November 1gke 1846 SzK

1 oldal háta

ELSŐ RÉSZ

Fő elvek, s analyticai alkalmazások

ELSŐ LECKE

Meghatározások. Változók. Folytonos és nem folytonos, fejlett és nem fejlett. Öszvetett függvények. A függvények határai (limites). Leszármazott és differential. A differentialis calculus tárgya.

§1 Változó mennyiségnek az neveztetik, melyet úgy tekintünk mint több egymástól különböző értékekkel bírót. Állandónak ellenben az, melynek egy határozott értéke van. Mikor több változók,oly kölcsönös függésben vannak egymás közt, hogy egynek vagy többeknek értéke megadatván, abból a többek is mind kitalálhatók.
Azokat melyek által a többiek kifejezvén függetleneknek mondjuk; a többieket pedig (a függetlenek által kifejezetteket) amazok függvényeinek vagy függő változóknak.

2 oldal

§2 A függvény fejlett(f. explicite), $y=F(x)$, vagy $y=f(x)$, $z=F(x,y)$, $u=f(x,y,z)$ stb. jelekkel jelöltetik, midőn a függő változók közvetlenül feloldott egyenletek által meg vannak adva; bonyolult (f. implicite), mikor a függetlenekhezi viszonya a függőknek csak feloldatlan egyenletekben van kimutatva. Pl. $f(x,y) = 0$, $\rho(x,y,z) = 0$ stb. Megjegyzendő, hogy ha több függvénynek ugyanazon jel F, f, ρ stb. által jelöltetnek. Ez azt jelenti, hogy a melletök álló mennyiségekből ugyanazon módon alakulnak . Pl. $f(x)$ úgy alakul x ből mint $f(y)$ y ból..

&3 Alapszanak 1$^{\text{ör}}$ egyszerű(f. simple) és összetettekre (f. composée) a szerint a mint a mennyiségekből egy vagy több műveletek végrehajtása által eredülnek és 2$^{\text{or}}$ rationalis vagy irationalis algebrai függvény (f. algébraique) amelyben változó sem emelet mutatói, sem gyökér mutatói sem logaritmusban bár minő szerepben, sem trigonometriai függvényben nem fordul elé, mert ha így igaz akkor a függvény transcendentalis (f. transcendentale).

§4 Egy függvény $y = f(x)$ folytonos, (f. continue), midőn a változó minden becsének a függvény egy és határ-

2 oldal háta

ozott értéke felel meg és mikor egy a független változóban tett határtalan kis különbség $h = \Delta x$, a függvény értékében is határtalan kis változást Δy hoz elé, vagy a különbség $\Delta y = F(x+\Delta x) - F(x)$ határtalan kicsi. Ha e két feltét betöltve nincs, a függvény nem folytonos (f. discontinue). Határtalan kicsinynek egy erősen kicsi F határul 0-al bíró mennyiség neveztetik, mely határtalan kisebbedhetik, anélkül hogy egy kifejezhető számhoz érne, vagy akármely adott mennyiségnél kisebb lehet. Δx és Δy positív s negatívok lehetnek minden esetben növekedés név alatt jelöltetvén.

§5 Mikor egy változó egy vagy több mennyiségtől függ, melyek maguk is más változóktól függenek, amaz első változó függvény függvényének neveztetik. Pl. z = F(y) és y = F(x) akkor z az x függvényének függvénye.

§6 Általában egy függvény határának azon érték neveztetik, melyhez ez közeledik, azon változónak melytől függ, egy határozott

3 oldal

becshezi közelítésével. Ez a határ néha bizonytalan s határozatlan alakban jelentkezhetik, s annak kiszámítására gyakran különböző mesterséges fordulatokhoz szükség folyamodni. Így pl. e függvénynek y = $(1+x)^{1/x}$-en és y = $\frac{L(1+x)}{x}$, x = 0 esetében e határozatlan alakokat adják 1^{∞}, $\frac{0}{0}$; s mégis a becsnek 0hoz közelítésével x~0 e határokat mutatják föl. e=2,71828, Le=$\frac{1}{la}$, ***a*** lévén az alapja az L által kifejezett rendszernek, *l* pedig az e alapú vagy neperi logaritmokat jelölvén. E két határ fölötte fontos lévén adjuk itt levezetésöknek és kiszámításuk módjának kimutatását.

A változó x 0hoz vagy $\frac{1}{x}$ végtelenhez közelítvén, positív egész vagy törtes vagy véges negatív eredményeket adhat. Nézzük az első esetet.

Ha $\frac{1}{x}$=m, m egész szám lévén, lesz

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)m-2)}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{m^3}+\ldots \text{ stb}$$

(binomi tan szerint) vagy megtevén az osztást és egyszerűsítést:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)+\ldots \text{ stb.}$$

3 oldal háta

Ha x erősen kicsi, az m erősen nagy, az egyenlet utosó felének m-es tagjai positívok, y tehát $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ nek határa > 2. Azonban az egyenlet e fele növekedni fog, ha elmellőzvén a negatívokat –1/m, -2/m, -3/m stb., minden alsók 3,4 stb. helyett 2-őt teszünk, mikor lenne lim $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=3$, tehát $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ nek határa 2 és 3 közt van. Ezt ***e*** nek nevezik. Az *m* et erősen nagynak vévén teljesen ki nem fejezhető ***e*** nek egy közelitett becse jő ki. pl. m=1000000 lévén, lesz e=2,71828 1000000 pontosan.

Ha $\frac{1}{x}$ egy törtes szám, két egymás után következő egészek, m és n között van, s lesz, $\frac{1}{x}$=m +μ=n - μ, x<$\frac{1}{m}$, x>$\frac{1}{n}$; e függvény $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ bizonyosan e kettő közt fog állani.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{1+\frac{\mu}{m}} \text{ és } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{1+\frac{\mu}{n}}$$

Ha x végetlenül kisebbedik az m és n végetlenül nagyobbodnak, akkor $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ mindketten ~ ***e*** (itt egy jel van a tart felé helyett), az exponensek $\left(1+\frac{\mu}{m}\right)$ és $\left(1-\frac{\mu}{n}\right)$ határtalanul ~ 1, s tehát a két képlet

4 oldal

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$ és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, valamint a köztök közbül álló $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ is ~ ***e***.

Ha végre x egy negatív tört > -1, 1+x kisebb lesz mint 1, lehet tenni $1+x=\frac{1}{1+\alpha}$, α lesz egy positív de ~ 0 szám, és lesz ekkor:

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} = \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1+\alpha}$ tehát itt is ez utósónak határa = e határa lesz $(1+x)^{\frac{1}{x}}$..

II. Nézzük a másik kifejezést $\frac{L(1+x)}{x}$

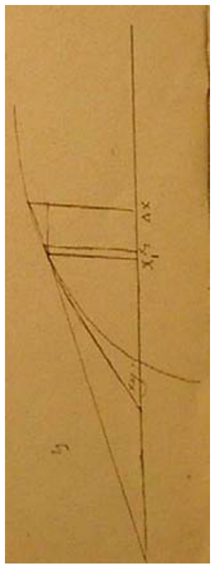
$L(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{L(1+x)}{x}$, tehát

lim $\frac{L(1+x)}{x} = \lim L(1+x)^{\frac{1}{x}} = Le$ (fenn biz SzK)

vagy egy ismeretes logarithmi igazságnál fogva

lim $\frac{L(1+x)}{x} = \frac{1}{la}$ s következőleg

lim $\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{le}$ le=1



§7 Ez osztat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, ha Δx = 0 veszszük, e határozatlan alakot adja $\frac{0}{0}$; a valóban mégis határozott értéke van, mely rendesen x nek valamely függvénye, y kifejezi azon szegelet trigonometriai tangensét, mely szöget az altár egyen és a tangens valamely függvényi görbénél (rajz 1.)).
Ez az új függvény

4 oldal háta

az értékkülönbség becskülönbséggeli osztatának határa, leszármazott (derivée) nevet visel és y' vagy F'(x) v. lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ jelekkel jelöltetik.

§8 Mivel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nek F'(x) csak határa, tehát ez amattól mindig különbözik valamiben = ε mely ε Δx kienyésztével 0-á válik, tehát
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x)+\varepsilon$, és következőleg Δy = F(x+Δx) - F(x)=F'(x)Δx + ε Δx=y'Δx+ εΔx ez utós kifejezés első tagja (y'Δx) azaz a leszármazott y'nak, és a becskülönbség Δx nek szorzata neveztetik differentialnal (differentielle), vagy értékkülönbségi határnak, s dy nal jelöltetik: tehát dy = y'Δx = f'(x)Δx vagy akár = y'dx = f'(x)dx, mert a fenebbi meghatározásokból foly, hogy a változónak differentiálja dx = növekedése Δx.
Egyébiránt a differential határozott, vagy határozatlanul kicsiny lesz a szerint a mint Δx vagy dx is határozott vagy határozatlanul kicsiny. Mikor Δx határtalan kicsiny, akkor ε is ilyen, mert ekkor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ csak határtalan kevésben

5 oldal

különbözhetik a maga limesetől dytól, tehát akkor az egyenletben $\frac{\Delta y}{\Delta x}$=y'+ε, ellehet az ε-t mellőzni, s lesz Δy=y'Δx=dy, miben az van mondva, hogy a differential mikor határtalan kicsiny, egyenlő az értékkülönbséghez és viszont.

§9 Egyszerű és öszvetett képletek leszármazottjai s differentialjainak kikeresése, a a leszármazottak és differentialok tulajdonainak különböző analyticai és geometriai kérdésekre alkalmazása – teszik tárgyát a Differentialis calculusnak.

MÁSODIK LECKE

Egyszerű képletek leszármazottjainak és differentialjainak kiszámítása

§10 Egy állandó mennyiség leszármazottja és differentialja szükségkép = 0
Továbbá:
$1^{\text{ör}}$ y=a+x re nézve: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, (mert Δy=Δx+0=Δx) tehát
lim Δy/Δx = y' = 1, dy = yΔx = dx.
2^{or} y = a – x re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$, tehát y' = - 1, dy = y'dx = - dx

5 oldal háta

3^{szor} y=ax re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta x}{\Delta x} = a$; tehát y'= a, dy = y'dx = adx

4[er] y=$\frac{a}{x}$ re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+\Delta x} - \frac{a}{x}}{\Delta x} = \frac{-a}{(x+\Delta x)x}$, $y' = \frac{a}{x^2}, dy = y'dx = -\frac{adx}{x^2}$

5[ör] y=x^{ab} ra nézve, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \frac{x^a}{\Delta x}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right)$ $\frac{x^a}{\Delta x}$ t kivíve, elnevezvén $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$

és $(1+\alpha)^a - 1 = \beta$

α és β két Δx el határtalanul kisebbedő mennyiség lesz és lesz

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{a-1}\frac{\beta}{\alpha}$, továbbá ezen egyenletből $(1+\alpha)^{a-1} = \beta$ következik, hogy $(1+\alpha)^a = \beta+1$; l(1+β) = al(1+α), azonban $\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}$ és $\frac{l(1+\beta)}{\beta}$ mindkettő közeledvén egyhez = ~1; tehetjük, hogy $\frac{l(1+\alpha)}{\alpha} = 1+\gamma$ és $\frac{l(1+\beta)}{\beta} = 1+\delta$ lévén γ és δ a 0 hoz közeledők, e két egyenlet az elébbivel öszvevetve adandja azt: $\frac{\beta}{\alpha} = a\frac{1+\delta}{1+\gamma}$ mely ~a

s következőleg

$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{a-1}\frac{\beta}{\alpha} = ax^{a-1}$, szóval

6 oldal

ha x valamely emelésének leszármazottját keressük, az emeletmutatót vegyük számszorzónak, az x et egygyel alsóbb emeletre szállítván le.

6or y = a^x re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, nevezvén $a^{\Delta x} - 1 = \alpha$, abból Δx = L(1+α); s lesz $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{\alpha}{L(1+\alpha)} = \frac{a^x}{\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}}$ és

$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{a^x}{Le} = a^x la$ és $dy = y'dx = a^x ladx$

Mikor a = e, $a^x = e^x$ akkor y’ = e^x, y’dx = e^xdx

7[er] y = Lxre nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+\Delta x) - Lx}{\Delta x} = \frac{L\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$ nevezvén $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, ebből Δx = αx, lesz $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}$: és lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{Le}{x} = \frac{1}{xla}$, $dy = y'dy = \frac{dx}{xla}$

Mikor a = e y = lx lesz $y' = \frac{1}{x}, dy = \frac{dx}{x}$

8or y = sinx re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, nevezvén x+Δx = a + b, x = a - b, melyből $a = x + \frac{\Delta x}{2}$ és $b = x - \frac{\Delta x}{2}$;

sin(x+Δx) – sinx = sin(a + b) - sin(a - b) = 2sinbcosa = $2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$, lesz

6 oldal háta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$ és $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\cos x$ a társzegelet sinusa =

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ sin(x+π/2), és dy = cosxdx = $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$dx

9szer y=cosx re nézve $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$ s egy az elébbihez hasonló és alakítás

nyomán $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ és

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

dy = -sinxdx = $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$dx

10[szer] y = arc.sinx re nézve

x = siny, cosx = $\sqrt{1-x^2}$, Δx = sin(y + Δy) - siny

a fennebbiek szerint

Δx= $2\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta y}{2}\right)$ és $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}\frac{1}{\cos\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)}$

$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

11[szer] y = arc.cosxre nézve

x = cosy, siny = $\sqrt{1-x^2}$, Δx = cos(y+Δy) – cosy = $-2\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\Delta y}{2}\right)$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}\frac{1}{\sin\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)};$$

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Jegyzet: arcsinx’ és arccosx’ függvényeit öszve

7 oldal

adva $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0$ a mi természetes is, mert arcsinx + arccosx mindig egy állandó mennyiség = 90˚, minek a differentialja mint tudjuk = 0

HARMADIK LECKE

Függvények függvényeinek, öszvetett és fejletlen függvények leszármazottjai és differentialjai

§11 Tegyük fel, hogy z függvénye x függvényének, ez egyenletek által kifejezett: z = F(y), y = f(x). xet Δx el növelvén, y és z is Δy és Δz vel fognak növekedni, s lesz:
$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Az első factor $\frac{F(y+\Delta y)}{\Delta y}$ nek határa = z nek leszármazottja y ra nézve, mintha y független lenne; jelöljük a leszármazottat z’$_y$; z’$_x$ el jelölentsük z nek x re nézve nyerendő leszármazottját az az lim $\frac{\Delta z}{\Delta x}$; a második factor $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ (hiba) határa y’$_x$ = y nak x re nézve y’ je, végeredményünk tehát z’$_x$ = z’$_y$.y’$_x$.
Így tehát egy függvény függvényének leszárma

7 oldal háta

zottja = két leszármazottak szorzata; egyik z’$_y$ úgy nézve y-t mint függetlent, a másik y’$_x$.
Jelölvén $d_x z$, $d_y z$, $d_x y$ nel z nek x re és y ra, y nak x re nézve differentialjait, lesz (&8 nak értelmében)
$d_x z$ = z’$_x$dx; $d_y z$ = z’$_y$dy; $d_x y$ = y’$_x$dx vagy y’dx s következőleg:
$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_y z}{dy}\frac{d_x y}{dx}; \frac{d_x z}{dx}dx = \frac{d_y z}{\delta x}\frac{d_x y}{\delta x}dx$
Megegyeznek hogy az x és y aljegyeket elhagyván írják csak így
$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ és $\frac{dz}{dx}dx = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$
Az alsókat soha a felsőktől el nem választván hogy, azok jelöljék miszerint a diff. Most x re majd ujra nézve,. Így $\frac{dz}{dy}$ tulajdonképpen nem törtszám, hanem csak egy jelölés, egy jegy, mely z nek y ra nézve differentiálját jelenti. S gyakran írják $dz = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$ ama helyett, mert a második tag eléggé kimutatja (a dx által) hogy az első (dz) x re nézve differ.

8 oldal

Ha u = F(z); z = f(y); y = f(x) lesz
$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A második fél három factorának határai e leszármazottak u’$_z$,z’$_y$, y’$_x$; u nak z re, z nek y ra, y nak x re nézve leszárm. Lesz tehát u’$_x$ = u’$_z$.z’$_y$.y’$_x$, s egy függvény függvényének

leszármazottja mindig = szorzata mindenik változandó arra nézve leszármazottjainak mely után következik vagy a melyről közvetlenül vagy tekintve azt mint függetlent; s a fennebbi jelölésekkel

$$\frac{d_x u}{dx}=\frac{d_z u}{dz}\frac{d_y z}{dy}\frac{d_x y}{dx}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$ és

$$du=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$$

Alkalmazások

1. Ha z = y; z’ = y’; dz = dy
2. z = a ± y, y lévén x nek függvénye, lesz

$$\frac{dz}{dx}=\pm\frac{dy}{dx}$$, dz = ±dy

Ha egy függvényhez állandót teszünk az annak leszármazottján vagy differentiál-

8 oldal háta

ján semmit sem változtat; s tehát két egymástól csak állandóban különböző függvénynek ugyan az diff. és leszármazottjuk

3. z = a.y; $\frac{dz}{dx}=a\frac{dy}{dx};dz=a\frac{dy}{dx}dx=ady$

differentiálni kell az állandót elébb tekintetbe se véve, melyet aztán egyszerűen számszorosává teszünk.

4. z = a/y; $\frac{dz}{dx}=-\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{y^2}y';dz=-\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx}dx=-\frac{ady}{y^2}$
5. z = y^a; $\frac{dz}{dx}=ay^{a-1}\frac{dy}{dx}=ay^{a-1}y';dz=ay^{a-1}\frac{dy}{dx}=ay^{a-1}dy$
6. $z=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}};dz=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$

Egy másodrangu gyökér differentialja a mindig a mennyiség differentialja osztva a gyökér kettőssével

7. z = a^y; $\frac{dz}{dx}=a^y la\frac{dy}{dx};dz=a^y lady$
8. z = Ly; $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{yla}\frac{dy}{dx};dz=\frac{1}{yla}\frac{dy}{dx}dx=\frac{dy}{yla}$
9. z = siny; $\frac{dz}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx};dz=\cos y\frac{dy}{dx}dx=\cos ydx$
10. z = cosy; $\frac{dz}{dx}=-\sin y\frac{dy}{dx};dz=.\sin ydx$ dz/dx = - siny.dy/dx; dz = - siny.dy
11. z = arcsiny; $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx};dz=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}dx=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

9 oldal

12. z=arcccosy; $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx};dz=-\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$; HIBA

Általános szabály: Úgy kell differentiálni mtha y független változandó volna, azután $\frac{dy}{dx}$ vagy dy helyett becsöket kell venni, melyet y=f(x) ből kapunk ki.

§12 Nem bajosabb az öszvetett függvények differentialjait és leszármazottjait kiszámítni

1. u = z ± y lesz:

$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta x}\pm\frac{\Delta y}{\Delta x};u'=\frac{du}{dx}=y'\pm z'=\frac{dy}{dxdx}\pm dz$; du = dy ± dz

Két mennyiség öszvetének s különbségének leszármazottja vagy differentiálja = a két mennyiség diff. leszármazottjainak öszvete s illetőleg különbsége

2. u = z.y

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{(z+\Delta z)(y+\Delta y)-zy}{\Delta x}=z\frac{\Delta y}{\Delta x}+y\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta z$$

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'=\frac{du}{dx}=z\frac{dy}{dx}+y\frac{dz}{dx}=zy'+yz';$$

Általánosabban ha w = v.u.z.y….lesz

w’ = $\frac{dw}{dx}$ =uzy…dv’ + vzy…du’ +..vuy…dz’+….

dw = uzy…dv + vzy….du + vuy…dz + vuz….dy +….

9 oldal háta

Szóban kifejezve: egy szorzatnak differentiálja = az egyes factorok differentialok szorozva rendre a többiek egyszerű szorzatával, s mind ezek öszveadva.

Más uton is ez eredményre juthatni.

w = uvzy….; $w^2 = u^2.v^2.z^2.y^2$….. és

$lw^2 = lv^2 + lu^2 + lz^2 + ly^2$ +…. Az egyenlet két felét differentiálván lesz

$\frac{dw}{w}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}+....$ oldaljegyzet: A w^2 nek diff.ja = $\frac{dw^2}{w^2}$ §10 7 pont szerint

dw=uzy…dv + vzy….du + vuy…dz +….

Jegyzet: Második emeletet irtunk a végett, hogy az imaginárius logaritmokat kerüljük el azon esetben mikor u, v, y … hatók negatívok lennének

Pl. z = xlx; z = $x^a.e^{-x}$

3 $u=\frac{z}{y};\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left(\frac{z+\Delta z}{y+\Delta y}-\frac{z}{y}\right)\frac{1}{\Delta x}=\frac{y\frac{\Delta z}{\Delta x}-z\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y(y+\Delta y)}$

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'=\frac{du}{\delta x}=\frac{yz'-zy'}{y^2},du=\frac{y\delta z-zdy}{y^2}$$

Egy törtnek differentialja = az alsó szorozva a felső differentiáljával, ebből kivonva: a felső szorozva az alsó differentiájával, s az egész osztva az alsó másod emeletével.

10 oldal

Más uton is ez eredményre juthatni.

$u=\frac{y}{z}$ ből $lu^2 = ly^2 - lz^2$; $\frac{du}{u}=\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}$ és $du=\frac{zdy-ydz}{z^2}$

4. $u=y^z; lu=zly; \frac{du}{u}=z\frac{dy}{y}+dzly$ és $du=y^{z-1}(zdy+ylydz)$

§13 E különböző pontok figyelmes megtekintéséből a következő általános szabályt lehet elvonni: mikor öszvetett függvény differentiálja kerestetik, differentiálni kell részre mindenik tagot, mintha a többi állandó volna, s az így kikapott differentiálokat öszveadni. E szabály értelmében $v = uyz$, $u = y^z$, $u = x^x$ egyenletekből $dv = yzdu + uzdy + uydz$, $du = y^{z-1}(zdy + ylydz)$, $du = x^x(1+lx)dx$

Alkalmazások

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}; dy=\frac{\cos x}{\cos x}dx+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx; dy=\frac{dx}{\cos^2 x}=(1+\tan^2 x)dx;$$

$$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}; dy=-\frac{\sin x}{\sin x}dx-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx; dy=-\frac{dx}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)dx$$

10 oldal háta

$y = \text{arctang}x$; $x = \text{tang}y = \frac{\sin y}{\cos y}$; $dx=\frac{dy}{\cos^2 y}$ ebből $dy=dx\cos^2 y=\frac{dx}{1+x^2}$

$y = \text{arccot}x$; $dy = - dx.\sin^2 y = -\frac{dx}{1+x^2}$

Ha még általánosabban $u = F(y,z)$, y és z is x nek bizonyos függvényei levén, a fennebb kimondott szabály szerint Δu két részből állani.

Ez az egyenlet (mely a differentiálok keresésében felette fontos) következő uton kihozható: Növeljük x et Δx el y,z,u is Δy, Δz, Δu val növekedni fognak. S lesz

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y,z+\Delta z)-F(y,z)}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y,z)-F(y,z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{F(y+\Delta y,z+\Delta z)-F(y+\Delta y.z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Határt keresve, az egyenlet első fele lesz $\frac{du}{dx}$; a második fél első tagja $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$ az az szorzata $\frac{dy}{dx}$ nek $F(y,z)=u$ differentiáljával y ra nézve,

11 oldal

mintha csak y volna változandó és z állandó. Hogy a második tag határát jobban kikaphassuk vegyük, hogy $\Delta y=0$; lesz $\frac{F(y,z+\Delta z)-F(y,z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}$; s ha azon kívül teszszük hogy $\Delta z = 0$,

világos hogy ezen tagnak is határa nem egyéb mint szorzata $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nek az u = F(y,z) leszármazottjával z re nézve mintha most z lenne a változandó, y pedig állandó. Tehát
$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$ és $du = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$
Ha lenne w = F(y,z,u,v,…) hasonló módon kikaphatnók hogy
$dw = \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz + \frac{dw}{dv}dv + ...$ dw = dw/dy.dy + dw/dz.dz + dw/du.du + dw/dv.dv +…
Így az öszvetett függvények differentiálására fennebb adott szabálynak pontosan be van bizonyítva, hogy tudni illik csak az egy tagokat rendre (a többieket állandónak tekintvén) kell differentiálni és az így kitalált differentiálokat öszveadni. Ezek $\frac{dw}{dz}dz$, $\frac{dw}{du}du$ stb F(u,z,y,v,…) részleti differentiáljainak neveztetnek. (diff. partielles)

11 oldal háta

Pl. Ha u = F(sinx,cosx) levén sinx = y, cosx = z, $du = \frac{du}{dy}\cos x dx - \frac{du}{dz}\sin x dx$, és ha u = $\cos^2 x + \sin^2 x$;
du = -2cosxsinxdx + 2sinxcosxdx = 0

§14 Hátra van még a bonyolult függvények differentiáljainak meghatározása
Láttuk már hogyha x nek két függvényei y és z egyenlők, az az mindig ugyanegy értékűek, akár mi legyen az x, az egyenletből y = z következnek ezek: y + Δy = z + Δz; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$; y’ = z’, dy = dz, ezen függvények differentiáljai és leszármazottjai is egyenlők. Ha továbbá x nek függvénye 0 hoz egyenlő akár mi legyen x, differentiálja és leszármazottja is 0 lesz, ez egyenletből y = F(x) = 0, következik hogy
y + Δy = F(x+Δx) - F(x) = 0; Δy = 0; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0; \frac{dy}{dx} = y' = 0$; dy = 0
Ez így levén vizsgáljunk meg egy bonyolult függvényt, melynek egyenlete ez u = F(x,y) = 0. Ha az egyenletben y helyett annak becsét y = F(x) tennők (melyet az egyenlet feloldásával belőle nyernénk) – a helyettesítés által származó egyenlet F(x;f(x)) = 0 hasonlólag

12 oldal

0 hoz egyenlő levén x akármi legyen, igazolva lenne az egyenlet. S tehát a differentiál és a leszármazott is 0 lennének. Ha már y t ugy tekintve mint x nek függvényét – differentiálni akarjuk F(x,y) - at ezen differentiálnak is 0 hoz kellene egyenlíttetni, azonban F(x,y) = 0, csak egy különös esete ezen egyenletnek u = F(y,z); az t.i. midőn u = 0, y = f(x) és z = x. Ennek differentiálja tehát

$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ és lesz $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$, ebből $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$ és dy = $-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}dx$

Könyü tehát minden esetben F(x,y) = 0 nak feloldása nélkül a leszármazottat $\frac{dy}{dx}$, s a diff t dy t kikapni. Csak az egyenlet első felének rendre mintha y és x független változandók volnának leszárm. kell venni; e leszármazottaknak osztata ellenkező jeggyel lesz a leszármazott dy/dx; s ezt dx el szorozva a differentiál dy.

Példák:

12 oldal háta

1,) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; $\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3ay; \frac{du}{dy} = 3y^2 - 3ax$ tehát

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

2, $y^x - x^y = 0$ $\frac{du}{dx} = y^x ly - yx^{y-1}; \frac{du}{dy} = xy^{x-1} - x^y lx$ tehát

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^x ly - yx^{y-1}}{xy^{x-1} - x^y lx} = \frac{x^2 - x^y ly}{y^2 - x^y lx}$$

Jegyzet. A fenebbi egyenletekben $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ helyett gyakran $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ t írnak.

NEGYEDIK LECKE

Alsóbb rendű leszármazottak és differentiálok;
Változás a független változandóban. Képzetes (imaginaire) függvények differentiáljai

§15 F(x) nek x akár mely függvényének leszármazottja F'(x) x nek ismét egy függvénye levén ennek is meglesz a maga leszármazottja és differentiálja. S látni való hogy egy adott függvényből mint F(x), egész sorát lehet lehozni ujabb függvényeknek, melyek mindenike leszármazottja

13 oldal

ja lesz az előbbinek. Ezek az új függvények neveztetnek y = F(x) különböző rendű leszármazottjainak s így jelöltetnek.
$y', y'', y''', \ldots, {}^{yn-1}, y^n$ v. $F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots, F^n(x)$.
Így y' = F'(x) lesz első rendű leszármazottja y = F(x) nek, y'' = F''(x) ugyanannak másodrendű, s y'' egyszersmind y' nek elsőrendű leszárm. Végre $y^n = F^n(x)$ lesz y nak n ed rendű, y^{n-1} nek pedig elsőrendű leszárm. (n akár mely egész számot jelölvén)

§16 Mivel a differential dy = y'dx, a változandó x nek egy elsőtől különböző uj függvénye, ezt is többször egymásután differentiálhatjuk, miáltal ennek több különböző rendű differentiáljait fogjuk kapni. Ugy látszik, hogy ezeket így kellene jelölni: dy, d.dy, d.d.dy…stb, de a rövidség okáért megegyeztek, hogy azt így jelöljék: dy, d^2y, d^3y, d^ny.
A különböző rendű leszármazottak és differentiálok közt nevezetes öszvefüggések léteznek, melyeket azonban némileg ugy tekinthetni, mint bizonyos egyezmények eredményeit.

13 oldal háta

L^2y nak kiszámítása végett differentiálni kell dy = y'dx ez, de e kitételben a dx et (mely az első differentiálásnál tett kényleges növekedése Δx e volt x nek) ugy nézzük mint függetlent a változandó = x től; s valóban az is, mert vele nem változik. Tehát y'dx = F'(x)dx egy szorzat, melyben az egyik factor dx állandó; annak leszármazottját ugy kapjuk ki, ha x et ujra növeljük egy uj Δx el és annak ami kijő hatását veszszsük: u.m. $dx\frac{F'(x+\Delta x)-F'(x)}{\Delta x}$ nek; ez a határ természetesen y"dx; ez leszármazottja dy nak, s ha megegyezünk, hogy a második növekedést Δx et egyenlőnel vegyük az elsőhez dx-hez, dy nak diff-ja lesz $y''dx^2$; s lesz $d^2x = y''dx^2$; Így tovább menve hasonló uton ki jő, hogy $d^3y = d.y''dx^2 = dx^2dy'' = y'''dx^3$;
$d^4y = y''''dx^4$; $d^ny = y^{(n)}dx^n$;
Tehát egy ned rangu differentiál = az ned rangu leszármazott szorozva dx nek, a változandó kénylegesen felvett növekedésének n edik emeletével; és viszont az n edik leszárma-

14 oldal

mazott = azon szám, melyet dx = Δx nek n edik emeletét szorozni kell, hogy kijőjön az n ed rangu differ. Ezért neveztetik néha $y^{(n)}$ az n ed rangu differentiál coefficiensének.
Az általános elveket alkalmazzuk elébb egyszerű függvényekre.
1. $y = a + x$, $y' = 1$, $y'' = 1$; $y''' = 0$, …, $y^{(n)} = 0$.
$Dy = dx$; $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, …, $d^{(n)}y = 0$
2. $y = a - x$; $y' = -1$; $y'' = 0$, …, $y^{(n)} = 0$
$dy = -dx$; $d^2y = 0$, … , $d^{(n)}y = 0$
3. $y = ax$; $y' = a$, $y'' = 0$, …, $y^{(n)} = 0$
$dy = adx$; $d^2y = 0$, … , $d^{(n)}y = 0$
4. $y = a/x$; $y' = ax^{-1}$; $y'' = -1ax^{-2}$; $y''' = +2ax^{-3}$, … , $y = (-1)^n.1.2.3…n.ax^{-(n+1)}$.
$d^nx = (-1)^n.1.2.3…n.ax^{-(n+1)}dx^n$. ITT HIBA VAN
Az első számszorzó $(-1)^n$ azt jelenti, hogy a képlet – jegyű, mikor n páratlan, + jegyű mikor n páros.
5. $y = x^a$; $y' = ax^{a-1}$; $y'' = a.a-1.x^{a-2}$, …, $y^{(n)} = a.a-1.a-2….a-(n+1)x^{a-n}$
$d^ny = a.a-1.a-2…..a - (n+1)x^{a-n}.dx^n$

14 oldal háta

Ezen n ed rendű leszármazott sohase lesz = 0, mikor a nem egész szám (mert ekkor a 0 átugródik), de semmivé válik, ha a egész szám, akkor mikor n = a + 1, és így x^a nak a + 1 ed rangu diffja és leszármazottja nullák, ez a d rangu leszármazott pedig ezen állandó:
a.a-1.a-2….1; v, 1.2.3…a
6^{or} $y = a^x$; $y' = a^x la$; $y'' = a^x la^2$; …, $y^{(n)} = a^x la^n$; $d^{(n)}y = a^x la^n dx^n$
Minden nemű leszármazottjai e^x nek ismét ugyanennyit tesznek. e^{-x} nek leszármazottjai pedig $y' = -e^{-x}$; $y'' = +e^x$; …, $y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ és $d^n e^{-x} = (-1)^n e^{-x}dx^n$
7^{er}.) y = Lx; $y' = \frac{1}{xla} = \frac{1}{la}x^{-1}; y'' = -\frac{1}{la}x^{-2}, …, y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{la}1.2.3...(n-1)x^{-n}$
$d^n y = \frac{(-1)^{n-1}}{la}1.2.3...(n-1)x^{-n}dx^n = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3...n.Le}{x^n}dx^n$ stb

15 oldal

8^{or} y = sinx; $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), ..., y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), d^{(n)}y = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n$

$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$nek csak <u>négy </u>különböző értéke lehet; n valóban nem lehet más mint egy ezek közöl: 4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3.

Az első esetben $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ = sin(x + 2m π) = sinx

A másodikban $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

A harmadikban $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$=sin (x+2mπ + π) = - sinx

A negyedikben $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2m\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

Jobboldali jegyzet: Mert π = 180°, tehát 2π és 2mπ mindig ugyanoda, azon sinushoz ér viszsza, a körnek kerületében SzK

Tehát sin x leszármazottjainak négy különböző értékök van, melyek viszsza kerülőleg egy mást váltogatva következnek.

9^r y = cos x, $y' = \cos\left(x + \frac{y}{2}\right); y'' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), ..., y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); d^n y = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n$

Tehát a leszármazottaknak négy egymást felváltó alakjok van cos x, -sin x, - cosx, sin x, melyek hasonlólag egymásután következnek.

10.) y = arcsin x, $y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; y'' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}; y''' = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}, stb$ hiba!!!

11.) y = arccos x; $y' = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; y'' = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}; y''' = -(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}, stb$ hiba!!!

15 oldal háta

§17 Mikor z egy a következő egyenletek által z = F(y), y = F(x) meghatározott függvény függvénye, akkor kikaptuk hogy

$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$; azt másodszor is differentialván, - s megjegyezvén hogy $\frac{dz}{dy}$ y nak, $\frac{dy}{dx}$ pedig x nek függvénye – lesz:

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}$, és

$d^2z = \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{dz}{dy}dy^2$

Egy harmadik differentiálás adja:

$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3z}{dy^3}\frac{dy^3}{dx^3} + 3\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}$;

$d^3z = \frac{d^3z}{dy^3}dy^3 + 3\frac{d^2z}{dy^2}dyd^2y + \frac{dz}{dy}d^3y$

Példa. z = ly, y = sinx. Lesz

dy = cos x dx; d^2y = - sin xdx^2; d^3y = -cos xdx^3

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y}=\frac{1}{\sin x},\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{1}{y^2}=-\frac{1}{\sin^2 x};\frac{d^3z}{dy^3}=\frac{2}{y^3}=\frac{2}{\sin^3 x}$$

$$dz=d.l\sin x.=\frac{\cos x}{\sin x}dx;d^2z=d^2l\sin x=-\frac{dx^2}{\sin^2 x},$$

$$d^3z=d^3l\sin x=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^3.$$

E példák eléggé kimutatják az egyenletekben követendő utat.

16 oldal

§18 Tegyük végre hogy u öszvetett függvény és u = F(y,z), y = φ(x), z = χ(x) tudjuk hogy

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx},$$

Differentiáljuk másodízben, megemlékezvén hogy $\frac{du}{dy},\frac{du}{dz}$ ynak és z nek közvetlen függv. De x nek függvény függvényei, - míg $\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}$ csak x nek függvényei; tovább jelölvén $\frac{d^2u}{dzdy},\frac{d^2u}{dydz}$ által $\frac{du}{dy}$ nak és $\frac{du}{dz}$ nek leszármazottjait, az elsőt z re a másodikat y ra nézve, vagy azt a mi kijő ha ezt előbb y ra aztán z re, vagy a második esetben elébb z re aztán y ra nézve differentiáljuk; megmutatandjuk később hogy e két mennyiség egyenlő. $\frac{d^2u}{dzdy}=\frac{d^2u}{dydz}$

Ezt feltéve, ugy találjuk hogy:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2}$$

$$d^2u=\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{du}{dy}dy^2+2\frac{d^2u}{dzdy}dydz+\frac{du}{dz}d^2z+\frac{d^2u}{dz^2}dz^2$$

Harmadszori differentiálás végett jelőlnők $\frac{d^3u}{dzdy^2},\frac{d^3u}{dydz^2}$ vel leszármazottjaikat e mennyiségeknek $\frac{d^2u}{dy^2},\frac{d^2u}{dzdy},\frac{d^2u}{dz^2}$, az elsőnek dz re a másodiknak dz re és dy ra, a harmadiknak dy ra nézve, megmutatandjuk alább hogy

16 oldal háta

Mind ezen leszármazottak csak két határozott értékkel bírnak s

$$\frac{d^3u}{dzdy^2}=\frac{d^3u}{dy^2dz}=\frac{d^3u}{dydzdy}\text{és}\frac{d^3u}{dydz^2}=\frac{d^3u}{dz^2dy}=\frac{d^3u}{dzdydz};$$ a honnan könnyű lesz kiszámítni $\frac{d^3u}{dx^3}$ nak vagy d^3u nak értékét; Például

u = yz, y = sin x, z = cosx

dy = cos x dx; d^2x = - sinx dx^2

dz = - sin x; d^2z = - cos x dx^2

$\frac{du}{dy} = z; \frac{du}{dz} = y; \frac{d^2u}{dy^2} = 0; \frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d^2u}{dydz} = 1$

du = zcos x dx – ysin x dx = $\cos^2$ x dx – $\sin^2$ x dx
d^2u = -cos x.sinx dx^2 – 2cos x sin x dx^2 – cosx sinx dx^2
az az d^2u = -4cos x sin xdx^2

A fennebbiek nyomán könynyű kiszámítni hogy n edrendü leszármazottjai e függvényeknek:
u = y + z; u = y – z; u = az + bz + …
u = $ax^n + bx^{n-1}$ + … px^2 + qx + r ; ezek:
d^n (y + z) = d^ny + d^nz; d^n (y – z) = d^ny – d^nz;
d^n (az + bz + …) = ad^ny + bd^nz + …;
d^n (ax^n+ bx^{n-1} + …) = 1.2.3….n.adx^n
d^{n+1} (ax^n + bx^{n-1} + ….) = 0, (mert a számszorzók közé a 0 is beléjön)

Egy öszvet vagy különbségnek n edrangu diffja = az egyes tagok n edrangu diff.jainak öszvete vagy különbsége.

17 oldal

Jegyzet. Vegyük ujra ez egyenleteket:
y = f(x), y’ = f’(x) = dy/dx
Mikor x független változandó, akkor közvetlenül ki lehet kapni a különböző leszármazottakat és differentiálokat, ugy tekintvén dx et, mint állandót; de ha x nem független, hanem egy másnak a függvénye, dx is ennek egy függvénye lesz, s rendre több leszen, differentiálván ez egyenleteket
y = f(x); y’ = f’(x) = dy/dx és a fennebbi szabályokat tartván szem előtt, lesz:
dy = f’(x)dx; d^2y = f’’(x)dx^2 + f’(x)d^2x
d^3y = f’’’(x)dx^3 + 3f’’(x)dxd^2x + f’(x)d^3x
…..

$$y' = \frac{dy}{dx}; y'' = d.\frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

$$y''' = d\frac{\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}}{dx} = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}$$

Így először átmenvén azon esettől midőn x független, arra mikor nem az, y’, y’’, y’’’ becseire $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ ért csak azon uj értékeket

17 oldal háta

kell helyettesítni melyeket az az előbbi egyenletek adtak. 2^{or}. Viszsza menvén azon esetre mintha x független, csak állandónak kell venni dx et, s következőleg d^2x = 0, d^3x = 0, …
valóban így ismét kijő hogy $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

3[or] Ezen helyettesítésben s a változandó ezen változtatásaival csak az elsőrendű leszármazott dy/dx marad meg; ugy hogy azon képletek melyekben csak elsőrendű leszármazott fordul elé ezen alakot minden esetben tartják.

§20 Egy u = F(x,y) = 0 egyenlet által megadott bonyolult függvény különböző rendű leszármazottjai s differentiáljai kikeresésére ezen (fennebb létrehozott) egyenletből lehet kiindulni $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} v.dy = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dx}} dx$ mely több versen??? differentiáltatván, közvetlenül megadná a keresetteket; de igen gyakran könnyebb azon egyenletből hozni ki a differentiálokat, melyek a következő egyenlet differentiáljából jőnek ki: $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$

18 oldal

Az egyenletben valamint azokban amelyeket ebből kihozhatni, a részbeni leszármazottak $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$ általánosan x nek és y nak függvényei lesznek. Ellenben a bonyolult függvény y, s annak differentiáljai dy, d^2y, d^3y, …úgy tekintendők, mint x ben kifejezett értékűek. E szerint azon egyenletek első felei mindig = 0, s tehát differentiáljaikat is 0 hoz kell egyenlítni. Így fog kijőni:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}.\frac{dy}{\delta x} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}.\frac{dy^2}{\delta x^2} + \frac{\delta u}{\delta y}.\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0 stb$$

Szükség néha diff. és leszármazottját venni képzetes függvényeknek is, melyek mindig ily u + v$\sqrt{-1}$ alakra viszszavittek lehet fölvennünk (u és v reál mennyiségeket jelölvén). Ezt föltéve, ha egy képz. változandó határának azt nevezzük ami kijön ha u és v helyett az ők határaikat helyettesítjük, s ha még a reál mennyiségek diff. és leszármazottjairól adott fogalmakat a képzetes mennyiségekre is kiterjesztjük. Látni való, hogy ezen egyenletből: w = u + v$\sqrt{-1}$, ezek is következnek:

18 oldal háta

Δw = Δu +Δv$\sqrt{-1}$; $\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1}$; $w' = \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v'\sqrt{-1}$, és dw = du + dv$\sqrt{-1}$.
Szóval: Képzetes mennyiséget akarva differentiálni, azzal ugy kell bánni mintha realis lenne, a $\sqrt{-1}$-et ugy tekintvén mint állandó szorzót. E szabály természetesen a további rendű diff.ra is kiterjed.
Pl. w = cosx + sin$\sqrt{-1}$
dw = (-sinx + cosx$\sqrt{-1}$)dx =w$\sqrt{-1}$dx

ÖTÖDIK LECKE

Egy változandójú reál függvények, s azoknak különböző rendű differentiáljai és leszármazottjai közt létező viszonyok

§21 Legyenek Δx és Δy egyszeri nagyobbodásai x nek és y = f(x) nek, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ osztat határa levén neki y' a leszármazott, akkor mikor elég kicsiny ugyan oly jegyű lesz mint a hatás y', azaz pozitív ha a leszármazott az, s negatív ha $+\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δy és Δx ugyanazon jegyűek levén, y növekedni fog x növekedésével, apadni apadásával; a második eset

19 oldal

esetben (ha: $-\frac{dy}{dx}$) e különbségek ellenkező jegyűek levén y nevekedni fog x nek apadásával; apadni x nek nevekedésével.
$1^{ő}$ Corollarium. Tegyük fel hogy y = f(x) függvény folytonos két adott határ x_o és x között, s hogy a változandó x, végtelenül lassanként növeltessék egyik vagy egy határról a másikig, f(x) nem mehet át növekedésből apadásba, vagy apadásból növekedésbe a nélkül, hogy leszármazottja f'(x) positívból negatívba, vagy negatívból positívba ne menne át. Meg kell jegyezni hogy az átmenetelben a leszármazott egyszer 0 vá lesz, ha folytonos, vagy végtelenné, ha megszűnvén mindig való becscsel bírni nem folytonos – (discontinue)
2^{ik} Coroll. Tegyük fel hogy y = f(x) függvény elenyészik a x_o becs beletételével; és folytonos ezen becsnek szomszédságában. Lesz
$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+\varepsilon_0$ vagy $f(x_0+\Delta x) = \Delta x f'(x_0)+e_0$, feltéve hogy $x_o + \Delta x = x$ erősen kicsit különbözik x_o tól, akkor

19 oldal háta

$F(x_o + x) - F(x)$ positív lesz ha $f'(x_o) > 0$
„ „ „ negatív lesz, ha $f'(x_o) < 0$

§22 Legyenek F(x) és f(x) x nek két real függvényei, melyek, valamint leszármazottjaik is, folytonosok x és x + h határok között; tegyük fel továbbá, hogy a második függvény leszármazottja f'(x) a fennforgó határok között mindig egy jegyű (vagy mind +, vagy mind -) marad, az az, f(x) vagy mind nevekedik vagy mind apad, ekkor a két különbségnek F(x + h) – F(x), és f(x+ h) – f(x) nek osztata egyenlő lesz valamelyikéhez azon becseknek, melyekkel bír a fenforgó határok x és x + h közt, a leszármazottaknak F'(x) és f'(x) nek osztata, vagy θ_1 el valamely 1nél kisebb számot jelölvén, lesz

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)} = \frac{F'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)}$$

Bébizonyítás. Legyen A a legkisebb és B a legnagyobb azon becsek közt melyekkel $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ a fenforgó határok közt bír, a két különség $\frac{F'(x)}{f'(x)} - A; és \frac{F'(x)}{f'(x)} - B$ ellenkező jegyűek

20 oldal

Hasonlólag e más kettő is:
F'(x) - Af'(x) és F'(x) - Bf'(x); mert f'(x) állandóan egy jegyű. Azonban ez utosó két különbség leszármazottjai e két függvénynek F(x) – Af(x) és F(x) – Bf(x); tehát e két függvények egyike növekedő, másik apadó leend, s következőleg ha abból mivé e függvények lesznek, azt mik valának kivonjuk, az így kijövő különbségek,
(előbb) (F(x + h) – Af(x+ h)) – F(x) – Af(x) és
(F(x + h) – Bf(x + h)) – F(x) – Bf(x),
(utóbb) F(x + h) – F(x) – A(f(x + h) – f(x)) és
F(x + h) – F(x) – B(f(x + h) – f(x)) közül is egyik positív, másik negatív leend, és mivel f(x+ h) – f(x) egy mindig ugyanazon jegyű s positív vagy negatív, e két különbség is:
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}-, és \frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}-B$$
Szükségeskép ellenkező jegyűek, s következőleg $\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}$ osztat nagyobb levén

20 oldal háta

mint A, kisebb mint B, $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ osztatnak legkisebb és legnagyobb becsei közt fog állani;
Továbbá ha a mint feltevők a leszármazottak is folytonosok, mialatt x átmegy minden lehető becsen x től x + h ig, ugyan akkor $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ is minden A és B közt lehető értékeken átmegy, ugy $\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}$ egyike ezen közbeeső értékeknek, van tehát x nek egy becse $x + \theta_1 h$, mely igazolja ez egyenletet $\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}=\frac{F'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)}$ Q.E.D.

1ő Coroll. Tevén a fenebbi egyenletben $x = x_o$ az lesz $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta_1 h)}{f'(x_0+\theta_1 h)}$ és ha F(x)ét és f(x) ét az x_o becs elenyészteti $\frac{F(x+h)}{f(x+h)}=\frac{F'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)}$

2ik Coroll. Tegyük föl hogy e függvényeket nem enyészteti el többé az $x = x_o$ böcs; De leszármazottjaik (a másodikéi x_o és $x_o + h$ határok