs való böcs, tehát mind a kettő van 1 és 2 köztt.
A – böcs esik – 3 és – 4 köztt, mert vevén α = -3 lesznek
ε = + 1
^{1}ε = + 20
^{2}ε = - 20
^{3}ε = + ¼, tehát csak két jegycsere s így – 3 és – 4 köztt fekszik egy böcs
De nem lehet észre nem venni hogy az osztattozottakban eleálló törtszámok néha alkalmatlanságot okoznak, mit ha úgy tanolnánk könyű levén segíteni a bajon. Ugyan is könyen átlátható, hogy ha a kijövő ε k közöl akár egyet tesz és ??? valamely számmal vagy különböző de mindenkor + előjegyű számokkal szorozzuk, azért előjegyeink melyekre egyedül van szükség nem változnak s tehát cseréjik sora is ugyan az maradna.

25 oldal

Közelített föloldási módszerek

1. Newton módszere a következő okoskodásokon alapszik, amelyeket egy példára alkalmazva világosítunk föl
2. Légyen a föloldandó egyenlet ez: $x^3 - 2x – 5 = 0$
3. Tudva levő módon kijön hogy ezen egyenletnek csak egy való becse van +2 és +3 köztt, a kérdés tehát az, mivel nagyobb x 2 nél. Nevezzük ezt y nak, tehát x = 2 + y. S ezt az adott egyenletbe helyettesítvén $(y + 2)^3 -2(y + 2) – 5 = 0$ vagy fordított renddel írva és által víve

5
4+ 2y
-8 -12y - $6y^2$ – y3 = 0

1 – 10y - $6y^2$ – y3 = 0 és ez tökéletes pontossággal igaz, minél fogva ezen harmadrangu egyenlet föloldásával a keresett y – t meghatározni nem volna lehetlen. De megfontolva hogy ha harmadrangu egyenlet átalános föloldásának tömkelegébe beavatkozunk kedvünk lesz vala, ugy egyenesen magát a feladott egyenlet vettük volna kezelés alá, s hogy továbbá itt is y föloldására azért jött ki 3^d rangu egyenlet mert a feloldandó is csak 3^d rangu volt, mikor pedig 7^d rangu, akkor y egyenlet is hasonrangu s így átalánosan nem feloldható lesz – azért más

25 oldal háta

okoskodáshoz folyamodni t.i. a következőben. 1 – 10y - $6y^2$ – y3 = 0 pontban igaz, de mivel y való tört, tehát emeletei nem csak szintén való, hanem egyszersmind kicsiny törtek, s annál kisebb becsük minél nagyobb rangu emeleten állanak. Így itt is y^3 csekélység lehet, s tehát annak elhagyásával 1 – 10y – $6y^2$ = 0 ha nem is pontban de közelítőleg igaz, s oldjuk fel azért ezt a csak 2^k rangu egyenletet, lesz:
$6y^2 + 10y = 1$; $y^2 + 5/3y = 1/6$
$y = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{5^2}{6^2} + \frac{1}{6}} = \pm \frac{1}{6}\sqrt{31} - \frac{5}{6}$ tudva hogy y + közelítőleg – az az y = 0,0946…. tehát x = 2.0946 mi még 1/1000 részben sem különbözik az igazságtól.
Ha már további közeledést akarunk tervezni az előbbi okoskodást s műveletet ismételhetjük ily formán
x = 2,0946 + z = A + z (a tisztaság okáért). Innen
$(A + z)^3 - 2(A + z) - 5 = 0$ vagy
$A^3 + 3A^2z + 3Az^2 + z^3 - 2A - 2z - 5 = 0$, vagy z^3 – t itt is mellőzve s az egészet rendezve
$z^3 + (3A - 2)z = 5 + 2A - A^3$ s innen

26 oldal

$z = 1 - \frac{3A^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)^2 - (A^3 - 2A - 5)}$, mi a jelen esetben hol A = 2,0946, A^2 = 4,38735, A^3 = 9,1897 tehát
$z = -5{,}581025 \pm \sqrt{32{,}82215 - 0{,}0005}$ vagy mivel a – jegyet tartva meg ellenkezés jőne ki

$z = -5{,}581025 + \sqrt{32{,}82165} = -5{,}581025 + 5{,}5810241$ miből kijön hogy z – előjegyű tehát x < 2,0946 tehát x = 2,0945… s a többi tizedesek pedig a nyolcadikon kijöttek volna, ha y közelítőleg szintén addig fejeztetik ki. De erre nem terjeszkedünk, az egész fönebbi műveletet csak ezért igtatván ide, mikép egy megjegyzést kössünk hozzája, abból állót hogy miként látni való, a közelítésnek ezen módszere is, mely most csak második rangu egyenletnek föloldását kívánta, első helyettesítés alkalmával még megjárt, de már másodiknál tűrhetlen hosszadalmasságban bonyolított, s azért az eredeti föltaláló Newton tanácsa szerint y nak z nek s egyszer csak harmadik s azon felüli hanem 2^k emeletét is mellőzni szokás, s csupán az első emeletek tekintetbe vételével eszközöli a közelítést rendre rendre. Legyen a különbsége ugyanazon egyenletnek

26 oldal háta

$x^3 – 2x – 5 = 0$
$x = y + 2$ tehát mint láttuk volt
$1 – 10y - 6y^2 – y3 = 0$ s a 2^k emeletnek is a mellőzésével $1 – 10y = 0$, innen $10y = 1$, $y = 0,1$, $x = 2,1$ – mi első közelítésben nagyobb az igazságnál –
Legyen tehát $x = 2,1 – z$ tehát
$(2,1 – z)^3 – 2(2,1 –z) – 5 = 0$ s innen a felsőbb emeletek mellőzésével
$2,1^3 – 3.2,1^2.z – 2.2,1 + 26 – 5 = 0$ az az $11,23z = 0,061$, $z = 0,061/11,23$ 7 0,00534….
$x = 2,1 – 0,00534 = 2,09466…$ szorosabb közelítés a negyedik tizedesig. Miként kellene a mentét tovább folytatni világos.
Ezen közelítési módszer átalános formulába vonható következőleg
Legyen a föloldandó egyenlet
$X^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + …+L = 0$
Legyen x–nek első közelített böcse = a (melyről igen jó ha kevesebb mint 1/100 részben különbözik az igazságtól, s azért az maga egyedül és tőlünk fölvilágosított mód-

27 oldal

szerrel másodrangu egyenlet útján számíttatik ki. Lesz tehát $x = a + y$, s y a kikeresendő, e végre az adott egyenletbe helyettesítve a + y–t ki jön
$(a + y)^n + A_1 (a + y)^{n-1} + A_2(a + y)^{-2} + … A_n = 0$
Vagy binomi tan szerint kifejtve s y emeletei szerint elrendezve

$$a^n + na^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}y^2 + ...$$

$$A_1a^{n-1} + A_1(n-1)a^{n-2}y + A_1\frac{(n-1)(n-2)}{2}a^{n-3}y^2 + ...$$

$$A_2a^{n-2} + A_2(n-2)a^{n-3}y + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{2}a^{n-4}y^2 + ...$$

......

$$A_{n-2}a^2 + A_{n-2}2ay + ...$$

$$+ A_{n-1}a + A_{n-1}1a^0y + ...$$

$$+ A_n + 0...$$

S y nak második s annál inkább felsőbb emeletei mellőzésével

$$(a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + ... + A_n) + (na^{n-1} + A_1(n-1)a^{n-2} + A_2(n-2)a^{n-3} + ... + 2A_{n-2}a + A_{n-1})y = 0 \text{ vagy}$$

$$y = -\frac{a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + ... + A_n}{na^{n-1} + A_1(n-1)a^{n-2} + A_2(n-2)a^{n-3} + ... + 2A_{n-2}a + A_{n-1}}$$

s tehát

27 oldal háta

$$x = a + y = a - \frac{a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + ... + A_n}{na^{n-1} + A_1(n-1)a^{n-2} + A_2(n-2)a^{n-3} + ... + 2A_{n-2}a + A_{n-1}} =$$

$$\frac{(n-1)a^n + (n-2)A_1 a^{n-1} + (n-3)A_2 a^{n-2} + ... + A_{n-2}a^2 + A_n}{na^{n-1} + A_1(n-1)a^{n-2} + A_2(n-2)a^{n-3} + ... + 2A_{n-2}a + A_{n-1}}$$

De csak közelítőleg, melyből ujabb közelítéssel hasonlóan ezen formula alkalmazásával még ujabbak s ujabbak mind közelebbi becseket lehet következtetni. Pl.
Egy közelített becset k_o nak a még közelítettebbeket k_1 nek k_2 nek nevezvén lesz 3^k rangu egyenleteket illetőleg mindig

$$k_{n+1} = \frac{2k_n^3 + A_1 k_n^2 - A_3}{3k_n^2 + 2A_1 k_n + A_2}$$

Negyedranguaknál

$$k_{n+1} = \frac{3k_n^4 + 2A_1 k_n^3 + A_2 k_n^2 - A_4}{4k_n^3 + 3A_1 k_n^2 + 2A_2 k_n + A_3}$$

Ötödranguaknál

$$k_{n+1} = \frac{4k_n^5 + 3A_1 k_n^4 + 2A_2 k_n^3 + A_3 k_n^2 - A_5}{5k_n^4 + 4A_1 k_n^3 + 3A_2 k_n^2 + 2A_3 k_n + A_4}$$

Alkalmazva az elsőt a fenebbi egyenletre melyben n = 3, $A_1 = 0$, $A_2 = -2$, $A_3 = -5$
Első közelítésben $k_1 = 2$ tehát

Második közelítés $k_2 = \frac{16+5}{12-2} = 2{,}1$

Harmadik közelítés = $k_3 = \frac{2.9{,}261+5}{3.4{,}41-2} = 2{,}091156$ … mi csak az ötödik tizedesben távozik el az igazságtól

28 oldal

Nem lehet csakugyan észrevétel nélkül hagyni, hogy Newton nak ezen módszere, némelykor közelítés helyett távozásra vezet a keresett böcs igaz értékétől, midőn t.i. az adott egyenlet számszorzóji olyanok, hogy azokban miket elhagytunk t.i. a keresett y magasabb elemeit magokba foglaló tagokban y nagyon kicsi, de a számszorzók a kicsinyt kipótolják, s ugy öszvesen mégis több az mit elmellőztünk mint a mit megtartunk. Ezért
a) adtuk azon tanácsot, hogy a keresett böcs szomszéd egészén kívül, még egy tört böcs lehető közelítéssel, másodrangu egyenlettel kerestessék ki –
b) Fourier és mások útat nyitottak az ily kérdés elleni óvatoskodásra, de módszereik hosszadalmas műveletekre vezetnek

3. Lagrange módszere, a közelítést lánctörtek alakjában eszközli. Ez soha sem csalhat, de szintén hoszszadalmas. Menete a következő példából kitűnik.
Legyen a föloldandó egyenlet ez
$x^4 - 4x^3 - 3x + 24 = 0$
Előleges vizsgálat kimútatja hogy két való + böcse van 2 és 3 s 3 és 4 köztt. Keressük az utolsót

28 oldal háta

3 egyik közelített böcs, s a menyivel az igaz böcs ezt meghaladja, mi csak való tört lehet nevezik 1/y nak. Tehát lesz x = 3 + 1/y, mit az adott egyenletbe helyettesítvén kijön $(3 + 1/y)^4 – 4(3 + 1/y)^3 – 3(3 + 1/y) +27 = 0$ s ebből kifejtvén a törteket kienyésztetvén lesz $9y^4 + 3y^3 – 42y^2 – 8y – 1= 0$ Előleges (de hoszszadalmas) vizsgálatok kimútatják miszerint ezen egyenletben y–nak egy becse +6 és +7 köztt, tehát y = 6 + ½ s következőleg

$$x = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}$$

Hasonló módon kellene már esetleg utolsó egyenletben y helyett 6 + ½ - t helyettesíteni, s kifejtés és törtkienyészetés után, keresni azon egész számokat melyek közé z esik; kijöve hogy esik 7 és 8 közé, tehát $z = 6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{v}}$ s következőleg $x = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{v...}}}$

Látni való, miként lehet így akármeddig haladni s x – et végtelen lánctörttel fejezi ki – melynek minden további becse nagyobb nagyobb közelítést ad. De a munka baja – s hoszszadalmas voltát tagadni nem lehetne.

29 oldal

Elhallgatva még néhány s ismét néhány javaslatba hozott közelítési módszereket, állapodjunk meg annál melyet Legendre hozott javaslatba, s mely biztonságilag könyübb kezeléssel egyesít, s anyival ajánlatosabb mivel a művelet véghez vitelénél logarithmok használóinak ad helyet. Alapvonásai a következők

1. Akármely n rangu normális alaku adott egyenletet át lehet alakítani olyanná melynek alsó fele x^n, hátulsó fele egy osztat legyen, mind felsőjében mind alsójában csupa + előjegyű tagokkal. Mert

a) Vigyük túl mindenik – előjegyű tagot, ott mindenik + jegyet kap

b) Bonczoljuk föl az egyenlet alól maradt felét két szorzórészre, melyeknek egyike legyen x^n.

c) A másik szorzótárssal oszszuk az egyenlet mindkét felét

Pl. $x^5 – 3x^4 – 2x^3 + 4x^2 + 6x – 6 = 0$ ez a kívánt alakra így vitetődnek

$x^5 + 4x^2 + 6x = 3x^4 + 2x^3 + 6$

$$x^5\left(1 + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) = 3x^4 + 2x^3 + 6$$

$$x^5 = \frac{3x^4 + 2x^3 + 6}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}} = \frac{3x^8 + 2x^7 + 6x^4}{x^4 + 4x + 6}$$

3) Sőt az ily alakra vont egyenletnek néha tetemes egyszerűsítéseket lehet (és kell is) véghez vinni, mi szerint az n^{dik} s néha több emeletei

29 oldal háta

x nek belőle kienyésznek pl.

$$x^5 = \frac{3x^8 + 2x^7 + 6x^4}{x^4 + 4x + 6}$$ osztva x^4 el ezt adja

$$x^1 = \frac{3x^4 + 2x^3 + 6}{x^4 + 4x + 6}$$

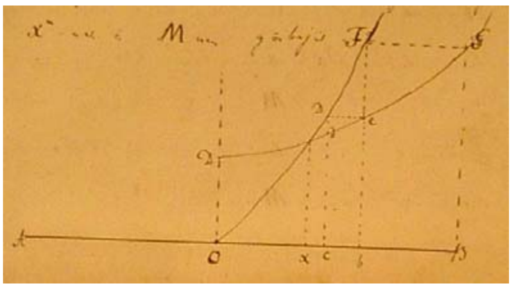
Azonban erre, mi nem mindig fordul elé, most még nem tekintve
3.Átalános képlete az ily átalakított egyenletnek ez
M

$$x^n = \frac{Ax^m + Bx^r + \ldots + H}{1 + \frac{a}{x^p} + \frac{b}{x^q} + \ldots + \frac{h}{x^u}}$$ hol minden x szám szorzói lényegesen + előjegyű

4. x nek egy becsét a mit ha érte helyettesítünk, az egyenletet igazolja. Tehát itt x nek becse lesz az a szám, melyet ha egyfelől n dik emeletre emelünk, másfelől ha azokat mik M nél jelelve vagynak vele végbe viszszük mind két esetben egy eredmény jön ki.
5. Most halljuk az okoskodásokat
1) x nek vagy van való becse vagy nincs – (mit az adott egyenlet elővizsgálatai megmútatnak) – ha nincs, nincs mit keressünk, ha van
2) ezen való becsek között (a lehető egyenlőket minden esetre kienyésztettve) vagy van + becs vagy mindenik -, ha nincs + becs, az egész egyenletet ellenkezővé kell változtatni azt oldani fel. Tehát minden esetben csak oly egyenlettel foglalatoskodunk, melynek van vagy vagynak + becsei

30 oldal

3) Ha több + becs van, ezek közöl előbb csak a legnagyobbat keressük. Ezeket előrebocsátva
4) Világosabb szem elé mutatás végett rajzoljuk le x^n nek és M nek görbéjét



Ábrázolja AB az altár egyent melyben a kezdő pont 0 és a + altárok B felé, a – altárok A felé esnek.
Szembeötlő hogy a) x^n ben ha x = 0 az altár = ε és = 0, más szókkal, x^n görbéje 0 – nál kezdődik b) x^n ben ha x helyett akármi + számot teszünk ε is + lesz tehát x^n görbéje 0 – tól kezdve felül jön AB – n. c) x^n ben minél nagyobb számot helyettesítünk x ért annál nagyobb lesz a feltár, tehát x^n görbéje folytonosan távolít Ab – tól miként itt is rajzolva van O F nál.
Ellenben más felől M – ben a) ha x helyett 0- t helyettesítünk az altár = ε lesz 0 - nál nagyobb – mert M becse lesz ezen esetben A/h, melyek közöl mindenik + előjegyű > 0 lévén, M becsei ezen esetben mindenik + > 0, más szókkal M görbéje 0 nál az

30 oldal háta

x^n görbéjének balján jár b) ha M be x helyett annak valamely becsét jelesen f.t.dz. a legnagyobb + becsét helyettesítjük a kijövő feltár – ε lesz = x^n , tehát M görbéje x^n görbéjét át vágja, s így annak jobbjára megyen át, azon altár felett hol x – nek igaz becse van c) föl levén téve hogy az a §x = x igaz becsei köztt a legnagyobb, x – nek további nevekedésével M és x^n görbéje többször nem találkozhatnak, mert különben azon altár mely felett találkoznának mind M – nek mind x^n nek becse, még pedig az előbbinek nagyobb becse volna f-t. ellen. Mind azoknak nyomán M görbéje állandóul x^n görbéjének jobbján folytatódik s tehát ily alaku már itt DG nél még pedig d) feltárjában folytonosan nevekedne – altárja nevekedésével, mit M nek szerkezete egyszerre kimútat.

6. x^n görbéje akármely pontjának neve legyen α n – dik emelete vagy is $\varepsilon = \alpha^n$ tehát mindig $\alpha = \sqrt[n]{\varepsilon}$

7. M egyenletben melynek neve legyen $\varphi(x) = 0$ s M görbéjének vegyük nagyobb altárát = α, mikor x – nek legnagyobb igaz becse lesz $\varepsilon = \varphi(\alpha)$, pl. itt ha α = OB lesz $\varepsilon = \varphi(\alpha)$ = BG, g től párhuzamosan az altáregyenhez véve GF – t