November 19ke 1846. [illegible]

ELSŐ RÉSZ.

Fő elvek; s analyticai alkalmazások.

ELSŐ LECKE.

Meghatározások. Változók. Folytonos és nem folytonos, – fejlett és fejletlen, – egyszerű s öszvetett – függvények. A' függvények határai (limites). – Leszármazott és Differential. – A' Differentialis Calculus' tárgya.

§1. Változó mennyiségnek az neveztetik, melyet úgy tekintünk, mint több egymástól különböző értékkel bírót. Állandónak ellenben az, melynek egy, határozott értéke van. Mikor több változók oly kölcsönös függésben vannak egymás közt, hogy egynek vagy többeknek értéke megadatván, ebből a' többiek is mind ki találhatók — azokat melyek által a' többiek kifejeztetnek függetleneknek mondjuk; a' többieket pedig (a' függetlenek által kifejezetteket) amazok

functio

függvényeinek, vagy függő változóknak.

§ 2. A' függvény fejlett, $y = f(x)$, $y = f(x)$. $z = F(x, y)$, $u = f(x, y, z)$ stb. jelekkel jelöltetik, midőn a' függő változók közvetlenül ~~fejlett~~ feloldott egyenletek által meg vannak adva; — bonyolult, mikor a' függetlenekhezi viszonya a' függőknek stb. ~~fejletlen~~ feloldhatatlan egyenletekben van kimutatva. Pl. $f(x, y) = 0$; $\varphi(x, y, z) = 0$ stb. Megjegyzendő, hogy ha több függvények ugyan azon jel F, f, φ stb. által jelöltetnek — ez azt jelenti hogy a' mellettök álló mennyiségekből ugyan azon modon alakultak. — Pl. $f(x)$ ugyalakult xből mint $f(y)$ $y$ból.

f. explicite

f. implicite

§ 3 A' függvények eloszlatnak: 1ör egyszerű és összetettekre a' szerint a' mint a' mennyiségekből, egy vagy több müveletek' végrehajtása által eredülnek, és 2or rationalis vagy irrationalis algebrai függvény az melyben változó sem emeletmutatói, sem gyökmutatói, sem logarithmusban akár minő szerepben; sem trigonometriai függvényben nem fordul elé; mert ha igy igen akkor a' függvény transcendentalis

f. simple

f. composée

f. algébraique

f. transcendentale

4. Egy függvény $(y = f(x))$ folytonos, midőn a' változó minden becsének a' függvény' egy és határ

f. continue

rozott értéke felel meg, és mikor egy a' független változóban tett határtalan kis különség $h = \Delta x$, a' függvény értékében is határtalan kis változást Δy-t hoz elé, - vagy a' különség $\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$ határtalan kicsiny. Ha e' két feltét betöltve nincs, a' függvény nem folytonos. Határtalan kicsinynek

f. discontinue.

egy erősen kicsi, 's határúl 0-tal biró mennyiség neveztetik, mely határtalan kisebbedhetik, a' nélkül hogy egy kifejezhető számhoz érne; - vagy akármely adott mennyiségnél kisebb lehet. Δx, és Δy, positiv- 's negativok lehetnek, minden esetben növekedést nevt alatt jelölvén.

§.5 Mikor egy változó egy vagy több mennyiségtől függ, 's melyek magok is ismét másoktól függenek, amaz első változó, függvény' függvényének neveztetik. Pl. ha $z = F(y)$ és $y = F(x)$, akkor z, x' függvényének függvénye.

§6. Általában egy függvény határának azon érték neveztetik melyhez ez közeledik, - azon változónak melytől függ, - egy határozott becshezi közelítésével. És a' határ néha bizonytalan, 's határozatlan alakban jelentezhetik 's annak kiszámítására gyakran különböző mesterséges fordulatokhoz szükség folyamodni. Így pl e' függvények:

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, és $y = \frac{L(1+x)}{x}$; $x = 0$ esetében e' határozatlan alakokat adják 1^{∞}, és $\frac{0}{0}$; 's még is a' becsnek Ohoz közelítésével $x \rightarrow 0$; e' határokat mutatják föl: $e = 2,71828$, és $Le = \frac{1}{la}$; a lévén alapja az L-ával kifejezett rendszernek; l pig az e alapu vagy neperi logaritmokat jelölvén. E' két határ fölötte fontos lévén, adjuk itt létezésöknek és kiszámításuk' módjának kimutatását.

Az első példa $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

I A' változó x Ohoz vagy $\frac{1}{x}$ a' végetlenhez közeledvén, positív egész vagy törtes, vagy végre negatív eredményeket adhat. Nézzük az első esetet.

Ha $\frac{1}{x} = m$, m egész szám lévén, lesz

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m.m-1.m-2}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{1}{m^3}\ldots \text{ stb}$$

(Binomi tan szerint)

vagy megtevén az osztást 's egyszerűsítést:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots \text{ stb}$$

Ha x erősen kicsi, s m erősen nagy az egyenlet utóbbi felének mind tagjai positivok, s tehát $(1+x)^{\frac{1}{x}}$nek határa > 2; azonban, az egyenlet ~~elmellőz~~ e' fele növekedni fog, ha elmellőzvén a' negativokat $-\frac{1}{m}$, $-\frac{2}{m}$, $-\frac{3}{m}$ stb, minden alatt 3, 4 stb, helyett 2őt teszünk, mikor lenne

$\lim(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots\cdots = 3$; tehát $(1+x)^{\frac{1}{x}}$nek határa 2 és 3 közt van. ezt $e$nek nevezik. S $m$et erősen nagynak vévén ~~kijön~~ a' teljesen ki nem fejezhető $e$nek egy közelítése jő ki pl. $m = 1000000$ lévén, lesz $e = 2,71828$, $\frac{1}{100000}$ ig pontosan.

Ha $\frac{1}{x}$ egy törtes szám, két egymást utána következő egészek m és $n = m+1$ között van; s lesz $\frac{1}{x} = m+\mu = n-\nu$; $x < \frac{1}{m}$, $x > \frac{1}{n}$; e' függvény $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ bizonyosan e' kettő közt fog állani.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\left(1+\frac{\mu}{m}\right)} \text{ és } \cancel{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\left(1-\frac{\nu}{n}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\left(1-\frac{\nu}{n}\right)}.$$

Ha x végetlenül kisebbedik az m és n végetlenül nagyobbodnak, akkor $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mindketten $\backsim e$; az exponensek $\left(1+\frac{\mu}{m}\right)$ és $\left(1-\frac{\nu}{n}\right)$ határtalanul $\backsim 1$. s tehát e' két képlet

fen. bir. fejez

$(1+\frac{1}{m})^{\frac{1}{x}}$ és $(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}}$, valamint a' köztök közbül álló $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ is $\sim e$.

Ha végre x egy negativ tört, >-1, 's $1+x$ kisebb lesz mint 1; tehát semmi 's $1+x = \frac{1}{1+\alpha}$; α levén egy positiv de ~ 0 szám; és lesz ekkor:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} = (1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} = \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1+\alpha}$$ tehát

itt is ez utóbbinak határa $= e$, határa lesz $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

II. Nézzük a' másik kifejezést $\frac{\mathcal{L}(1+x)}{x}$

második példa: $y = \frac{\mathcal{L}(1+x)}{x}$

$$\mathcal{L}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{\mathcal{L}(1+x)}{x}$$; tehát

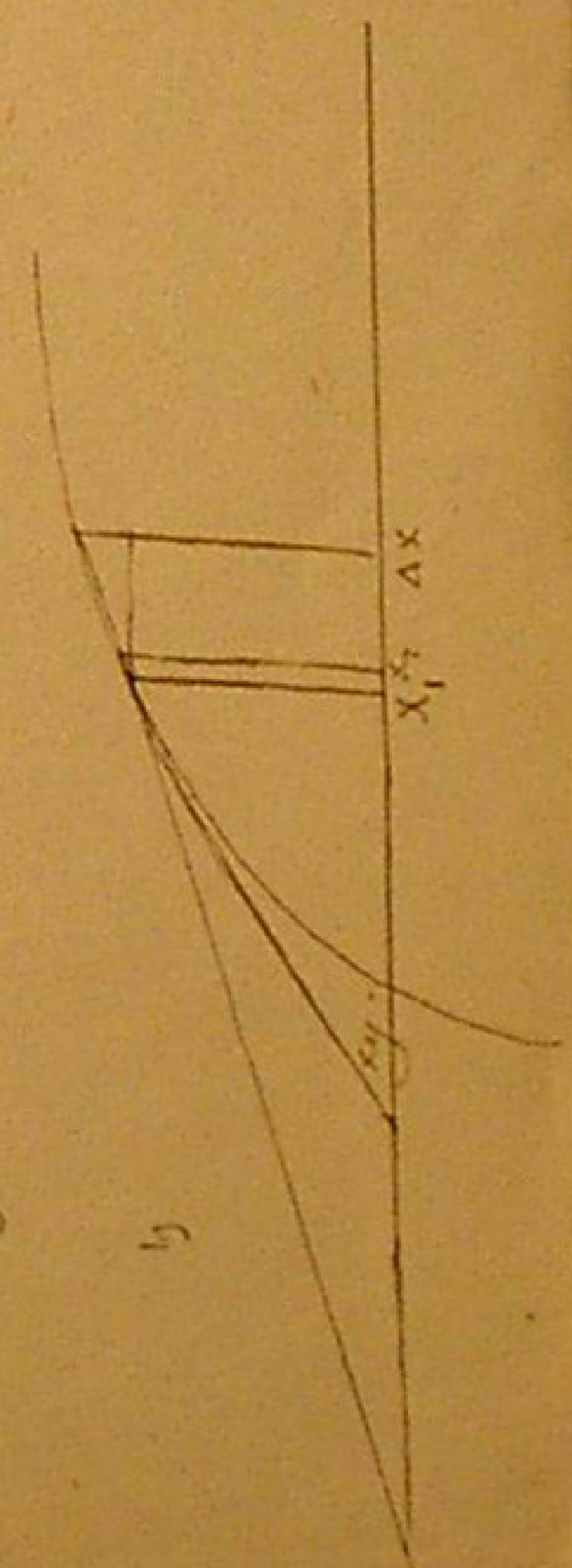
$$\lim \frac{\mathcal{L}(1+x)}{x} = \lim . \mathcal{L}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = \mathcal{L}e$$. (fenn. bi. szer.)

vagy egy ismeretes logarithmi igazságnál fogva:

$$\lim . \frac{\mathcal{L}(1+x)}{x} = \frac{1}{la}$$'s következőleg

$$\lim \frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{le} - le = 1.$$

§7. Ez a' tétel $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathcal{F}(x+\Delta x) - \mathcal{F}(x)}{\Delta x}$, ha $\Delta x = 0$ veszszük, e' határozatlan alakot adja $\frac{0}{0}$; 's valóban mégis határzott értéke van, mely rendesen x nek valamely függvénye, 's kifejezi azon szegelet trigonometriai tangensét, mely Vs az ehár egyen és a' tangens valamely függvényi görbével[1] : Ez az új függvény.



az értékkülönbség belkülönbséggeli osztá-

derivée — nak határa, leszármazott nevet visel és

y', vagy $\mathcal{F}'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\mathcal{F}(x+\Delta x)-\mathcal{F}(x)}{\Delta x}$ jel-

lekkel jelöltetik.

§ 8. Mivel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-nek $\mathcal{F}'(x)$ csak határa, tehát ez

amattól mindig különbözik valamiben $=\varepsilon$, mely

ε, Δx kienyészésével 0 lá válik ; tehát

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathcal{F}(x+\Delta x)-\mathcal{F}(x)}{\Delta x} = \mathcal{F}'(x)+\varepsilon$$ és következőleg

$$\Delta y = \mathcal{F}(x+\Delta x)-\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

ez utóbbi kifejezés első taggja ($y'\Delta x$) azaz a' leszár-

mazott y'nak, és a' belkülönség Δx nek szorzata

Differentielle — neveztetik Differentialnak, vagy értékkülön-

ségi határnak, — s dy val jelöltetik: tehát

$dy = y'\Delta x = \mathcal{F}'(x)\Delta x$; vagy általán $= y'dx = \mathcal{F}'(x)dx$

mert a' korábbi meghatározásokból folyt, hogy

a' változónak differentialja: dx = növekedése Δx.

Egyébiránt a' differential határozott, vagy

határozatlanúl kicsiny lesz a' szerint a' mint

Δx vagy dx is határozott, vagy határozatlanúl

kicsiny. Midőn Δx határozatlan kicsiny, akkor

ε is ilyen, mert akkor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ csak határtalan közelébe különbözteik a maga tiresétől (dy tól; tehát ilykkor az egyenletben $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ elmehet az ε mel, lözni, s lesz $\Delta y = y'\Delta x = dy$, mi által az van mondva, hogy a differentiál, mikor határtalan kicsiny, egyenlő az éptek különbséghez s viszont. —

§9. Egyszerű s öszvetett képletek leszármazott jai - s differentiáljainak kikeresése, s s a leszármazottak és differentiálok tulaj donainak különböző analytikai és geomet riai kérdésekre alkalmazása —

Teszik tárgyát a Differentiális calculusnak. —

MÁSODIK LECKE.

Egyszerű képletek leszármazottjainak és diffe rentiáljainak kiszámítása.

§10. Egy állandó mennyiség leszármazottja és diffe rentiálja szükségkép $= 0$.

Továbbá:

1ör $y = a + x$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ tehát (mert $\Delta y = \Delta x + 0 = \Delta x$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 1$, $dy = y'\Delta x = dx$.

2or $y = a - x$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, tehát

$y' = -1$, $dy = y'dx = -dx$.

3^{szor} $y = ax$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \Delta x}{\Delta x} = a$; tehát

$$y' = a \; ; \; dy = y'dx = adx.$$

4^{er} $y = \frac{a}{x}$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+\Delta x} - \frac{a}{x}}{\Delta x} = \mp \frac{a}{(x+\Delta x)x}$

$$y' = -\frac{a}{x^2} \; ; \; dy = y'dx = -\frac{adx}{x^2}$$

$5^{\text{ször}}$ $y = x^a$ ra nézve: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x} =$

$\left(\frac{x^a}{\Delta x}\text{t kiv\'eve}\right)$ lesz $= \frac{x^a}{\Delta x}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right)$

elnevezvén $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ és $(1+\alpha)^a - 1 = \beta$

α és β két, Δx el ~~végs~~ határtalanul kisebbedő mennyiség lesz; és lesz

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{a-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$; továbbá:

ezen egyenletből $(1+\alpha)^a - 1 = \beta$ következik hogy

$(1+\alpha)^a = \beta + 1$; $l(1+\beta) = a \cdot l(1+\alpha)$,

azonban $\frac{l \cdot (1+\alpha)}{\alpha}$ és $\frac{l(1+\beta)}{\beta}$ mind ketten közeledvén egyhez $= \sim 1$; tekintsük hogy

$\frac{l(1+\alpha)}{\alpha} = 1 + \gamma$, és $\frac{l(1+\beta)}{\beta} = 1 + \delta$;

levén γ és δ a' 0hoz közeledők; e két egyenlet az előbbivel összevetve adandja ezt: $\frac{\beta}{\alpha} = a\frac{1+\delta}{1+\gamma}$ mely $\sim a$

's következőleg:

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = x^{a-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = ax^{a-1}$, próval:

Ha x valamely emelésének leszármazottját keressük, az emeletmutatót tegyük szám szorzónak, az x-et eggyel alsóbb emeletre szállítván le.

6^{or} $y = a^x$-re nézve, $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} =\right) \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x}{\Delta x}\cdot(a^{\Delta x}-1)$.

nevezvén: $a^{\Delta x}-1=\alpha$, ebből $\Delta x = \mathcal{L}(1+\alpha)$; s lesz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\cdot\alpha}{\mathcal{L}(1+\alpha)} = \frac{a^x}{\frac{\mathcal{L}(1+\alpha)}{\alpha}} \text{ és}$$

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{a^x}{\mathcal{L}e} = a^x la \text{; és } dy = y'dx = a^x la\, dx.$$

~~Ha~~ Mikor $a=e$, $a^x = e^x$ akkor $y'=e^x$; $y'dx = e^x dx$.

7er $y=\mathcal{L}x$-re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathcal{L}(x+\Delta x)-\mathcal{L}x}{\Delta x} = \frac{\mathcal{L}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$

nevezvén $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$, ebből $\Delta x = \alpha x$, lesz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\mathcal{L}(1+\alpha)}{\alpha} \text{; és } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{\mathcal{L}e}{x} = \frac{1}{x\,la}.$$

$$dy = y'dx = \frac{dx}{x\,la}.$$

Mikor $a=e$, ~~y^x~~ $y = lx$ lesz $y'=\frac{1}{x}$; $dy=\frac{dx}{x}$

8^{or} $y=\sin x$-re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

nevezvén $x+\Delta x = a+b$, $x = a-b$, melyből

$a = x+\frac{\Delta x}{2}$, $b=\frac{\Delta x}{2}$;

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b\cdot\cos a =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \text{; lesz}$$

Limesnek mindig azt nevezi, midőn Δx a' semmihez közeledik.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$; és $\lim\{\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \cos x =$ a' társszegletes Sinusa $= \sin(x + \frac{\pi}{2})$; és

$$dy = \cos x\, dx = \sin(x+\frac{\pi}{2})\, dx.$$

9szer $y = \cos x$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$.

's egy az elébbihez hasonló átalakítás' nyomán

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}); \text{ és}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$$

$$dy = -\sin x\, dx, = \cos(x+\frac{\pi}{2})\, dx.$$

10szer. $y = \text{arc.}\sin x$ re nézve.

$x = \sin y$, $\cos x = \sqrt{1-x^2}$, $\Delta x = \sin(y+\Delta y) - \sin y$.

(a' fennebbiek szerint) $\Delta x = 2\sin\frac{\Delta y}{2}\cos(y + \frac{\Delta y}{2})$; és $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\frac{\Delta y}{2}} \times \frac{1}{\cos(y + \frac{\Delta y}{2})}$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

11er $y = \text{arc}\cos x$ re nézve.

$x = \cos y$, $\sin y = \sqrt{1-x^2}$; $\Delta x = \cos(y+\Delta y) - \cos y =$

(a' 8ik szerint) $\Delta x = -2\sin\frac{\Delta y}{2}\sin(y + \frac{\Delta y}{2})$; és

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{1}{\sin(y + \frac{\Delta}{2})};$$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Jegyzés: arc sin x és arc cos x' függvényeik őfere adva: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = 0$, a mi természetes is, mert $\arcsin x + \arccos x$, mindig egy állandó mennyiség $= 90^\circ$, minek differentiálja mint tudjuk $= 0$.

HARMADIK LECKE.

Függvények függvényeinek, öszvetett, és fejlettlen függvények leszármazottjai és differentiáljai.

§11. Tegyük fel hogy z függvénye x függvényének, ez egyenletek által kifejezett: $z = F(y)$; $y = f(x)$. x-et Δx-el növelvén, y és z is Δy és Δz-vel fognak növekedni; s lesz

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - Fy}{\Delta y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Az első factor $\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}$ nek határa $=$ z nek leszármazottja y-ra nézve, mintha y független lenne; jelöljük e leszármazottat z'_y; z'_x el jelöljük z nek x-re nézve nyerendő leszármazottját azaz $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x}$; a második factor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nek határa $y'_x =$ y nak x-re nézve i.e. y'_x.
végeredményünk tehát $z'_x = z'_y \cdot y'_x$.

Igy tehát egy függvény függvényének leszár-

ma

mérossja = két leszármazottak szorzata:
egyik z'_y vagynézve y-t mint függetlent,
a' másik y'_x. - Jelölvén d_xz, d_yz, d_xy-al
$z$nek $x$re és $y$re, 's $y$nak $x$re nézvei differen-
tiálját, lesz (§ 8nak értelmében)

$d_xz = z'_x dx$; $d_yz = z'_y dy$, $d_xy = y'_x dx$ vagy $= y'dx$.
'S következőleg

$$\frac{d_xz}{dx} = \frac{d_yz \cdot d_xy}{dy \cdot dx} \; ; \; \frac{d_xz}{dx} dx = \frac{d_yz \cdot d_xy}{dy \cdot dx} \cdot dx.$$

megegyeztek hogy az x és y alsjegyeket elhagyván
írják csak így

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz \cdot dy}{dy \cdot dx} \text{ és } \cancel{\frac{dz}{dx}} \cdot \cancel{\frac{dy}{dx}} \cancel{dx} \frac{dz}{dx} \cancel{dx} = \frac{dz \cdot dy}{dy \cdot dx} dx.$$

az alsókat tolaz' felsőkről el nem választ-
ván hogy azok jelöljék mitszerint a diff.
most $x$re majd $y$ra nézvei. Így $\frac{dz}{dy}$ tulaj-
donképen nem törtszám, hanem csak egy
jelölés, egy jegy, mely $z$nek $y$ra nézvei
differentiálját jelenti. S mégis gyakran
írják $dz = \frac{dz \cdot dy}{dy \cdot dx} dx$ amaz helyett, mert
a' második tag eléggé kimutatja (a' dx által)
hogy az első ~~nek~~ (dz) $x$re nézvei differ-

~~Ha~~ ~~$\frac{y}{z} = F(y)$~~ ; Ha $u = F(z)$; $z = f(y)$; $y = \varphi(x)$;

lesz: $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(z+dz)-F(z)}{\Delta y} \cdot \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A' második félnek három factorának határai s' leszármazottak u'_z ; z'_y ; y'_x ; unak zre, znek yra, ynak xre nézvei leszárm; lesz tehát ~~y~~ $u'_x = u'_z \cdot z'_y \cdot y'_x$; s egy függvény függvényének leszármazottja mindig = szorzata mindenik változandó arranézvei leszármazottjainak mely ~~közvetetlenül~~ utána következik vagy a' melytől közvetlenül (egyszerintve az) függ ~~mint~~ ~~a~~ függetlent ; s a' fenebbi jelölésekkel

$$\frac{d_x u}{dx} = \frac{d_z u}{dz} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ ; és}$$

$$du = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx.$$

Alkalmazások

1. Ha $z = y$; $z' = y'$; $dz = dy$.
2. $z = a \pm y$; y levén xnek függvénye ; lesz $\frac{dz}{dx} = \pm \frac{dy}{dx}$; $dz = \pm dy$;

Ha egy függvényhez állandót teszünk a' annak leszármazottját vagy differentiál-

jat

jer semmit sem változtat; s tehát két egy-
mától csak állandóban különböző függ-
vénynek ugyan az diffja és leszármazottja.

3. $z = ay$; $\frac{dz}{dx} = a\frac{dy}{dx}$; $dz = a\frac{dy}{dx}dx = ady$.

Differentiálni kell az állandót előbb tekintetbe te-
véve, melyet aztán egyszerűen szorzóvá teszünk.

(§10, 4k pont szerint) 4. $z = \frac{a}{y}$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{y^2}\times\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{y^2}\cdot y'$;

$$dz = -\frac{a}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}dx = \frac{ady}{y^2}.$$

5. $z = y^a$; $\frac{dz}{dx} = ay^{a-1}\frac{dy}{dx} = ay^{a-1}\cdot y'$;

$$dz = ay^{a-1}\frac{dy}{dx}dx = ay^{a-1}dy.$$

6. $z = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$; $dz = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$; $= \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

Egymásodrangú gyökér differentiálja min-
dig = a mennyiség differentiálja osztva
a másodszori gyökér kettősével.

7. $z = a^y$; $\frac{dz}{dx} = a^y la\frac{dy}{dx}$; $dz = a^y la\,dy$.

8. $z = Ly$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{yla}\frac{dy}{dx}$; $dz = \frac{1}{yla}\frac{dy}{dx}dx = \frac{dy}{yla}$

9. $z = \sin y$; $\frac{dz}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$; $dz = \cos y\frac{dy}{dx}dx = \cos y\,dy$

10. $z = \cos y$; $\frac{dz}{dx} = -\sin y\frac{dy}{dx}$; $dz = -\sin y\,dy$.

11. $z = \text{arc}\sin y$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}$; $dz = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx}dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

12. $z = \text{arc.}\cos y$; $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$; $dz = -\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$;

Általános szabály: Úgy kell differenciálni mintha y független változandó volna, azután $\frac{dy}{dx}$, vagy dy helyett ~~annak~~ azokat kell tenni melyet $y = f(x)$ ből kapunk ki.

§12 Nem bajosabb az összetett függvények differenciáljait és leszármazottjait kifejezni

1. $u = z \pm y$. Lesz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} \pm \frac{\Delta y}{\Delta x} ; \; u' = \frac{du}{dx} = y' \pm z' = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx} ; \; du = dy \pm dz.$$

Két mennyiség összvegének s különbségének leszármazottja vagy differenciálja = a két mennyiség diff. és leszármazottjainak összvege s illetőleg különbsége.

2. $u = zy$.

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{(z+\Delta z)(y+\Delta y) - zy}{\Delta x} = z\frac{\Delta y}{\Delta x} + y\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta z$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \frac{du}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx} = zy' + yz' ;$$

Általánosabban ha $w = vuzy \ldots$ lesz

$$w' = \frac{dw}{dx} = uzy \ldots \times dv' + vzy \ldots \times du' + vuy \ldots dz' + \ldots$$

$$dw = uzy \ldots \times dv + vzy \ldots \times du + vuy \ldots dz + vuz \ldots \times dy \ldots$$

szer.

szóban kifejezve, egy szorzatnak differentiálja
= a' egyes factorok differentiálok szorozva rendre a' többiek egyszerű szorzatával, s mind ezek összveadva.

Más uton is ez eredményre juthatni.

$w = uvzy\ldots$; $w^2 = u^2v^2z^2y^2\ldots\ldots$ és

$lw^2 = lv^2 + lu^2 + lz^2 + ly^2 + \ldots\ldots$ ez egyenlet két felét differentiálván lesz

lw^2-nek diff.-ja $= \frac{dw^2}{w^2}$; §10. 7 pont szerint

$$\frac{dw}{w} = \frac{dv}{v} + \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}\ldots\ldots \quad \text{és}$$

$$dw = uzy\ldots dv + vzy\ldots du + vuy\ldots dz + \ldots$$

Jegyzet. Második emeletet irtunk a' végett hogy az imaginarius logarithmokat kerül, jutn el azon esetben mikor $u, v, y\ldots$ tatók negativok lennének.

Pl: $z = xlx$, $z = x\cdot e^x$.

3) $u = \frac{z}{y}$; $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\frac{z+\Delta z}{y+\Delta y} - \frac{z}{y}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = \frac{y\frac{\Delta z}{\Delta x} - z\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y(y+\Delta y)}$

$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \frac{du}{dx} = \cancel{\frac{ydz - zdy}{y}} = \frac{yz' - zy'}{y^2}$, $du = \frac{ydz - zdy}{y^2}$

Egy törtnek differentiálja = az alsó szorozva a' felső differentiáljával, ebből kivonva a' felső szorozva az alsó differentiáljával, s az egész osztva az alsó másod emeletével.

Más uton is ez eredményre jutharni:

$u = \frac{y}{z}$ ből $lu^2 = ly^2 - lz^2$; $\frac{du}{u} = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$ és

$$du = \frac{zdy - ydz}{z^2}:$$

4. $u = y^z$; $- lu = zly$; $\frac{du}{u} = z\frac{dy}{y} + dzly$ és

$$du = y^{z-1}(zdy + ylydz)$$

§13. E' különböző pontok' figyelmes megtekintéséből a' következő általános szabályt lehet elvonni: Mikor öszvetett függvény differentsialja kerestetik, differentsiálni kell rendre mindenik tagot mintha a' többi állandó volna 's azig kikapott differentsiálokat öszveadni. E' szabály értelmében

$v = uyz$, $u = y^z$, $u = x^x$ egyenletekből

$$dv = yzdu + uzdy + uydz; \; du = y^{z-1}(zdy + ylydz);$$

$$du = x^{x+1}(1 + lx)dx.$$

Alkalmazások. $y = tang\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $dy = \frac{\cos x}{\cos x}dx + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + tang^2 x)dx;$$

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $dy = -\frac{\sin x}{\sin x}dx - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}dx = -(1 + \cot^2 x)dx.$$

$y = \text{arc tang}\, x$; $x = \text{tang}\, y = \frac{\sin y}{\cos y}$; $dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$

ebből $dy = dx \cos^2 y = \frac{dx}{1+x^2}$

$y = \text{arc.}\cos x$; $dy = -dx \sin^2 y = -\frac{dx}{1+x^2}$

Ha még általánosabban $u = F(y,z)$; y és z is $x$nek bizonyos függvényei levén, a' fennebb kimondott szabály szerint, du két részből álland. Egyik $F(y,z)$nek $y$ranézvei differentiálja, mikor z állandó mennyiség benne; ezt így lehet kell jelölni $\frac{dF(y,z)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}dx$, vagy egyszerűebben $\frac{du}{dy}dy$; A' másik $\frac{du}{dz}dz$, $F(y,z)$nek $z$re nézvei diff.ja mikor y állandó benne; Lesz tehát $du = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$; Ez azonyenlet (mely a' differentiálok keresésében felette fontos) következő uton kimutatható: Neveljük $x$et Δxel y, z, u is Δy, Δz, Δuval növekedni fognak. S lesz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y,\ z+\Delta z) - F(y,z)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{F(y+\Delta y,\ z) - F(y,z)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{F(y+\Delta y,\ z+\Delta z) - F(y+\Delta y,\ z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Határt keresve, az egyenlet első fele lesz $\frac{du}{dx}$; a' második fél első tagja $\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ az az szorzata $\frac{dy}{dx}$nek $F(y,z)=u$ differentiáljával $y$ranéz-

ve

ve, mintha csak y volna változandó és z állandó. Hogy a' második tag határát jobban kikaphassuk segíti hogy $\Delta y = 0$; lesz $\frac{F(y,\ z+\Delta z) - F(y,z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$; s ha azon kivül még teszszük hogy $\Delta x = 0$, világos, hogy ezen tagnak is határa nem egyéb mint szorzata $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nek az $u = F(y,z)$ leszármazottjával, azt nézve mintha most viszont z lenne ~~csak~~ változandó, y pedig állandó. Tehát

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \text{ és } du = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

— Ha lenne $w = F(y, z, u, v \ldots .)$ hasonló módon kikaphatnók hogy

$$dw = \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz + \frac{dw}{du}du + \frac{dw}{dv}dv + \ldots .$$

Így az összetett függvények differentiálására fennebb adott szabályunk pontosan be van bizonyítva hogy tudni illik csak az egyes tagokat rendre (a' többieket állandóknak tekintvén) kell differentialni és az így ko-talált differentiálokat összeadni. Ezek $\frac{dw}{dz}dz$, $\frac{dw}{du}du$ stb. $F(u, z, y, v \ldots)$ függvény részletes differentiáljainak neveztetnek. diff. partielles.

Pl. Ha $u = f(\sin x, \cos x)$ levén $\sin x = y$, $\cos x = z$;

$$du = \frac{du}{dy}\cos x\,dx - \frac{du}{dz}\sin x\,dx \text{ ; és ha}$$

$$u = \cos^2 x + \sin^2 x \text{ ;}$$

$$du = -2\cos x \cdot \sin x\,dx + 2\sin x\cos x\,dx = 0$$

S így is kell lenni mert $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

§14 Hátra van még a bonyolult függvények differentialjainak meghatározása.

Láttuk már hogy ha $x$nek két függvényei y és z egyenlők, az az mindig ugyanegy értékűek, akár mi legyen x, ez egyenletből $y = z$ következnének: $y + \Delta y = z + \Delta z$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$; $y' = z'$; $dy = dz$; – ezen függvények differentialjai s leszármazottjai is egyenlők. Ha továbbá $x$nek egy függvénye 0hoz egyenlő, akár mi legyen x, differentialja és leszármazottja is 0 lesz, ez egyenletből:

$y = F(x) = 0$, következik hogy

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) - F(x) = 0;\ \Delta y = 0;\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 0;\ dy = 0.$$

Ez így levén vizsgáljunk meg egy bonyolult függvényt, melynek egyenlete ez $u = F(x, y) = 0$. Ha ez egyenletben y helyett annak becsét $y = f(x)$ tennők (melyet az egyenlet feloldásával belőle nyernénk) – a helyettesítés által származó egyenlet $F(x, f(x)) = 0$ határozatlag okor egyenlő lévén x akármi legyen, — igaz volva lenne az egyenlet, 's tehát a' differential és leszármazott is = 0 lennének.

Ha már — y-t úgy tekintve mint x-nek függvényét — differentiálni akarjuk $F(x,y)$-at, ezen differentaltnak is okor kellene egyenlíteni; azomban $F(x,y)=0$, csak egy különös esete ezen egyenletnek $u=F(y,z)$; az t.i. midőn $u=0$, $y=f(x)$ és $z=x$. Ennek differentialja tehát $\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$. és lesz $\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0$, ebből

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} \quad \text{és} \quad dy=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}dx$$

Kapjuk tehát minden esetben $F(x,y)=0$-nak feloldása nélkül a' leszármazottat $\frac{dy}{dx}$, 's a' diff.-t dy-t kikapni, csak az egyenlet elsőfeleinek rendre mintha y és x független változandók volnának leszárm. kell venni; e' leszármazottaknak osztata ellenkező jeggyel lesz — a' leszármazott $\frac{dy}{dx}$; 's ezt dx-el szorozva: a' differential dy.

Példák:

1.) $y^3+x^3-3axy=0$; $\frac{du}{dx}=3x^2-3ay$; $\frac{du}{dy}=3y^2-3ax$

tehát $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}=$

$$=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

2.) $y^x-x^y=0$; $\frac{du}{dx}=y^x ly-yx^{y-1}$; $\frac{du}{dy}=xy^{x-1}-x^y lx$

tehát: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^x ly-yx^{y-1}}{xy^{x-1}-x^y lx}=\frac{yx^{y-1}-y^x ly}{xy^{x-1}-x^y lx}=$

$$=\frac{x^2-xyly}{y^2-xylx}.$$

Jegyzet. A' fennebbi egyenletekben $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ helyett gyakran $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$-t irnak.

NEGYEDIK LECKE.

Utóbbi rendü ~~differ~~ leszármazottak és differentialok; — Változtatás a' független változandóban. Képzetes (imaginaire) függvények' differentiáljai.

§15. $F(x)$nek, x akármely függvényének leszármazottja $F'(x)$ $x$nek ismét egy függvénye levén, annak is meglesz a' maga leszármazottja és differentialja, 's látni való hogy egy adott függvényből mint $F(x)$ egész sorát lehet lehozni ~~a' differenti~~ ujabb függvényeknek, melyek mindenike leszármazottja lesz az előbbinek. Ezek az uj függvényt neveztetnek $y = F(x)$ különböző rendű leszármazottjainak 's igy jelöltetnek:

$$y', y'', y''' \ldots\ldots y^{n-1}, y^{n}, = F'(x), F''(x), F'''(x) \ldots\ldots F^{n}(x).$$

Igy $y' = F'(x)$ lesz elsőrendü leszármazottja $y = F(x)$-nek; $y'' = F''(x)$ ugyanannak másodrendü, 's egyszersmind y'-nek elsőrendü leszárm. Végre $y^{n} = F^{n}(x)$ lesz ynak ned rendü, y^{n-1}-nek pedig elsőrendü leszárm. (n akármely egész számot jelölvén)

§16. Mivel a' differential $dy = y'dx$, a' változandó x-nek egy ~~tőle~~ attól különböző uj függvénye, ezt is többszörös egymásután differentialhatjuk, miáltal y-nek több különböző ~~nemü~~ rendü differentiáljait fogjuk kapni. Ugy látszik hogy ezeket igy kellene ~~ki~~ jelölni: dy, $d.dy$, $d.d.dy$ … sth, de rövidség okáért megegyeztek, hogy azt igy jelöljék: $dy, d^{2}y, d^{3}y, d^{n}y$.

A' különböző rendü leszármazottak és differentialok közt nevezetes összefüggések léteznek melyket azonban némileg ugy tekintehetni mint bizonyos egyezmények eredményeit.

d^2ynak leszármazása végett differentiálni kell $dy = y'dx$et; de e' kitételben a' dxet ~~tehát~~ (mely az első differentiálásnál tett részleges növekedése Δx e volt $x$nek) úgy nézzük mint függetlent a' változandó $= x$től; 's valóban az is, mert vele nem változik. Tehát $y'dx = F'(x)dx$ egy szorzat melyben az egyik factor dx állandó; annak leszármazottjához úgy ~~kap~~ jutunk ki ha $x$et ujra növeljük egy uj Δxel. és annak a' mikijő határát vesszük: u.m. $dx \frac{F'(x+\Delta x) - F'(x)}{\Delta x}$nek; ez a' határ természetesen

$= y''dx$; ~~és~~ ez leszármazottja dynak, 's ha meg egyezünk hogy a' második növekedést Δxet egyenlőnek vegyük az elsőhez dxhez, dynak diff-ja lesz $\cancel{d}\, y''dx^2$; 's lesz

$$d^2x = y''dx^2.$$ — Így tovább menve, hasonló uton ki jő hogy

$d^3y = d.y''dx^2 = dx^2dy'' = y'''dx^3$;

$d^4y = y''''dx^4$; $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Tehát egy nedrangu differential $=$ az nedrangu leszármazott szorozva dxnek, a' változandó kényleges felvett növekedésének nedik emelésével; és viszont az nedik leszár-

n-mazott = azon szám melyet $dx = \Delta x$ nek ne-dik emeletét szorozni kell, hogy kijőjön az n-edrangu differ. Ezért nevezzük néha $y^{(n)}$ az nedrang' differential coefficiensének.

Az általános elveket alkalmazzuk előbb egyszerü függvényekre.

1.) $y = a + x$, $y' = 1$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, ... $y^{(n)} = 0$.

$dy = dx$; $d^2y = 0$, $d^3y = 0$ ..... $d^{(n)}y = 0$.

2.) $y = a - x$; $y' = -1$; $y'' = 0$, ... $y^{(n)} = 0$

$dy = -dx$; $d^2y = 0$ ..... $d^{(n)}y = 0$.

3.) $y = ax$; $y' = a$, $y'' = 0$ ...... $y^{(n)} = 0$.

$dy = adx$; $d^2y = 0$ ...... $d^ny = 0$

4.) $y = \frac{a}{x}$; $y' = ax^{-1}$; $y'' = -1ax^{-2}$; $y''' = +2ax^{-3}$ ...

$y^{(n)} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,a x^{-(n+1)}$.

$d^nx = (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,a x^{-(n+1)} d^nx^n$.

Az első számszorzó $(-1)^n$ azt jelenti, hogy a képlet − jegyü mikor n páratlan, + jegyü mikor n páros.

5.) $y = x^a$; $y' = ax^{a-1}$; $y'' = a \cdot a-1 \cdot x^{a-2}$ ...

$y^{(n)} = a \cdot a-1 \cdot a-2 \ldots a-n+1\, x^{a-n}$

$d^nx = a \cdot a-1 \cdot a-2 \ldots a-(n+1)\, x^{a-n} \cdot dx^n$

Ezen nedrendü leszármazott soha se leszo- mikor a nem egész szám (mert akkor a 0 is ugrodik) de semmivé válik ha a egész szám, akkor mikor $n = a+1$; és igy x^a nak $a+1$ edrangu diff'a s leszármazottja nullak, az $\underline{a}$ drangu leszármazott pedig ezen állandó: $a \cdot a-1 \cdot a-2 \ldots\ldots 1$; v. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a$.

6$^{or}_{3}$ $y = a^x$. $y' = a^x la$; $y'' = a^x la^2 \ldots y^{(n)} = a^x la^n$.

$$d^{(n)}y = a^x la^n dx^n.$$

Mikor $a = e$, $y = e^x$, $y'' = e^x \ldots\; y^{(n)} = e^x$, $d^n y = e^x dx^n$
Minden rendű leszármazottjai ~~...~~ e^x nek ismét ugyan ezzé lesznek. e^{-x} nek leszármazottjai pedig
$y' = -e^{-x}$, $y'' = +e^{-x}$, $\ldots\; y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$. és

$$d^n e^{-x} = (-1)^n e^{-x} dx^n$$

7$^{er}_{3.)}$ $y = Lx$; $y' = \frac{1}{x\,la}$; $y' = \frac{1}{la} x^{-1}$; $y'' = -\frac{1}{la} x^{-2}$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{la} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1) \cdot x^{-n} \quad \text{és}$$

$$d^n y = \frac{(-1)^{n-1}}{la} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) x^{-n} dx^n =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot Le}{x^n} dx^n$$

8^{or} 3).

8$^{\text{ra}}$) $y = \sin x$; $y' = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, $y'' = \sin(x+2\frac{\pi}{2})$ ....

$$y^{(n)} = \sin(x+n\tfrac{\pi}{2});\ d^{(n)}y = \sin(x+n\tfrac{\pi}{2})\,dx^n.$$

$\sin(x+n\frac{\pi}{2})$-nek csak négy különböző értéke lehet; n valóban nem lehet más mint egy ezek közül: $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$.

az első esetben $\sin(x+n\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2m\pi) = \sin x$

a másodikban $\sin(x+n\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2m\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

a harmadikban $\sin(x+n\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2m\pi+\pi) = -\sin x$

a negyedikben, $\sin(x+n\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2m\pi+3\frac{\pi}{2}) = -\cos x$

mert $\pi = 180°$ s így 2π, s $2m\pi$ mindig ugyanaz, azon sinus hoz ív vezet, a körnek kerületében stb.

Tehát $\sin x$ leszármazottjainak négy különböző értékök van, melyek vissza kerülőleg egymást váltogatva következnek:

9$^{\text{r}}$ $y = \cos x$; $y' = \cos(x+\frac{\pi}{2})$; $y'' = \cos(x+2\frac{\pi}{2})$ ...

$$y^{(n)} = \cos(x+n\tfrac{\pi}{2});\ d^{n}y = \cos(x+n\tfrac{\pi}{2})\,dx^n$$

Itt is a leszármazottakk négy egymást felváltó alakjok van $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ s $+\sin x$. melyek kerülőleg egymásután következnek.

10.) $y = \operatorname{arc}\sin x$. $y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$;

$$y''' = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \text{ sth.}$$

11.) $y = \operatorname{arc.}\cos x$; $y' = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$y''' = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \text{ sth.}$$

§17. Midőn z egy a' következő egyenletek által

$z = F(y)$, $y = F(x)$ meghatározott függvény függvénye, akkor kitaláljuk hogy

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx};$$

ezt másodszor is differentiálván, – 's megjegyezvén hogy $\frac{dz}{dy}$ ynak, $\frac{dy}{dx}$ pedig xnek függvénye, – lesz:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}; \text{ és}$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{dz}{dy}d^2y.$$

Egy harmadik differentiálás adja:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{dy^3}{dx^3} + 3\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^3y}{dx^3};$$

$$d^3z = \frac{d^3z}{dy^3}dy^3 + 3\frac{d^2z}{dy^2}dy\,d^2y + \frac{dz}{dy}d^3y$$

Példa. $z = ly$, $y = \sin x$. Lesz:

$$dy = \cos x\,dx;\ d^2y = -\sin x\,dx^2;\ d^3y = -\cos x\,dx^3$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin x};\ \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 x};\ \frac{d^3z}{dy^3} = \frac{2}{y^3} = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

$$dz = d.l\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx;\ d^2z = d^2 l\sin x = -\frac{dx^2}{\sin^2 x},$$

$$d^3z = d^3 l\sin x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^3.$$

E' példák eléggé kimutatják az egyenletekben követendő utat.

318. Tegyük végre hogy u összetett függvény és
$u=F(y,z)$, $y=\varphi(x)$, $z=\chi(x)$ mindjárt hogy
$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

Differentiáljunk másodizben, megemlékezvén hogy hogy $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ ynak és znek közvetlen függv. de xnek függvény függvényei, – mig $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ csak xnek függvényei; továbbá jelölvén $\frac{d^2u}{dzdy}$, $\frac{d^2u}{dydz}$ által $\frac{du}{dy}$ nak és $\frac{du}{dz}$ nek leszármazottjait, az elsőt zre a másodikat yra nézve, vagyazt a mi kijő ha ut előbb yra aztán zre, vagy a második esetben előbb zre aztán yra nézve differentiáljuk; meg mutatandjuk később hogy e két mennyiség egyenlő: $\frac{d^2u}{dzdy}=\frac{d^2u}{dydz}$.
Ezt felvéve, ~~let~~ úgy találjuk hogy:
$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dzdy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}$$
$$d^2u=\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{du}{dy}d^2y+2\frac{d^2u}{dzdy}\cdot dy.dz+\frac{du}{dz}d^2z+\frac{d^2u}{dz^2}dz^2.$$
Harmadszori differentiálás végett jelölnök $\frac{d^3u}{dzdy^2}$, $\frac{d^3u}{dydz^2}$ val leszármazottjait e mennyiségeknek $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dzdy}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, az elsőnek dzre a másodiknak dzre és dyra, a harmadikét dyra nézve; meg mutatandjuk előbb hogy.

mind ezen leszármazottak csak két határozott értékkel birnak 's $\frac{d^3u}{dzdy^2} = \frac{d^3u}{dy^2dz} = \frac{d^3u}{dydzdy}$.

és $\frac{d^3u}{dydz^2} = \frac{d^3u}{dz^2dy} = \frac{d^3u}{dzdydz}$; a honnan könnyü lesz kiszámitani $\frac{d^3u}{dx^3}$nak 's d^3unak értéket; Példáúl

$$u = yz,\quad y = \sin x,\quad z = \cos x.$$

$$dy = \cos x\, dx; \qquad d^2y = -\sin x\, dx^2$$

$$dz = -\sin x\, dx; \qquad d^2z = -\cos x\, dx^2$$

$$\frac{du}{dy} = z;\quad \frac{du}{dz} = y;\quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0;\quad \frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d^2u}{dydz} = 1.$$

$$du = z\cos x\, dx - y\sin x\, dx = \cos^2 x\, dx - \sin^2 x\, dx$$

$$d^2u = -2\cos x . \sin x\, dx^2 - 2\cos \sin x\, \sin x\, dx^2 - \cos x \sin x\, dx^2$$

azaz $d^2u = -4\cos x \sin x\, dx^2$.

= Az fenebbiek nyomán könnyü kiszámitani, hogy nedrendü leszármazottjai e függvényeknek:

$$u = y + z;\quad u = y - z;\quad u = ay + bz + \ldots$$

$$u = ax^n + bx^{n-1} + \ldots\ldots px^2 + qx + r; \text{ ezek:}$$

$$d^n(y+z) = d^ny + d^nz;\quad d^n(y-z) = d^ny - d^nz.$$

$$d^n(ay + bz + \ldots) = a\,d^ny + b\,d^nz + \ldots$$

$$d^n(ax^n + bx^{n-1} + \ldots) = 1.2.3\ldots n.\, a\,dx^n$$

$$d^{n+1}(ax^n + bx^{n-1} + \ldots) = 0.$$ (mert a' számszorzók közé a' 0 is belejön.)

Egy öszveg-'s különbségnek nedrangu diff-ja = az egyeseknek nedrangu diff-jainak öszvese vagy különbsége

§19. Jegyzet. Vegyük újra ez egyenleteket:

$$y = f(x) \cdot \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Mikor x független változandó, akkor közvetlenül ki lehet kapni a "különböző" rendű lefzármazottakat és differentiálokat, ugytekintvén dx-et mint állandót; de ha x nem független hanem egy másnafik függvénye, dx is ennek egy függvénye lefz, s rendre többszerten differentiálván ez egyenleteket

$$y = f(x) \;;\; y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

, és a fennebbi fzabályokat tartván fzem előtt, lefz:

$$dy = f'(x)dx \;;\; d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx\,d^2x + f'(x)d^3x$$

. . . .

$$y' = \frac{dy}{dx} \;;\; y'' = d.\frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$y''' = d.\frac{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}}{dx} =$$

$$= \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}.$$

Jegyz. 10r Átmenvén azon esetről midőn x független arra mikor nem az, — y', y'', y''' helyett $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ ért csak azon uj értelmet

kell helyettesitni melyeket az előtti egyen-
letek adnak. 2or. Vissza menvén azon egyen-
letes x független, – csak ~~füg~~ állandónak
kell venni dxet, 's következőleg $d^2x=0$, $d^3x=0$ ...
valóban így ismét kijő hogy

$$y'=\frac{dy}{dx};\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''=\frac{d^3y}{dx^3};\quad \dots$$

3or ~~[illegible]~~ Ezen helyettesítésben 's a' változandó
ezen változtatásaival csak az első rendü le-
származott $\frac{dy}{dx}$ marad meg; úgy hogy azon kép-
letek melyekben csak első rendü leszármazott
fordul elő ezen alakot minden esetben megtartják

§20. Egy $u=\mathrm{F}(x,y)=0$ egyenlet által megadott
bonyolult függvény különböző rendü leszárma-
zottjai 's differentiáljai kikeresésére azon
(fennebb kikötött) egyenletből lehet ~~ki~~ kiin-
dulni $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$'s $dy=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}dx$.
mely több versen differentiáltatván, közvet-
lenül megadja a' keresetteket; de igen gyak-
ran könnyebb azon egyenletekből hozni ki
a' differentiálokat melyek a' következő egyen-
let differentiáiból jönek ki: $\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0$

Ez egyenletben valamint ~~mind~~ a' többiekben mekeret ebből kihozhatni, a' részleni ~~differentiálok~~ leszármazottak; $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}$ ... általánosan x-nek és y-nak függvényei lesznek. Ellenben a' bonyolult ~~képlés~~ függvény y, 's annak differentiáljai dy, d^2y, d^3y úgy tekintendők mint x-ben kifejezett értékek. E' szerint azon egyenletek' első felei mindig $=0$, 's tehát differentiáljaikat is 0-hoz kell egyenlíteni. — dy fog kijőni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \text{ stb.}$$

— Szükségnek ha diff. és leszármazottját venni képzetes függvényeknek is melyek mindig ily $u+v\sqrt{-1}$ alakra visszavitetők lehet föltennünk. (u és v reál mennyiségeket jelölvén. Ezt föltéve, ha egy képz. változandó határának azt ne vesszük a' mi kijön ha u és v helyett az ők' határaikat helyettesitjük, 's ha még a' reál mennyiségek diff. és leszármazottjairól adott fogalmakat a' képzetes mennyiségekre is kiterjesztjük — látni való hogy ezen egyenletből: $w=u+v\sqrt{-1}$, ezek is következnek:

$\Delta w = \Delta u + \Delta v\sqrt{-1}$; $\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1}$;

$w' = \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v'\sqrt{-1}$ és $dw = du + dv\sqrt{-1}$.

Szóval: képzetes mennyiségeket akarván differentiálni, azzal úgy kell bánni mintha reális lenne, a' $\sqrt{-1}$ et úgy tekintvén mint állandó szorzót. E' szabály természetesen a' további rendű diff.-ra is kiterjed.

Pl. $w = \cos x + \sin x\sqrt{-1}$

$dw = (-\sin x + \cos x\sqrt{-1})\,dx$; $= w\sqrt{-1}\,dx$.

ÖTÖDIK LECKE.

Egy változandójú (reál) függvények, 's azoknak különböző rendű differentiáljai és leszármazottjai közt létező viszonyok.

§ 21. Legyenek Δx és Δy egyszerrei nagyobbodásai $x$nek és $y = f(x)$nek, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ osztat ~~..~~ határa levén neki y' a' leszármazott, – akkor midőn Δx elég kicsiny ugyan oly jegyű lesz mint a' határ y', azaz positiv ha a' leszármazott az, 's negativ, a' leszármazott (– levén. Az első esetben (ha $+\frac{\Delta y}{\Delta x}$) 's a' Δy és Δx ugyanazon jegyűek levén, y növekedni fog x növekedésével, apadni apadásával; a' második eset ezen ben (ha: $-\frac{\Delta y}{\Delta x}$) e különözék Menkező'je, gyöke levén y nevekedni fog $x$nek apadása'val, apadni $x$nek nevekedésével.

1ö Corollarium. Tegyük fel hogy $y = f(x)$ függvény folytonos két adott határ x_0 és X között. 's hogy a' változandó x', végetlenül lassanként növel-tessék egyik vagy egy határtól a' másikig; $f(x)$ nem ~~[illegible]~~ meghet át ~~[illegible]~~ növekedésből apadásba, vagy apadásból növekedésbe ~~[illegible], míg~~ a' nél-kül, hogy leszármazottja $f'(x)$ positivból negativba, vagy negativból positivba ne menne át. Meg kell jegyezni hogy ez át menetelben a leszármazott egyszer 0vá lesz, ha folytonos, vagy végetlenné, ha meg szűnvén mindig való béggel birni ~~[illegible]~~ nem folytonos discontinue.

2ik Coroll. Tegyük fel hogy $y = F(x)$ függvény elenyészik a' x_0 bcet beletételével; és foly-tonos ezen bcgnek szomszédságában. Lesz

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon_0 \quad \text{vagy}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \Delta x\, f'(x_0) + \varepsilon_0$$; felvéve hogy $x_0 + \Delta x = x$, erőtlen kissé különbözik $x_0$tól,

akkor

$F(x_0+\Delta x) = F(x)$ positiv lesz ha $F'(x_0) > 0$

" " " negativ lesz, ha $F'(x_0) < 0$.

§ 22. Legyenek $F(x)$ és $f(x)$ $x$nek két real függvényei, melyek, valamint leszármazottjaik is, folytonosok x és $x+h$ határok között; tegyük fel továbbá hogy a' második függvény' leszármazottja $f'(x)$ a' fennforgó határok között mindig egy jegyű (vagy mind $+$, vagy mind $-$) marad, azaz, $f(x)$ vagy mind nevekedik vagy mind apad; ekkor a' két különségnek $F(x+h) - F(x)$, és $f(x+h) - f(x)$ nek osztata egyenlő lesz valamelyikéhez azon becseknek, melyekkel bír a' fenforgó határok x és $x+h$ közt, a' leszármazottaknak $F'(x)$ és $f'(x)$ nek osztata; vagy θ_1 el valamely 1nél kisebb számot jelölvén, lesz

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{F'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)}$$

Bébizonyítás. Legyen A a' legkisebb és B a' legnagyobb azon becsek közt melyekkel $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ a' fenforgó határok közt bír; a' két különség

$\frac{F'(x)}{f'(x)} - A$; és $\frac{F'(x)}{f'(x)} - B$ ellenkező jegyűek

Hasonlólag e' más kettő is:

$F'(x) - Af'(x)$ és $F'(x) - Bf'(x)$; mert $f'(x)$ állandóan egyjegyű. Azonban ez utolsó két különség leszármazottjai e' két függvénynek:

$F(x) - Af(x)$, és $F(x) - Bf(x)$; tehát e' két függvények egyike növekedő, másik apadó leend, s következőleg ha abból mivé e' függvények lesznek, azt mik valának ki vonjuk az így kijövő különségek,

(előbb) $(F(x+h) - Af(x+h)) - F(x) - Af(x)$ és

$(F(x+h) - Bf(x+h)) - F(x - Bf x$,

utóbb $F(x+h) - F(x) - A(f(x+h) - f(x))$ és

$F(x+h) - F(x) - B(f(x+h) - f(x))$ közül is egyik positiv, másik negativ leend; és mivel $f(x+h) - f(x)$ egy mindig ugyanazon jegyű s positiv vagy negativ, e' két különség is:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x} - A, \text{ és } \frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} - B.$$

szükségeskép ellenkező jegyűek, s következőleg $\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)}$ osztat nagyobb levén

m

mint A, kisebb mint B, $\frac{\mathcal{F}'(x)}{f'(x)}$ ofztarnak leg-
kisebb 's legnagyobb bezei közt fog állani;
Továbba ha a' mint felevők a' lefzárma-
zottak is' folyronosok, mialatt x, átmegy
minden lehető bezeken x től $x+h$ ig, ugyan
akkor $\frac{\mathcal{F}'(x)}{f'(x)}$ is minden A és B közt lehető
értékeken átmegy. vagyis $\frac{\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}$ egi-
ke ezen körbeesi értékeknek, van tehát
ennek egy beze $x+\theta_1 h$, melyigazolja ezen
egyenletet: $\frac{\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)}{f(x+h)-f(x)} = \frac{\mathcal{F}'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)}$. Q.E.D.

1° Coroll. Tevén a' fenebbi egyenletben $x=x_0$ at,
lesz: $\frac{\mathcal{F}(x_0+h)-\mathcal{F}(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{\mathcal{F}'(x_0+\theta_1 h)}{f'(x_0+\theta_1 h)}$ és ha
$\mathcal{F}(x)$ és $f(x)$ és az & x_0 bez eltűnésteri

$$\frac{\mathcal{F}(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{\mathcal{F}'(x_0+\theta_1 h)}{f'(x_0+\theta_1 h)}$$

2ik Coroll. Tegyük föl hogy e' függvényeket neme-
nyésteni el többé az $x=x_0$ bez; De lefzár-
mazottjaik, (a' másodikei x_0 és x_0+h határok

ka