Ms 5102/1-2. Eötvös Loránd jegyzetei. Mágnesség

Mágneses állandók meghatározására vonatkozó számítások

1915 Juliusból.

II eset. A $D(\lambda)=0$ egyenletnek λ_1 egyszeri, λ_2 kétszeres gyöke.
Ez esetben az R rendszernek végtelen sok megoldása van.

Megoldandó az

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & (a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1)x_2+(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1)y_2+(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1)z_2=0 \\
(2) & (a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2)x_3+(a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2)y_3+(a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2)z_3=0 \\
(3) & (a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13}z_3)x_1+(a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23}z_3)y_1+(a_{31}x_3+a_{32}y_3+a_{33}z_3)z_1=0 \\
(4) & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \\
(5) & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=0 \\
(6) & x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1=0 \\
(7) & x_2^2+y_2^2+z_2^2=0 \\
(8) & x_3^2+y_3^2+z_3^2=0 \\
(9) & x_1^2+y_1^2+z_1^2=0
\end{array}\right\} (R) \qquad \begin{array}{l} a_{ik}=a_{ki} \\ i=1,2,3 \\ k=1,2,3 \end{array}$$

egyenletrendszer, hol az a együtthatók megadott valós számokat jelentenek, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 pedig az ismeretleneket jelentik.

Rövidebb írásmód kedvéért hozzuk be a következő jelöléseket: legyen

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=\mathcal{L}(x,y,z),$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=\mathcal{M}(x,y,z),$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=\mathcal{N}(x,y,z),$$

továbbá

$$\mathcal{L}(x_i,y_i,z_i)=\mathcal{L}_i\,,\quad \mathcal{M}(x_i,y_i,z_i)=\mathcal{M}_i\,,\quad \mathcal{N}(x_i,y_i,z_i)=\mathcal{N}_i\,;\quad (i=1,2,3)$$

akkor az (1), (2), (3) egyenletek a következő alakban írhatók:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \mathcal{L}_1x_2+\mathcal{M}_1y_2+\mathcal{N}_1z_2=0 \\
(2) & \mathcal{L}_2x_3+\mathcal{M}_2y_3+\mathcal{N}_2z_3=0 \\
(3) & \mathcal{L}_3x_1+\mathcal{M}_3y_1+\mathcal{N}_3z_1=0
\end{array}\right\}, \text{ vagy pedig}^{*)} \text{ ig. } \left\{\begin{array}{ll}
(1^{bis}) & \mathcal{L}_2x_1+\mathcal{M}_2y_1+\mathcal{N}_2z_1=0 \\
(2^{bis}) & \mathcal{L}_3x_2+\mathcal{M}_3y_2+\mathcal{N}_3z_2=0 \\
(3^{bis}) & \mathcal{L}_1x_3+\mathcal{M}_1y_3+\mathcal{N}_1z_3=0
\end{array}\right\}$$

*Állítás: Ha az (R) rendszernek van egy $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ megoldási rendszere, akkor fennállanak a következő egyenletek:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{L}_1=\lambda_1x_1 & \mathcal{L}_2=\lambda_2x_2 & \mathcal{L}_3=\lambda_3x_3 \\
\mathcal{M}_1=\lambda_1y_1 & \mathcal{M}_2=\lambda_2y_2 & \mathcal{M}_3=\lambda_3y_3 \\
\mathcal{N}_1=\lambda_1z_1 & \mathcal{N}_2=\lambda_2z_2 & \mathcal{N}_3=\lambda_3z_3
\end{array}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olyan valós számértékek, melyek eleget tesznek a

$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

„saecularis"-egyenletnek.

---

*) Tekintettel az: $\mathcal{L}(x,y,z)\xi+\mathcal{M}(x,y,z)\eta+\mathcal{N}(x,y,z)\zeta\equiv\mathcal{L}(\xi,\eta,\zeta)x+\mathcal{M}(\xi,\eta,\zeta)y+\mathcal{N}(\xi,\eta,\zeta)z$ azonosságra

1° állítás bebizonyítása: Ha ugyanis $x_1, y_1, \ldots, z_3$ kielégítik az (R) rendszert, akkor kompatibilis az (1), (4) és (7) egyenlet, azaz

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \mathcal{L}_1 x_2 + \mathcal{M}_1 y_2 + \mathcal{N}_1 z_2 = 0 \\
&(4) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \qquad\qquad (R') \\
&(7) \quad x_2 x_2 + y_2 y_2 + z_2 z_2 = 1
\end{aligned}$$

Ezen (R') rendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

mert egyfelől a (4) – (9) egyenletekből következik, hogy

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_3, \quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = y_3, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = z_3,$$

másfelől (3^{bis}) szerint:

$$\mathcal{L}_1 x_3 + \mathcal{M}_1 y_3 + \mathcal{N}_1 z_3 = 0.$$

Ámde, ha az (R') rendszer determinánsa eltűnik, akkor (1), (4) és (7) simultán csak úgy állhat fenn, ha az

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

matrix minden 3.-ad rendű determinánsa $=0$, azaz

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 & \mathcal{N}_1 \\ x_1 & 0 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ 0 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \mathcal{N}_1 & \mathcal{L}_1 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

már pedig a (9) egyenlet ki lévén elégítve, nem tűnhetik el egyszerre x_1, y_1 és z_1; ha pl. $x_1 \neq 0$, akkor tehát

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mathcal{L}_1}{x_1} \cdot x_1; \quad \mathcal{M}_1 = \frac{\mathcal{L}_1}{x_1} \cdot y_1; \quad \mathcal{N}_1 = \frac{\mathcal{L}_1}{x_1} \cdot z_1$$

vagy $\lambda_1 = \frac{\mathcal{L}_1}{x_1}$ tételvén:

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 x_1 \qquad \mathcal{M}_1 = \lambda_1 y_1 \qquad \mathcal{N}_1 = \lambda_1 z_1.$$

azaz

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda_1) x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1 &= 0 \\
a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_1) y_1 + a_{23} z_1 &= 0 \\
a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + (a_{33} - \lambda_1) z_1 &= 0;
\end{aligned}$$

e 3 egyenlet ki lévén elégítve az x_1, y_1, z_1, nem csupa 0 elemű számhármas által, determinánsa $=0$, azaz $D(\lambda_1) = 0$. Ezzel állításunkat az x_1, y_1, z_1 számokra ~~meg~~ bebizonyítottuk; ugyanígy igazolhatjuk állításunk helyességét az x_2, y_2, z_2 ill. x_3, y_3, z_3 számokra

Az (R) rendszer „tényleges" megoldása.

I. eset. A $D(\lambda)=0$ egyenletnek három, egyszeres gyöke van: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Ebben az esetben az (R) rendszernek 8 megoldása van „tényleg"
Ugyanis tekintsük az

$$(\alpha)\qquad a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = \lambda_1\xi$$
$$(\beta)\qquad a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{13}\zeta = \lambda_1\eta$$
$$(\gamma)\qquad a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta = \lambda_1\zeta$$
$$(\delta)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$$

rendszert; ennek 2 megoldása van; (ha ξ_1, η_1, ζ_1 az egyik, akkor $-\xi_1, -\eta_1, -\zeta_1$ a másik); ugyanis

$$D(\lambda_1)=0 \quad , \text{de} \quad D'(\lambda_1)\neq 0$$

lévén, az (α) — (γ) egyenletrendsz. determinansának (mely eltűnik) okvetlenül ~~van~~ el nem tűnő másodrendű aldeterminánsa (hisz $D'(\lambda_1) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$); de akkor az (α) — (γ) egyenletrendszert megoldó számhármasok egyszeresen végtelen halmazt adnak; ebből a (δ) egyenlet kiválaszt kettőt, melyek megfelelő elemei egymástól csak előjelben különböznek.
Hasonlóképp látható be, hogy az

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta &= \lambda_2\xi \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta &= \lambda_2\eta \\ a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta &= \lambda_3\zeta \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{illetőleg} \quad \left.\begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta &= \lambda_3\xi \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta &= \lambda_3\eta \\ a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta &= \lambda_3\zeta \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

rendszernek is 2 megoldása van: ξ_2, η_2, ζ_2 ; $-\xi_2, -\eta_2, -\zeta_2$, illetőleg ξ_3, η_3, ζ_3; $-\xi_3, -\eta_3, -\zeta_3$. Könnyű belátni, hogy $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$ egymásra merőleges egyenesek iránycosinusai. Ugyanis pl. az

$$\mathcal{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \lambda_1\xi_1 \qquad \mathcal{L}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \lambda_2\xi_2$$
$$\mathcal{M}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \lambda_1\eta_1 \qquad \mathcal{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \lambda_2\eta_2$$
$$\mathcal{N}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \lambda_1\zeta_1 \qquad \mathcal{N}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \lambda_2\zeta_2$$

egyenlőségekből következik, hogy egyfelől

$$\mathcal{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,\xi_2 + \mathcal{M}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,\eta_2 + \mathcal{N}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,\zeta_2 = \lambda_1(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)$$

másfelől

$$\mathcal{L}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\,\xi_1 + \mathcal{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\,\eta_1 + \mathcal{N}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\,\zeta_1 = \lambda_2(\xi_2\xi_1+\eta_2\eta_1+\zeta_2\zeta_1)$$

tehát

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)=0,$$

vagyis, mivel $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$, $\quad \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0$, miként állítottuk.

Ha $x_1=\pm\xi_1$, $y_1=\pm\eta_1$, $z_1=\pm\zeta_1$; $x_2=\pm\xi_2$, $y_2=\pm\eta_2$, $z_2=\pm\zeta_2$; $x_3=\pm\xi_3$, $y_3=\pm\eta_3$, $z_3=\pm\zeta_3$ tétetik, hol az ugyanazon indexű mennyiségek egyszerre kapják a felső, vagy alsó előjelet, akkor előáll a szóban forgó 8 megoldás.

II. eset. A $D(\lambda)=0$ egyenletnek λ_1 egyszeri, λ_2 kétszeres gyöke.
Ez esetben az R rendszernek végtelen sok megoldása van.

Ugyanis az

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = \lambda_1 \xi$$
$$a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta = \lambda_1 \eta$$
$$a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\eta = \lambda_1 \zeta$$
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$$

egyenletrendszernek 2 megoldása van: $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1$. ill $-\xi_1, -\eta_1, -\zeta_1)$, míg az

$$(\rho) \qquad a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = \lambda_2 \xi$$
$$(\sigma) \qquad a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta = \lambda_2 \eta$$
$$(\tau) \qquad a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta = \lambda_2 \zeta$$
$$(\pi) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$$

egyenletrendszernek megoldásai ~~egy~~ egyszeresen végtelen halmazt alkotnak, mert a $(\rho),(\sigma),(\tau)$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza 2-dimenziós (hiszen eltűnik determinánsával egyetemben minden másodrendű aldeterminánsa*)), melyből a (π) egyenlet kiválaszt egy 1-dimenziós sokaságot; ha ennek egy tetszés szerinti tagja ξ_2, η_2, ζ_2, akkor, mint fentebb, megint bebizonyíthatjuk a

$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0$$

orthogonalitási feltétel teljesülését. Továbbá a szóban forgó halmaz minden ξ_2, η_2, ζ_2 eleméhez lehet találni egy ξ_3, η_3, ζ_3 elemet e halmazban, úgy, hogy

$$\xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3+\zeta_2\zeta_3=0$$

legyen; evégből az **)

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = \lambda_2 \xi$$
$$\xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta = 0$$

homogen lin. egyenletrendszer egyszeresen végtelen sok megoldása közül ki kell választani ~~azt~~ azt, mely a

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

feltételt is kielégíti.

Ha pl. $x_1=\xi_1$ $y_1=\eta_1$ $z_1=\zeta_1$; $x_2=\xi_2$, $y_2=\eta_2$, $z_2=\zeta_2$; $x_3=\xi_3$, $y_3=\eta_3$, $z_3=\zeta_3$, akkor $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ az (R) rendszer egyik megoldása.

III. eset. A $D(\lambda)=0$ egyenletnek λ_1 háromszoros gyöke.
Ez esetben az (R) rendszer 3 első egyenlete a többi hatnak, (tulajdonkép a második 3 egyenletnek) következménye, tehát az (R) rendszert az $x_1, y_1, \dots, z_3$ számoknak minden „orthogonális rendszere" kielégíti.
Ha ugyanis λ_1 3-szoros gyök, akkor $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\lambda_1$; $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ tehát $L(x,y,z)\equiv\lambda_1 x$; $M(x,y,z)\equiv\lambda_1 y$; $N(x,y,z)=\lambda_1 z$, miből állításunk következik.–

Fekete Mihály

---

*) Mint ez a saecularis egyenletekre vonatkozó vizsgálatokból következik.

**) A $(\rho),(\sigma),(\tau)$ egyenletrendszer egyenletei között van egy, pl. (ρ), melynek a többi „következménye".

Legyen végül

<u>IV. eset</u> $L_1^2+M_1^2+N_1^2=0$,

$L_2^2+M_2^2+N_2^2=0$,

$L_3^2+M_3^2+N_3^2=0$;

ekkor
$$\begin{array}{lll} L_1=0 & L_2=0 & L_3=0 \\ M_1=0 & M_2=0 & M_3=0 \\ N_1=0 & N_2=0 & N_3=0 \end{array}$$

<u>Megjegyzés</u>: Ha
$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

akkor az I. esetben $D(0)\neq 0$; $D(\lambda_1)=D(\lambda_2)=D(\lambda_3)=0$ $\lambda_1\neq 0$ $\lambda_2\neq 0$ $\lambda_3\neq 0$

a II " $D(0)=0, D'(0)\neq 0$; $D(\lambda_2)=D(\lambda_3)=0$ $\lambda_2\neq 0$ $\lambda_3\neq 0$

a III. " $D(0)=0$, $D'(0)=0$, $D''(0)\neq 0$; $D(\lambda_3)=0$ $\lambda_3\neq 0$

a IV " $D(0)=0$ $D'(0)=0$ $D''(0)=0$

<u>Összefoglalás</u>. Ha az (1) – (9) egyenleteknek van ~~[illegible]~~ megoldása:
$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3,$$

akkor, az I – IV esetek bármelyikével álljunk is szemben, fennállanak az
$$\begin{array}{lll} L_1=\lambda_1 x_1, & L_2=\lambda_2 x_2, & L_3=\lambda_3 x_3 \\ M_1=\lambda_1 y_1, & M_2=\lambda_2 y_2, & M_3=\lambda_3 y_3 \\ N_1=\lambda_1 z_1, & N_2=\lambda_2 z_3, & N_3=\lambda_3 z_3 \end{array}$$
relációk, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $D(\lambda)=0$ egyenletet kielégítő számértékek, azaz $D(\lambda_1)=D(\lambda_2)=D(\lambda_3)=0$.

~~A megoldhatóság~~ Az $x_1, y_1, z_1, \dots, z_3$ értékrendszer megoldás voltának szükséges feltételeit így megállapítván, a megoldások ~~alap~~ meghatározása a $D(\lambda)=0$ saecularis egyenlet discussiója alapján úgy történik, mint ~~már~~ ~~mint~~ másutt leírtam.

Fekete Mihály

Jelölések: $\mathcal{L}(x,y,z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$, $\mathcal{M}(x,y,z) = \dots$ $\mathcal{N}(x,y,z) = \dots$

$\mathcal{L}(x_i,y_i,z_i) = \mathcal{L}_i$, $\mathcal{M}(x_i,y_i,z_i) = \mathcal{M}_i$, $\mathcal{N}(x_i,y_i,z_i) = \mathcal{N}_i$ $i=1,2,3$

1

Teljesüljön az

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathcal{L}_1 x_2 + \mathcal{M}_1 y_2 + \mathcal{N}_1 z_2 = 0 \\
(2) & \mathcal{L}_1 x_3 + \mathcal{M}_1 y_3 + \mathcal{N}_1 z_3 = 0 \\
(3) & \mathcal{L}_2 x_3 + \mathcal{M}_2 y_3 + \mathcal{N}_2 z_3 = 0 \\
(4) & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \\
(5) & x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = 0 \\
(6) & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0 \\
(7) & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0 \\
(8) & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 0 \\
(9) & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 0
\end{array}
\quad
\left\{ \begin{array}{l} x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 \\ a_{ik} \ (i=1,2,3;\ k=1,2,3) \\ \text{valós számok}; \ a_{ik} = a_{ki} \end{array} \right\}
$$

egyenletrendszer; legyen továbbá:

I eset $\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{N}_1^2 \neq 0 \\ \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{N}_2^2 \neq 0 \\ \mathcal{M}_3^2 + \mathcal{L}_3^2 + \mathcal{N}_3^2 \neq 0; \end{array}\right\}$

ekkor $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2)$, $(\mathcal{L}_3, \mathcal{M}_3, \mathcal{N}_3)$ vektorkomponensek és

(1) szerint $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1) \perp (x_2, y_2, z_2)$ (4) szerint $(x_1, y_1, z_1) \perp (x_2, y_2, z_2)$

(2) szerint $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1) \perp (x_3, y_3, z_3)$ (5) szerint $(x_1, y_1, z_1) \perp (x_2, y_2, z_2)$

tehát $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1) \parallel (x_1, y_1, z_1)$

hasonlóképp $(\mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2) \parallel (x_2, y_2, z_2)$

és $(\mathcal{L}_3, \mathcal{M}_3, \mathcal{N}_3) \parallel (x_3, y_3, z_3)$

tehát alkalmasan választott (és tényleg választható) λ-kra: $\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}_1 = \lambda_1 x_1 & \mathcal{L}_2 = \lambda_2 x_2 & \mathcal{L}_3 = \lambda_3 x_3 \\ \mathcal{M}_1 = \lambda_1 y_1 & \mathcal{M}_2 = \lambda_2 y_2 & \mathcal{M}_3 = \lambda_3 y_3 \\ \mathcal{N}_1 = \lambda_1 z_1 & \mathcal{N}_2 = \lambda_2 z_2 & \mathcal{N}_3 = \lambda_3 z_3 \end{array} \right.$ (ahol: $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_3 \neq 0$)

Legyen: **II eset** $\begin{array}{l} \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{N}_1^2 = 0 \\ \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{N}_2^2 \neq 0 \\ \mathcal{L}_3^2 + \mathcal{M}_3^2 + \mathcal{N}_3^2 \neq 0; \end{array}$

ekkor, mint fentebb, bebizonyíthatjuk, hogy

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{L}_2 = \lambda_2 x_2 & \mathcal{L}_3 = \lambda_3 x_3 & \mathcal{L}_1 = 0 \\
\mathcal{M}_2 = \lambda_2 y_2 & \mathcal{M}_3 = \lambda_3 y_3 \ (\text{ahol } \lambda_2 \neq 0 \text{ továbbá } \lambda_3 \neq 0) & \mathcal{M}_1 = 0 \\
\mathcal{N}_2 = \lambda_2 z_2, & \mathcal{N}_3 = \lambda_3 z_3; & \mathcal{N}_1 = 0.
\end{array}
$$

Legyen: **III. eset** $\begin{array}{l} \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{N}_1^2 = 0 \\ \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{N}_2^2 = 0 \\ \mathcal{L}_3^2 + \mathcal{M}_3^2 + \mathcal{N}_3^2 \neq 0; \end{array}$

ekkor, könnyen beláthatólag

$\mathcal{L}_1 = 0$, $\mathcal{M}_1 = 0$, $\mathcal{N}_1 = 0$; $\mathcal{L}_2 = 0$ $\mathcal{M}_2 = 0$ $\mathcal{N}_2 = 0$; $\mathcal{L}_3 = \lambda_3 x_3$, $\mathcal{M}_3 = \lambda_3 y_3$, $\mathcal{N}_3 = \lambda_3 z_3$ ahol $\lambda_3 \neq 0$

$\lambda = 0$ és $\lambda = \pi$ felső jel $\lambda = 0$-ra, alsó jel $\lambda = \pi$-re

$$\pm \frac{l}{2}\frac{k_1-k_2}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} - Y\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = A$$

$$\pm \frac{k_1-k_2}{2} XZ + \frac{k_1+3k_2}{4} l \left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2} X\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{k_1+k_2}{2} l Z \frac{\partial Z}{\partial x} = B$$

$$\pm \frac{k_1-k_2}{2} YZ + \frac{k_1+3k_2}{4} l \left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2} Y\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{k_1+k_2}{2} l Z \frac{\partial Z}{\partial y} = C$$

$$-\frac{k_1-k_2}{4}(Y^2-X^2) \pm \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}\left(Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = D$$

$$\frac{k_1-k_2}{4} 2XY \pm \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right) = E$$

$$\frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2}\left(X\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right) = F = F'$$

$$\frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2}\left(Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y}\right) = G = G'$$

$\lambda = 90°$ és $\lambda = 270°$ felső jel $\lambda = \frac{\pi}{2}$-re, alsó jel $\lambda = \frac{\pi}{2}+\pi$-re.

$$\pm \frac{l}{2}\frac{k_1-k_2}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} - Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = A'$$

$$\pm \frac{k_1-k_2}{2} YZ + \frac{k_1+3k_2}{4} l \left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{4} X\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{k_1+k_2}{2} l Z \frac{\partial Z}{\partial x} = B'$$

$$\mp \frac{k_1-k_2}{2} XZ + \frac{k_1+3k_2}{4} l \left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2} Y\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{k_1+k_2}{2} l Z \frac{\partial Z}{\partial y} = C'$$

$$+\frac{k_1-k_2}{4}(Y^2-X^2) \pm \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right) = D'$$

$$-\frac{k_1-k_2}{4} 2XY \mp \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}\left(Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = E'$$

$\cancel{\frac{k_1-k_2}{4}\frac{l}{2}\left(X\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{}\right)}$ kés .

1) lépés
$$D + E' = -\frac{k_1-k_2}{4}(Y^2-X^2) - \frac{k_1-k_2}{4} 2XY$$
$$D' - E = +\frac{k_1-k_2}{4}(Y^2-X^2) - \frac{k_1-k_2}{4} 2XY$$
ezekből (Y^2-X^2) és XY $Y^2-X^2 = a$ $XY = b$

ebből $X^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$ mivel X^2 pozitív csak felső jel

$Y^2 = a + X^2$ | külön kiadható előjel dönthető el. X, Y.

ismeretessé X, Y

2) lépés $F =$ és $G = 0$ gyakorlatilag ismeretlenek $\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ és $\frac{\partial X}{\partial y}$

meto

3) lépés
$$B - B' = \frac{k_1-k_2}{2}(X-Y)Z + \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}X\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$C - C' = \frac{k_1-k_2}{2}(X+Y)Z + \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2}Y\frac{\partial Z}{\partial z}$$

ezekből $\quad Z$ és $\frac{\partial Z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$

az előzőből akkor ismertek:
$$X, Y, Z \quad \frac{\partial X}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \frac{\partial X}{\partial y}$$

B és C vagy B' és C'-ből kiszámítható ezután

4) lépés $\quad \frac{\partial X}{\partial z}$ és $\frac{\partial Y}{\partial z}$

2*✱

$$n = c\frac{J_1}{w} = C + A_1\sin\alpha + B_1\cos\alpha + A_2\sin 2\alpha + B_2\cos 2\alpha + A_3\sin 3\alpha + B_3\cos 3\alpha.$$

	α	$\frac{J_1}{w}$
1	0	$C + B_1 + B_2 + B_3$
2	45	$C + \frac{1}{\sqrt2}A_1 + \frac{1}{\sqrt2}B_1 + A_2 + \frac{1}{\sqrt2}A_3 - \frac{1}{\sqrt2}B_3$
3	90	$C + A_1 - B_2 - A_3$
4	135	$C + \frac{1}{\sqrt2}A_1 - \frac{1}{\sqrt2}B_1 - A_2 + \frac{1}{\sqrt2}A_3 + \frac{1}{\sqrt2}B_3$
5	180	$C - B_1 + B_2 - B_3$
6	225	$C - \frac{1}{\sqrt2}A_1 - \frac{1}{\sqrt2}B_1 + A_2 - \frac{1}{\sqrt2}A_3 + \frac{1}{\sqrt2}B_3$
7	270	$C - A_1 - B_2 + A_3$
8	315	$C - \frac{1}{\sqrt2}A_1 + \frac{1}{\sqrt2}B_1 - A_2 - \frac{1}{\sqrt2}A_3 - \frac{1}{\sqrt2}B_3$

$n_5 - n_1 = -2B_1 - 2B_3$ $\qquad$ $n_5 + n_1 = 2C + 2B_2$

$n_6 - n_2 = -\sqrt2 A_1 - \sqrt2 B_1 - \sqrt2 A_3 + \sqrt2 B_3$ $\qquad$ $n_6 + n_2 = 2C + 2A_2$

$n_7 - n_3 = -2A_1 + 2A_3$ $\qquad$ $n_7 + n_3 = 2C - 2B_2$

$n_8 - n_4 = -\sqrt2 A_1 + \sqrt2 B_1 - \sqrt2 A_3 - \sqrt2 B_3$ $\qquad$ $n_8 + n_4 = 2C - 2A_2$

$(n_8 - n_4) - (n_6 - n_2) = +2\sqrt2 B_1 - 2\sqrt2 B_3$

$(n_8 - n_4) + (n_6 - n_2) = -2\sqrt2 A_1 - 2\sqrt2 A_3$

$$\varphi \left\{ \begin{aligned}
A_1 &= -\frac{(n_8-n_4)+(n_6-n_2)+\sqrt2(n_7-n_3)}{4\sqrt2}\\
B_1 &= +\frac{(n_8-n_4)-(n_6-n_2)-\sqrt2(n_5-n_1)}{4\sqrt2}\\
A_2 &= +\frac{(n_6+n_2)-(n_8+n_4)}{4}\\
B_2 &= +\frac{(n_5+n_1)-(n_7+n_3)}{4}\\
A_3 &= -\frac{(n_8-n_4)+(n_6-n_2)-\sqrt2(n_7-n_3)}{4\sqrt2}\\
B_3 &= -\frac{(n_8-n_4)-(n_6-n_2)+\sqrt2(n_5-n_1)}{4\sqrt2}
\end{aligned}\right.$$

$$C = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8}{8}$$

ha X Y Z $\frac{\partial X}{\partial x}$ $\frac{\partial Y}{\partial y}$ $\frac{\partial X}{\partial z}$ $\frac{\partial Y}{\partial z}$ $\frac{\partial X}{\partial y}$ ismeretesek, akkor.

$A_3 = mm\,A_3$ és $B_3 = nm\,B_3$ egyenletekből kapjuk $\frac{a_{11}-a_{22}}{2}$ és a_{12}

azután ez értékek felhasználásával

$A_2 = mm\,A_2$ és $B_2 = nm\,B_2$ egyenletekből a_{23} és a_{31}

végre csakhat az $A_1 = km\,A_1$ és $B_1 = nm\,B_1$ egyenletekből $\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$ és a_{33}

---

ismert a-k értékében X Y Z $\frac{\partial X}{\partial x}$ $\frac{\partial X}{\partial y}$ $\frac{\partial X}{\partial z}$ $\frac{\partial Y}{\partial y}$ $\frac{\partial Y}{\partial z}$ meghatározására a δ, γ-hoz egyenlet nem elég, kétféle a értékek.

Ha egytengelyű darabot veszünk akkor és lesz

$\varphi = 45$

	$\lambda = 0$	$\lambda = 90^0$
$a_{11} = k_2 + \frac{k_1-k_2}{2}\cos^2\lambda$	$a_{11} = \frac{k_1+k_2}{2}$	$a_{11}' = k_2$
$a_{22} = k_2 + \frac{k_1-k_2}{2}\sin^2\lambda$	$a_{22} = k_2$	$a_{22}' = \frac{k_1+k_2}{2}$
$a_{33} = k_2 + \frac{k_1-k_2}{2}$	$a_{33} = \frac{k_1+k_2}{2}$	$a_{33}' = \frac{k_1+k_2}{2}$
$a_{12} = \frac{k_1-k_2}{4}\sin 2\lambda$	$a_{12} = 0$	$a_{12}' = 0$
$a_{23} = \frac{k_1-k_2}{2}\sin\lambda$	$a_{23} = 0$	$a_{23}' = \frac{k_1-k_2}{2}$
$a_{31} = \frac{k_1-k_2}{2}\cos\lambda$	$a_{31} = \frac{k_1-k_2}{2}$	$a_{31}' = 0$

csakhat :

Izotrop testre. Vázl

$F = C + A_1 \sin\alpha + B_1 \cos\alpha + A_2 \sin 2\alpha + B_2 \cos 2\alpha.$

$$C = \mu_b \frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$
$$A_1 = \kappa L\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega + \mu_a X + \mu_b Y + L\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$
$$B_1 = \kappa L\left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\Omega + \mu_a Y - \mu_b X + L\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$
$$A_2 = L\mu_b\frac{\partial X}{\partial y} + \mu_a\frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$
$$B_2 = L\mu_a\frac{\partial X}{\partial y} - \mu_b\frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

adódik $\frac{\partial X}{\partial y}$ $\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$

$\{(A_1)_0 - (A_1)_\pi\}$ és $\{(B_1)_0 - (B_1)_\pi\}$ -ből X és Y

$$\{(A_1)_0 + (A_1)_\pi\}_\Omega = 2\kappa L\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega + 2L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}$$
$$\{(A_1)_0 + (A_1)_\pi\}_{\Omega'} = 2\kappa L\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega' + 2L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}$$

~~ezen $(B_{10} + B_{1\pi})$ ebből~~ ebből $\frac{\partial X}{\partial z}$

$\cancel{\frac{\partial X}{\partial z}}$ és $\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)$ — 1)

Ugyanígy ~~A_{10} és~~ $\{(B_1)_0 + (B_1)_\pi\}_\Omega$ és $\{(B_1)_0 + (B_1)_\pi\}_{\Omega'}$ -ből

$$\frac{\partial Y}{\partial z}$$
$$\left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$
$$= \left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial x} + NY + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right) - 2)$$

X Y $\frac{\partial X}{\partial y}$ $\frac{\partial X}{\partial z}$ $\frac{\partial Y}{\partial z}$, és $\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = N$

1) és 2 -ből $\frac{\partial X}{\partial x}$ Z $\frac{\partial Y}{\partial y}$

1 lépés (D_0+D_π) és (E_0+E_π) ből X és Y

2 lépés X, Y, ismerete révén (F_0+F_π) és (G_0+G_π) ből $\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ és $\frac{\partial X}{\partial y}$.

3 lépés $(B_0+B_\pi)-(B_{\frac{\pi}{2}}+B_{\frac{\pi}{2}+\pi})$ ből $\frac{\partial Z}{\partial z}=-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}$ tehát a 1, 2, 3 lépésből ismeretesek $X, Y, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial y}$

4 lépés (B_0+B_π) vagy $(B_{\frac{\pi}{2}}+B_{\frac{\pi}{2}+\pi})$ ből kapjuk $\left\{(k_1+k_2)lZ\frac{\partial Z}{\partial x}+2l\mu_2\frac{\partial X}{\partial z}\right\}$ értékét

(C_0+C_π) vagy $(C_{\frac{\pi}{2}}+C_{\frac{\pi}{2}+\pi})$ ből kapjuk $\left\{(k_1+k_2)lZ\frac{\partial Z}{\partial y}+2l\mu_2\frac{\partial Y}{\partial z}\right\}$ értékét

5 lépés (B_0-B_π) vagy (C_0-C_π) vagy $(B_{\frac{\pi}{2}}-B_{\frac{\pi}{2}+\pi})$ vagy $(C_{\frac{\pi}{2}}-C_{\frac{\pi}{2}+\pi})$ ből kapjuk Z-t

és a 4 lépés $\{\ \}$ értékeiből $\frac{\partial X}{\partial z}$ és $\frac{\partial Y}{\partial z}$

$$A_0 + A_\pi = 0$$

$$B_0 + B_\pi = \frac{k_1+3k_2}{2} l \left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} X\frac{\partial Z}{\partial z} + (k_1+k_2) l Z \frac{\partial Z}{\partial x} + 2 l \mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$C_0 + C_\pi = \frac{k_1+3k_2}{2} l \left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} Y\frac{\partial Z}{\partial z} + (k_1+k_2) l Z \frac{\partial Z}{\partial y} + 2 l \mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$D_0 + D_\pi = - \frac{k_1-k_2}{2} (Y^2 - X^2)$$

$$E_0 + E_\pi = +(k_1-k_2) X Y$$

$$F_0 + F_\pi = \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} \left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y} \right]$$

$$G_0 + G_\pi = \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} \left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y} \right]$$

$$A_{\frac{\pi}{2}} + A_{\frac{\pi}{2}+\pi} = 0$$

$$B_{\frac{\pi}{2}} + B_{\frac{\pi}{2}+\pi} = \frac{k_1+3k_2}{2} l \left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} X\frac{\partial Z}{\partial z} + (k_1+k_2) l Z \frac{\partial Z}{\partial x} + 2 l \mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$C_{\frac{\pi}{2}} + C_{\frac{\pi}{2}+\pi} = \frac{k_1+3k_2}{2} l \left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{k_1-k_2}{2}\frac{l}{2} Y\frac{\partial Z}{\partial z} + (k_1+k_2) l Z \frac{\partial Z}{\partial y} + 2 l \mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} + D_{\frac{\pi}{2}+\pi} = + \frac{k_1-k_2}{2} (Y^2 - X^2)$$

$$E_{\frac{\pi}{2}} + E_{\frac{\pi}{2}+\pi} = -(k_1-k_2) X Y$$

$$F_{\frac{\pi}{2}} + F_{\frac{\pi}{2}+\pi} = F_0 + F_\pi$$

$$G_{\frac{\pi}{2}} + G_{\frac{\pi}{2}+\pi} = G_0 + G_\pi$$

$$A_0 - A_\pi = + \frac{k_1-k_2}{2} l \left(X\frac{\partial Z}{\partial y} - Y\frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \mu_b l \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$B_0 - B_\pi = +(k_1-k_2) X Z \cancel{+} 2\mu_b Y + 2\mu_a X$$

$$C_0 - C_\pi = +(k_1-k_2) Y Z + 2\mu_a Y - 2\mu_b X$$

$$D_0 - D_\pi = + \frac{k_1-k_2}{2} l \left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y} \right] + 2 l \mu_b \frac{\partial Y}{\partial x} - l\mu_a \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

$$E_0 - E_\pi = + \frac{k_1-k_2}{2} l \left[X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y} \right] + 2 l \mu_a \frac{\partial Y}{\partial x} + l\mu_b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

$$F_0 - F_\pi = 0$$

$$G_0 - G_\pi = 0$$

$$A_{\frac{\pi}{2}} - A_{\frac{\pi}{2}+\pi} = + \frac{k_1-k_2}{2} l \left(X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} - Z\frac{\partial Z}{\partial z} \right) - \mu_a l \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$B_{\frac{\pi}{2}} - B_{\frac{\pi}{2}+\pi} = +(k_1-k_2) Y Z + 2\mu_a Y - 2\mu_b X$$

$$C_{\frac{\pi}{2}} - C_{\frac{\pi}{2}+\pi} = -(k_1-k_2) X Z - 2\mu_b Y - 2\mu_a X$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} - D_{\frac{\pi}{2}+\pi} = + \frac{k_1-k_2}{2} l \left[X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y} \right] + 2 l \mu_a \frac{\partial Y}{\partial x} + l\mu_b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

$$E_{\frac{\pi}{2}} - E_{\frac{\pi}{2}+\pi} = - \frac{k_1-k_2}{2} l \left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y} \right] - 2 l \mu_b \frac{\partial Y}{\partial x} + l\mu_a \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

$$F_{\frac{\pi}{2}} - F_{\frac{\pi}{2}+\pi} = 0$$

$$G_{\frac{\pi}{2}} - G_{\frac{\pi}{2}+\pi} = 0$$

F_2ből $\lambda = 0$ és $\lambda = \pi$

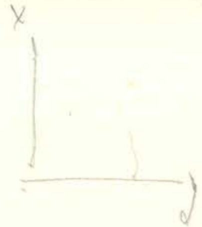
$$A_2 = \pm \mu_b \frac{l}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$B_2 = \pm \mu_b Y \pm \mu_a X + l\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$C_2 = \pm \mu_a Y \mp \mu_b X + l\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$D_2 = \pm l\mu_b \frac{\partial Y}{\partial x} \mp \frac{l}{2}\mu_a \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$E_2 = \pm l\mu_a \frac{\partial Y}{\partial x} \pm \frac{l}{2}\mu_b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$



$\mu_b = \mu_a$, $\mu_a = -\mu_b$ $\lambda = \frac{\pi}{2}$ és $\frac{\lambda}{} = \frac{\pi}{2} + \pi$

$$A_2 = \pm \mu_a \frac{l}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$B_2 = \pm \mu_a Y \mp \mu_b X + l\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$C_2 = \mp \mu_b Y \mp \mu_a X + l\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$D_2 = \pm l\mu_a \frac{\partial Y}{\partial x} \pm \frac{l}{2}\mu_b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$E_2 = \mp l\mu_b \frac{\partial Y}{\partial x} \pm \frac{l}{2}\mu_a \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$F_2 = Y(\mu_a \cos\alpha - \mu_b \sin\alpha) - X(\mu_a \sin\alpha + \mu_b \cos\alpha)$$

$$\cancel{+l \frac{\partial y}{\partial x}(}$$

$$\cancel{+ l \cos\alpha \frac{\partial Y}{\partial x}(\mu_a \cos\alpha - \mu_b \sin\alpha)}$$

$$+ l \cos\alpha \frac{\partial Y}{\partial y}(\mu_a \sin\alpha + \mu_b \cos\alpha)$$

$$+ l \cos\alpha \frac{\partial Y}{\partial z}(\mu_c$$

$$- l \sin\alpha \frac{\partial X}{\partial x}(\mu_a \cos\alpha - \mu_b \sin\alpha)$$

$$\cancel{- l \sin\alpha \frac{\partial X}{\partial y}(\mu_a \sin\alpha + \mu_b \cos\alpha)}$$

$$- l \sin\alpha \frac{\partial X}{\partial z}\mu_c$$

$$l\mu_a \frac{\partial Y}{\partial x}\cos 2\alpha - l\mu_b \frac{\partial Y}{\partial x}\sin 2\alpha + l\mu_a \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\sin 2\alpha}{2} + l\mu_b \frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$$

$$- l\mu_a \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\sin 2\alpha}{2} + l\mu_b \frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$$

$$l\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}\cos\alpha - l\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}\sin\alpha.$$

$$F_2 = +\mu_b \frac{l}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \left(-\mu_b Y - \mu_a X - l\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}\right)\sin\alpha$$

$$+ \left(\mu_a Y - \mu_b X + l\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha$$

$$+ \left(-l\mu_b \frac{\partial Y}{\partial x} + \mu_a \frac{l}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\right)\sin 2\alpha$$

$$+ \left(l\mu_a \frac{\partial Y}{\partial x} + \mu_b \frac{l}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\right)\cos 2\alpha.$$

$$(k - k_2)(XZ) - 2\mu_b Y - 2\mu_a X =$$

$$k_1 - k_2 (YZ) + 2\mu_a Y - 2\mu_b X =$$

$$(a_{11}-k)\left[(a_{22}-k)(a_{33}-k)-a_{23}^2\right] - a_{12}\left[a_{12}(a_{33}-k)-a_{13}a_{23}\right] + a_{13}\left[a_{12}a_{23}-a_{13}(a_{22}-k)\right]$$

$$(a_{11}-k)\left[a_{22}a_{33}-(a_{22}+a_{33})k+k^2-a_{23}^2\right] - a_{12}^2a_{33}+a_{12}^2k+a_{12}a_{13}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{23}-a_{13}^2a_{22}+a_{13}^2k=0$$

$\cancel{-k^3}$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}(a_{22}+a_{33})k + a_{11}k^2 \cancel{-a_{11}a_{23}^2} - k^3\\
&-a_{11}a_{23}^2 \quad - a_{22}a_{33}k \quad +(a_{22}+a_{33})k^2\\
&-a_{12}^2a_{33} \quad + a_{23}^2k\\
&+2a_{12}a_{13}a_{23} \quad +(a_{12}^2+a_{13}^2)k.\\
&-a_{13}^2a_{22}
\end{aligned}
$$

$$k^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})k^2+\left[(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11})-(a_{12}^2+a_{23}^2+a_{13}^2)\right]k$$

$$+\left[a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{23}a_{13}\right]$$

$$Y\,dm_x - X\,dm_y$$

$$+ x\left(\frac{\partial Y}{\partial x} dm_x + \frac{\partial Y}{\partial y} dm_y + \frac{\partial Y}{\partial z} dm_z\right) - y\left(\frac{\partial X}{\partial x} dm_x + \frac{\partial X}{\partial y} dm_y + \frac{\partial X}{\partial z} dm_z\right)$$

$$- \cancel{dm_x = a_{13} Z}$$

$$\cancel{dm_y = 2 a_{23} Z \sin\alpha} -$$

$$\begin{cases} dm_x = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} X - a_{23} Z \sin\alpha + a_{13} Z \cos\alpha + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} Y - a_{12} X\right)\sin 2\alpha + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X + a_{12} Y\right)\cos 2\alpha \\ dm_y = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} Y + a_{13} Z \sin\alpha + a_{23} Z \cos\alpha + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X + a_{12} Y\right)\sin 2\alpha + \left(-\frac{a_{11}-a_{22}}{2} Y + a_{12} X\right)\cos 2\alpha \\ dm_z = a_{33} Z + (a_{13} Y - a_{23} X)\sin\alpha + (a_{13} X + a_{23} Y)\cos\alpha - \end{cases}$$

$$x = l\cos\alpha \qquad y = l\sin\alpha$$

$$Y\,dm_x - X\,dm_y \cancel{Z a}$$

$$- \sin\alpha\, X \frac{\partial X}{\partial x} \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l + \sin^2\alpha\, \cancel{X} Z \frac{\partial X}{\partial x} a_{23} l - \frac{a_{13}}{2} Z \frac{\partial X}{\partial x} l \sin 2\alpha - \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} Y \frac{\partial X}{\partial x} - a_{12} X \frac{\partial X}{\partial x}\right) l \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$- \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X \frac{\partial X}{\partial x} + a_{12} Y \frac{\partial X}{\partial x}\right) \cos 2\alpha \sin\alpha -$$

$$- \sin\alpha\, Y \frac{\partial X}{\partial y} \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l - \sin^2\alpha\, Z \frac{\partial X}{\partial y} a_{13} l - \frac{a_{23}}{2} Z \frac{\partial X}{\partial y} \sin 2\alpha - \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X \frac{\partial X}{\partial y} + a_{12} Y \frac{\partial X}{\partial y}\right) \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$- \left(-\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X \frac{\partial Y}{\partial y} + a_{12} Y \frac{\partial X}{\partial y}\right) \cos 2\alpha \sin\alpha$$

$$- \sin\alpha\, Z \frac{\partial X}{\partial z} a_{33} l - \left(Y \frac{\partial X}{\partial z} a_{13} - X \frac{\partial X}{\partial z} a_{23}\right) l \sin^2\alpha - \left(\frac{a_{13}}{2} X \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{a_{23}}{2} Y \frac{\partial X}{\partial z}\right) \frac{l \sin 2\alpha}{2}$$

$$+ \cos\alpha\, X \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l - \sin 2\alpha \frac{a_{23}}{2} Z \frac{\partial Y}{\partial x} l + \cos^2\alpha\, a_{13} Z \frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} Y \frac{\partial Y}{\partial x} - a_{12} X \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \sin 2\alpha \cos\alpha$$

$$+ \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X \frac{\partial Y}{\partial x} + a_{12} Y \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \cos 2\alpha \cos\alpha$$

$$+ \cos\alpha\, Y \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l + \sin 2\alpha \frac{a_{13}}{2} Z \frac{\partial Y}{\partial y} l + \cos^2\alpha\, a_{23} Z \frac{\partial Y}{\partial y} l + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} X \frac{\partial Y}{\partial y} + a_{12} Y \frac{\partial Y}{\partial y}\right) l \sin 2\alpha \cos\alpha$$

$$+ \left(-\frac{a_{11}-a_{22}}{2} Y \frac{\partial Y}{\partial y} + a_{12} X \frac{\partial Y}{\partial y}\right) l \cos 2\alpha \cos\alpha$$

$$+ \cos\alpha\, Z \frac{\partial Y}{\partial z} a_{33} l + \sin 2\alpha \left(\frac{a_{13}}{2} Y \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{a_{23}}{2} X \frac{\partial Y}{\partial z}\right) l + \left(a_{13} X \frac{\partial Y}{\partial z} + a_{23} Y \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \cos^2\alpha\, l.$$

$$\sin\alpha \sin 2\alpha = \cancel{2\sin^2\alpha\cos\alpha} = 2y^2x = \tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\cos 3\alpha$$

$$\sin\alpha \cos 2\alpha = x^2y - y^3 = -\tfrac{1}{2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 3\alpha$$

$$\cos\alpha \sin 2\alpha = 2x^2y = \tfrac{1}{2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 3\alpha$$

$$\cos\alpha \cos 2\alpha = x^3 - xy^2 = \tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos 3\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$-a_{23} YZ\sin\alpha + a_{13} ZY\cos\alpha + \left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}Y^2 - a_{12}XY\right)\sin 2\alpha + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}XY + a_{12}Y^2\right)\cos 2\alpha$

$-a_{13} ZX\sin\alpha - a_{23} ZX\cos\alpha - \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X^2 + a_{12}XY\right)\sin 2\alpha + \left[-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}YX + a_{12}X^2\right)\cos 2\alpha$

$$Y dm_x - X dm_y = -(a_{23}YZ + a_{13}XZ)\sin\alpha + (a_{23}XZ - a_{13}YZ)\cos\alpha$$
$$+ \left\{\frac{a_{11}+a_{22}}{2}(Y^2-X^2) + 2a_{12}XY\right\}\sin 2\alpha + \left\{\frac{a_{11}-a_{22}}{2}2XY + a_{12}(Y^2-X^2)\right\}\cos 2\alpha.$$

$Y + \frac{\partial X}{\partial \alpha}$

$-X + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}$.

$$-\sin\alpha \Big[\Big[lX\frac{\partial X}{\partial x}\frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac12\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X\frac{\partial X}{\partial x} + a_{12}Y\frac{\partial X}{\partial x}\right)l$$
$$\Big[lY\frac{\partial X}{\partial y}\frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac12\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X\frac{\partial X}{\partial y} - a_{12}Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)l\Big] + Z\frac{\partial X}{\partial z}a_{33}$$
$$-\frac12\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}Y\frac{\partial Y}{\partial x} - a_{12}X\frac{\partial Y}{\partial x}\right)l\Big)$$
$$-\frac12\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X\frac{\partial Y}{\partial y} + a_{12}Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)l$$

$\frac12\frac{\partial X}{\partial y}l\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}+a_{12}\right)(X-Y)$

hogyan jönne meg $-\sin\alpha\,\frac12(X-Y)\frac{\partial X}{\partial y}l\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}+a_{12}\right)$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha\left\{Y\left(Y+\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right) + X\left(-X+\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\right\}$$
$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha\left\{X\left(Y+\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right) - Y\left(-X+\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\right\}$$
$$a_{12}\sin 2\alpha\left\{-X\left(Y+\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right) + Y\left(-X+\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\right\}$$
$$a_{12}\cos 2\alpha\left\{Y\left(Y+\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right) + X\left(-X+\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\right\}$$

Az $a_{11} \cdots a_{33}$ értékekből az $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \gamma_3$ kiszámítása a követ-kezőkép történik:

(31) írható

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\beta_i\gamma_k = 0$$

(31)*

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\gamma_i\alpha_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\alpha_i\beta_i = 0$$

Vezessük be

$$L_1(x) \equiv a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3$$

szimbolumot, akkor (31)* írható

$$(31)^{**}\quad \begin{aligned} &L_1(\beta)\gamma_1 + L_2(\beta)\gamma_2 + L_3(\beta)\gamma_3 = 0\\ &L_1(\gamma)\alpha_1 + L_2(\gamma)\alpha_2 + L_3(\gamma)\alpha_3 = 0\\ &L_1(\alpha)\beta_1 + L_2(\alpha)\beta_2 + L_3(\alpha)\beta_3 = 0\end{aligned}$$

Az $a(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$; $b(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)$; $c(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3)$ orthogonalis irányok irány-cosinusai; ép így legyenek $L(\alpha)$, $L(\beta)$ $L(\gamma)$ vektorok, melyek iránycosinusai arányosak legyenek:

$$L(\alpha)\ \big(L_1(\alpha),\ L_2(\alpha)\ \ L_3(\alpha)\big)$$
$$L(\beta)\ \big(L_1(\beta),\ L_2(\beta)\ \ L_3(\beta)\big)$$
$$L(\gamma)\ \big(L_1(\gamma),\ L_2(\gamma)\ \ L_3(\gamma)\big)$$

akkor a (31)** azt fejezi ki, hogy az $L(\alpha)$ merőlegesen áll b és c irányokra, mert (31)** két utolsó egyenlete így is írható

$$L_1(\alpha)\gamma_1 + L_2(\alpha)\gamma_2 + L_3(\alpha)\gamma_3 = 0$$
$$L_1(\alpha)\beta_1 + L_2(\beta)\beta_2 + L_3(\alpha)\beta_3 = 0$$

Ép így $L(\beta) \perp$ az a és c, az $L(\gamma) \perp$ az a és b irányokra

Azaz $\mathcal{L}(\alpha) \parallel a$

$\mathcal{L}(\beta) \parallel b$

$\mathcal{L}(\gamma) \parallel c$ irányokkal

s így $\mathcal{L}_1(\alpha) = \lambda\alpha_1$

$\mathcal{L}_2(\alpha) = \lambda\alpha_2$

$\mathcal{L}_3(\alpha) = \lambda\alpha_3$ s.í.t.

a mi részletesen kiírva

$$(31)^{***} \quad \begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 &= \lambda\alpha_1 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 &= \lambda\alpha_2 \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 &= \lambda\alpha_3 \end{aligned}$$

De e homogén egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha

$$(31)^{****} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

s így először $(31)^{****}$ kiszámítjuk $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$-t akkor λ_1-el pl. $(31)^{***}$ be írva kiszámítható $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$; λ_2 segítségével $\beta_1\beta_2\beta_3$ és λ_3 al $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

1)

Forgási momentum Mágnesességeiben –

Álló Coordinátarendszer: X tengelye északra (Kezdőpontja tetszőleges)
Y tengelye Keletre
Z tengelye lefelé

ebben a rendszerben a mágneses Intenzitások és differenciálhányadosai:

$$X, Y, Z \quad \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \text{ etc}$$

a forgó test egy elemének mágneses momentumai pedig: dm_x, dm_y, dm_z

A test forog egy a Z-vel párhuzamos tengely körül, vele együtt forog A, B, C tengelyrendszer melynek C tengelye Z vel párhuzamos. Erre a rendszerre vonatkoztatva a mágneses Intenzitások ~~differ~~

$$A, B, C_*$$

a forgó test egy elemének mágneses momentumai pedig: dm_a, dm_b, dm_c

Az AC sík az XZ síkkal α szögletet zár be.

A test elemének forgási sugara: l, a szöglet melyet ez az XZ síkkal képez: $\alpha+\varepsilon$

Akkor.

$$F = \int Y dm_x - \int X dm_y + \int l\cos(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dm_x + \frac{\partial Y}{\partial y}dm_y + \frac{\partial Y}{\partial z}dm_z\right) - \int l\sin(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial X}{\partial x}dm_x + \frac{\partial X}{\partial y}dm_y + \frac{\partial X}{\partial z}dm_z\right) \quad \ldots \; 1)$$

A dm mágneses momentum és összetevői dm_x, dm_y, dm_z három részből vannak összetéve 1) Az X, Y, Z által influált momentumból: dm_1
2) a forgó ~~test~~ rideg részének remanens momentumaiból: dm_2
3) Esetleg a forgó testen rugalmasan felfüggesztett állandó mágneses momentumokból: dm_3

úgy hogy

$$dm_x = (dm_x)_1 + (dm_x)_2 + (dm_x)_3$$
$$dm_y - - - - - -$$
$$dm_z - - - - - -$$

1) Az elem influált momentumának összetevői

Háromtengelyű test, főmágnesezési állandók $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$

	A	B	C
κ_1	λ_1	λ_2	λ_3
κ_2	μ_1	μ_2	μ_3
κ_3	ν_1	ν_2	ν_3

$$(dm_a)_1 = \{(\kappa_1\lambda_1^2 + \kappa_2\mu_1^2 + \kappa_3\nu_1^2)A + (\kappa_1\lambda_1\lambda_2 + \kappa_2\mu_1\mu_2 + \kappa_3\nu_1\nu_2)B + (\kappa_1\lambda_1\lambda_3 + \kappa_2\mu_1\mu_3 + \kappa_3\nu_1\nu_3)C\}dw$$

$$(dm_b)_1 = \{(\kappa_1\lambda_1\lambda_2 + \kappa_2\mu_1\mu_2 + \kappa_3\nu_1\nu_2)A + (\kappa_1\lambda_2^2 + \kappa_2\mu_2^2 + \kappa_3\nu_2^2)B + (\kappa_1\lambda_2\lambda_3 + \kappa_2\mu_2\mu_3 + \kappa_3\nu_2\nu_3)C\}dw$$

$$dm_c = \{(\kappa_1\lambda_1\lambda_3 + \kappa_2\mu_1\mu_3 + \kappa_3\nu_1\nu_3)A + (\kappa_1\lambda_2\lambda_3 + \kappa_2\mu_2\mu_3 + \kappa_3\nu_2\nu_3)B + (\kappa_1\lambda_3^2 + \kappa_2\mu_3^2 + \kappa_3\nu_3^2)C\}dw$$

legyen:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \kappa_1\lambda_1^2 + \kappa_2\mu_1^2 + \kappa_3\nu_1^2\\
a_{22} &= \kappa_1\lambda_2^2 + \kappa_2\mu_2^2 + \kappa_3\nu_2^2\\
a_{33} &= \kappa_1\lambda_3^2 + \kappa_2\mu_3^2 + \kappa_3\nu_3^2\\
a_{12} &= \kappa_1\lambda_1\lambda_2 + \kappa_2\mu_1\mu_2 + \kappa_3\nu_1\nu_2\\
a_{23} &= \kappa_1\lambda_2\lambda_3 + \kappa_2\mu_2\mu_3 + \kappa_3\nu_2\nu_3\\
a_{31} &= \kappa_1\lambda_1\lambda_3 + \kappa_2\mu_1\mu_3 + \kappa_3\nu_1\nu_3
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

és így

$$\left.\begin{aligned}
(dm_a)_1 &= \{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C\}dw\\
(dm_b)_1 &= \{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C\}dw\\
(dm_c)_1 &= \{a_{31}A + a_{23}B + a_{33}C\}dw
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

mivel:

$$A = X\cos\alpha + Y\sin\alpha$$

$$B = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

$$C = Z$$

lesz:

$$\left.\begin{aligned}
(dm_a)_1 &= \{a_{11}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{12}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{31}Z\}\,d\omega \\
(dm_b)_1 &= \{a_{12}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{22}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{23}Z\}\,d\omega \\
(dm_c)_1 &= \{a_{31}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{23}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{33}Z\}\,d\omega
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

mivel:

$$(dm_x)_1 = (dm_a)_1\cos\alpha - (dm_b)_1\sin\alpha$$

$$(dm_y)_1 = (dm_a)_1\sin\alpha + (dm_b)_1\cos\alpha$$

$$(dm_z)_1 = (dm_c)_1$$

tehát:

$$\left.\begin{aligned}
(dm_x)_1 &= \Big\{X\Big(\frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha\Big) + Y\Big(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\Big) + Z(a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha)\Big\}\,d\omega \\
(dm_y)_1 &= \Big\{X\Big(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\Big) + Y\Big(\frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha\Big) + Z(a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha)\Big\}\,d\omega \\
(dm_z)_1 &= \{X(a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha) + Y(a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha) + a_{33}Z\}\,d\omega
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

2) A rögzitett elem remanens momentumának összetevői.

Ha az ~~elem~~ elem remanens mágnesességének componensei az ABC rendszerben $d\mu_a\, d\mu_b\, d\mu_c$ akkor:

$$\left.\begin{aligned}
(dm_x)_2 &= d\mu_a\cos\alpha - d\mu_b\sin\alpha \\
(dm_y)_2 &= d\mu_a\sin\alpha + d\mu_b\cos\alpha \\
(dm_z)_2 &= d\mu_c
\end{aligned}\right. \quad 6)$$

3) A rugalmasan felfüggesztett mágnes momentumának összetevői.

A függő mágnes elem horizontalis componense $= d\mu'_h$
verticalis componense $= d\mu'_v$

$$\left.\begin{aligned}
(dm_x)_3 &= d\mu'_h\cos\vartheta \\
(dm_y)_3 &= d\mu'_h\sin\vartheta \\
(dm_z)_3 &= d\mu'_v
\end{aligned}\right. \quad 7)$$

a hol ϑ-a μ'_h és X által bezárt szögletet jelenti.

Legyen τ' a felfüggesztő drót torsió állandója

φ a torsió fej elfordulása

$\varphi = \varphi_0 + \alpha$ ha φ_0 az elfordulás $\alpha = 0$ állásban akkor

$$\tau'(\varphi_0 + \alpha - \vartheta) = \mu_h' X \sin\vartheta - \mu_h' Y \cos\vartheta$$

a miből ϑ kiszámítható.

[Ha mint a translatométernél X a mágneses meridián iránya tehát $Y = 0$ és ϑ kicsiny akkor

$$\vartheta = (\varphi_0 + \alpha)\frac{\tau'}{\tau' + \mu_h' X} \quad \text{vagy véve} \quad \varphi_0 \frac{\tau'}{\tau' + \mu_h' X} = \vartheta_0 \quad \text{és} \quad \frac{\tau'}{\tau' + \mu_h' X} = c$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + c\alpha$$

és ezekben tehát

$$(dm_x)_3 = d\mu_h' \cos(\vartheta_0 + c\alpha)$$

$$(dm_y)_3 = d\mu_h' \sin(\vartheta_0 + c\alpha)$$

$$(dm_z)_3 = d\mu_v'$$

]

F forgásmomentum.

Az F forgásmomentum három részből áll megfelelőleg a $(dm_x)_1$, $(dm_x)_2$ és $(dm_x)_3$ elem. momentumoknak tehát

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

Kiszámítható az 1) egyenletből 5) 6) és 7) értékek felhasználásával.

Első Feladat.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}, \mu_a, \mu_b, \mu_c$ s azután k_1, k_2, k_3, s ezek irányának meghatározása ismert mágneses térben.

A 10) egyenletek közül a C-re vonatkozót nem használjuk, mert h_0-at nem ismerjük (a földi mágneses erőtér erőit és azok deriváltjait csak nehezen tudnók compensálni). A megmaradó hat egyenlet alapján kell a kilenc mágnesezési ~~adatát~~ megállapítanunk. E szerint az észleletet két különböző mágneses térben kell végeznünk, melyek $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}$ és $X', Y', Z', \frac{\partial X'}{\partial x}, \frac{\partial X'}{\partial y}, \frac{\partial X'}{\partial z}, \frac{\partial Y'}{\partial y}, \frac{\partial Y'}{\partial z}$ által vannak jellemezve. Észleletből az $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ és $A_1', B_1', A_2', B_2', A_3', B_3'$ értékcsoportokat állapítjuk meg.

a) A_2 A_3 és B_3-ra, vagy az A_3 és B_3-ra vonatkozó egyenletekből kiszámítjuk $\frac{a_{11}-a_{22}}{2}$ és a_{12} értékeit.

b) Az A_2, B_2, A_2' és B_2' egyenleteiből $\frac{a_{11}-a_{22}}{2}$ és a_{12} értékeinek felhasználásával kiszámítjuk a a_{23}, a_{31}, μ_a és μ_b értékeit.

c) A már ismert értékek felhasználásával A_1, B_1, A_1', B_1' egyenletekből kiszámítjuk $\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$, a_{33} és μ_c értékeit.

Ha a mágneses teret kizárólag áramok létesítik (tehát a földi erő compensálva van), melyeknek irányát az intensitás betartásával ellentettre fordíthatjuk, akkor $X' = -X$ etc. és A_1+A_1', B_1+B_1' etc. a $\mu_a \mu_b \mu_c$-től, A_1-A_1', B_1-B_1' etc. pedig az a-któl függetlenek.

Ez esetben

a) (A_3+A_3') és (B_3+B_3')-ből kapjuk $\frac{a_{11}-a_{22}}{2}$ és a_{12}-t.

b) (A_2+A_2') és (B_2+B_2')-ből kapjuk a_{23} és a_{31}-et.

c) (A_1+A_1') és (B_1+B_1')-ből kapjuk $\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$ és a_{33}-at.

d) az $(A_2 - A_2')$ és $(B_2 - B_2')$-ből kapjuk μ_a-t és μ_b-t

e) az $(A_1 - A_1')$ vagy $(B_1 - B_1')$-ből kapjuk μ_c-t

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}$ értékeiből k_1, k_2, k_3, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \mu_1 \mu_2 \mu_3, \nu_1 \nu_2 \nu_3$ kiszámítása

A 2) egyenletekből,

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1 \\
\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 &= 1 \\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1 \\
\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 &= 0 \\
\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 &= 0 \\
\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

felhasználásával, következik:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= k_1\lambda_1 \\
a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= k_1\lambda_2 \\
a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 &= k_1\lambda_3 \\[6pt]
a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + a_{13}\mu_3 &= k_2\mu_1 \\
a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + a_{23}\mu_3 &= k_2\mu_2 \\
a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 &= k_2\mu_3 \\[6pt]
a_{11}\nu_1 + a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3 &= k_3\nu_1 \\
a_{12}\nu_1 + a_{22}\nu_2 + a_{23}\nu_3 &= k_3\nu_2 \\
a_{13}\nu_1 + a_{23}\nu_2 + a_{33}\nu_3 &= k_3\nu_3
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 1)$$

e homogén egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

vagyis

$$k^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})k^2 + \left[(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}) - (a_{12}^2+a_{23}^2+a_{13}^2)\right]k +$$
$$+\left[a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{23}a_{31}\right] = 0$$

az egyenlet három gyöke: k_1, k_2, k_3

Ha e szerint teszünk:

$$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) = p$$

$$\left[(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}) - (a_{12}^2+a_{23}^2+a_{13}^2)\right] = q$$

$$\left[a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{23}a_{13}\right] = r$$

tehát $$k^3+pk^2+qk+r=0$$

ennek az egyenletnek gyökei

$$k_1 = -\frac{p}{3} + \sin\alpha\cdot\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}$$

$$k_2 = -\frac{p}{3} + \sin(60^\circ-\alpha)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}$$

$$k_3 = -\frac{p}{3} - \sin(60^\circ+\alpha)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}$$

a hol $$\sin 3\alpha = \left(\frac{27}{2}r - \frac{27}{6}pq + p^3\right)\frac{1}{(p^2-3q)^{\frac{3}{2}}}$$

és 3α-nak pozitív értéke veendő.

Ha most k_1, k_2, k_3 ismeretesek úgy a II egyenletek első hármas csoportját következő alakban írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-k_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + a_{12}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + a_{13} &= 0\\ a_{12}\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + (a_{22}-k_1)\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + a_{23} &= 0\\ a_{13}\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + a_{23}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + (a_{33}-k_1) &= 0\end{aligned}\right\}$$

A mely egyenletek kettőjéből $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ és $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ kiszámítható

és mivel $$\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{\lambda_3^2} = \frac{1}{\lambda_3^2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^2+1$$ következik

$$\frac{1}{\lambda_3} = \sqrt{1+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^2}$$

és így $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, (A λ_3 előjele közömbös mert nem irányról hanem a tengely fekvéséről van szó. λ_3 előjelével együtt változik λ_1 és λ_2 előjele).

Épen így számítjuk ki a III egyenletek második csoportjából μ_1, μ_2, μ_3 értékeit, és a harmadik csoportjából ν_1, ν_2, ν_3 értékeit.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ értékei $k_1\ k_2\ k_3$ és Λ, Φ, Θ szögekkel

Felvesszük egy tengelyrendszert A, B, C-t melynek tengelyei k_1, k_2, k_3 egységekkel párhuzamosak s úgy irányítottak, hogy forgatással az álló X, Y, Z tengely~~...~~rendszerrel ~~...~~ összeesőkké legyenek hozhatók.

Az $k_1\ k_2\ k_3$-at magába foglaló A B C tengelyrendszert XYZ kezdeti állásból, tetszőleges állásba hozhatjuk három forgatással. 1) A Z tengely körül Λ szöggel az X-től Y felé mérve. 2) ~~A~~ az előző A'B'C' tengelyrendszer B' tengelye körül Φ szöggel az A'-től C' felé mérve. 3) az előző A''B''C'' tengelyrendszer A'' tengelye körül Θ szöggel, az B''-től C'' felé mérve, a mivel a k_1, k_2, k_3-al mozgó A, B, C tengelyrendszerhez jutunk.

A Φ és Λ ~~a~~ k_1-et magába foglaló A tengelynek coordinatái szélessége és hosszúsága.

Ennek megfelelőleg kapjuk az első forgatásnál

	X	Y	Z
A'	$+\cos\Lambda$	$+\sin\Lambda$	0
B'	$-\sin\Lambda$	$+\cos\Lambda$	0
C'	0	0	1

A második forgatásnál

	A'	B'	C'
A''	$+\cos\Phi$	0	$+\sin\Phi$
B''	0	1	0
C''	$-\sin\Phi$	0	$+\cos\Phi$

A két első forgatás eredménye.

	X	Y	Z
A''	$+\cos\Phi\cos\Lambda$	$+\cos\Phi\sin\Lambda$	$+\sin\Phi$
B''	$-\sin\Lambda$	$+\cos\Lambda$	0
C''	$-\sin\Phi\cos\Lambda$	$-\sin\Phi\sin\Lambda$	$+\cos\Phi$

A harmadik forgatásnál

	A''	B''	C''
A	1	0	0
B	0	$+\cos\Theta$	$+\sin\Theta$
C	0	$-\sin\Theta$	$+\cos\Theta$

összefoglalva a három forgatás eredménye:

	X	Y	Z
A	$+\cos\Phi\cos\Lambda$	$+\cos\Phi\sin\Lambda$	$+\sin\Phi$
B	$-\cos\Theta\sin\Lambda$ $-\sin\Theta\sin\Phi\cos\Lambda$	$+\cos\Theta\cos\Lambda$ $-\sin\Theta\sin\Phi\sin\Lambda$	$+\sin\Theta\cos\Phi$
C	$+\sin\Theta\sin\Lambda$ $-\cos\Theta\sin\Phi\cos\Lambda$	$-\sin\Theta\cos\Lambda$ $-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Lambda$	$+\cos\Theta\cos\Phi$

Azaz: ~ verte.

(2)
$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\cos\Phi\cos\Lambda\\
\lambda_2 &= +\cos\Phi\sin\Lambda\\
\lambda_3 &= +\sin\Phi\\
\mu_1 &= -\cos\Theta\sin\Lambda - \sin\Theta\sin\Phi\cos\Lambda\\
\mu_2 &= +\cos\Theta\cos\Lambda - \sin\Theta\sin\Phi\sin\Lambda\\
\mu_3 &= +\sin\Theta\cos\Phi\\
\nu_1 &= +\sin\Theta\sin\Lambda - \cos\Theta\sin\Phi\cos\Lambda\\
\nu_2 &= -\sin\Theta\cos\Lambda - \cos\Theta\sin\Phi\sin\Lambda\\
\nu_3 &= +\cos\Theta\cos\Phi
\end{aligned}\right.$$

és ebből a $\lambda_3 = +\sin\Phi$ egyenletből vele Φ kétértéke közül egyet.

Kiválasztva

(3)
$$\left.\begin{aligned}
\sin\Lambda &= \frac{\lambda_2}{\cos\Phi}\\
\cos\Lambda &= \frac{\lambda_1}{\cos\varphi}
\end{aligned}\right\}$$ tehát Λ ismeretes.

és
$$\left.\begin{aligned}
\sin\Theta &= \frac{\mu_3}{\cos\Phi}\\
\cos\Theta &= \frac{\nu_3}{\cos\Phi}
\end{aligned}\right\}$$ tehát Θ ismeretes.

a_{11} a_{22} a_{33} a_{12} a_{23} a_{31} egytengelyű test esetében.

A 2) egyenletekbe téve $k_2 = k_3$

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= (k_1 - k_2)\lambda_1^2 + k_2 \\
a_{22} &= (k_1 - k_2)\lambda_2^2 + k_2 \\
a_{33} &= (k_1 - k_2)\lambda_3^2 + k_3 \\
a_{12} &= (k_1 - k_2)\lambda_1\lambda_2 \\
a_{23} &= (k_1 - k_2)\lambda_2\lambda_3 \\
a_{31} &= (k_1 - k_2)\lambda_1\lambda_3
\end{aligned}\right\} \quad 13$$

és egy 12) felhasználásával

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= k_2 + (k_1 - k_2)\cos^2\Phi\cos^2\Lambda \\
a_{22} &= k_2 + (k_1 - k_2)\cos^2\Phi\sin^2\Lambda \\
a_{33} &= k_2 + (k_1 - k_2)\sin^2\Phi \\
a_{12} &= (k_1 - k_2)\cos^2\Phi\,\frac{\sin 2\Lambda}{2} \\
a_{23} &= (k_1 - k_2)\,\frac{\sin 2\Phi}{2}\,\sin\Lambda \\
a_{31} &= (k_1 - k_2)\,\frac{\sin 2\Phi}{2}\,\cos\Lambda
\end{aligned}\right\} \quad 14$$

a_{11} a_{22} a_{33} a_{12} a_{23} a_{31} izotrópos testre

$k_1 = k_2 = k_3 = k$.

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= k \\
a_{22} &= k \\
a_{33} &= k \\
a_{12} &= 0 \\
a_{23} &= 0 \\
a_{31} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad 15.$$

Második feladat.

$X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}$ meghatározása ismert mágneses testek segélyével.

Az A_1, B_1, A_2, B_2 és $A_3 B_3$ értékei legfeljebb hat egyenletet adván a fenti 8 érték csak ~~akkor~~ akkor határozható meg, ha a megfigyeléseket egynél több testtel, vagy egy testnek különböző helyzetek alkalmazásával végezzük.

első eljárási mód isotrop influált testekkel és állandó mágnesességgel.

Egy isotrop testre $a_{11} = a_{22} = a_{33} = k$ és $a_{12} = 0, a_{23} = 0, a_{31} = 0$

ezenkívül $A_3 = 0$ és $B_3 = 0$ lévén

$$F = C - A_1 \sin\alpha + B_1 \cos\alpha - A_2 \sin 2\alpha + B_2 \cos 2\alpha \quad \text{és}$$

$$C = \mu_b \frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$A_1 = kL\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega + \mu_a X + \mu_b Y + L\mu_c \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$B_1 = kL\left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\Omega + \mu_a Y - \mu_b X + L\mu_c \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$A_2 = L\mu_b \frac{\partial X}{\partial y} + \mu_a \frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$B_2 = L\mu_a \frac{\partial X}{\partial y} - \mu_b \frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

a) lévén A_2 és B_2 értékeiből kiszámíthatók $\frac{\partial X}{\partial y}$ és $\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ értékei $\Lambda=\pi$

b) lévén a testet függélyes tengely körül π-vel elforgatjuk, akkor

$$\mu_a' = -\mu_a \qquad \mu_b' = -\mu_b \quad \text{és így}$$

$$(A_1)_{\Lambda=0} - (A_1)_{\Lambda=\pi} = 2\mu_a X + 2\mu_b Y$$ a miből kapjuk X és Y értékét.

$$(B_1)_{\Lambda=0} - (B_1)_{\Lambda=\pi} = 2\mu_a Y - 2\mu_b X$$

c) Felfüggesztünk egy második testet melyre nézve k' μ_a' μ_b' μ_c' a mágneses állandók, melyek A_1', B_1', A_2', B_2' értékeket eredményeznek.

Rideg rudon (annak egyik végén), rideg fonálon függő ~~...~~ test

Forgatva a test felfüggesztési pontja, tehát súlypontján átmenő függélyes tengely körül

Feltesszük hogy X, Y, Z és $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}$ a felfüggesztett test által forgás közben elfoglalt térben állandóak.

(Translatoriás erőközön rideg fonálon függő test) ~~tehát~~ T

$$F_3 = 0.$$

A forgó ABC tengelyrendszer AC síkja a felfüggesztett test súlypontján (felfüggesztési pont) és a forgási tengelyen át van fektetve.

A súlypont forgási sugara legyen L ~~...~~

~~...~~ Egyrészt $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}$ etc. minden térfogati elemre ugyanazok, másrészt

$$l\cos(\alpha+\varepsilon) = l\cos\alpha\cos\varepsilon - l\sin\alpha\sin\varepsilon = (L+a)\cos\alpha - b\sin\alpha$$

$$l\sin(\alpha+\varepsilon) = l\sin\alpha\cos\varepsilon + l\cos\alpha\sin\varepsilon = (L+a)\sin\alpha + b\cos\alpha$$

ahol a, b az elem összetevői egy ABC irányú a súlyponton át fektetett tengelyrendszerben, tehát

$$\int l\cos(\alpha+\varepsilon)\,dw = L\cos\alpha\,\Omega$$

$$\int l\sin(\alpha+\varepsilon)\,dw = L\sin\alpha\,\Omega$$

ha Ω a test térfogatát jelenti,

E szerint esetünkben:

$$F = F_1 + F_2 = Y\frac{dm_x}{dw}\Omega - X\frac{dm_y}{dw}\Omega + L\cos\alpha\,\Omega\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dm_x}{dw} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dm_y}{dw} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dm_z}{dw}\right) -$$
$$- L\sin\alpha\,\Omega\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dm_x}{dw} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dm_y}{dw} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{dm_z}{dw}\right)$$

ahol $dm_x = (dm_x)_1 + (dm_x)_2$ etc.

és $(dm_x)_1$, $(dm_x)_2$ az 5) és 6) egyenletekből veendők

így kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = &+\left\{ a_{23}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right] + a_{31}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial Y}{\partial z} - Y\frac{\partial X}{\partial z}\right]\right\}\Omega + \mu_b\frac{\mathcal{L}}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Bigg\}_C \\
&-\sin\alpha\left[\left\{a_{23}YZ + a_{31}XZ + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\mathcal{L}\left[X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right] - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{\mathcal{L}}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + a_{33}\mathcal{L}Z\frac{\partial X}{\partial z} - a_{12}\frac{\mathcal{L}}{2}Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\Omega + \mu_a X + \mu_b Y + \mathcal{L}\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}\right]_{A_1} \\
&+\cos\alpha\left[\left\{-a_{23}XZ + a_{31}YZ + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\mathcal{L}\left[X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right] - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{\mathcal{L}}{2}Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + a_{33}\mathcal{L}Z\frac{\partial Y}{\partial z} + a_{12}\frac{\mathcal{L}}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\Omega + \mu_a Y - \mu_b X + \mathcal{L}\mu_c\frac{\partial Y}{\partial z}\right]_{B_1} \\
&-\sin 2\alpha\left[\left\{-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}(Y^2-X^2) + 2a_{12}XY + a_{23}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial Y}{\partial z}+Y\frac{\partial X}{\partial z}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right] + a_{31}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial X}{\partial z} - Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]\right\}\Omega + \mathcal{L}\mu_b\frac{\partial X}{\partial y} + \mu_a\frac{\mathcal{L}}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_{A_2} \\
&+\cos 2\alpha\left[\left\{+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}2XY + a_{12}(Y^2-X^2) - a_{23}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial X}{\partial z} - Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right] + a_{31}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\frac{\partial Y}{\partial z}+Y\frac{\partial X}{\partial z}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}\Omega + \mathcal{L}\mu_a\frac{\partial X}{\partial y} - \mu_b\frac{\mathcal{L}}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_{B_2} \\
&-\sin 3\alpha\left\{\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right] + a_{12}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}\Omega_{A_3} \\
&+\cos 3\alpha\left\{\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y}\right] - a_{12}\frac{\mathcal{L}}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}\Omega_{B_3}
\end{aligned}
\qquad 8)
$$

Torziós mérlegen $\mathcal{F} = \frac{n-n_0}{2S}\tau$ S = skálatávol skálarészekben. n_0 a leolvasott állás nulla intenzitású mágneses térben.

írom most: vagy ha $n-n_0=\nu$ $\mathcal{F} = \frac{\nu}{2S}\tau$

$$\mathcal{F} = \frac{\nu}{2S}\tau = C - A_1\sin\alpha + B_1\cos\alpha - A_2\sin 2\alpha + B_2\cos 2\alpha - A_3\sin 3\alpha + B_3\cos 3\alpha \quad \dots \quad 9)$$

a hol C, A_1, B_1 etc. értékei a 8) egyenletben vannak kiírva.

α forgásszöget különböző elegendő számú értékeinek megfelelő ν-ket

észlelve a C, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 meghatározására szolgáló

egyenleteket kapjuk.

A számításra kényelmesnek mutatkozik a régi

$$F = \frac{v}{2S}\tau =$$

	α	
1	0	$C + B_1 + B_2 + B_3$
2	45°	$C - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_1 - A_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}A_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}B_3$
3	90°	$C - A_1 - B_2 + A_3$
4	135°	$C - \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B_1 + A_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}A_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_3$
5	180°	$C - B_1 + B_2 - B_3$
6.	225°	$C + \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B_1 - A_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}A_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_3$
7	270°	$C + A_1 - B_2 - A_3$
8	315°	$C + \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_1 + A_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}A_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}B_3$

s ezekből

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_8-v_4)+(v_6-v_2)+\sqrt{2}(v_7-v_3)}{4\sqrt{2}}\\
B_1 &= \frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_8-v_4)-(v_6-v_2)-\sqrt{2}(v_5-v_1)}{4\sqrt{2}}\\
A_2 &= \frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_8-v_6)+(v_4-v_2)}{4}\\
B_2 &= -\frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_7-v_5)+(v_3-v_1)}{4}\\
A_3 &= \frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_8-v_4)+(v_6-v_2)-\sqrt{2}(v_7-v_3)}{4\sqrt{2}}\\
B_3 &= -\frac{\tau}{2S}\,\frac{(v_8-v_4)-(v_6-v_2)+\sqrt{2}(v_5-v_1)}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}\right\}\quad 10)$$

$$C = \frac{\tau}{2S}\,\frac{v_1+v_3+v_5+v_7}{4} = \frac{\tau}{2S}\,\frac{v_2+v_4+v_6+v_8}{4}$$

A 10 egyenletekbe a 8)-ból vett $A_1\, B_1\, A_2\, B_2\, A_3\, B_3\, C$ értékeket betéve kapunk hét egyenletet a $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}$ és $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}, \mu_a, \mu_b, \mu_c$ meghatározására.

és
$$\begin{cases} A_1 = k L\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega+\mu_a X+\mu_b Y+L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z} \\ A_1' = k' L\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right)\Omega'+\mu_a' X+\mu_b' Y+L\mu_c'\frac{\partial X}{\partial z} \end{cases}$$

ebből a kettőből kapjuk (mint X és Y már ismertek)

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right) \text{ és } \frac{\partial X}{\partial z} \text{ értékeit}$$

$$\begin{cases} B_1 = k L\left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\Omega+\mu_a Y-\mu_b X+L\mu_c\frac{\partial Y}{\partial z} \\ B_1' = k L\left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\Omega'+\mu_a' Y-\mu_b' X+L\mu_c'\frac{\partial Y}{\partial z} \end{cases}$$

ezekből kapjuk

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \text{ és } \frac{\partial Y}{\partial z} \text{ értékeit}$$

ha teszünk $\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}=N$ vagyis N akkor a már ismert

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}\right) \text{ és } \left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial X}{\partial x}-N\frac{\partial X}{\partial x}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

érték kettős kiszámítjuk $\frac{\partial X}{\partial x}$ és Z értékét s tehát $\frac{\partial Y}{\partial y}$

így megoldottuk a feladatot.

<u>Második eljárás egy anisotrop egytengelyű testtel</u> ~~[illegible]~~ <u>ebben állandó mágnesesség-gel vagy a széltől</u>

Ilyen testet választunk melyre nézve $\varphi = 45^0$ s elfogadással először $\Lambda = 0$, másodszor $\Lambda = \pi$ akkor +) a 14 egyenletekből következik

$\Lambda = 0$ ra	$a_{11} = \frac{k_1+k_2}{2}$	és $\Lambda = 180^\circ$ ra	$a_{11}' = a_{11}$
	$a_{22} = k_2$		$a_{22}' = a_{22}$
	$a_{33} = \frac{k_1+k_2}{2}$		$a_{33}' = a_{33}$
	$a_{12} = 0$		$a_{12}' = 0$
	$a_{23} = 0$		$a_{23}' = 0$
	$a_{13} = \frac{k_1-k_2}{2}$		$a_{13}' = -a_{13} = -\frac{k_1-k_2}{2}$

ez értékek felhasználásával a 8) ból kapjuk: ~~[illegible]~~

+) ez nem az egyetlen, csak egy kényelmes megoldás

$\Lambda=0$-ra vonatkozólag $C, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ értékeket, $\Lambda=\pi$-re vonatkozólag $C', A_1', B_1', A_2', B_2', A_3', B_3'$ értékeket, melyek egymástól csak egyes tagok előjelében különböznek. A felső előjel $\Lambda=0$ azaz C, A, B indexekre, az alsó előjel $\Lambda=\pi$ azaz C', A_1', B_1' indexekre vonatkozván lesz.

$$\left.\begin{matrix}C\\C'\end{matrix}\right\}=\pm\frac{L}{2}\,\frac{k_1-k_2}{2}\left(X\frac{\partial Y}{\partial z}-Y\frac{\partial X}{\partial z}\right)\pm\mu_b\frac{L}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}A_1\\A_1'\end{matrix}\right\}=\pm\frac{k_1-k_2}{2}XZ+\frac{k_1+3k_2}{4}L\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)+\frac{k_1-k_2}{4}\frac{L}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{k_1+k_2}{2}LZ\frac{\partial X}{\partial z}\pm\mu_b Y\pm\mu_a X+L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\left.\begin{matrix}B_1\\B_1'\end{matrix}\right\}=\pm\frac{k_1-k_2}{2}YZ+\frac{k_1+3k_2}{4}L\left(X\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{k_1-k_2}{4}\frac{L}{2}Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{k_1+k_2}{2}LZ\frac{\partial Y}{\partial z}\pm\mu_a Y\mp\mu_b X+L\mu_c\frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$\left.\begin{matrix}A_2\\A_2'\end{matrix}\right\}=-\frac{k_1-k_2}{4}(Y^2-X^2)\pm\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+X\frac{\partial X}{\partial z}-Y\frac{\partial Y}{\partial z}\right]\pm L\mu_b\frac{\partial X}{\partial y}\mp\frac{L}{2}\mu_a\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}B_2\\B_2'\end{matrix}\right\}=+\frac{k_1-k_2}{4}2XY\pm\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}\left[X\frac{\partial Y}{\partial z}+Y\frac{\partial X}{\partial z}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right]\pm L\mu_a\frac{\partial X}{\partial y}\pm\frac{L}{2}\mu_b\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}A_3\\A_3'\end{matrix}\right\}=+\frac{k_1-k_2}{4}\frac{L}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}B_3\\B_3'\end{matrix}\right\}=+\frac{k_1-k_2}{4}\frac{L}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

Ezekből lesz:

$$C+C'=0$$

$$A_1+A_1'=\frac{k_1+3k_2}{2}L\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)+\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+(k_1+k_2)LZ\frac{\partial X}{\partial z}+2L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$B_1+B_1'=\frac{k_1+3k_2}{2}L\left(X\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+(k_1+k_2)LZ\frac{\partial Y}{\partial z}+2L\mu_c\frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$A_2+A_2'=-\frac{k_1-k_2}{2}(Y^2-X^2)$$

$$B_2+B_2'=+(k_1-k_2)XY$$

$$A_3+A_3'=\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

$$B_3+B_3'=\frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

és:

$$C - C' = +\frac{k_1-k_2}{2} L\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} - Y\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \mu_6 L\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$A_1 - A_1' = +(k_1-k_2)XZ + 2\mu_6 Y + 2\mu_a X$$

$$B_1 - B_1' = +(k_1-k_2)YZ + 2\mu_a Y - 2\mu_6 X$$

$$A_2 - A_2' = +\frac{k_1-k_2}{2}L\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+X\frac{\partial X}{\partial z}-Y\frac{\partial Y}{\partial z}\right]+2L\mu_6\frac{\partial X}{\partial y}-L\mu_a\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$B_2 - B_2' = +\frac{k_1-k_2}{2}L\left[X\frac{\partial Y}{\partial z}+Y\frac{\partial X}{\partial z}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right]+2L\mu_a\frac{\partial X}{\partial y}+L\mu_6\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$A_3 - A_3' = 0$$

$$B_3 - B_3' = 0$$

Az $X\ Y\ Z\ \frac{\partial X}{\partial x}\ \frac{\partial X}{\partial y}\ \frac{\partial X}{\partial z}\ \frac{\partial Y}{\partial y}\ \frac{\partial Y}{\partial z}$ kiszámítása következőképen történhetik:

a) lépés (A_2+A_2') és (B_2+B_2') értékeiből kapjuk $(Y^2-X^2)=a$ és $XY=b$ értékeket

tehát $\frac{b^2}{X^2}-X^2=a$ és $X^4+aX^2=b^2$ miből

$X^2=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$ (a gyök előtt csak + jel lehet mert X^2 pozitív)

és $Y^2=X^2+a$

tehát megkapjuk $X=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}}$ és $Y=\frac{X^2}{b}$

b) lépés (A_1-A_1') értékét írva:

$$A_1-A_1'=+(k_1-k_2)XZ+\left(2\mu_6\frac{1}{b}+2\mu_a\right)X^2$$

ebből az X két értékének (+ és −) megfelelő két Z értéket kapjuk

a $B_1-B_1'=+(k_1-k_2)Z\frac{X}{b}+\left(2\mu_a\frac{1}{b}-2\mu_6\right)X^2$

egyenlet az X előjelének eldöntésére szolgálhat. Így a) és b) lépésekkel $X\ Y\ Z$ ismertek. Az X és ~~ebből~~ vagyis Y és Z kétértelműsége eldönthető ha $(2\mu_6\frac{1}{b}+2\mu_a)$ és $(2\mu_a\frac{1}{b}-2\mu_6)$ nem nulla. Ez utóbbi esetben különösen ha $\mu_a=0$ és $\mu_6=0$, külön értelésre van szükség az X, Y, Z előjeleinek megállapításához. Erre szolgálhat egy újabb mérés és hozzáadása, melyre nézve csak az intenzitás komponensek valamelyikét kell ismernünk, például $X=\xi$. Akkor

$$(B_2+B_2')_\xi=(B_2+B_2')_{\xi=0}+(k_1-k_2)\xi Y$$

és így Y s azután X és Z előjele meghatározható

c) lépés (A_3+A_3') és (B_3+B_3')-ből kiszámítjuk $\frac{\partial X}{\partial y}$ és $\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ értékeket

d) lépés (A_2-A_2') és (B_2-B_2')-ből kiszámítjuk $\frac{\partial X}{\partial z}$ és $\frac{\partial Y}{\partial z}$ értékeket.

e) lépés A_1+A_2' értékét írjuk:

$$(A_1+A_1') = \frac{k_1+3k_2}{2} L\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right] + \frac{k_1-k_2}{2}\frac{L}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + (k_1+k_2)LX\frac{\partial Y}{\partial y}$$
$$+ (k_1+k_2)LZ\frac{\partial X}{\partial z} + 2L\mu_c\frac{\partial X}{\partial z}$$

a miből $\frac{\partial Y}{\partial y}$ kiszámítható és mert $\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ ismeretes $\frac{\partial X}{\partial x}$ is kiszámítható

tehát ismerjük $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}$

1

$F = \int Y\,dm$

Forgási momentum Z tengely körül

Álló Coordináta rendszer X északra, Y keletre, Z lefelé forgási tengely

A forgó test egy elemének eredő mágneses momentumai az álló X, Y, Z tengelyrendszerre vonatkoztatva dm_x, dm_y, dm_z, X, Y, Z mágneses intenzitás komponensei

Forgó testben avval mozgó felvett tengelyrendszer A, B, C, C lefelé forgási tengely ebben az ~~elem~~ mágneses összetevői dm_A, dm_B, dm_C iránycosinusai: λ, μ, ν
A = irányvonal az északi X-el képezte szöglet = α; a test $d\omega$ térfogati elemének és a C-n keresztül fektetett sík az AC síkkal ε szögletet képez.

~~Forgási mo~~ Forgási momentum:

$$F = \int Y\,dm_x - \int X\,dm_y + \int x\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dm_x + \frac{\partial Y}{\partial y}dm_y + \frac{\partial Y}{\partial z}dm_z\right) - \int y\left(\frac{\partial X}{\partial x}dm_x + \frac{\partial X}{\partial y}dm_y + \frac{\partial X}{\partial z}dm_z\right) \quad \text{I.}$$

A dm mágneses momentum és összetevői dm_x, dm_y, dm_z három részből vannak összetéve 1) az X, Y, Z által influált momentum 2) a ~~[illegible]~~ testben rögzített momentum $d\mu$ 3) a forgó rideg testen rendszeresen felfüggesztett momentum $d\mu'$

tehát $dm_x = (dm_x)_1 + (dm_x)_2 + (dm_x)_3$

a) $(dm_x)_1, (dm_y)_1, (dm_z)_1$ kiszámítása

Háromtengelyű anisotrop test. K_1, K_2, K_3 a fő mágnesezési állandók.
iránycosinusok

	A	B	C
K_1	λ_1	μ_1	ν_1
K_2	λ_2	μ_2	ν_2
K_3	λ_3	μ_3	ν_3

$$(dm_A)_1 = \{(K_1\lambda_1^2 + K_2\lambda_2^2 + K_3\lambda_3^2)A + (K_1\lambda_1\mu_1 + K_2\lambda_2\mu_2 + K_3\lambda_3\mu_3)B + (K_1\lambda_1\nu_1 + K_2\lambda_2\nu_2 + K_3\lambda_3\nu_3)C\}d\omega$$

$$(dm_B)_1 = \{(K_1\lambda_1\mu_1 + K_2\lambda_2\mu_2 + K_3\lambda_3\mu_3)A + (K_1\mu_1^2 + K_2\mu_2^2 + K_3\mu_3^2)B + (K_1\mu_1\nu_1 + K_2\mu_2\nu_2 + K_3\mu_3\nu_3)C\}d\omega$$

$$(dm_C)_1 = \{(K_1\lambda_1\nu_1 + K_2\lambda_2\nu_2 + K_3\lambda_3\nu_3)A + (K_1\mu_1\nu_1 + K_2\mu_2\nu_2 + K_3\mu_3\nu_3)B + (K_1\nu_1^2 + K_2\nu_2^2 + K_3\nu_3^2)C\}d\omega$$

áttérve az álló X Y Z tengelyrendszerre tehát:

$$
1)\quad
\begin{aligned}
(dm_x)_1 &= (dm_a)_1\cos\alpha - (dm_b)_1\sin\alpha \\
(dm_y)_1 &= (dm_a)_1\sin\alpha + (dm_b)_1\cos\alpha \\
(dm_z)_1 &= (dm_c)_1
\end{aligned}
$$

és dm_a dm_b dm_c értékeiben ...:

$$
2)\quad
\begin{aligned}
A &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\
B &= -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \\
C &= Z.
\end{aligned}
$$

tesszük

$$
3)\quad
\left\{
\begin{aligned}
a_{11} &= K_1\lambda_1\lambda_1 + K_2\lambda_2\lambda_2 + K_3\lambda_3\lambda_3 \\
a_{22} &= K_1\mu_1\mu_1 + K_2\mu_2\mu_2 + K_3\mu_3\mu_3 \\
a_{33} &= K_1\nu_1\nu_1 + K_2\nu_2\nu_2 + K_3\nu_3\nu_3 \\
a_{12} &= K_1\lambda_1\mu_1 + K_2\lambda_2\mu_2 + K_3\lambda_3\mu_3 \\
a_{23} &= K_1\mu_1\nu_1 + K_2\mu_2\nu_2 + K_3\mu_3\nu_3 \\
a_{31} &= K_1\nu_1\lambda_1 + K_2\nu_2\lambda_2 + K_3\nu_3\lambda_3
\end{aligned}
\right.
$$

úgy hogy:

$$
4)\quad
\begin{aligned}
(dm_a)_1 &= a_{11}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{12}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{13}Z \\
(dm_b)_1 &= a_{12}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{22}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{23}Z \\
(dm_c)_1 &= a_{31}(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + a_{23}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + a_{33}Z
\end{aligned}
$$

a 4) értékeit 1) be téve.

$$
5)\quad
\begin{aligned}
(dm_x)_1 &= X\left(a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha\right) + Y\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\right) + Z\left(a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha\right) \\
(dm_y)_1 &= X\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\right) + Y\left(a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha\right) + Z\left(a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha\right) \\
(dm_z)_1 &= X\left(a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha\right) + Y\left(a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha\right) + a_{33}Z
\end{aligned}
$$

$$\left(a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha\right) = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha$$

$$\left(a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha\right) = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha$$

b) $(dm_x)_2$, $(dm_y)_2$, $(dm_z)_2$ kiszámítása

az ~~remanens mágnességének~~ dom horizontális components legyen $d\mu_h$
verticalis - - - - μ_v

a szöget melyet $d\mu_h$ az A lengőjével képez legyen δ

$$6)\quad \begin{aligned}(dm_x)_2 &= d\mu_h \cos(\alpha+\delta)\\ (dm_y)_2 &= d\mu_h \sin(\alpha+\delta)\\ (dm_z)_2 &= d\mu_v\end{aligned}$$

c) $(dm_x)_3$ $(dm_y)_3$ $(dm_z)_3$ kiszámítása

a függő mágnes horizontális componense $= d\mu_h'$
verticalis componens $= d\mu_v'$

$$7)\quad \begin{aligned}(dm_x)_3 &= d\mu_h' \cos\vartheta\\ (dm_y)_3 &= d\mu_h' \sin\vartheta\\ (dm_z)_3 &= d\mu_v'\end{aligned}$$

ϑ a μ_h' és X által képezett szöglete

ha τ' a függesztő ~~adoit~~ torsió állandója, φ felső végének elfordulása

$\varphi = \varphi_0 + \alpha$ tehát φ_0 az elfordulás $\alpha = 0$ állásban ellen.

$$8)\qquad \tau'(\varphi_0 + \alpha - \vartheta) = \int d\mu_h' X \sin\vartheta = \mu_h' X \sin\vartheta$$

ebből kiszámítható ϑ.

Ha mint a translatométer ϑ kicsiny akkor szinte helyette ϑ-t [illegible]

$$\vartheta = (\varphi_0+\alpha)\frac{\tau'}{\tau'+\mu_h X} \quad \text{vagy tán} \quad \varphi_0\frac{\tau'}{\tau'+\mu_h X} = \vartheta_0 \qquad \frac{\tau'}{\tau'+\mu_h X} = c \qquad 9)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + c\alpha$$

c a translatométernél kicsiny például $\tau' = \frac{1}{30}$, $\mu_h X = 10$

és így

$$10)\quad \left\{\begin{aligned}(dm_x)_3 &= d\mu_h' \cos(\vartheta_0 + c\alpha)\\ (dm_y)_3 &= d\mu_h' \sin(\vartheta_0 + c\alpha)\\ (dm_z)_3 &= d\mu_v'\end{aligned}\right.$$

---

5) 7) és 10) I be téve adja Fet.

F mia alakja $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$ $\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$ etc. felhasználásával.

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial x} y + \frac{\partial X}{\partial y} x \qquad \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Z}{\partial x} y + \frac{\partial Z}{\partial y} x \qquad 11)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Y}{\partial x} y + \frac{\partial Y}{\partial y} x$$

és felhasználva. $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$ $\quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}$

$$F = \int Y dm_x - \int X dm_y + \int \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} dm_x + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} dm_y + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} dm_z\right) \qquad II$$

Ha a forgó test 1, 2, 3, 4 különböző homogén részekből áll melyek összegezésére vonatkozik a $\sum$ jel. akkor $F = F_1 + F_2 + F_3$

$$F_1 = \sum \Big\{ \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha\right)\int \left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) d\omega + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\right)\int \left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) d\omega$$

$$+ (a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha)\int \left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) d\omega + (a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha)\int \left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) d\omega$$

$$+ \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\int \left(X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) d\omega + a_{33}\int Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha} d\omega \Big\} \qquad III$$

$$F_2 = \sum \left\{ \int \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\right)\cos(\alpha+\vartheta)\, d\mu_h + \int \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} - X\right)\sin(\alpha+\vartheta)\, d\mu_h + \int \frac{\partial Z}{\partial \alpha} d\mu_v \right\}$$

$$F_3 = \sum \left\{ \int \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\right)\cos\vartheta\, d\mu_h' + \int \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} - X\right)\sin\vartheta\, d\mu_h' + \int \frac{\partial Z}{\partial \alpha} d\mu_v' \right\}$$

III. Formulum általánosítása, §1 pontban első

l hosszú karon ω kitérésű kicsiny homogen mágnesesen influált test.. $\mu_1 \mu' = 0$, a függő szál többi részére $a_{11} \ldots a_{31} = 0$.

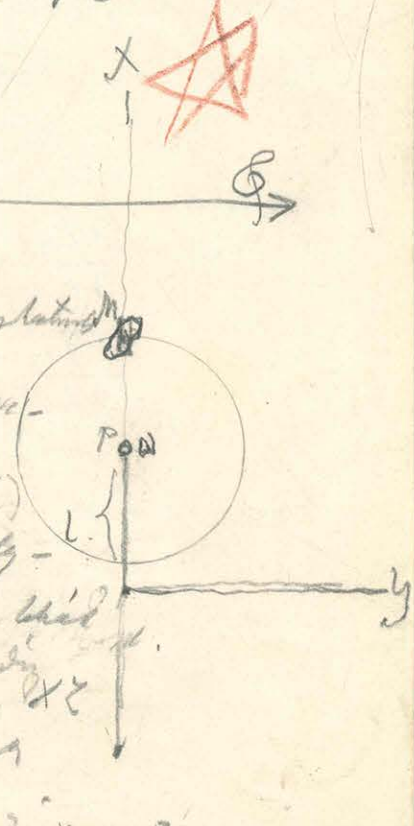
akkor: $\mathcal{F} = F_1$ és így

$$F_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left[\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial\alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\cos 2\alpha + \left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right)\sin 2\alpha\right]$$
$$+ a_{12}\omega\left[\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial\alpha}\right)\cos 2\alpha - \left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial\alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)\sin 2\alpha\right]$$
$$+ a_{23}\omega\left[\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right)\cos\alpha - \left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial\alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right)\sin\alpha\right] \qquad (2)$$
$$+ a_{31}\omega\left[\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial\alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right)\cos\alpha + \left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right)\sin\alpha\right]$$
$$+ \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\left(X\frac{\partial X}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)$$
$$+ a_{33}\omega Z\frac{\partial Z}{\partial\alpha}.$$

és ebben $x = l\cos\alpha$
$y = l\sin\alpha$.

és így a 11) egyenlet adja

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial\alpha} &= -\frac{\partial X}{\partial x}l\sin\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}l\cos\alpha\\ \frac{\partial Y}{\partial\alpha} &= -\frac{\partial Y}{\partial x}l\sin\alpha + \frac{\partial Y}{\partial y}l\cos\alpha\\ \frac{\partial Z}{\partial\alpha} &= -\frac{\partial Z}{\partial x}l\sin\alpha + \frac{\partial Z}{\partial y}l\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \quad \ldots 13$$



Feltételezések a mágneses transformációkban

A függő ω ~~Dasat~~ forgás körül M mágneses hatók forgatandók (egy, vagy több mágnes, áramkörök melyek a fonállal összeerő forgóeszközhöz vannak rögzítve)

Az M h-tók által kifejtett erők Componensei egy koordinátarendszerre vonatkoztatva, melynek kezdetpontja (x_0, y_0, z_0)-ra ω-ban lévő P helyen van, melynek Z tengelye az előbbi Z ~~[illegible]~~ párhuzamos XZ síkja pedig az által XZ-vel ϑ szögletet képező legyenek X_{M0}, Y_{M0}, Z_{M0} és az $X_0 Y_0 Z$ koordinátarendszerben egy pont összetevői $x_0 y_0 z_0$

az M hatók összetevői XYZ koordinátarendszerben $X_m\ Y_m\ Z_m$

akkor:

$$X_m = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y_0}\right)_m \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

$$Y_m = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial U}{\partial y_0}\right)_m \frac{\partial y_0}{\partial y}$$

$$Z_m = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_m = \left(\frac{\partial U}{\partial z_0}\right)_m$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\right)_m \left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2}\right)_m \left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial y_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\right)_m \left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2}\right)_m \left(\frac{\partial y_0}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial y_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_0}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2}\right)_m \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial y_0}\right)_m \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_0^2}\right)_m$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial z_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_0 \partial z_0}\right)_m \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial z_0}\right)_m \frac{\partial x_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_0 \partial z_0}\right)_m \frac{\partial y_0}{\partial y}$$

mint pedig:

$$x_0 = (x-l)\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$
$$y_0 = -(x-l)\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$
$$z_0 = z$$

ezért:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \cos\vartheta \qquad \frac{\partial x_0}{\partial y} = \sin\vartheta$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = -\sin\vartheta \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \cos\vartheta$$

ezek után: mint $\left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\right)_m = X_{m0}$ stb.

Ha A, B, C, a forgó M hatókon kívül az XYZ koordinátarendszer állandó mágneses Compensatio ~~[illegible]~~

$$X = X_{10}\cos\vartheta - Y_{10}\sin\vartheta + A$$

$$Y = X_{10}\sin\vartheta + Y_0\cos\vartheta + B$$

$$Z = Z_{10} + C$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{10}\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{10}\sin^2\vartheta - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{10}\sin 2\vartheta$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{10}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{10}\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{10}\sin 2\vartheta$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{10} - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{10}\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2} + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{10}\cos 2\vartheta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{10}\cos\vartheta - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{10}\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{1}\sin\vartheta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{10}\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{10}$$

14.)

Compensált esetére $A=0$ $B=0$ $C=0$

Először tetszőleges mágneses hatószerkezetre a forgásmomentumot kiszámítjuk. X_{10} Y_{10} Z_{10}, $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{10}$ és A, B, C etc. értékei alapján a 14ből X, Y, Z $\frac{\partial X}{\partial x}$-et számítom azután 13ból az $\frac{\partial K}{\partial a}$ etc. végre 12ből az $F.1.$

Speciális mágneses hatás

Egy mágnes melynek tengelye az $X_0 Z_0$ síkban fekszik. akkor $Y_{10}=0$ és $\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{10}=0$ $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{10}=0$ $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{10}=0$.

és így ha az XYZ koordinátarendszer XZ síkja a mágnes meridiánja ~~a~~ lehát $A=dl$ $B=0$. $C=0$

$$X = X_{h0}\cos\vartheta + U \qquad Z = Z_{h0} + V$$

$$Y = X_{h0}\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{h0}\sin^2\vartheta$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{h0}\cos^2\vartheta$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0} - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{h0}\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{h0}$$

14'

Compensált esetében
$U=0 \quad V=0$

Ha a mágnes tengelye X_0Z_0-ba esik és tengelye X_0 párhuzamos és tengelye az X_0-ba esik, akkor a 14'-re vonatkozókon kívül még:

$$Z_{h0} = 0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{h0} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{h0} \quad \text{lesz } \Delta U = 0 \text{ lévén } \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{h0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{0m} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}$$

és szerint

$$X = X_{h0}\cos\vartheta + U$$

$$Y = X_{h0}\sin\vartheta$$

$$Z = V$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}\left(\sin^2\vartheta - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{3}{4}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}\sin 2\vartheta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{h0}$$

14''

Compensált esetében
$U=0 \quad V=0$

2*

2*

A 12) és 13 formulákat ismerve kapjuk a kicsiny testre tetszőleges hatás által gyakorolt mágneses erők influentiája folytán való forgásmomentumait.

$$\frac{F_1}{w} = + a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} - Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + a_{31}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} - Y\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$-\sin\alpha\left\{a_{23}YZ + a_{31}XZ + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}l\left[X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right] + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{l}{2}X\frac{\partial Z}{\partial z} + a_{33}lZ\frac{\partial Z}{\partial x}\right\}^{+)}$$

$$+\cos\alpha\left\{-a_{23}XZ + a_{31}YZ + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}l\left[X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right] + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{l}{2}Y\frac{\partial Z}{\partial z} + a_{33}lZ\frac{\partial Z}{\partial y}\right\}^{+)}$$

$$-\sin 2\alpha\left\{-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}(Y^2-X^2) + 2a_{12}XY + a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right) + a_{31}\frac{l}{2}\left(Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\cos 2\alpha\left\{+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}2XY + a_{12}(Y^2-X^2) - a_{23}\frac{l}{2}\left(Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\frac{\partial Z}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + a_{31}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial x} + 2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right\}$$

$$-\sin 3\alpha\left\{\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{l}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right] + a_{12}\frac{l}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}$$

$$+\cos 3\alpha\left\{\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{l}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 2X\frac{\partial X}{\partial y}\right] - a_{12}\frac{l}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - 2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}$$

+) +) Tarpataki végleges javítása, hozzá adandó még:

$$-a_{12}\frac{l}{2}Y\frac{\partial Z}{\partial z}\sin\alpha - a_{12}\frac{l}{2}X\frac{\partial Z}{\partial z}\cos\alpha$$

Jó Budapest 1915 Sept. 21

3

β) $F_1 F_2 F_3$ és $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, X, Y, Z. értékei a coordinata kezdetpontjának fekvésétől függetlenek, ~~de~~ csak a X Y Z irányoktól függenek.

A mágneses erőtér össze van téve kettőből a) a külső állandónak felvett térből (földi magneses erő), melynek az X Y Z tengelyrendszerre vonatkoztatott összetevői A, B, C.

b) Megfeszített mágneses huzal ~~és~~ rúdja ~~szerkezetes~~ M erőteréből, melynek e rúdhoz szerkezetben ~~felvett~~ coordinatarendszerben $X_m = \frac{\partial U_m}{\partial x_m}$, $Y_m = \frac{\partial U_m}{\partial y_m}$, $Z_m = \frac{\partial U_m}{\partial z_m}$ erőösszetevőket adja. Ez utóbbi coordinata rendszer Z_m tengelye X, Y, Z tengelyrendszer Z tengelyével párhuzamos ~~a~~ $X_m Z_m$ síkja az XZ-vel ϑ szögletet képez. tehát

$$X = A + X_m \cos\vartheta - Y_m \sin\vartheta$$
$$Y = B + X_m \sin\vartheta + Y_m \cos\vartheta$$
$$Z = C + Z_m$$

Az F_1 kiszámítására szolgáló 12) és 13) formulákkal alkalmazható három ~~féle~~ módon. I, II, III.

I) ~~Forgatás~~ ϑ szöglettel az állandó térben (földi erő és álló M rendszer) a mérő drót körül (rúd könnyen mint a gravitatios eszközben)

II A forgatás ϑ szöglettel az állandó térben (földi erő és álló M rendszer) a kis w testforgatási tér P pontja körül (rúd végén mint a bruslakomintában)

III A rúd áll $\alpha = 0$ és a hozzá tartozó M magneses rendszer forgatva P pont körül ϑ szöglettel.

I forgatási mód

X, Y, Z és $X_m Y_m Z_m$ ~~tengelyek párhuzamosak~~ állnak.

$$X = A + X_m \quad \text{és} \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m$$
$$Y = B + Y_m \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m$$
$$Z = C + Z_m \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_m \quad \ldots (14)$$

az $X_m, Y_m, Z_m, \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m$ értékek a helyzet ~~változat~~ tehát, állandó l mellett α-val

A kiszámítás eljárása tehát a/ hogy előbb az α és l ikeire kiszámítandók $X_m\ Y_m\ Z_m \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m$ értékei, ezekből a 13 és 14 ből $X, Y, Z,$ $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ és ~~[illegible]~~ végre 12 ből F,

II forgatási mód. (forgatott translatiónál)

A 14 egyenlet adja $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}$ etc. értékeit, de ezekben $X_m, Y_m, Z_m \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m$ etc. állandó ~~[illegible]~~, a $P(w)$ pontra vonatkoztatva:

III forgatási mód (álló translatiónál $\alpha = 0$)

A 14) egyenlet helyébe másik teendő és pedig X_m, Y_m, Z_m és $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m$ etc helyébe $X'_m, Y'_m, Z'_m, \left(\frac{\partial X'}{\partial x}\right)_m$ a hol

$$X'_m = \frac{\partial U_m}{\partial x} \qquad Y'_m = \frac{\partial U_m}{\partial y} \qquad Z'_m = \frac{\partial U_m}{\partial z} \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)'_m = \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} \text{ etc.}$$

$$\text{és } X'_m = \frac{\partial U_m}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x} + \frac{\partial U_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x}$$

etc.

a hol

$$x_m = (x-l)\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$
$$y_m = -(x-l)\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$
$$z_m = z.$$

és így

$$\frac{\partial x_m}{\partial x} = \cos\vartheta \qquad \frac{\partial x_m}{\partial y} = \sin\vartheta \qquad \frac{\partial z_m}{\partial z} = 1$$
$$\frac{\partial y_m}{\partial x} = -\sin\vartheta \qquad \frac{\partial y_m}{\partial y} = \cos\vartheta$$

tehát:

után.

$$X = X_m \cos\vartheta - Y_m \sin\vartheta + A$$
$$Y = X_m \sin\vartheta + Y_m \cos\vartheta + B$$
$$Z = Z_m + C.$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \sin^2\vartheta - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m \sin 2\vartheta$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m \sin 2\vartheta$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right]\frac{\sin 2\vartheta}{2} + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m \cos 2\vartheta \qquad 15)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m \cos\vartheta - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_m \sin\vartheta$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m \sin\vartheta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_m \cos\vartheta$$
$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_m$$

ha tesszük $\alpha = 0$ a 12) és 13)-ba akkor ez a kettő összevonva adja

$$\begin{aligned} F_1 = {} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} w\left[2XY + l\left(X\frac{\partial X}{\partial y} - Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right] \\ & + a_{12} w\left[Y^2 - X^2 + l\left(X\frac{\partial Y}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] \\ & + a_{23} w\left[-XZ + l\left(Z\frac{\partial Y}{\partial y} + Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] \\ & + a_{31} w\left[YZ + l\left(Z\frac{\partial X}{\partial y} + X\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] \\ & + \frac{a_{11}+a_{22}}{2} w\, l\left(X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\ & + a_{33} w\, l\, Z\frac{\partial Z}{\partial y} \end{aligned} \qquad \ldots\; 16.$$

16 és 15 megadják F_1-et bármilyen M mágneses katódra.

15, 16 tetszőleges M katódra

Ha a mágneses hatások az $X_m Z_m$ sík körül symmetrikusak általán.

$$Y_m = 0 \qquad \left(\frac{\partial Y_m}{\partial z}\right)_m = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_m = 0 \quad \Bigg| \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_m = 0$$

akkor: $\cancel{X}$ y

4

II forgatási mód.

$$\mathcal{F}_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\Big[2(X_m+A)B\cos 2\alpha+\left(B^2-(A+X_m)^2\right)\sin 2\alpha+\frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin\alpha-\frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos\alpha+$$

$$-\frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin 3\alpha+\frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos 3\alpha\Big]$$

$$+a_{12}\omega\Big[\left(B^2-(X_m+A)^2\right)\cos 2\alpha-2(X_m+A)B\sin 2\alpha+\frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos\alpha+\frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin\alpha+$$

$$-\frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos 3\alpha-\frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin 3\alpha\Big]$$

$$+a_{23}\omega\Big[-(X_m+A)(Z_m+C)\cos\alpha-B(Z_m+C)\sin\alpha+\frac{l}{2}\left\{(X_m+A)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m+(Z_m+C)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\right\}-\frac{l}{2}B\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\sin 2\alpha-$$

$$-\frac{l}{2}\left\{(X_m+A)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m+(Z_m+C)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos 2\alpha\right\}\Big]$$

$$+a_{31}\omega\Big[-(X_m+A)(Z_m+C)\sin\alpha+B(Z_m+C)\cos\alpha-\frac{l}{2}B\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m+\frac{l}{2}B\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\cos 2\alpha-$$

$$-\frac{l}{2}\left\{(X_m+A)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m+(Z_m+C)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\right\}\sin 2\alpha\Big]$$

$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega l\left[-(X_m+A)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\alpha+B\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\cos\alpha\right] \qquad 7)$$

$$- a_{33}\omega l(Z_m+C)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\sin\alpha$$

~~III forgatási mód~~

~~lásd a túloldalon~~

III forgatási mód

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\Big[2(X_m'+A)\mathcal{B} - \frac{l}{2}\mathcal{Y}_m'\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big) + \frac{l}{2}(X_m'+A)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta$$

$$+\frac{l}{2}\mathcal{Y}'\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta\Big]$$

$$+a_{12}\omega\Big[\mathcal{Y}'^2-(X_m'+A)^2+\frac{l}{2}(X_m'+A)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)-\frac{l}{2}(X_m'+A)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta$$

$$+\frac{l}{2}\mathcal{Y}'\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta\Big]$$

$$+a_{23}\omega\Big[-(X_m'+A)(Z_m+B)+\frac{l}{2}(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)+\frac{l}{2}\mathcal{Y}'\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta -$$

$$-\frac{l}{2}(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta\Big]$$

$$+a_{31}\omega\Big[\mathcal{Y}'(Z_m+C)+\frac{l}{2}(X_m'+A)\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta+\frac{l}{2}(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta\Big]$$

$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\frac{l}{2}\Big[\mathcal{Y}'\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)+(X_m'+A)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta-\mathcal{Y}'\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta\Big]$$

$$+a_{33}\omega\, l\,(Z_m+C)\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta$$

hol $X_m' = X_m\cos\vartheta + A$

$y_n' = x_m \sin\vartheta + B$

III forgatási mód

$$F_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\Big[2AB - \frac{l}{2}B\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big) + \Big\{2AX_m - \frac{l}{2}X_m\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\Big\}\sin\vartheta + 2BX_m\cos\vartheta +$$

$$+\Big\{X_m^2+\frac{l}{2}A\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\Big\}\sin 2\vartheta + \frac{l}{2}B\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta + \frac{l}{2}X_m\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 3\vartheta\Big]$$

$$+a_{12}\omega\Big[B^2-A^2+\frac{l}{2}A\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big) + 2BX_m\sin\vartheta - \Big\{2AX_m - \frac{l}{2}X_m\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\Big\}\cos\vartheta +$$

$$+\frac{l}{2}B\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta - \Big\{X_m^2+\frac{l}{2}A\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\Big\}\cos 2\vartheta - \frac{l}{2}X_m\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 3\vartheta\Big]$$

$$+a_{23}\omega\Big[-A(Z_m+C)+\frac{l}{2}(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)+\frac{l}{2}X_m\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m + lB\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta -$$

$$- X_m(Z_m+C)\}\cos\vartheta + - \frac{l}{2}\Big[X_m\frac{\partial Z}{\partial x}+(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\Big]\cos 2\vartheta\Big]$$

$$+a_{31}\omega\Big[B(Z_m+C) + \Big\{X_m(Z_m+C)+\frac{l}{2}A\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\Big\}\sin\vartheta +$$

$$+\frac{l}{2}\Big\{(Z_m+C)\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)\Big)+X_m\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)\Big\}\sin 2\vartheta + \Big]$$

$$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\frac{l}{2}\Big[B\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m+\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)+2X_m\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta + A\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\sin 2\vartheta +$$

$$-B\Big(\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)_m-\Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)_m\Big)\cos 2\vartheta\Big] \qquad (8)$$

$$+a_{33}\omega l(Z_m+C)\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)_m\sin\vartheta$$

Ha A, B, C elhanyagolhatók, vagy akként konstruáltatnak hogy a w körre A, B, C állandóan null legyen. A mi kis szimmetrikus gyorsasági viszonyok megengedik és C-re vonatkozólag szintén álló egyirányú függélyes megfelel elérhető, akkor nyerjük

(7) (8) állandó részből és olyan feltételeket megadva nyerve $Y_m=0$ $\Big(\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)_m=0$ $\Big(\frac{\partial Y}{\partial z}\Big)_m=0$

a II forgatási módra:

$$F_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left[-X_m^2\sin 2\alpha + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\sin\alpha - \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 3\alpha\right]$$

$$+a_{12}\omega\left[-X_m^2\cos 2\alpha + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\cos\alpha - \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 3\alpha\right]$$

$$+a_{23}\omega\left[-X_m Z_m\cos\alpha + \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right\} - \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\cos 2\alpha\right]$$

$$+a_{31}\omega\left[-X_m Z_m\sin\alpha - \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\sin 2\alpha\right]$$

$$-\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\, l\, X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\alpha$$

$$-a_{33}\omega l\, Z_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha \qquad 19)$$

a III forgatási módra az előbbi ha teszünk α helyébe $-\delta$-t

$$19)\ F_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left[+X_m^2\sin 2\delta - \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\sin\delta + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 3\delta\right]$$

$$+a_{12}\omega\left[-X_m^2\cos 2\delta + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\cos\delta - \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 3\delta\right]$$

$$+a_{23}\omega\left[-X_m Z_m\cos\delta + \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right\} - \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right\}\cos 2\delta\right]$$

$$+a_{31}\omega\left[+X_m Z_m\sin\delta + \frac{l}{2}\left\{X_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m + Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right\}\sin 2\delta\right]$$

$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\, l\, X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\delta \qquad 20)$$

$$+a_{33}\omega l\, Z_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\sin\delta$$

19) és 20) Csakis M mágneses határokra. az ny

$A + B + C = 0$ és M határokra $Y_m = 0$ $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_m = 0$ $\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_m = 0$

A 19), 20) formula körébe eső különös esetek – megvalósíthatók és felhasználhatók.

A) Az M hatósugarat egy vagy több olyan mágnesrúd áll, mely egy tengely körül symmetrikus (kétsz hengeres mágnes v. elektromágnes) a mágnesek tengelye az X_m tengellyel összeesik,

akkor $\quad Z_m=0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m=0$ és $\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_m=\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m$ vagyis $\Delta U=0$ feltétel $\begin{cases} \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m=+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \\ \left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m=+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \end{cases}$

e feltételeket a 20)-ba helyezve

$$\frac{F_1}{w}=\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\left[+X_m^2\sin 2\vartheta-\frac{l}{4}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\vartheta+\frac{3}{4}lX_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin 3\vartheta\right]$$
$$+a_{12}\left[-X_m^2\cos 2\vartheta+\frac{l}{4}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\cos\vartheta-\frac{3}{4}lX_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\cos 3\vartheta\right] \quad \ldots\ 21)$$
$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}lX_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\vartheta$$

ϑ szerint rendezve.

$$\frac{F_1}{w}=\frac{3a_{11}+5a_{22}}{8}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\vartheta+\frac{a_{12}}{4}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\cos\vartheta+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_m^2\sin 2\vartheta-a_{12}X_m^2\cos 2\vartheta$$
$$+\frac{3(a_{11}-a_{22})}{8}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin 3\vartheta-\frac{3a_{12}}{4}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\cos 3\vartheta \quad \ldots\ 22)$$

(A 19) egyenletből kiindulva ugyanezt kapjuk ha ϑ helyett $-\vartheta$-t teszünk)

ϑ (vagy d) hat értékének megfelelőleg hat egyenletet kapunk, melyekből 6 ismeretlen értékét kapjuk

$$\begin{aligned} (3a_{11}+5a_{22})\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m &= A \\ a_{12}\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m &= B \\ (a_{11}-a_{22})X_m^2 &= C \\ a_{12}X_m^2 &= D \qquad\qquad 23) \\ (a_{11}-a_{22})\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m &= E \\ a_{12}\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m &= F \end{aligned}$$

E hat egyenletből kettő identikus lévén, marad 5 egyenletünk melyekből kapjuk:

$$24) \quad \begin{cases} a_{22} = a_{11}\dfrac{A-3\varepsilon}{A+5\varepsilon} \\ \text{és} \quad a_{12} = a_{11}\cdot 4\cdot\dfrac{B}{A}\,\dfrac{2A+3\varepsilon}{A+5\varepsilon} \end{cases}$$

és ~~ezentúl~~

$$25) \quad \begin{cases} \left(X\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)_m = \dfrac{1}{a_{11}}\,\dfrac{A}{4}\,\dfrac{A+5\varepsilon}{2A+3\varepsilon} \\ X_m^2 = \dfrac{1}{a_{11}}\,\dfrac{AD}{4B}\cdot\dfrac{A+5\varepsilon}{2A+3\varepsilon} \end{cases}$$

a_{11} meghatározása végett 25) egyenletek elsejét használjuk fel úgy hogy az $\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m$ értékét külön nem jegyzéses tartásakor egészinél állapítjuk meg. Az ilyenre nézve $a_{11}=a_{22}=k$ és $a_{12}=0$ tehát a 23) egyenlet alapján:

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m = \frac{A'}{8k}$$

tehát
$$a_{11} = \frac{A}{4}\,\frac{A+5\varepsilon}{2A+3\varepsilon}\,\frac{1}{\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m}$$

a_{11} értékével tovább a_{22} és a_{12} is kiszámítható.

Megjegyzés: ha a 21) vagy 22) egyenletek feltételeit egy vagy két egyenlő ~~elemnek~~ tekinthető mágnesekkel gondoljuk megvalósítva, akkor ha az egyes mágnes momentuma $= M$

	A mágnes iránya		X	$\frac{\partial X}{\partial x}$	X^2	$X\frac{\partial X}{\partial x}$
Egy mágnes északon	$\pm$		$\pm\frac{2M}{r^3}$	$\pm\frac{6M}{r^4}$	$+\frac{4M^2}{r^6}$	$+\frac{12M^2}{r^7}$
Egy mágnes délen	$\pm$		$\pm\frac{2M}{r^3}$	$\mp\frac{6M}{r^4}$	$+\frac{4M^2}{r^6}$	$-\frac{12M^2}{r^7}$
	Északi mágnes	Déli mágnes				
Két egyirányú mágnes	$\pm$	$\pm$	$\pm\frac{4M}{r^3}$	0	$+\frac{16M^2}{r^6}$	0
Két ellentett irányú mágnes	$\pm$	$\mp$	0	$\pm\frac{12M}{r^4}$	0	0

B) Az M helyén van egy vagy több olyan mágnesből áll mely egy tengely körül symmetrikus. A mágnesek tengelyei az $X_m Z_m$ síkban Z_m-mel párhuzamosak és közepük az $X_m Y_m$ síkban van

így lesz:
$$X_m = 0 \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m = 0 \qquad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = 0$$

tehát
$$\frac{F_1}{w} = a_{33}\, l Z_m \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m \sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ 26)$$

és ha $Z_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m$ egy nem jelentékeny tényezővel melyre $a_{33}=k$ meg lesz határozva

következik
$$a_{33}$$

Ha a 26) egyenlet feltételeit egy vagy két egyenlő elemi mágnessel gondoljuk megvalósítva, akkor ha az egyes mágnes momentuma M

	a mágnes iránya Északi +		Z_m	$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m$	$\left(Z\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m$
Egy mágnes északon	$+$ $-$		$\mp \frac{M}{r^3}$	$\mp 3\frac{M}{r^4}$	$+3\frac{M^2}{r^7}$
Egy mágnes délen	$+$ $-$		$\mp \frac{M}{r^3}$	$\pm 3\frac{M}{r^4}$	$-3\frac{M^2}{r^7}$
	Északi mágnes	Déli mágnes			
Két egyirányú mágnes	$+$ $-$	$+$ $-$	$\mp 2\frac{M}{r^3}$	0	0
Két ellentett irányú mágnes	$+$ $-$	$-$ $+$	0	$\mp 6\frac{M}{r^4}$	0

c) A ható erőket egy horizontalis tengelyű mágnes, melynek közepe a $w(P)$ alatt van egy függélyesben fekszik. (A mágnes tengelye $X_m Z_m$ síkban) Akkor:

$$Z=0\,,\quad \frac{\partial X}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

$$\frac{F_1}{w}=\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_m^2\sin 2\vartheta-a_{12}X_m^2\cos 2\vartheta+a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m-a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\cos 2\vartheta$$
$$+a_{31}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\sin 2\vartheta$$

rendezve.

$$\frac{F_1}{w}=a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m+\left[\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_m^2+a_{31}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\right]\sin 2\vartheta$$
$$-\left[a_{12}X_m^2+a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\right]\cos 2\vartheta \qquad \text{ld. } 27)$$

l-t ismerve meghatározhatjuk

$$a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m=A$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_m^2+a_{31}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m=B$$

$$a_{12}X_m^2+a_{23}\frac{l}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m=C$$

a miből

$$\frac{a_{31}}{a_{23}}=\frac{B}{A}-\frac{C-A}{A}\cdot\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$$

elemi mágnes esetében $X=-\frac{M_x}{r^3}$ $\quad\frac{\partial Z}{\partial x}=-3\frac{M_x}{r^4}$

D) A ható szerkezet egy függőleges közbenső tengelyű mágnes a P alatt tengelye a P-vel egy függőlegesben (Z_m tengelyben) akkor:

$$X_m = 0 \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = 0$$

$$\frac{F_1}{w} = a_{23}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \quad \ldots \quad 28)$$

tehát a_{23} magában nem határozható meg:

elemi mágnes esetében $Z_m = +\frac{2M_z}{r^3}$ $\quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{6M_z}{r^4}$

E) A ható szerkezet két közbenső egyenlő függőleges mágnes melyeknek tengelyei az $X_m Z_m$ síkban a Z_m tengelyhez symmetrikusan fekszenek. Akkor.

$$X_m = 0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = 0$$

$$\frac{F_1}{w} = a_{23}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m - a_{23}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos 2\alpha + a_{31}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 2\alpha \quad \ldots \quad 29)$$

ezekből meghatározható

$$a_{23}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = A$$

$$a_{23}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = B$$

$$a_{31}\frac{L}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = C$$

és így

$$\frac{a_{31}}{a_{23}} = \frac{C}{B}.$$

elemi mágnespár esetében tovább, az egyes mágnes lefelé irányuló momentumát $= M_z$ az északon déli mágneses középpontjainak összekötője a, c ... nevezzük a két mágnes együttes hatására vonatkozó egyenlőség:

$$Z_m = 2\frac{2c^2-a^2}{(c^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}M_z \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = 30\frac{a^2c}{(c^2+a^2)^{\frac{7}{2}}}M_z \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = 6c\frac{3a^2-2c^2}{(c^2+a^2)^{\frac{7}{2}}}M_z$$

tehát:

$$Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = 12.\frac{c(2c^2-a^2)(3a^2-2c^2)}{(c^2+a^2)^6}M_z$$

$$Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m = 60\frac{c(2c^2-a^2)a^2}{(c^2+a^2)^6}M_z$$

$\lambda_1 \mu_1 \nu_1$, $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ etc iránykosinusok kifejezése

u, v, w forgási szögekkel által melyekkel az ABC alkalmazási tengelyeket átvisszük a K_1, K_2, K_3 irányokba.

Az u a forgási szög az A tengely körül az A irányba nézőnek az óramutató járása irányában

v ...... B ...... a B ......

w ...... C " " C ......

Az ABC tengelyrendszert A körül u forgatással átvisszük A'B'C' rendszerbe akkor az iránycosinusok táblája

1)

	A	B	C
A'	1	0	0
B'	0	cos u	sin u
C'	0	−sin u	cos u

Az A'B'C' rendszert B' körül v forgatással átvisszük A''B''C'' rendszerbe

2)

	A'	B'	C'
A''	cos v	0	−sin v
B''	0	1	0
C''	sin v	0	cos v

Az A''B''C'' rendszert C körül w forgatással átvisszük A'''B'''C''' rendszerbe és pedig a $K_1 K_2 K_3$ rendszer irányaiba.

3)

	A''	B''	C''
A'''	cos w	sin w	0
B'''	−sin w	cos w	0
C'''	0	0	1

a $\cos\varphi = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$ tétel alapján kapjuk azután 1) és 2)-ből:

4)

	A	B	C
A''	$+\cos v$	$+\sin u \sin v$	$-\sin v \cos u$
B''	0	$+\cos u$	$+\sin u$
C''	$+\sin v$	$-\sin u \cos v$	$+\cos u \cos v$

és kapjuk a 3 és 4-ből.

	A	B	C
$A'''_{(K_1)}$	$+\cos v \cos w$	$+\sin u \sin v \cos w$ $+\cos u \sin w$	$-\sin v \cos u \cos w$ $+\sin u \sin w$
$B'''_{(K_2)}$	$-\cos v \sin w$	$-\sin u \sin v \sin w$ $+\cos u \cos w$	$+\cos u \sin v \sin w$ $+\sin u \cos w$
$C'''(K_3)$	$\sin v$	$-\sin u \cos v$	$+\cos u \cos v$

(Megjegyzendő hogy ~~kün~~ e számításokban a forgatások sorrendje közömbös.), e szerint kapjuk

30)
$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\cos v \cos w \\
\mu_1 &= +\sin u \sin v \cos w + \cos u \sin w \\
\nu_1 &= -\cos u \sin v \cos w + \sin u \sin w \\
\lambda_2 &= -\cos v \sin w \\
\mu_2 &= -\sin u \sin v \sin w + \cos u \cos w \\
\nu_2 &= +\cos u \sin v \sin w + \sin u \cos w \\
\lambda_3 &= +\sin v \\
\mu_3 &= -\sin u \cos v \\
\nu_3 &= +\cos u \cos v
\end{aligned}\right.$$

Egytengelyű mágneses test.

Ilyen testre vonatkozólag tehát $K_2 = K_3$ és az A vagy K_1 körüli forgásra $u = 0$ akkor 30-ból lesz:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\cos v \cos w \\
\mu_1 &= +\sin w \\
\nu_1 &= -\sin v \cos w \\
\lambda_2 &= -\cos v \sin w \\
\mu_2 &= +\cos w \\
\nu_2 &= +\sin v \sin w \\
\lambda_3 &= +\sin v \\
\mu_3 &= 0 \\
\nu_3 &= +\cos v
\end{aligned}\right\} \quad 31)$$

és a 3) egyenletek alapján

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= K_1 \cos^2 v \cos^2 w + K_2 (\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 w) \\
a_{22} &= K_1 \sin^2 w + K_2 \cos^2 w \\
a_{33} &= K_1 \sin^2 v \cos^2 w + K_2 (\cos^2 v + \sin^2 v \sin^2 w) \\
a_{12} &= K_1 \cos v \sin w \cos w - K_2 \cos v \sin w \cos w \\
a_{23} &= -K_1 \sin v \sin w \cos w + K_2 \sin v \sin w \cos w \\
a_{31} &= -K_1 \sin v \cos v \cos^2 w + K_2 \sin v \cos v \cos^2 w
\end{aligned}\right\} \quad 32)$$

és

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= (K_1 - K_2) \cos^2 v \cos^2 w + K_2 \\
a_{22} &= (K_1 - K_2) \sin^2 w + K_2 \\
a_{33} &= (K_1 - K_2) \sin^2 v \cos^2 w + K_2 \\
a_{12} &= (K_1 - K_2) \cos v \tfrac{1}{2} \sin 2w \\
a_{23} &= (K_1 - K_2) \sin v \tfrac{1}{2} \sin 2w \\
a_{31} &= (K_1 - K_2) \tfrac{1}{2} \sin 2v \cos^2 w
\end{aligned}\right\} \quad 33)$$

A test egyensúlyi voltának kritériuma.

A 33) egyenletek két utolsójából kapjuk $\operatorname{tg} w = \frac{a_{23}}{a_{31}} \cos v$ ... 34)

s ezeknek eleget kell tenni az első négy egyenletnek

34-ből kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 w &= \frac{1}{1+\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v} \\
\sin^2 w &= \frac{\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}{1+\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v} \\
\sin w \cos w = \tfrac{1}{2} \sin 2w &= \frac{\frac{a_{23}}{a_{31}} \cos v}{1+\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}
\end{aligned}\right\} \quad 34'$$

A 33 első 4 egyenlete adja akkor k_2-őt eliminálva

$$a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)(\cos^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$a_{33} - a_{22} = (k_1 - k_2)(\sin^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$a_{12} = (k_1 - k_2) \cos v \tfrac{1}{2} \sin 2w$$

és azután:

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{1 - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2}{\frac{a_{23}}{a_{31}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ 35)$$

$$\frac{a_{33} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{\sin^2 v - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}{\cos^2 v \, \frac{a_{23}}{a_{31}}}$$

és ebből

$$\cos^2 v = \frac{1}{\frac{a_{33} - a_{22}}{a_{12}} \frac{a_{23}}{a_{31}} + 1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ 36)$$

A 35) az egyensúlyiságnak szükséges de nem elégséges kritériuma.

---

34) és 36)-ból kiszámítható $\cos^2 v$ és $\operatorname{tg} w$ azután

33)-ból k_1 és k_2

F_1 meghatározása

Eljárás egy tökéletesnek tartott beszabályozással.

a_{11} a_{22} a_{33} a_{12} és $\frac{a_{23}}{a_{31}}$ (megfelelő értékek a_2 20) vagy 19) egyenletek alapján tehát olyan mágneses hatásokkal meghagyva $X_a Z_a$ sík körül symmetrikusan és a külső állandó (földi) erő kompenzálva van.

Keressük hogy értékek olyat teszünk-e a 35) egyenletnek? Ha igen akkor tudjuk hogy a test lehet egy tengelyű s tovább vizsgáljuk.

$$\cos^2 v = \frac{1}{\frac{a_{33}-a_{22}}{a_{12}}\frac{a_{23}}{a_{31}} + 1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

és
$$\cos^2 w = \frac{1}{1+\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v} \quad \ldots\ldots \quad 34')$$

kiszámítjuk a $\pm v$ és $\pm w$ lehetséges ...

és azután a 33) egyenlet első négyzetéből a k_1 és k_2-t kiszámítjuk (ad libitum), például

$$a_{11}-a_{33}=(k_1-k_2)\cos 2v \cos^2 w$$
$$a_{22}=k_1-(k_1-k_2)\cos^2 w \qquad \text{és ebből:}$$

$$\begin{cases} k_1-k_2 = \dfrac{a_{11}-a_{33}}{\cos 2v \cos^2 w} \\ k_1 = a_{22}+\dfrac{a_{11}-a_{33}}{\cos 2v} \end{cases}$$

A $\cos^2 w$-nak megfelelő kettős szöget lehet $+(w)_a$ vagy $-(w)_a$, melyik kettő közül egyik külön észlelés dönti el.

A testet függélyes tengelye körül $(w)_a$-val előre forgatjuk akkor.

ha $w=+(w)_a$ akkor 33-ból:

$$a'_{11}=(k_1-k_2)\cos^2 v \cos^2 2(w)_a + k_2$$
$$a'_{22}=(k_1-k_2)\sin^2 2(w)_a + k_2$$
$$a'_{33}=(k_1-k_2)\sin^2 v \cos^2 2(w)_a + k_2$$
$$a'_{12}=(k_1-k_2)\cos v \tfrac{1}{2}\sin 4(w)_a$$
$$a'_{23}=(k_1-k_2)\sin v \tfrac{1}{2}\sin 4(w)_a$$
$$a'_{31}=(k_1-k_2)\tfrac{1}{2}\sin 2v \cos^2 2(w)_a$$

ha pedig $w=-(w)_a$ akkor.

$$a'_{11}=(k_1-k_2)\cos^2 v + k_2$$
$$a'_{22}=k_2$$
$$a'_{33}=(k_1-k_2)\sin^2 v + k_2$$
$$a'_{12}=0$$
$$\left.\begin{array}{l} a'_{23}=0 \\ a'_{31}=(k_1-k_2)\left(\tfrac{1}{2}\sin 2v\right) \end{array}\right\} \quad \frac{a'_{23}}{a'_{31}}=0$$

A 20 egyenletekből az F_1-et megkaptuk. Kiszámítjuk az a' értékekkel. s ez azokra nézve a második csoport érvényes akkor a $\cos^2 w$-nak megfelelő érték $= -(W)_2$ hegyes szöggel, ha a második csoport nem érvényes akkor a $\cos^2 W$-nak megfelel $= +(W_2)$ hegyes szöggel

Ha a $\cos^2 w$-nak megfelelő szöget ismerjük akkor a 34) szerint

$$\cos v = \frac{1}{\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)} \operatorname{tg} w$$

egyenlet adja v-nek pozitív értékét megkaptuk.
az eldöntendő, a pozitív v hegyes-e vagy tompa.

(Ha a hegyes szöget előjele, vagy a pozitív szöget hegyes vagy tompa vettük. mindig elégséges a lengés leírásának (nem irányának) megállapítására)

A test egyensúlyának egy újabb (döntő) kritériumát nyerjük ha ezek után a testet tengelyével függélyesen helyezzük el s vetjük értékei alá. Akkor egyszerű egyensúlyi esetben a 33) szerint (lévén tehát $w=0$ $v=90^\circ$)

$$a_{11} = k_2 \quad a_{22} = k_2 \quad a_{33} = k_1$$

$$a_{12},\ a_{23},\ a_{31} = 0.$$

és a 20) szerint

$$F_1 = \left[k_2 w l X_m \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + k_1 w l Z_m \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m\right] \sin \delta.$$

El lévén döntve a egyensúlyiság kérdése, a testre nézve ismeretesek u. v k_1 k_2 és így a 33 egyenletek alapján

mind a ha a.

~~Háromtengelyű test állandóinak meghatározása~~

Tapasztalati adatok az egytengelyű testekre vonatkozólag.

1 tengelyű testre nézve $k_2=k_3$ és így az 11(vagy 3) egyenletek helyett

$$a_{11}=(k_1-k_2)\lambda_1^2+k_2$$

$$a_{22}=(k_1-k_2)\mu_1^2+k_2$$

$$a_{33}=(k_1-k_2)\nu_1^2+k_2$$

$$a_{12}=(k_1-k_2)\lambda_1\mu_1$$

$$a_{23}=(k_1-k_2)\mu_1\nu_1$$

$$a_{31}=(k_1-k_2)\nu_1\lambda_1$$

ha a 1 főirány hosszúsága λ, szélessége X-tól Z felé (befelé) φ

akkor.

$\lambda_1=\cos\varphi\cos\lambda$	$\cos v\cos w$
$\mu_1=\cos\varphi\sin\lambda$	$\cos v\sin w$
$\nu_1=\sin\varphi$	$-\sin v$

és így:

$$a_{11}=k_2+(k_1-k_2)\cos^2\varphi\cos^2\lambda$$

$$a_{22}=k_2+(k_1-k_2)\cos^2\varphi\sin^2\lambda$$

$$a_{33}=k_2+(k_1-k_2)\sin^2\varphi$$

$$a_{12}=(k_1-k_2)\cos^2\varphi\frac{\sin 2\lambda}{2}$$

$$a_{23}=(k_1-k_2)\sin\lambda\frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$a_{31}=(k_1-k_2)\cos\lambda\frac{\sin 2\varphi}{2}$$

Forgás w, v, u sorrendben

Forgatás z körül w-val

	A	B	C
A'	$\cos w$	$\sin w$	0
B'	$-\sin w$	$\cos w$	0
C'	0	0	1

Forgatás y körül v-

	A'	B'	C'
A''	$\cos v$	0	$-\sin v$
B''	0	1	0
C''	$\sin v$	0	$\cos v$

Forgatás x körül u-val

	A''	B''	C''
A'''	1	0	0
B'''	0	$\cos u$	$\sin u$
C'''	0	$-\sin u$	$\cos u$

	A	B	C
A''	$\cos v \cos w$	$\sin w \cos v$	$-\sin v$
B''	$-\sin w$	$+\cos w$	0
C''	$\sin v \cos w$	$\sin v \sin w$	$\cos v$

φ szélességi kör

$v = -\varphi$

$w = \lambda$

$u = $ azimut

	A	B	C
A'''	$+\cos v \cos w$	$+\sin w \cos v$	$-\sin v$
B'''	$-\cos u \sin w$ $+\sin u \sin v \cos w$	$+\cos u \cos w$ $+\sin u \sin v \sin w$	$+\sin u \cos v$
C'''	$+\sin u \sin w$ $+\cos u \sin v \cos w$	$-\sin u \cos w$ $+\cos u \sin v \sin w$	$+\cos u \cos v$

1915

Julius 22ikén eltettek

A Könyvtári utalvány

Mágneses állandó meghatározás

Vegyesek (Tökéletlenebbek

állandó	sin α	cos α	sin 2α	cos 2α	sin 3α	cos 3α
$\cancel{+a_{23}\frac{L}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(XZ)+\frac{\partial}{\partial y}(YZ)\right)}$	$-a_{23}YZ$	$-a_{23}XZ$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}(Y^2-X^2)$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}2XY$	$-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{L}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{L}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]$
$\cancel{-a_{31}\frac{L}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(YZ)-\frac{\partial}{\partial y}(XZ)\right)}$	$-a_{31}XZ$	$+a_{31}YZ$	$-2a_{12}XY$	$+a_{12}(Y^2-X^2)$	$-a_{12}\frac{L}{2}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+2X\frac{\partial X}{\partial y}\right]$	$-a_{12}\frac{L}{2}\left[X\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-2Y\frac{\partial X}{\partial y}\right]$
$+a_{23}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}+Y\frac{\partial Z}{\partial y}-Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$	$-\frac{a_{11}+a_{22}}{2}L\left[X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right]$	$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}L\left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$	$-a_{23}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y}+Y\frac{\partial Z}{\partial x}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right)$	$-a_{23}\frac{L}{2}\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+X\frac{\partial Z}{\partial x}-Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right]$		
$+a_{31}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y}-Y\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$	$-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{L}{2}X\frac{\partial Z}{\partial z}$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{L}{2}Y\frac{\partial Z}{\partial z}$	$-a_{31}\frac{L}{2}\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+X\frac{\partial Z}{\partial x}-Y\frac{\partial Z}{\partial y}\right]$	$+a_{31}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial y}+Y\frac{\partial Z}{\partial x}+2Z\frac{\partial X}{\partial y}\right)$		
	$-a_{33}LZ\frac{\partial Z}{\partial x}$	$+a_{33}LZ\frac{\partial Z}{\partial y}$				

$Y \quad \frac{\partial Y}{\partial z} \quad \frac{\partial X}{\partial y}$

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin\alpha\sin 2\alpha$	$\sin\alpha\cos 2\alpha$	$\cos\alpha\sin 2\alpha$	$\cos\alpha\cos 2\alpha$
$-a_{23}YZ$	$-a_{23}XZ$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}(Y^2-X^2)$	$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot 2XY$	$-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial x}\right)$	$-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}-Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)$	$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial X}{\partial y}-Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$
$-a_{31}XZ$	$+a_{31}YZ$	$-2a_{12}XY$	$+a_{12}(Y^2-X^2)$	$+a_{12}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}-Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$	$-a_{12}l\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial x}\right)$	$-a_{12}l\left(X\frac{\partial X}{\partial y}-Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$	$+a_{12}l\left(X\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)$
$-\frac{a_{11}+a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$	$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}l\left(X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$						
$-a_{33}lZ\frac{\partial Z}{\partial x}$	$+a_{33}lZ\frac{\partial Z}{\partial y}$			$+\frac{1}{2}\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}\sin\alpha$	$+\frac{1}{2}\sin\alpha$	$+\frac{1}{2}\cos\alpha$
				$-\frac{1}{2}\cos 3\alpha$	$+\frac{1}{2}\sin 3\alpha$	$+\frac{1}{2}\sin 3\alpha$	$+\frac{1}{2}\cos 3\alpha$

$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$.
$+a_{23}\,l\left(z\frac{\partial x}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)$	$+a_{23}\,l\left(z\frac{\partial y}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$	$-a_{23}\,l\left(z\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
$-a_{31}\,l\left(z\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)$	$+a_{31}\,l\left(z\frac{\partial x}{\partial y}+\cancel{X}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$	$-a_{23}\,l\left(z\frac{\partial x}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
		$-a_{31}\,l\left(z\frac{\partial x}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
		$+a_{31}\,l\left(z\frac{\partial y}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	
$-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$	$+\frac{1}{2}\cos 2\alpha$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

$$\sin\alpha\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 3\alpha \qquad \cos\alpha\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha$$

$$\sin\alpha\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha \qquad \cos\alpha\cos 2\alpha = +\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 3\alpha$$

$$\sin\alpha\sin 2\alpha = 2\sin^2\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 3\alpha$$

$$\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \frac{1}{4}\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{1}{4}\sin 3\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha$$

$$\cos\alpha\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha$$

$$\cos\alpha\cos 2\alpha = \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha$$

$$- \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l \left[X \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial Y}{\partial x} \right] + \frac{a_{11}-a_{22}}{4} l \left\{ X \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + y \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right\} \underline{\sin\alpha}$$

$$+ \frac{a_{11}+a_{22}}{2} l \left[X \frac{\partial X}{\partial y} + y \frac{\partial Y}{\partial y} \right] + \frac{a_{11}-a_{22}}{4} l \left\{ -X \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - y \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right\} \cos\alpha$$

$$Z \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + X \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$Z \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) - y \frac{\partial Z}{\partial x} + x \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} l \Big\{ - \qquad -\frac{a_{11}}{2} l \left(X\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{1}{2} X \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{a_{22}}{2} l \left(y\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{1}{2} y \frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial x}\right) =$$

$$+\frac{a_{11}-a_{22}}{4}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} - y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{a_{11}-a_{22}}{4}\left(X\frac{\partial y}{\partial y} + y\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$X\frac{\partial y}{\partial y} + y\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$X\frac{\partial y}{\partial y} + y\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$-\frac{a_{11}}{2}\left[X\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} - y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = -\frac{a_{11}}{4}\left[X\frac{\partial X}{\partial x} + 3y\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$-\frac{a_{22}}{2}\left[X\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} - y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = -\frac{a_{22}}{4}\left[3X\frac{\partial X}{\partial x} - y\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$\cancel{-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}}\ \frac{a_{11}-a_{22}}{4} X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) + \frac{a_{11}-a_{22}}{4} y\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{a_{11}+a_{22}}{2} X \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{4} l X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{4} l y\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$a_{22} = (k_1 - k_2) + k_2 - (k_1-k_2)\cos^2\omega = k_1 - (k_1-k_2)\cos^2\omega$$

$$a_{11} - a_{33} = (k_1-k_2)\cos 2\vartheta \cos^2\omega$$

$$\cancel{a_{11}}$$

$$k_1 = a_{22} + \frac{a_{11}-a_{33}}{\cos 2\vartheta}$$

$$a_{11}' \cancel{= k_1}$$

$$a_{11}' - a_{22}' = (k_1-k_2)\cos^2\vartheta$$

$$a_{33}' - a_{22}' = \cancel{(k_1-k_2)} (k_1-k_2)\sin^2\vartheta$$

$$a_{11} = k_2 \quad a_{22} = k_2 \quad a_{33} = k_1$$

$$a_{12} = 0 \quad a_{23} = 0 \quad a_{31} = 0$$

ha w [illegible] [illegible] [illegible]

$$\frac{F_1}{w} = \frac{a'_{11}-a'_{22}}{2}\left[(2XY)\cos 2(\alpha+\Delta w) + (Y^2-X^2)\sin 2(\alpha+\Delta w)\right]$$

$$+ a'_{12}\left[(Y^2-X^2)\cos 2(\alpha+\Delta w) - (2XY)\sin 2(\alpha+\Delta w)\right]$$

$$+ a'_{23}\left[(XZ)\cos(\alpha+\Delta w) - (YZ)\sin(\alpha+\Delta w)\right]$$

$$+ a'_{31}\left[(YZ)\cos(\alpha+\Delta w) + (XZ)\sin(\alpha+\Delta w)\right]$$

$$\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2}\left(X\frac{\partial X}{\partial\alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)$$ a [illegible]

$$+ a'_{33} Z\frac{\partial Z}{\partial\alpha}.$$

$$a'_{11} = (K_1-K_2)\cos^2(v + \Delta v)\cos^2 w + K_2$$

$$a'_{22} = (K_1-K_2)\sin^2 w + K_2$$

$$a'_{33} = (K_1-K_2)\sin^2(v+\Delta v)\cos^2 w + K_2$$

$$a'_{12} = (K_1-K_2)\cos(v+\Delta v)\tfrac{1}{2}\sin 2w$$

$$a'_{23} = (K_1-K_2)\sin(v+\Delta v)\tfrac{1}{2}\sin 2w$$

$$a'_{31} = (K_1-K_2)\tfrac{1}{2}\sin 2(v+\Delta v)\cos^2 w$$

K_1 C.

$v = 90$.

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= K_2 \\ a_{22} &= K_2 \\ a_{33} &= K_1 \end{aligned}\right\}$$

$$a_{11} = (K_1-K_2)\cos^2 w + K_2$$

$$a_{22} = (K_1-K_2)\sin^2 w + K_2$$

$$a_{33} = K_2$$

$$a_{12} = (K_1-K_2)\tfrac{1}{2}\sin 2w$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{31} = 0.$$

$$a_{11} = K_2$$

$$a_{22} = K_1$$

$$a_{33} = K_1$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{12} \\ &a_{23} \\ &a_{31} \end{aligned}\right\} 0$$

	X	Y	Z
X'''	$\cos v \cos w$	$+\sin u \sin v \cos w$ $+\cos u \sin w$	$-\sin v \cos u \cos w$ $+\sin u \sin w$
Y'''	$-\cos v \sin w$	$-\sin u \sin v \sin w$ $+\cos u \cos w$	$+\cos u \sin v \sin w$ $+\sin u \cos w$
Z'''	$\sin v$	$-\sin u \cos v$	$\cos u \cos v.$

α_1 $\lambda_1 = +\cos v \cos w$

α_2 $\mu_1 = +\sin u \sin v \cos w + \cos u \sin w$

α_3 $\nu_1 = -\cos u \sin v \cos w + \sin u \sin w$

β_1 $\lambda_2 = -\cos v \sin w$

β_2 $\mu_2 = -\sin u \sin v \sin w + \cos u \cos w$

β_3 $\nu_2 = +\cos u \sin v \sin w + \sin u \cos w$

γ_1 $\lambda_3 = +\sin v$

γ_2 $\mu_3 = -\sin u \cos v$

γ_3 $\nu_3 = +\cos u \cos v$

Egytengelyűnél K_1 az X irányú $u = 0$

$\lambda_1 = +\cos v \cos w$

$\mu_1 = +\sin w$

$\nu_1 = -\sin v \cos w$

$\lambda_2 = -\cos v \sin w$

$\mu_2 = +\cos w$

$\nu_2 = +\sin v \sin w$

$\lambda_3 = +\sin v$

$\mu_3 = 0$

$\nu_3 = \cos v.$

$a_{11} = K_1 \cos^2 v \cos^2 w + K_2(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 w)$

$a_{22} = K_1 \sin^2 w + K_2 \cos^2 w$

$a_{33} = K_1 \sin^2 v \cos^2 w + K_2(\cos^2 v + \sin^2 v \sin^2 w)$

$a_{12} = K_1 \cos v \sin w \cos w - K_2 \cos v \sin w \cos w = K_1 - K_2$

$a_{23} = -K_1 \sin v \sin w \cos w + K_2 \sin v \sin w \cos w$

$a_{31} = -K_1 \sin v \cos v \cos^2 w + K_2 \sin v \cos v (\cos^2 w$

$K_1 - K_2 \qquad K_2$

1) $a_{11} = (K_1 - K_2)\cos^2 v \cos^2 w + K_2$

2) $a_{22} = (K_1 - K_2)\sin^2 w + K_2$

3) $a_{33} = (K_1 - K_2)\sin^2 v \cos^2 w + K_2$

4) $a_{12} = (K_1 - K_2)\cos v \frac{1}{2}\sin 2w$

5) $a_{23} = -(K_1 - K_2)\sin v \frac{1}{2}\sin 2w$

6) $a_{31} = -(K_1 - K_2)\frac{1}{2}\sin 2v \cos^2 w$

$\cancel{a_{11} - a_{22} = (K_1 - K_2)\cos}$

$a_{11} + a_{33} = (K_1 - K_2)\cos^2 w + 2K_2$

$\cancel{a_{11} + a_{33} = (K_1 - K_2)\cos^2 w + 2a_{22} - 2(K_1 - K_2)\sin^2 w}$

4, 5 ből $\qquad$ 5, 6 ből

$\operatorname{tg} v = -\dfrac{a_{23}}{a_{12}} \qquad \operatorname{tg} w = +\dfrac{a_{23}}{a_{31}}\cos v \quad \sin(K_1 - K_2)$

$a_{11} - a_{22} = (K_1 - K_2)\cos^2 v \cos^2 w - (K_1 - K_2) + (K_1 - K_2)\cos^2 w$

$a_{33} - a_{22} = (K_1 - K_2)\sin^2 v \cos^2 w - (K_1 - K_2) + (K_1 - K_2)\cos^2 w$

$$\frac{\cancel{a_{11} - a_{22}}}{a_{33} - a_{22}} = \frac{-1 + \cos^2 w\,(1 + \cos^2 v)}{-1 + \cos^2 w\,(1 + \sin^2 v)}$$

$$-\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}} + (1 + \sin^2 v)\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}}\cos^2 w = -1 + (1 + \cos^2 v)\cos^2 w$$

$$1 - \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}} = \left[(1 + \cos^2 v) - (1 + \sin^2 v)\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}}\right]\cos^2 w$$

$$\frac{a_{33} - a_{11}}{a_{33} - a_{22}} = \left[\left(\frac{2a_{12}^2 + a_{23}^2}{a_{12}^2 + a_{23}^2}\right) - \frac{2a_{23}^2 + a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{23}^2}\,\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}}\right]\cos^2 w$$

$$(a_{12}^2 + a_{23}^2)(a_{33} - a_{11}) = \left\{2a_{12}^2 a_{33} + a_{23}^2 a_{33} - 2a_{12}^2 a_{22} - \cancel{a_{23}^2 a_{22}} - 2a_{23}^2 a_{11} - a_{12}^2 a_{11} + 2a_{23}^2 a_{22} + \cancel{a_{12}^2} a_{22}\right\}\cos^2 w$$

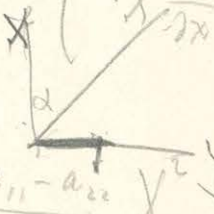
	A	B	C
A''	$+\cos v$	$+\sin u \sin v$	$-\cos u \sin v$
B''	0	$+\cos u$	$+\sin u$
C''	$+\sin v$	$-\sin u \cos v$	$\cos u \cos v$

	A^0	B	C
A'''	$+\cos v \cos w$	$+\sin u \sin v \cos w$ $+\cos u \sin w$	$-\cos u \sin v \cos w$ $+\sin u \sin w$
B'''	$-\cos v \sin w$	$-\sin u \sin v \sin w$ $+\cos u \cos w$	$+\cos u \sin v \sin w$ $+\sin u \cos w$
C'''	$+\sin v$	$-\sin u \cos v$	$+\cos u \cos v$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left(-X_m^2\sin 2\alpha + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x_m}+\frac{\partial y}{\partial y_m}\right)\sin\alpha - \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x_m}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\sin 3\alpha\right.$$

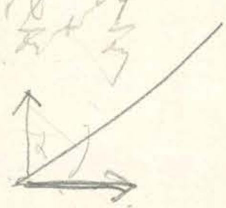
$$a_{12}w\left(-X_m^2\cos 2\alpha + \frac{l}{2}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right)\cos\alpha - \frac{l}{2}X\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\sin 3\alpha\right.$$

$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}w\frac{l}{2}\left(-X\frac{\partial X}{\partial x}\sin\alpha + \right.$$



$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_0^2 + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right) + X_n\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}$$

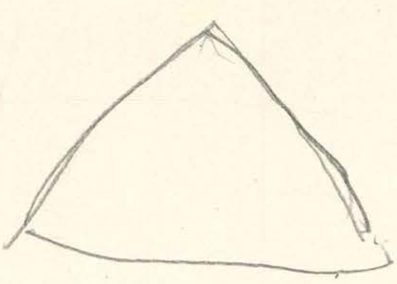
$$a_{12}X_0^2 \qquad a_{12} \qquad a_{12}\left(\quad\right)$$



$$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} \qquad X\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin^2\alpha + lZ_m\frac{\partial X}{\partial x}\sin^2\alpha + lZ_m\frac{\partial y}{\partial y}\cos^2\alpha.$$

$$-X\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha\cos\alpha + lZ\frac{\partial X}{\partial x}\sin\alpha\cos\alpha + lZ_m\frac{\partial y}{\partial y}\sin\alpha\cos\alpha$$



$\alpha+\omega$

ha $\Delta\omega$ val forgatás akkor

12) egyenletek. α helyébe $(\alpha+\omega)$
áll és $\Delta\omega$ val forgatni

a–k helyébe ~~egyenletekből 33)~~ a' értelmet a 33) ban
meghagyva ω l. (~~ek helyébe és v helyébe $u+\Delta u$, $v+\Delta v$~~

$$\begin{cases} a_{12} = (k_1-k_2)\cos v\,\frac{1}{2}\sin 2\omega = \\ \dfrac{a_{23}}{a_{31}} = \dfrac{tg\,\omega}{\cos v} \end{cases}$$

$$a_{12}\frac{a_{23}}{a_{31}} = (k_1-k_2)\sin^2\omega$$

$\sin\omega\cos\omega$

$$\frac{a_{12}}{\dfrac{a_{23}}{a_{31}}} = (k_1-k_2)\cos^2 v\cos^2\omega$$

ha ω nagyobb akkor v nagyobb
ha ω kisebb akkor v kisebb.

mivel $\alpha = 0$ a 13) egyenlet adjá

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\partial X}{\partial y} l$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{\partial Y}{\partial y} l$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0$$

Ezeknek 14) alapján a 12)ben leendő

$$\left. \begin{aligned}
&\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = X_{M0}^2 \sin 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} l\left(-\tfrac{1}{4}\sin\vartheta + \tfrac{3}{4}\sin 3\vartheta\right) \\
&\qquad + U\left\{2X_{M0}\sin\vartheta + \tfrac{3}{4} l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\sin 2\vartheta\right\} \\
&\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) = -X_{M0}^2\cos 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} l\left(\tfrac{1}{4}\cos\vartheta - \tfrac{3}{4}\cos 3\vartheta\right) \\
&\qquad + U\left(-2X_{M0}\cos\vartheta - U + l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}\cos 2\vartheta\right)\right) \\
&\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = V\left(-X_0\cos\vartheta - U + l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}\cos 2\vartheta\right)\right) \\
&\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = V\left(X_{M0}\sin\vartheta + \tfrac{3}{4} l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\sin 2\vartheta\right) \\
&\left(X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = X_0\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} l\sin\vartheta + U\,\tfrac{3}{4} l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\sin 2\vartheta \\
&\left(Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0
\end{aligned} \right\} 15$$

~~Ha V és U~~

15 ből megítélhető U és V-t ellehet hagyni.

U ~~[illegible]~~ compensálható ~~[illegible]~~ a z magneses irányában felvett két egyirányú ~~magnes~~ egyenlő és ható centrális állás melyeknek összetevői $+a$ $b=0$ $c=0$ és $-a$ $b=0$ $c=0$

V compensálható két egyirányú egyenlő verticalis mágnes állás melyeknek összetevői $a=0$ $b=0$ $+c$ és $a=0$ $b=0$ $-c$

c compensatiónál az ω körüli kis tériben ~~a magnes~~ a compensáló erő állandónak tekinthető

Kompenzált eszközöknél tehát a 14 egyenletekben teendő

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

és új forgatott mágnesek esetében, ha tengelye az ω-val ~~egymagasságban az ω-tól vízszintes~~ húzott (vízszintes) irányokkal összeesik 15) egyenletei a következők lesznek.

$$\left.\begin{aligned}
&\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = X_{M0}^2 \sin 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\frac{l}{4}\left(-\sin\vartheta + 3\sin 3\vartheta\right)\\
&\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) = -X_{M0}^2\cos 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\frac{l}{4}\left(+\cos\vartheta - 3\cos 3\vartheta\right)\\
&\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0\\
&\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0\\
&\left(X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} l \sin\vartheta .\\
&\left(Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

rúdjával állandóan a meridiánban ~~álló~~ álló [illegible] forgatott mágnessel a rúdra. $\alpha = 0$

lesz:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 = {} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left\{X_{M0}^2\sin 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\frac{l}{4}\left(-\sin\vartheta + 3\sin 3\vartheta\right)\right\}\\
& + a_{12}\omega\left\{-X_{M0}^2\cos 2\vartheta + X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\frac{l}{4}\left(+\cos\vartheta - 3\cos 3\vartheta\right)\right\}\\
& + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\left\{X_{M0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} l\sin\vartheta\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Ha a mágnesrúd és rudat forgatjuk egyformán a 16) szerint egy a forgási momentumnak akkor tehát $\vartheta = -\alpha$ α a rúd azimuthja új eset. ahol $X_0=0$ $Y_0=0$

Ha az M mágnescsoport hatásában az egész XY síkban $X=0$, $Y=0$ úgy mint az előáll ha a mágnes vertikális és körpse az W-vel ugyanakkor vízszintes síkban fekszik, akkor $\frac{\partial X}{\partial \alpha}=0$ $\frac{\partial Y}{\partial \alpha}=0$

$$\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0$$

$$Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = lZ_{M0}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M0}\sin\vartheta + lZ_{M0}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M0}\cos\vartheta$$

és

$$F_1 = a_{33} w\, l Z_{M0}\left(\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M0}\sin\vartheta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M0}\cos\vartheta\right) \quad \ldots \quad (7)$$

Új eset

Ha az M mágnes csoport hatásában $X_{M0}=0$ és $Y_{M0}=0$.

$$\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M0}\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{M0}\sin 2\vartheta\right\}$$

$$\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M0}\right\}\frac{\sin 2\vartheta}{2} + l\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{M0}\cos 2\vartheta$$

$$X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0$$

$$Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = l Z_{M0}\left(\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M0}\sin\vartheta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M0}\cos\vartheta\right)$$

és így:

$$F_1 = a_{23} w\, l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M0}\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{M0}\sin 2\vartheta\right\}$$

$$+ a_{31} w\, l\left\{\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M0} - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M0}\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2} + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{M0}\cos 2\vartheta\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

$$+ a_{33} w\, l (Z)_{M0}\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M0}\sin\vartheta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M0}\cos\vartheta\right\}$$

Új eset: a 16) formula esetén ~~[illegible]~~ bármely mágneses határokon feltesszük hogy Z az egész XY síkban $=0$

tehát $Z=0$ $\quad \frac{\partial Z}{\partial \alpha}=0$ és $Y_{m_0}=0$ és $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{m_0}=0$

($^{+}$ a 16 formulában egyen kívül feltételeztük hogy $\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{M_0}=\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}$ az az $\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0}$

$$\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = X_{m_0}^2 \sin 2\vartheta + X_0 l \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0}\left(-\frac{1}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 3\vartheta\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 3\vartheta\right)\right\}$$

$$\left(Y^2 - X^2 + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right) = -X_{m_0}^2 \cos 2\vartheta + X_{m_0} l \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 3\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\cos 3\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\right)\right\}$$

$$\left(-XZ + Z\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(YZ + Z\frac{\partial X}{\partial \alpha} + X\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0$$

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = +X_{M_0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0} l \sin\vartheta$$

$$Z\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0$$

és így

$$\begin{aligned} F_1 = {} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\,\omega\left[X_{m_0}^2 \sin 2\vartheta + X_{M_0} l \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0}\left(-\frac{1}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 3\vartheta\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 3\vartheta\right)\right\}\right] \\ & + a_{12}\,\omega\left[-X_{M_0}^2 \cos 2\vartheta + X_{M_0} l \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 3\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0}\left(\frac{1}{2}\cos 3\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\right)\right\}\right] \\ & + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\,\omega\, X_{M_0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0} l \sin\vartheta \end{aligned}$$

$$\kappa\left(X_0\cos\vartheta\,\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\sin 2\vartheta + X_0\sin\vartheta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\left(\sin^2\vartheta - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)\right) l.$$

$$l\kappa X_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\left(\frac{3}{4}\cos\vartheta\sin 2\vartheta + \sin^3\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos^2\vartheta\right)$$

$$\underline{\sin\vartheta\left(\frac{3}{4}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)}$$

$$\left(l\kappa X_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\sin\vartheta\left(\frac{1}{4}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)\right)$$

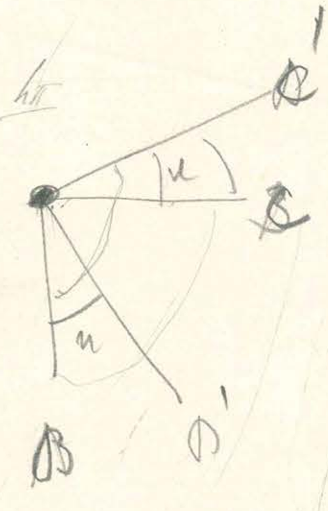
$\vartheta = 0$	0
$\vartheta = 45^\circ$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{5}{8}$
90° 90	1
$\vartheta = 135^\circ$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{5}{8}$
$\vartheta = 180^\circ$	0

$\sin^2\omega$

$\frac{\sin^2\omega\cos\omega}{\cos\omega}$

$X_0\sin\vartheta\frac{\partial Z}{\partial y}l$ $\quad X_0\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0\sin^2\vartheta\, l$

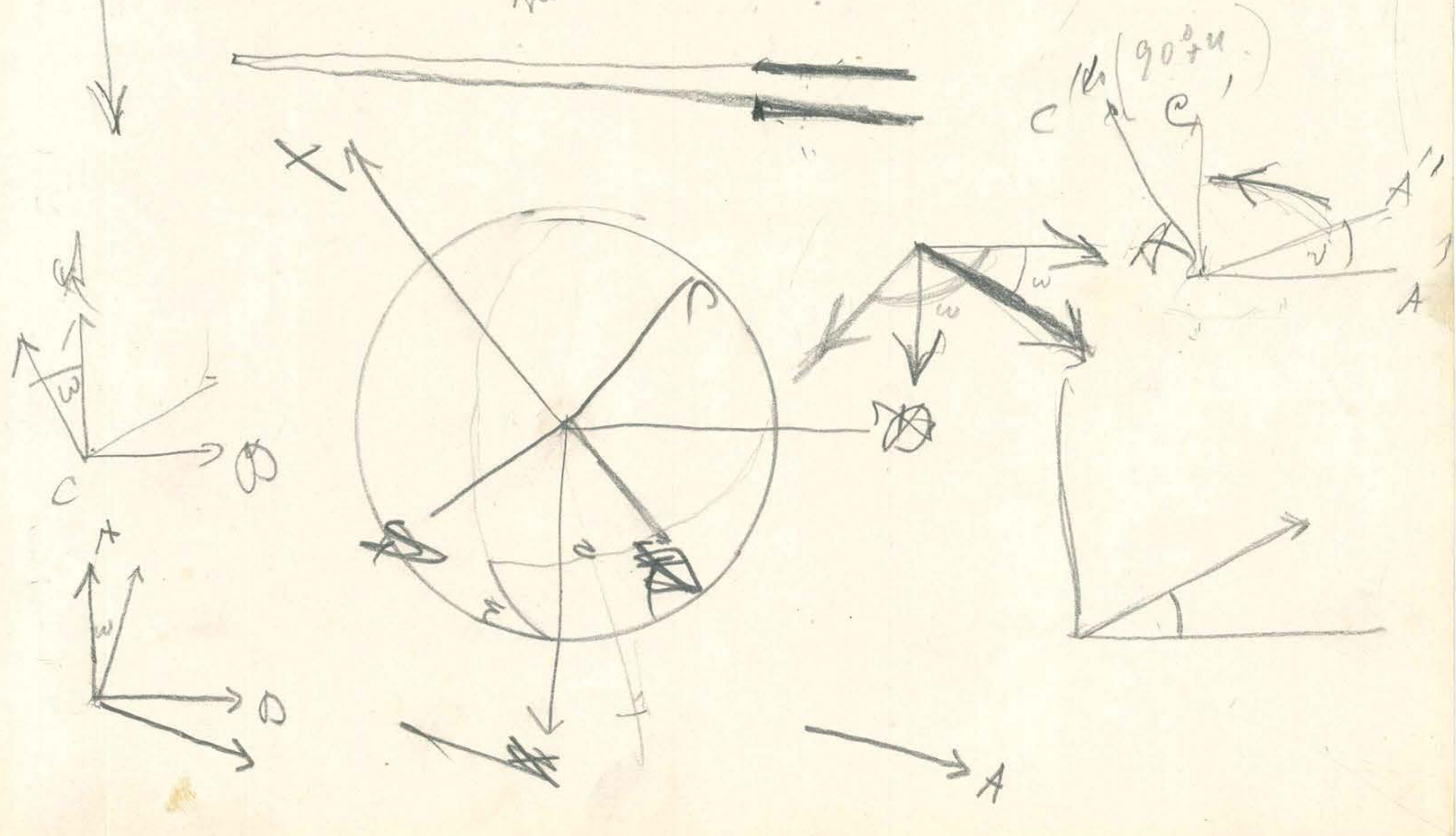
$X_0\cos\vartheta\frac{\partial Z}{\partial y}l.$ $\quad X_0\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0\frac{l\sin 2\vartheta}{2}$



a_{23}

$\operatorname{tg}\omega \quad \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \quad \frac{a_{23}}{a_{31}} = \frac{1}{\cos\nu} \quad \operatorname{tg}\omega \quad \sin\omega$

$\sin^2\omega$



$\cancel{B(+)} + X_m \cancel{(+)\sin\vartheta} + A\,\cancel{(-)\sin 2\vartheta} + X_m \tfrac{l}{2}(-)\ \tfrac{1}{2}(\cancel{\sin 3\alpha} + \sin\alpha)$

$+ B(-)\cos 2\vartheta - X_m(-)\ \tfrac{1}{2}(\cancel{\sin 3\alpha} - \sin\alpha)$

$+ l(Z_m+c)\left[\frac{\partial X}{\partial x}\sin^2\vartheta + \frac{\partial Y}{\partial y}\cos^2\vartheta\right] + (X_m \sin\vartheta + B)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta\right)$

$X_m\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial Y}{\partial y}} + \frac{\partial X}{\partial x} \cancel{-\frac{\partial Y}{\partial y}}\right]$

$\frac{l}{2}(Z_m+c)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{l}{2}(Z_m+c)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta + X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin^2\vartheta + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y}\sin 2\vartheta + B\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + B\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta$

$2\frac{\partial X}{\partial x}$

$+ X_m\frac{\partial Z}{\partial x}$

$\frac{l}{2}Z_m(+) + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x} - X_m Z_m \cos\vartheta + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\vartheta - \frac{l}{2}\left[X\frac{\partial Z}{\partial x} + Z_m(-)\right]\cos 2\vartheta$

$\frac{l}{2}Z_m(+) + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x} - X_m Z_m\cos\alpha - \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\alpha - \frac{l}{2}Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\alpha$

$\frac{3a_{11}+5a_{22}}{a_{11}-a_{22}} = \frac{A}{\varepsilon}$

$(3a_{11}+5a_{22})\varepsilon = (a_{11}-a_{22})A$

$a_{22}(5\varepsilon + A) = a_{11}(A-3\varepsilon)$

$a_{22} = a_{11}\frac{A-3\varepsilon}{A+5\varepsilon}$ $\quad a_{12} = \frac{B}{A}\,\frac{2A+3\varepsilon}{A+5\varepsilon}$

$\frac{a_{12}}{3a_{11}+5a_{22}} = \frac{B}{A}$

$a_{12} = \frac{B}{A}\left(3a_{11} + 5a_{11}\frac{A-3\varepsilon}{A+5\varepsilon}\right)$

$a_{12} = \frac{B}{A}a_{11}\left(3 + 5\frac{A-3\varepsilon}{A+5\varepsilon}\right)$

$\frac{8A+12\varepsilon}{A+5\varepsilon}$

$8\mu\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m = A'$

$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{A'}{8\mu}$

$Z\ y\sin\alpha\ \ -X\sin\alpha$

[1] $2XY + \frac{l}{2} X \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \right\} \frac{\sin 2\vartheta}{2} - Y \frac{l}{2} \left[\frac{\partial X}{\partial x} (1 - \cos 2\vartheta) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m (1 + \cos 2\vartheta) \right]$

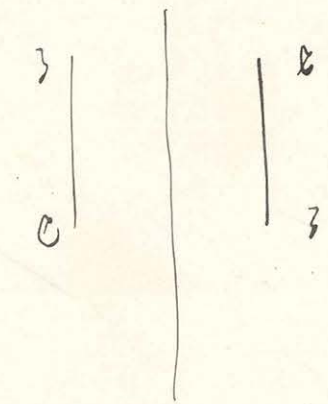
[2] $Y^2 - X^2 + \frac{l}{2} X \left[\frac{\partial X}{\partial x} (1 - \cos 2\vartheta) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) (1 + \cos 2\vartheta) \right] + Y l \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \right] \frac{\sin 2\vartheta}{2}$

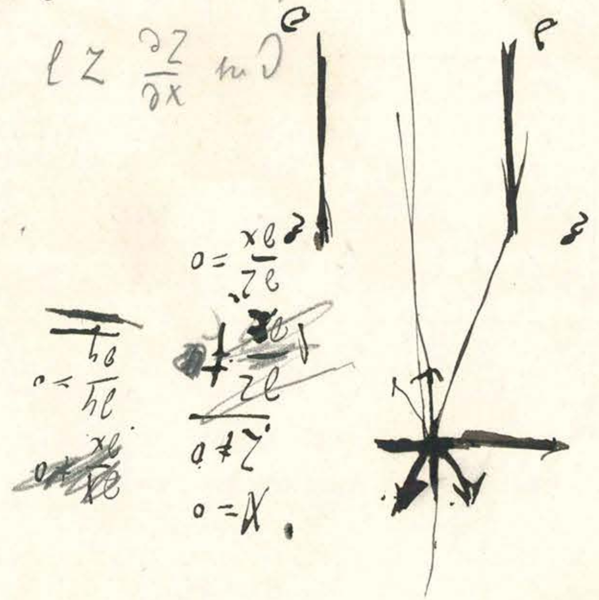
[3] $-XZ + \frac{l}{2} Z \left[\frac{\partial X}{\partial x} (1 - \cos 2\vartheta) + \frac{\partial Y}{\partial y} (1 + \cos 2\vartheta) \right] + l Y \frac{\partial Z}{\partial x} \sin \vartheta$

[4] $YZ + \frac{l}{2} Z \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \sin 2\vartheta + X l \frac{\partial Z}{\partial x} \sin \vartheta$

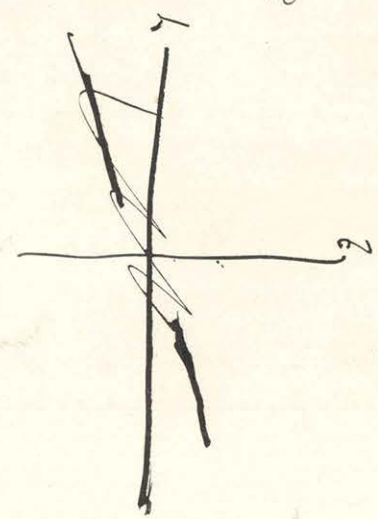
(5) $\frac{l}{2} X \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \sin 2\vartheta + Y \frac{l}{2} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (1 - \cos 2\vartheta) + \frac{\partial Y}{\partial y} (1 + \cos 2\vartheta) \right\}$

6 $l Z \frac{\partial Z}{\partial x} \sin \vartheta$

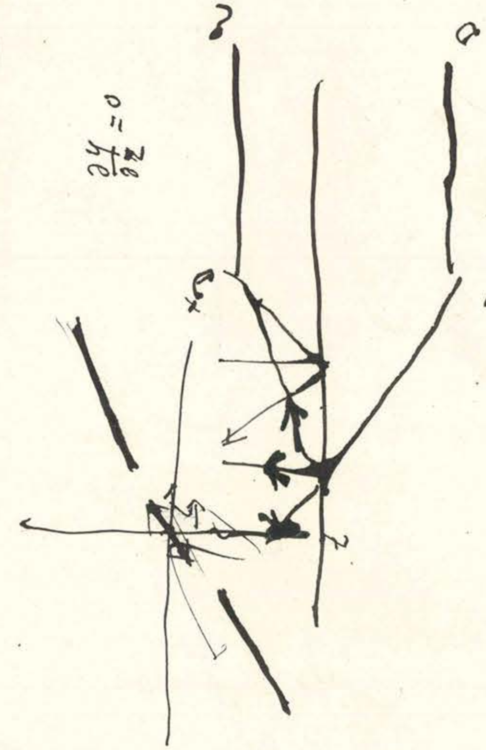




$y : \frac{\partial Y}{\partial y}$



$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$



$a \neq 0$

Egy oszlopon alkalmazunk negyes értékű

egy dilem elhagyunk negyes értékű

Két oszlopon ésdelen elhagyunk M-e szin

k. . . . . .

X	$\frac{\partial X}{\partial x}$	X^2	$X \frac{\partial X}{\partial x}$
$\pm \frac{2M}{r^3}$	$\pm \frac{6M}{r^4}$		
$\pm \frac{2M}{r^3}$	$\mp 6 \frac{M}{r^4}$		
$\pm \frac{4M}{r^3}$	0		
0	$\pm 12 \frac{M}{r^4}$		

$+ A X_m - \frac{l}{2} X_m (+)$

$$\left[(y^2-x^2)_{\cos 2\alpha} + Xl\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)_x \cos\alpha\cos 2\alpha - yl\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos 2\alpha\right.$$
$$-2xy\sin\alpha + Xl\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_x \sin\alpha\sin 2\alpha + yl\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\cos\alpha\sin 2\alpha$$

$$\frac{xl}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)(-\cos 3\alpha+\cos\alpha) + \frac{\partial y}{\partial y}(\cos 3\alpha+\cos\alpha)\right)$$
$$\frac{yl}{2}\left\{\frac{\partial x}{\partial x}(-\sin 3\alpha+\sin\alpha) + \frac{\partial y}{\partial y}(\sin 3\alpha+\sin\alpha)\right)$$

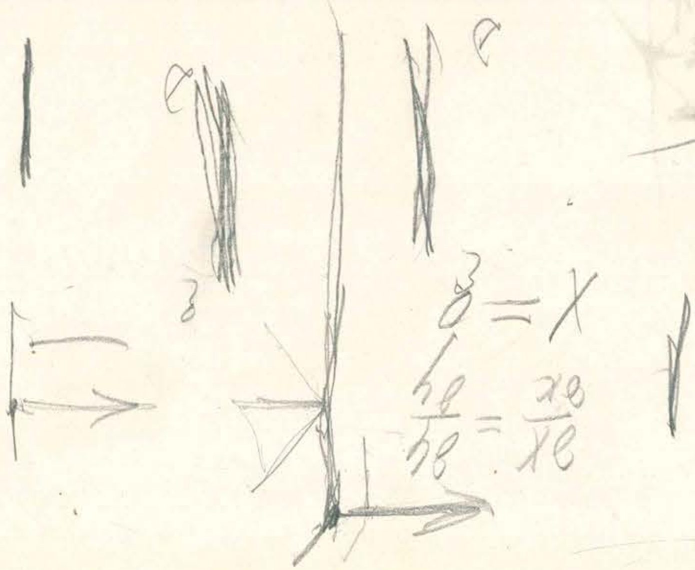
$$-XZ + Zl\frac{\partial y}{\partial y}\cos^2\alpha - yl\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-yZ + Zl\frac{\partial x}{\partial x}\sin^2\alpha + Xl\frac{\partial Z}{\partial x}\sin^2\alpha.$$

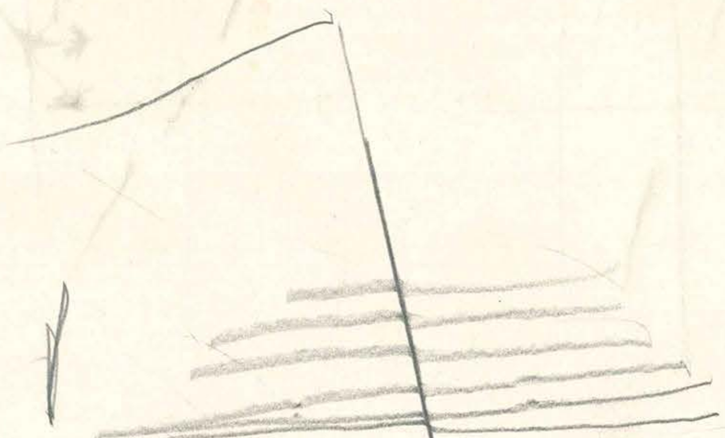
$$Z\frac{l}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x}(1-\cos 2\alpha) + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)(1+\cos 2\alpha)\right)$$
$$l\frac{\partial Z}{\partial x}\left[X\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha\right) - y\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right]$$
$$\cancel{Z\frac{l}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right) - Z\frac{l}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\cos 2\alpha}$$
$$\cancel{\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{l}{2}X} - \cancel{\tfrac{1}{2}lX\frac{\partial Z}{\partial x}\cos 2\alpha} - \cancel{\tfrac{1}{2}ly\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\alpha}$$

$$-Xl\frac{\partial x}{\partial x}\sin\alpha + yl\frac{\partial y}{\partial y}\cos\alpha$$

$$yZ - Zl\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha - Xl\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-XZ + Zl\frac{\partial y}{\partial y}\sin\alpha\cos\alpha - yl\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\sin^2\alpha$$

$$-\frac{l}{2}Z\frac{\partial x}{\partial x}\sin 2\alpha - \cancel{\frac{l}{2}X\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\alpha}$$
$$+\frac{l}{2}Z\frac{\partial y}{\partial y}\sin 2\alpha - \cancel{\frac{l}{2}y\frac{\partial Z}{\partial x}} + \cancel{\frac{l}{2}y\frac{\partial Z}{\partial x}\cos 2\alpha}$$





$\frac{\partial X}{\partial x} \quad \lambda = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = +\frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial x}$ $\quad \partial X \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y}. \quad \frac{\partial X}{\partial x} + 2\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = +\frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial x}$

$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial x},$

$$F_1 = \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\omega\left(+X_m^2\sin 2\vartheta - \frac{l}{4}X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\sin\vartheta + \frac{3}{4}l\,X_m\frac{\partial X}{\partial x}\sin 2\vartheta\right)$$
$$+a_{12}\omega\left(-X_m^2\cos 2\vartheta + \frac{l}{4}X_m\frac{\partial X}{\partial x_m}\cos\vartheta - \frac{3}{4}l\,X_m\frac{\partial X}{\partial x}\cos 2\vartheta\right)$$
$$+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\omega\, l\, X_m\frac{\partial X}{\partial x}\sin\vartheta$$

$$\frac{F_1}{\omega} = \sin\vartheta\left(-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{l}{4}\left(X\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}l\,X\frac{\partial X}{\partial x}\right) + a_{12}\frac{l}{4}X\frac{\partial X}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}X^2\sin 2\vartheta - a_{12}X^2\cos 2\vartheta$$
$$+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\frac{3}{4}l\,X\frac{\partial X}{\partial x}\sin 2\vartheta - a_{12}\frac{3}{4}l\,X\frac{\partial X}{\partial x}\cos 2\vartheta.$$

$\frac{l}{4}X\frac{\partial X}{\partial x} = S$

$\frac{3a_{11}+5a_{22}}{2}$

$$-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}S + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}4S = A = \frac{3a_{11}+5a_{22}}{2}S$$

$$a_{12}S = B$$

$\frac{a_{11}-a_{22}}{}\,k^2 \ldots$

$-X_0^2\cos 2\vartheta + X_0 l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0(\cos\vartheta\sin^2\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2}\sin\vartheta) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0(\cos^3\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2}\sin\vartheta) + \cancel{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0(\sin 2\vartheta\cos\vartheta + \cos 2\vartheta\sin\vartheta)}\right.$

1

$2\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 \sin^2\vartheta\cos\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 \cos\vartheta\cos 2\vartheta + \cancel{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 X \cos^2} \quad \cos^3\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta$

$X_w \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{hx}$

$2X_w \frac{\partial X}{\partial x}$

$2\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\left(-\frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{1}{4}\cos\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\left(\frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{3}{4}\cos\vartheta + \frac{1}{4}\cos 3\vartheta - \frac{1}{4}\cos\vartheta\right)$

$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\left(+\frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 3\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\left(\frac{1}{2}\cos 3\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\right)$

$X_0 l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\sin 2\vartheta}{2}\cos\vartheta + \sin^3\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(-\frac{\sin 2\vartheta}{2}\cos\vartheta + \cos^2\vartheta\sin\vartheta\right) + \right.$

$(\sin\vartheta\cos^2\vartheta + \sin^3\vartheta) \qquad (-\sin\vartheta\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta\sin\vartheta)$

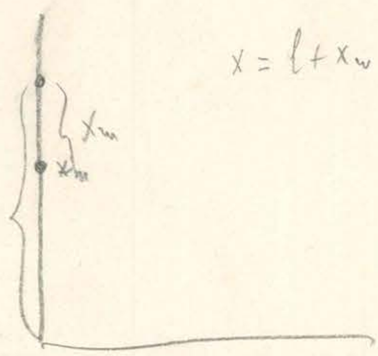
$X_0 l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\left(\cancel{\frac{1}{4}\sin 3\vartheta} + \frac{1}{4}\sin\vartheta - \cancel{\frac{1}{4}\sin 3\vartheta} + \frac{3}{4}\sin\vartheta\right)$

$\sin\vartheta$

$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta - \cancel{\frac{1}{2}\cos 3\vartheta} - \cancel{\frac{1}{4}\cos 3\vartheta} - \cancel{\frac{1}{4}\cos\vartheta}\right)$

$\frac{1}{4}\cos\vartheta - \frac{3}{4}\cos 3\vartheta$

$\frac{1}{4}(\cos\vartheta - 3\cos 3\vartheta)$



$x = l + x_w$

$+ X_w Z_w \sin\alpha + \frac{2}{g}\left(X_w \frac{\partial X}{\partial x} + Z_w(-)\right]\cos\alpha$

$- X_w Z_w \sin\alpha - \frac{2}{g}\left[X_w \frac{\partial X}{\partial x} + Z_w(-)\right]\sin\alpha$

$- \cancel{X_w Z_w \cos\alpha} + \frac{2}{g}\cancel{\left\{X \frac{\partial X}{\partial x} + Z_w(+)\right\}} - \frac{2}{g}\left[X_w \frac{\partial X}{\partial x} + Z_w(-)\right]\sin\alpha$

$+ \cancel{\frac{2}{g}Z_w}(+) + \frac{2}{g}X_w \cancel{\frac{\partial X}{\partial x}} - \cancel{X_w Z_w \cos\alpha} - \frac{2}{g}\left[X_w \frac{\partial X}{\partial x} + Z_w(-)\right]\cos\alpha$

$(X_m\sin\vartheta + B)(Z_m+C) + l(Z_m+C)(\;\;)\frac{\sin 2\vartheta}{2} + l(X_m\cos\vartheta + A)\left\{\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta\right\}$

$B(\cancel{Z_m+C}) + X_m\cancel{[Z_m+C]}\sin\vartheta + \frac{1}{2}(Z_m+C)\cancel{(-)}\sin 2\vartheta + \cancel{lA\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta} + \cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}}\sin 2\vartheta + \frac{l}{2}X_m\cancel{\frac{\partial Z}{\partial y}}(1+\cos 2\vartheta)$

$+ lA\cancel{\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta}$

$+ lA\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta$

$B(Z_m+C) + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y} + \left\{X_m(Z_m+C) + lA\frac{\partial Z}{\partial x}\right\}\sin\vartheta + \frac{l}{2}\left\{(Z_m+C)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\right\}\sin 2\vartheta$

$+\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y} + X_mZ_m\sin\vartheta + \frac{l}{2}Z_m(-) + X_m\frac{\partial Z}{\partial x})\sin 2\vartheta + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y}\cos 2\vartheta$

$-X_mZ_m\sin\alpha$

$-X_m^2\cos 2\alpha + \frac{l}{2}X_m[(+)\cos\alpha + \frac{l}{2}X_m(-)\cos 2\alpha$

$-X_m^2\cos\vartheta + \frac{l}{2}X_m[(+)\cos\vartheta - \frac{l}{2}X_m(-)\cos\vartheta$

$-\frac{l}{2}X_m(+)\sin\vartheta + X_m^2\sin^2\vartheta + \frac{l}{2}X_m(-)\sin\vartheta$

$+\frac{l}{2}X_m^2(+) \quad -X_m\sin 2\alpha$

$Z\frac{\partial X}{\partial x}\sin^2\vartheta + Z\frac{\partial Y}{\partial y}\cos^2\vartheta,$

$Z\frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right) + Z\frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right)$

$-\frac{l}{2}X_m \quad -l(X_m+A)\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha + l(B)\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\alpha$

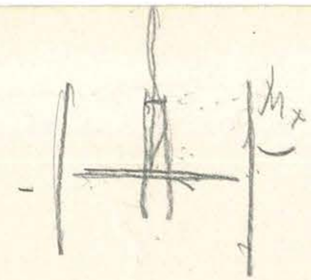
$\frac{l}{2}X_m\left[\cancel{\frac{\partial X}{\partial x}} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial Y}{\partial y}}\right]$

$$\frac{\quad}{2}\, x = c$$

$$a_{12} x^2 = D$$

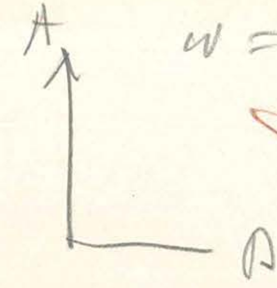
$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\, 3S = E$$

$$a_{12}\, 3\, S = F$$



$$\frac{S}{a_{12}}$$

x^2



$w = 0$

$X = 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} =$ nem kell.

~~$\frac{F_1}{w} = a_{23}\frac{1}{2} Z \frac{\partial X}{\partial x}$~~

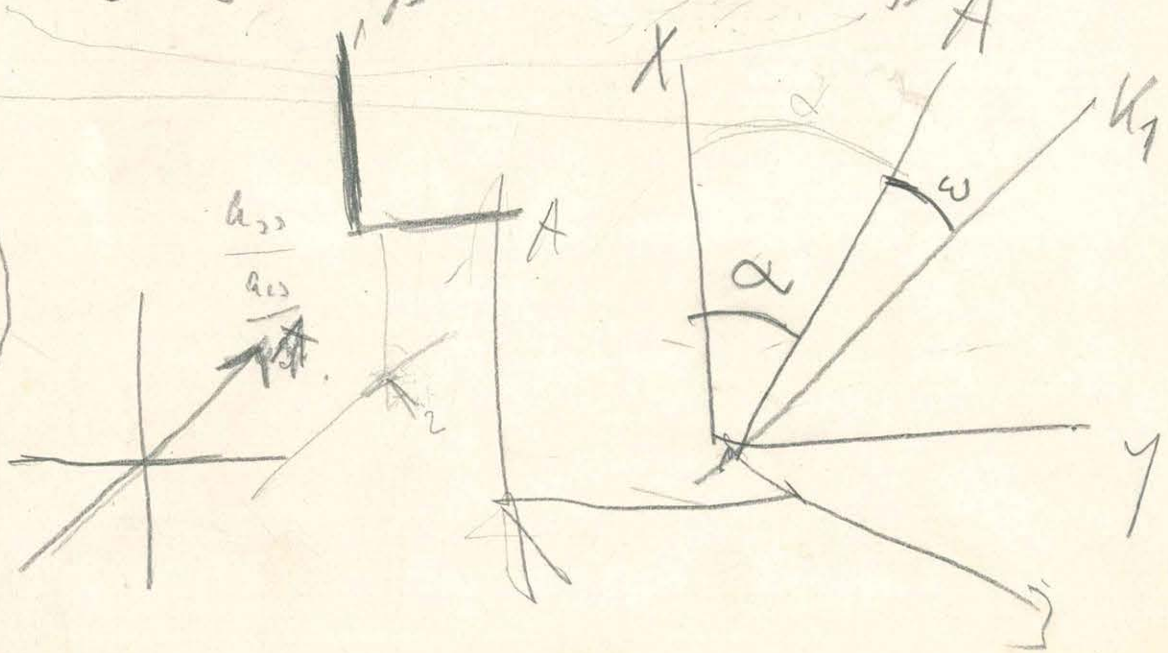
$$\frac{F_1}{w} = a_{23}\left(\frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right) - \frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta\Big)$$

$$+ a_{31}\frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 2\vartheta + a_{33}\, l\, Z_m\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m \sin\vartheta.$$

$$\frac{F_1}{w} = a_{23}\frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + a_{33}\, l\left(Z_m \frac{\partial Z}{\partial x_m}\sin\vartheta\right) - a_{23}\frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta + a_{31}\frac{1}{2} Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 2\vartheta.$$

$$Z_m \frac{\partial Z}{\partial x_m}$$

$$\boxed{a_{23}\, l\, Z_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\sin^2\vartheta + \frac{\partial Y}{\partial y}\cos^2\vartheta\right)}$$



$a_{11} \quad a_{22} \quad a_{12} \quad a_{33} \quad \frac{a_{31}}{a_{23}}$

$\cancel{a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2) \cos^2 v \cos^2 w} - \sin^2 w$

$a_{11} \quad a_{22}$ és $\frac{a_{13}}{a_{31}}$ ki?

o

$\cancel{a_{11} = a_{33} = (k_1 - k_2)}$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)(\cos^2 v \cos^2 w - \sin^2 w) = \cancel{(k_1 - k_2)} \\ a_{33} - a_{22} = k_1 - k_2 (\sin^2 v \cos^2 w - \sin^2 w) = \end{cases}$$

$$\frac{\sin^2 w}{\cos^2 w} = \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v \qquad \sin^2 v = 1 - \left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 \frac{\sin^2 w}{\cos^2 w}$$

$$a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)\left\{\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 \sin^2 w - \sin^2 w\right)$$

$$a_{33} - a_{22} = (k_1 - k_2)\left\{\cos^2 w - \left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 \sin^2 w - \sin^2 w\right)$$

$\cancel{a_{11} = a_{22} = k_1} = k_2$

$$a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2) \sin^2 w \left(\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 - 1\right)$$

$$a_{33} - a_{22} = (k_1 - k_2)\left\{\cos^2 w - (k_1 - k_2) \sin^2 w \left(\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 + 1\right)\right.$$

$$\frac{a_3 - a_{22}}{a_{11} - a_{22}} = \cot^2 w \frac{1}{\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 - 1} - \frac{\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a_{31}}{a_{23}}\right)^2 - 1}$$

II forgatási mód

$F_1 = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}$

$X = -\frac{M}{r^3}$

$Y = 0$

$Z = 0$

$\frac{\partial X}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{3}{r^4} M$

$\frac{\partial Z}{\partial y}$

$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} A + a_{33} B = C$

$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} A' + a_{33} B' = C'$

$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)' A + a_{33}' B = C_1$

$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)' A' + a_{33}' B' = C_1'$

$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)'$

$(a_{11}+a_{22}) A + a_{33} B = C_1$

$(a_{11}+a_{22})' A + a_{33}' B = C_2$

$(a_{11}+a_{22})'' A + a_{33}'' B = C_3$

$(a_{11}+a_{22})$

$2(X_m \cos\vartheta + A)(X_m \sin\vartheta + B) + \ell(X_m\cos\vartheta + A)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\ell(X_m \sin\vartheta + B)\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta\right\}$

$(X_m\cos\vartheta + A)(-)\frac{\sin\vartheta}{2} + \frac{(X_m \sin\vartheta + B)}{2}\left[(+) - (-)\cos 2\vartheta\right]$

$B(+) + X_m(+)\sin\vartheta - \frac{X_m}{4}(-)(\sin 3\alpha - \sin\alpha) - B(-)\cos 2\vartheta + \frac{A}{2}(-)\sin 2\vartheta$

$\frac{X_m}{2}(-)(\sin 3\alpha + \sin\alpha)$

$X\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots$

$-(X_m\cos\vartheta + A)(Z_m+C) + \frac{l}{2}\left\{(Z_m+C)\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta\right] + l(X_m\sin\vartheta + B)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta\right)\right.$

$-\cancel{A(Z_m+C)} - \cancel{X_m(Z_m+C)\cos\vartheta} - \cancel{\frac{l}{2}(Z_m+C)(-)\cos 2\vartheta} + \cancel{lB\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta} + \cancel{lB\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta} \quad \cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y}\sin 2\vartheta}$

$+\cancel{\frac{l}{2}(Z_m+C)(+)} + \cancel{lB\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta} \qquad -\cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\cos 2\vartheta}$

$+\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}$

$(X_m\sin\vartheta + B)(Z_m+C) + \frac{l}{2}\left\{(Z_m+C)(-)\sin 2\vartheta + l(X_m\cos\vartheta + A)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta\right)\right.$

$\cancel{B(Z_m+C)} + \cancel{X_m(Z_m+C)\sin\vartheta} + \cancel{\frac{l}{2}(Z_m+C)(-)\sin 2\vartheta} + \cancel{lA\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\vartheta} + \cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\vartheta} + \frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y}\cos 2\vartheta$

$+\cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial Z}{\partial y}} \qquad +\cancel{lA\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta}$

$\cos\frac{\partial Z}{\partial x}Al + \frac{\partial Z}{\partial y}X_m\frac{l}{2} +$

$\cos\frac{\partial Z}{\partial y}X_m\frac{l}{2} + \cancel{\sin\frac{\partial Z}{\partial x}X_m\frac{l}{2}} + \cancel{\cos\frac{\partial Z}{\partial y}Al} + \sin\cancel{(-)}(Z_m+C)\frac{l}{2} + \cancel{\sin(Z_m+C)X_m} + \cancel{(Z_m+C)B}$

$\left(\cos\frac{\partial Z}{\partial x} + \sin\frac{\partial Z}{\partial y}\right)(X_m\cos + A)l + \sin(-)(Z_m+C)\Big\}\frac{l}{2} + (Z_m+C)(X_m\sin + B)$

$\cancel{\frac{\partial Z}{\partial x}X_m\frac{l}{2}} +$

$\cancel{\cos\frac{\partial Z}{\partial x}X_m\frac{l}{2}} - \cancel{\cos\frac{\partial Z}{\partial y}Bl} + \cancel{(+)(Z_m+C)\frac{l}{2}} +$

$\cancel{\sin\frac{\partial Z}{\partial y}X_m\frac{l}{2}} \quad \cancel{\cos\frac{\partial Z}{\partial y}Bl} + \cancel{\sin\frac{\partial Z}{\partial x}Bl} + \cos\cancel{(-)}(Z_m+C)\frac{l}{2} - \cancel{\cos(Z_m+C)X_m} - \cancel{(Z_m+C)A} -$

$\left(\cos\frac{\partial Z}{\partial y} + \sin\frac{\partial Z}{\partial x}\right)(B + \sin X_m)l + \left[\cos\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\right)\right](Z_m+C)\Big\}\frac{l}{2} + (Z_m+C)(A + \cos X_m) -$

$\cancel{X_m^2\sin^2} \quad \cancel{X_m^2\cos^2}$

$(X_m\sin\vartheta + B)^2 - (X_m\cos\vartheta + A)^2 + \frac{l}{2}\left[(X_m\cos\vartheta + A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta\right)\right] + \frac{l}{2}(X_m\sin\vartheta + B)(-)\sin 2\vartheta$

$B^2 - A^2 + 2BX_m\sin\vartheta - 2AX_m\cos\vartheta - X_m^2\cos 2\vartheta - \frac{l}{4}X_m(-)(\cos 3\vartheta + \cos\vartheta) + \frac{l}{2}B(-)\sin 2\vartheta$

$+\frac{l}{2}A(+) \qquad + \frac{l}{2}X_m(+)\cos\vartheta - \frac{l}{2}A(-)\cos 2\vartheta - \frac{l}{4}X_m(-)(\cos 3\vartheta - \cos\vartheta)$

$2(X_m\cos\vartheta + A)(X_m\sin\vartheta + B) + l(X_m\cos\vartheta + A)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2} - \frac{l}{2}(X_m\sin\vartheta + B)\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta\right\}$

$2AB + 2AX_m\sin\vartheta + 2BX_m\cos\vartheta + X_m^2\sin 2\vartheta + \frac{l}{4}X_m(-)\{\sin 3\alpha + \sin\alpha\} + \underline{\frac{l}{2}B(-)\cos 2\vartheta}$

$-\frac{l}{2}B(+) - \frac{l}{2}X_m(+)\sin\vartheta \qquad + \frac{l}{2}A(-)\sin 2\vartheta + \frac{l}{4}X_m(-)\{\cos 3\alpha - \cos\alpha\}$

$[\cos(-) - (+)](B + \sin X_m) + \sin(-)(A + \cos X_m)$

$(X_m\cos\vartheta + A)(-)\sin 2\vartheta + (X_m\sin\vartheta + B)\left[(+) - (-)\cos 2\vartheta\right]$

$$a_{23}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = A$$

$$\frac{a_{11}-a_{12}}{2}X_m^2 + a_{31}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = B$$

$$a_{12}X_m^2 + a_{23}\frac{L}{2}\left(X\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m = C$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}X_m^2 + \frac{a_{31}}{a_{23}}A = B - \frac{a_{31}}{a_{23}}$$

$$\frac{a_{31}}{a}$$

$$a_{12}X_m^2 + A = C - A$$

$$\frac{a_{11}-a_{12}}{2a_{12}} = \frac{B - \frac{a_{31}}{a_{23}}A}{C-A}$$ [illegible]

$$\frac{a_{31}}{a_{23}}A = B - (C-A)\frac{a_{11}-a_{12}}{2a_{12}}$$

X körü

	X	Y	Z
X'	1	0	0
Y'	0	$\cos u$	$\sin u$
Z'	0	$-\sin u$	$\cos u$

y kö

	X'	Y'	Z'
X''	$\cos v$	0	$-\sin v$
Y''	0	1	0
Z''	$\sin v$	0	$\cos v$

	X	Y	Z
X''	$\cos v$	$+\sin u \sin v$	$-\sin v \cos u$
Y''	0	$\cos u$	$\sin u$
Z''	$\sin v$	$-\sin u \cos v$	$\cos u \cos v$

	X''	Y''	Z''
X'''	$\cos w$	$\sin w$	0
Y'''	$-\sin w$	$\cos w$	0
Z'''	0	0	1

$$\frac{\sin^2 w}{\cos^2 w} = \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v$$

$$\cancel{\sin^2 w = \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \sin^2 w \cos^2 v}$$

$$1 - \cos^2 w = \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v \cos^2 w$$

$$\operatorname{tg} w = \frac{a_{23}}{a_{31}} \cos v$$

$$\cos^2 w = \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}$$

$$\sin^2 w = \frac{\left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}{1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}$$

$$\cancel{a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)}$$

$$\sin w \cos w = \frac{1}{2} \sin 2w = \frac{\frac{a_{23}}{a_{31}} \cos v}{1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}$$

$$a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)(\cos^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$a_{33} - a_{22} = k_1 - k_2 (\sin^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$a_{12} = (k_1 - k_2) \cos v \, \frac{1}{2} \sin 2w .$$

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{\cos^2 v - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}{\frac{a_{23}}{a_{31}} \cos^2 v} = \frac{1 - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2}{\frac{a_{23}}{a_{31}}}$$

$$\frac{a_{33} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{\sin^2 v - \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2 \cos^2 v}{\cos^2 v \, \frac{a_{23}}{a_{31}}} =$$

$$1 - 1 - \left[1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2\right] \cos^2 v = \frac{a_{33} - a_{22}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{23}}{a_{31}} \cos^2 v .$$

$$\cos^2 v = \frac{1}{\frac{a_{33} - a_{22}}{a_{12}} \frac{a_{23}}{a_{31}} + 1 + \left(\frac{a_{23}}{a_{31}}\right)^2}$$

$$Z = \frac{3c^2 M_2}{r^5} - \frac{M_2}{r^3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{3c}{r^5} M_2 + 15\frac{a^2 c}{r^7} M_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} \quad -\frac{3c}{r^5} M_2$$

$$Z = \frac{3c^2 M_2}{r^5} - \frac{M_2}{r^3}$$

$$-\frac{3c}{r^5} M_2 + 15\frac{a^2 c}{r^7} M_2$$

$$-\frac{3c}{r^5} M_2$$

$$(2c^2-a^2)(3a^2-2c^2) = 6a^2c^2 - 3a^4 - 4c^4 + 2a^2c^2$$

$$8a^2c^2 - 3a^4 - 4c^4$$

$$\frac{3c^2 - c^2 - a^2}{r^5} = \frac{2c^2-a^2}{r^5} M_2$$

$$\frac{-6c(a^2+c^2) + 15a^2c}{r^7}$$

$$\frac{9a^2c - 6c^2}{r^7}$$

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{3a^2c - 2c^2}{r^7} =$$

$$Z = 2\frac{2c^2-a^2}{(c^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 30\frac{a^2c}{(c^2+a^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 6c\frac{3a^2-2c^2}{(c^2+a^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$a_{11} - a_{22} = (k_1 - k_2)(\cos^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$a_{22} - a_{33} = (k_1 - k_2)(\sin^2 v \cos^2 w - \sin^2 w)$$

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{\cos^2 v \cos^2 w - \sin^2 w}{\cos v \sin w \cos w} = \frac{\cos v \cos w}{\sin v} - \frac{\sin w}{\cos v \cos w}$$

$$\frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} = \frac{\sin^2 v \cos^2 w - \sin^2 w}{\cos v \sin w \cos w} = \frac{\sin^2 v \cos w}{\cos v . \sin w} - \frac{\sin v}{\cos v \cos w}$$

$$\frac{a_{23}}{a_{12}} = - \operatorname{tg} v$$

$$\frac{a_{23}}{a_{31}} = \frac{\operatorname{tg} w}{\cancel{\operatorname{tg} w} \cos v} \qquad \operatorname{ctg} v = \frac{a_{31}}{a_{23}} \cos v$$

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} = - \frac{a_{12}}{a_{23}} \cos w - \frac{a_{23}}{a_{31}}$$

$$\frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} \frac{a_{31}}{a_{23}} - \operatorname{tg} v \frac{1}{\cos w}$$

$$\frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} = \left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)^2 \frac{a_{31}}{a_{23}} + \frac{a_{23}}{a_{12}} \cdot \frac{1}{\cos w}$$

$$\frac{a_{23}}{a_{12}} \frac{1}{\cos w} = \frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} - \left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)^2 \frac{a_{31}}{a_{23}} = \frac{(a_{22} - a_{33}) a_{12} a_{23} - a_{23}^2 a_{31}}{a_{12}^2 a_{23}}$$

$$\frac{a_{12}}{a_{23}} \cos w = - \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} - \frac{a_{23}}{a_{31}} = - \frac{(a_{11} - a_{22}) a_{31} + a_{31} a_{23}}{a_{12} a_{31}}$$

$$1 = - \frac{[(a_{22} - a_{33}) a_{12} a_{23} - a_{23}^2 a_{31}][(a_{11} - a_{22}) \cancel{a_{31}} + \cancel{a_{31}} a_{23}]}{a_{12}^3 \cancel{a_{31}} a_{23}}$$

$$a_{12}^3 a_{23} = - (a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33}) a_{12} a_{23} + (a_{11} - a_{22}) a_{23}^2 a_{31}$$
$$- a_{23}^2 (a_{22} - a_{33}) a_{12} + a_{23}^3 a_{31}$$

$$1 = - \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{23}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{31}}{a_{12}} - \frac{a_{23}}{a_{12}} \frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}} + \frac{a_{23}^2}{a_{12}^2} \cdot \frac{a_{31}}{a_{12}}$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\frac{a_{23}}{a_{31}}=\frac{\sin w}{\sin v}-\frac{tg^2 w}{\cos^2 v}$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}=\frac{\cos w}{tg\, v}-\frac{tg\, w}{\cos v}$$

$$\frac{a_{22}-a_{33}}{a_{12}}=\sin v\,\frac{tg\, v}{tg\, w}-\frac{tg\, v}{\cos w}$$

$$\frac{a_{22}-a_{33}}{a_{12}}=-\frac{a_{31}}{a_{12}}tg\, v-\frac{tg\, v}{\cos w}$$

$$\frac{tg\, v}{tg\, w}=-\frac{a_{23}}{a_{12}}\frac{a_{31}}{a_{23}}\frac{1}{\cos v}$$

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\frac{a_{31}}{a_{12}}-\frac{a_{22}-a_{33}}{a_{12}}\right)$$

$$+\frac{a_{23}}{a_{12}}\left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\frac{a_{31}}{a_{12}}-\frac{a_{22}-a_{33}}{a_{12}}\right)$$

Jelöltük arra hogy 1. legyen tegye

$$\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}+\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)\left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\frac{a_{31}}{a_{12}}-\frac{a_{22}-a_{33}}{a_{12}}\right)=1$$

I *)

Vázsonyi.

1 $X_0^2 \sin 2\vartheta + X_0 \cos\vartheta \frac{\partial X}{\partial\alpha} - X_0 \sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\alpha} = X_0^2 \sin 2\vartheta + X_0 l \frac{\partial X}{\partial y}\cos\vartheta - X_0 l \frac{\partial Y}{\partial y}\sin\vartheta$

2 $-X_0^2\cos 2\vartheta + X_0\cos\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + X_0\sin\vartheta\frac{\partial X}{\partial\alpha} = -X_0^2\cos 2\vartheta + X_0 l\frac{\partial Y}{\partial y}\cos\vartheta + X_0 l \frac{\partial X}{\partial y}\sin\vartheta$

3 $X_0\cos\vartheta\frac{\partial X}{\partial\alpha} + X_0\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = X_0 l\frac{\partial X}{\partial y}\cos\vartheta + X_0 l\frac{\partial Y}{\partial y}\sin\vartheta$.

Schwarzschild, Febr 12.

$1 = X_0^2\sin 2\vartheta + X_0 l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\cos 2\vartheta\sin\vartheta - \cancel{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0} - 2\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right\} - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 \cancel{\cos\vartheta}\cos 2\vartheta\Big)\Big\}$

$\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta$ | $\sin\vartheta - \sin^3\vartheta$

$\frac{1}{4}\sin 3\vartheta + \frac{1}{4}\sin\vartheta$

$+\frac{1}{4}\sin 3\vartheta - \frac{3}{4}\sin\vartheta$

$-\frac{1}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 3\vartheta$

$+\frac{1}{4}\sin\vartheta + \frac{1}{4}\sin 3\vartheta$

$\frac{1}{2}\sin 3\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta$

$2 = -X_0^2\cos 2\vartheta + X_0 l\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 3\vartheta\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\left(\frac{1}{2}\cos 3\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\right)\right\}$

$3 = + X_0 l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\sin\vartheta$

$\sin\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 3\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\cos 3\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$

$\sin\alpha\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}\cos 3\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha\sin 2\alpha = +\frac{1}{2}\sin 3\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -\cancel{\frac{\partial Z}{\partial x} l \sin} \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y} l \cancel{\cos}$$

$$= l\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M_0} \sin \vartheta + l\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M_0} \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{\partial Z}{\partial y} l = l\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M_0} \sin \vartheta + l \frac{\partial Z}{\partial y_M} \cos \vartheta$$

$$Z \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{\partial Y}{\partial y} l = l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{M_0} \sin^2 \vartheta + l\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{M_0} \cos^2 \vartheta + l\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{M} \sin 2\vartheta.$$

$$Z \frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\partial X}{\partial y} l = l($$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} \sin^2 \vartheta - \frac{\partial X}{\partial x} \cos^2 \vartheta - \frac{\partial Z}{\partial z} \cos^2 \vartheta$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta\right.$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \cos 2\vartheta.$$

$+2\mathfrak{M}X_{m0}\sin\vartheta + \mathfrak{M}\frac{\partial X}{\partial\alpha} = \mathfrak{M}\left(2X_{m0}\sin\vartheta + \frac{3}{4}l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{m0}\sin 2\vartheta\right.$

$-2\mathfrak{M}X_0\cos\vartheta - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = \mathfrak{M}\left(-2X_0\cos\vartheta - \mathfrak{M} + l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\frac{1}{4}(1-3\cos 2\vartheta)\right)$

$-VX_0\cos\vartheta - V\mathfrak{M} + V\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = V\left(-X_0\cos\vartheta - \mathfrak{M} + l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{m0}\frac{1}{4}(1-3\cos 2\vartheta)\right)$

$+VX_{m0}\sin\vartheta + V\frac{\partial X}{\partial\alpha} = V\left(X_{m0}\sin\vartheta + \frac{3}{4}l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{m0}\sin 2\vartheta\right)$

$\mathfrak{M}\frac{\partial X}{\partial\alpha} =$

0

$\frac{\partial X}{\partial\alpha} = \frac{\partial X}{\partial y}l = \frac{3}{4}l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{m0}\sin 2\vartheta$

$\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = \frac{\partial Y}{\partial y}l = l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{m0}\left(\sin^2\vartheta - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\vartheta$

$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2\vartheta$

$b=0 \quad c=0 \quad M_z = M \quad M_y = 0 \quad M_b = 0$

$X=0 \quad Y=0 \quad Z = -\frac{M}{r^3}$

$\frac{\partial X}{\partial\alpha} = \cancel{\frac{\partial X}{\partial y}l = 0}$

$\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = \cancel{\frac{\partial Y}{\partial y}l = 0}$

$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = \cancel{\frac{\partial Z}{\partial y}} \neq 0$

$\frac{\partial X}{\partial\alpha} = \frac{\partial X}{\partial y}l = l\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right)\frac{\sin 2\vartheta}{2} + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0\cos 2\vartheta$

$\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = \frac{\partial Y}{\partial y}l = l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0\sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\cos^2\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0\sin 2\vartheta$

$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = \frac{\partial Z}{\partial y}l = l\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0\sin\vartheta + l\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\cos\vartheta$

$C \quad a=0 \quad b=0 \quad M_x = M \quad M_y = 0 \quad M_z = 0$

$X = -\frac{M}{r^3}$

$Y = 0$

$Z = 0$

$\frac{\partial X}{\partial\alpha}$

$\frac{\partial Y}{\partial\alpha}$

$\frac{\partial Z}{\partial\alpha}$

$$-(X_m \cos\vartheta + A)(Z_m + C) + l\left\{(Z_m + C)\left(\frac{\partial x}{\partial x}\sin^2\vartheta + \frac{\partial y}{\partial y}\cos^2\vartheta\right) + l(X_m \sin\vartheta + B)\right\}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\vartheta\right)$$

$$-\cancel{A(Z_m + C)} - \cancel{X_m(Z_m + C)}\cos\vartheta + \cancel{\frac{l}{2}(Z_m + C)\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)} - \frac{l}{2}(Z_m + C)\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\cos 2\vartheta + \frac{l}{2}\cancel{B(\ )\sin 2\vartheta + \frac{l}{4}X_m(\ )\{-\cos 3\vartheta} + \cos\vartheta)$$

$$+\cancel{lB\frac{\partial z}{\partial x}\sin\vartheta} + \cancel{lB\frac{\partial z}{\partial y}\cos\vartheta} + lX_m\frac{\partial z}{\partial x}\sin^2\vartheta + \cancel{\frac{l}{2}X_m\frac{\partial z}{\partial y}\sin 2\vartheta}$$

$$-\frac{1}{2}X_m\frac{\partial z}{\partial x}\cos 2\vartheta$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta$$

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -l\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \sin\alpha \qquad X = A + X_m \qquad \tfrac{1}{2}\sin 3\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha = \tfrac{1}{4}\sin 3\alpha + \tfrac{1}{4}\sin\alpha + \tfrac{1}{4}\sin 3\alpha - \tfrac{3}{4}\sin\alpha$$

$$\tfrac{1}{2}\cos 3\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\alpha \quad \cos\alpha\cos 2\alpha =$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = +l\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos\alpha \qquad Y = B$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -l\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_m \sin\alpha. \qquad Z = C + Z_m$$

$$\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$$

$$\cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$\tfrac{1}{4}\cos 3\alpha + \tfrac{3}{4}\cos\alpha + \tfrac{1}{4}\cos 3\alpha - \tfrac{1}{4}\cos\alpha$$

$$\sin\alpha\sin 2\alpha = -\tfrac{1}{2}\cos 3\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha\sin 2\alpha = +\tfrac{1}{2}\sin 3\alpha + \tfrac{1}{2}\sin\alpha.$$

$$2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$

$$2\cos^2\alpha\sin\alpha =$$

$$Y_m = 0 \qquad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_m = 0 \qquad \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\left(2XY + X\frac{\partial X}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right) = 2AB + 2BX_m - Al\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \sin\alpha - lX_m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \sin\alpha - Bl\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha$$

$$(Y^2 - X^2) + X\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial X}{\partial \alpha} = B^2 - A^2 - 2AX_m - X_m^2 + Al\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos\alpha + lX_m\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \cos\alpha - Bl\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m \sin\alpha. \qquad \sin 2\alpha.$$

$$\frac{lX_m}{2}\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)(\sin 3\alpha + \sin\alpha) - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m(\sin 3\alpha - \sin\alpha)\right\} \qquad -Al\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m\left(\tfrac{1}{2}\sin 3\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$+Al\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\left(\tfrac{1}{2}\sin 3\alpha + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$2XY\cos 2\alpha + (Y^2 - X^2)\sin 2\alpha. - lX\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos 2\alpha - lY\frac{\partial Y}{\partial y}\cos\alpha\cos 2\alpha$$

$$+ lX\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos\alpha\sin 2\alpha - lY\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\sin\alpha\sin 2\alpha.$$

$$-\frac{l}{2}Y\left(\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)(\cos 3\alpha + \cos\alpha) + \frac{\partial X}{\partial x}(-\cos 3\alpha + \cos\alpha)\right)$$

$$+\frac{lX}{2}\left\{\frac{\partial Y}{\partial y}(\sin 3\alpha + \sin\alpha) - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)(\sin 3\alpha - \sin\alpha)\right\}$$

$$\frac{lX}{2}\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin\alpha - \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 3\alpha\right) - \frac{l}{2}Y\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos 3\alpha\right)$$

$$-(X_m\cos\vartheta + A)(Z_m+B) + \frac{l}{2}(Z_m+C)(\ +\ ) + \frac{l}{2}(X_m\sin\vartheta+B)\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta - \frac{l}{2}(Z_m+C)(\ -\ )\cos 2\vartheta$$

$$-A(Z_m+B) - X_m(Z_m+B)\cos\vartheta + \frac{l}{2}B\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{l}{4}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}(1-\cos 2\vartheta) -$$

X_m

$\sin\vartheta + \sin 3\vartheta$

$\sin\vartheta - \sin 3\vartheta$

$\sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)$

$\sin\vartheta\cos^2\vartheta$

$$(X_m\sin\vartheta+B)(Z_m+C) + \frac{l}{2}(X_m\cos\vartheta+A)\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{l}{2}(Z_m+C)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\sin 2\vartheta$$

$$B(Z_m+C) + X_m(Z_m+C)\sin\vartheta + \frac{l}{2}A\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{l}{4}X_m\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\vartheta$$

$$(X_m\sin\vartheta+B)(\ +\ ) + (X_m\cos\vartheta+A)(\ -\ )\sin 2\vartheta - (X_m\sin\vartheta+B)(\ -\ )\cos 2\vartheta$$

$$B(+) + X_m(+)\sin\vartheta + A(-)\sin 2\vartheta + X_m\tfrac12(-)(\sin 3\vartheta+\sin\vartheta) + B(-)\cos 2\vartheta$$

$$+X_m\tfrac12(-)(\sin 3\alpha - \sin$$

$$2\left[X_m^2\sin\vartheta\cos\vartheta + X_m(A\sin\vartheta+B\cos\vartheta)+AB\right] - \frac{l}{2}(\ +\ )(X_m\sin\vartheta+B) + \frac{l}{2}(X_m\cos\vartheta+A)(\ -\ )\sin 2\vartheta + \frac{l}{2}(X_m\sin\vartheta+B)(\ -\ )\cos 2\vartheta$$

$$+\tfrac12 X_m^2\sin 2\vartheta + AX_m\sin\vartheta + BX_m\cos\vartheta + ABX_m - \frac{l}{2}(+)X_m\sin\vartheta - \frac{l}{2}(+)B + \frac{l}{2}A(-)\sin 2\vartheta + \frac{l}{2}B(-)\cos 2\vartheta$$

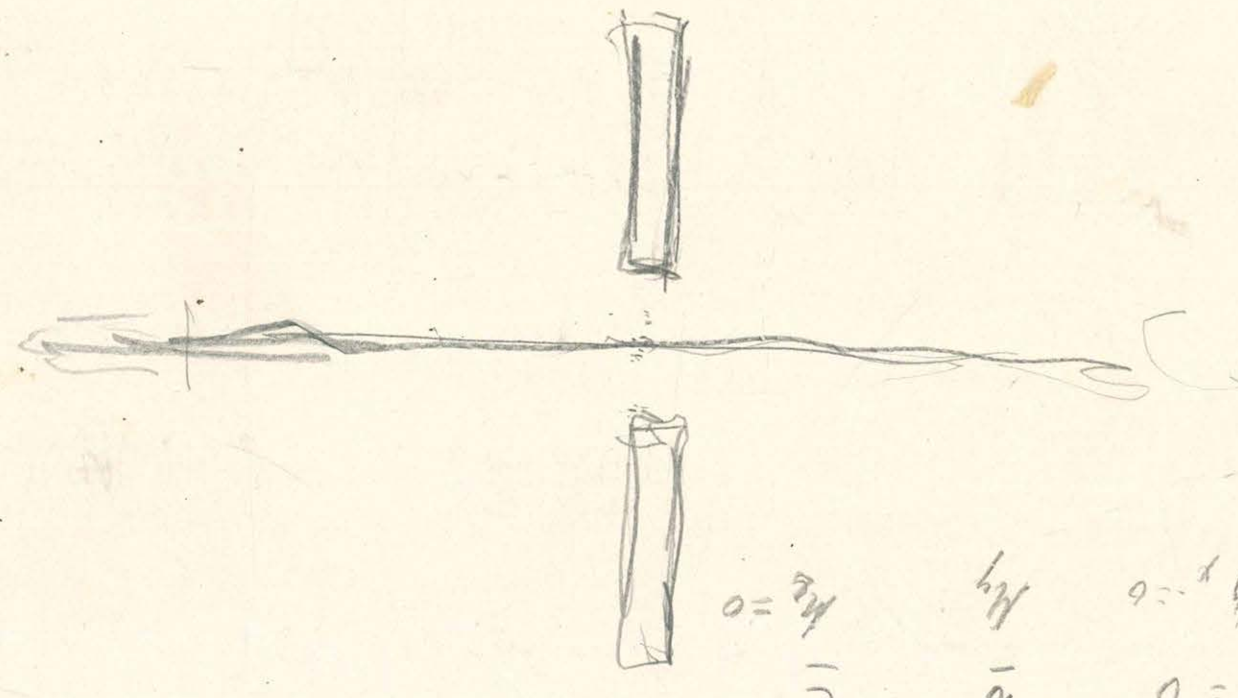
$$+\frac{l}{4}X_m(-)\left\{\underbrace{\sin 3\alpha}_{\sin 3\alpha} + \sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin\alpha\right]$$

$$(X_m\sin\vartheta+B)^2 - (X_m\cos\vartheta+A)^2 + \frac{l}{2}(X_m\cos\vartheta+A)(+) - \frac{l}{2}(X_m\cos\vartheta+A)(-)\cos 2\vartheta + \frac{l}{2}(X_m\sin\vartheta+B)(-)\sin 2\vartheta$$

$$B^2 - A^2 + 2BX_m\sin\vartheta - 2AX_m\cos\vartheta - X_m^2\cos 2\vartheta + A\frac{l}{2}(+) + \frac{l}{2}X_m(+)\cos\vartheta - \frac{l}{2}A(-)\cos 2\vartheta - \frac{l}{4}X_m(-)(\cos 3\alpha+\cos\alpha) +$$

$$+\frac{l}{2}B(-)\sin 2\vartheta - \frac{l}{4}X_m(-)(+\cos 3\alpha - \cos\alpha)$$

$y_m = 0 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_m = 0 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)_m = 0$



$y = 0 \quad \bar{b} \quad \bar{c}$

$y_x = 0 \quad y_y \quad y_z = 0$

$$1\left[\qquad\right] = \frac{l}{2} X_m \left\{ \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \right) \sin\alpha - \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m \right) \sin 3\alpha \right\} + 2B(A+X_m)\cos 2\alpha + \left(B^2 - (A+X_m)\right)\sin 2\alpha$$

$$\left[\ 1\ \right] = 2(A+X_m)B\cos 2\alpha + \left(B^2-(A+X_m)^2\right)\sin 2\alpha + \frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin\alpha - \frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos\alpha$$

$$- \frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin 3\alpha + \frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos 3\alpha$$

$$\left[\ 2\ \right] = \left(B^2 - (A+X_m)^2\right)\cos 2\alpha - 2(A+X_m)B\sin 2\alpha + \frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos\alpha + \frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\sin\alpha$$

$$- \frac{l}{2}(X_m+A)\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_m\right)\cos 3\alpha - \frac{l}{2}B\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right)\sin 3\alpha$$

$$\left[\ 3\ \right] = -(X_m+A+B)(Z_m+C) + \frac{l}{2}(X_m+A)\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{l}{2}(Z_m+C)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{l}{2}B\frac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\left[(X_m+A)\frac{\partial Z}{\partial x} + (Z_m+C)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]\cos 2\alpha$$

$$\left[\ 4\ \right] = -(X_m+A-B)(Z_m+C) - \frac{l}{2}B\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{l}{2}B\frac{\partial Z}{\partial x}\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\left[(X_m+A)\frac{\partial Z}{\partial x} + (Z_m+C)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]\sin 2\alpha$$

$$\left[\ 5\ \right] = -\frac{l}{2}(X_m+A)\frac{\partial X}{\partial x}\sin\alpha + \frac{l}{2}B\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos\alpha.$$

$$\left[\qquad\right] = -\frac{l}{2}(Z_m+C)\frac{\partial Z}{\partial x}\sin\alpha$$

$a = +50$ $c = +5$

	I	I_{+45}	II	II_{+45}	III	III_{+45}	IV	IV_{+45}	I	I_{+45}	
$\frac{1}{m_a} X . 10^{+9}$											
$\frac{1}{m_a} Y \, 10^{+9}$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial x} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial y} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial y} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} Z \, 10^9$	+5636,6	+3997,4	+2124,4	+1335,8	+1137,6	+1335,8	+2124,4	+3997,4	−1137,6	−1335,8	−
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial z} 10^9$	+552,82	+354,26	+159,84	+90,992	+75,183	+90,992	+159,84	+354,26	+75,183	+90,992	+
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial z} 10^9$	0	−73,689	−40,465	−14,174	0	+14,174	+40,465	+73,689	0	+14,174	+

$a = +50$ re m_a
$a = -50$ re m_a

	I	I_{+45}	II	II_{+45}	III	III_{+45}	IV	IV_{+45}	I	I_{+45}	
$\frac{1}{m_a} X 10^9$	+								+		
$\frac{1}{m_a} Y \, 10^9$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial x} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial y} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial y} 10^9$											
$\frac{1}{m_a} Z . 10^9$	+4499,0	+2661,6	0	−2661,6	−4499,0	−2661,6	0	+2661,6	+6774,2	+5333,2	+4
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial z} 10^9$	+628,00	+445,25	+319,68	+445,25	+628,00	+445,25	+319,68	+445,25	+477,64	+263,27	
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial z} 10^9$	0	−59,575	0	+59,575	0	−59,575	0	+59,575	0	−87,863	−8

$a = -50$ $c = +5$

	II	II_{+45}	III	III_{+45}	IV	IV_{+45}
3	− 2124,4	− 3997,4	−5636,6	− 3997,4	− 2124,4	− 1335,8
2	+ 159,84	+ 354,26	+ 552,82	+ 354,26	+ 159,84	+ 90,992
4	+ 40,465	+ 73,689	0	− 73,689	− 40,465	− 14,174
			$a = +50 - re$	m_a		
			$a = -50 - re$	$-m_a$		
2	+ 4248,8	+ 5333,2	+ 6774,2	+ 5333,2	+ 4248,8	+ 5333,2
7	0	− 263,27	− 477,64	− 263,27	0	+ 263,27
	− 80,930	− 87,863	0	+ 87,863	+ 80,930	+ 87,863

Egy mágnes északon $a = +50$

$$\frac{1}{M^2}\left[+Z\frac{\partial Y}{\partial z}x - Z\frac{\partial X}{\partial z}y\right]10^{12}$$

				$a = -50$	
	rúdvégen μ	két rúdvégen μ		rúdvégen μ	rúd két végén μ
I	0	0		0	0
I+45	−12,096	−11,370		+0,726	−11,370
II	−3,396	0		+3,396	0
II+45	−0,726	+11,370		+12,096	+11,370
III	0	0		0	0
III+45	+0,726	−11,370		−12,096	−11,370
IV	+3,396	0		−3,396	0
IV+45	+12,096	+11,370		−0,726	+11,370

	Két egyirányú mágnes			Két ellentett mágnes	
I	0	0		0	0
I+45	−9,500	−19,000		−13,242	−26,484
II	0	0		0	0
II+45	+9,500	+19,000		+13,242	+26,484
III	0	0		0	0
III+45	−9,500	−19,000		−13,242	−26,484
IV	0	0		0	0
IV+45	+9,500	+19,000		+13,242	+26,484

Egy mágnes esetén $a=+50$

$$\frac{1}{M^2}\left[+\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)x-\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)y\right]10^{12}$$

	$a=+50$ rúd végén μ	rúd két végén μ		$a=-50$ rúd végén μ	rúd két végén μ
I	0	0		0	0
I+45	−328,742	−295,284		+33,458	−295,284
II	−123,963	0		+123,963	0
II+45	−33,458	+295,284		+328,742	+295,284
III	0	0		0	0
III+45	+33,458	−295,284		−328,742	−295,284
IV	+123,963	0		−123,963	0
IV+45	+328,742	+295,284		−33,458	+295,284

	Két egyirányú mágnes			Két ellentett mágnes	
I	0	0		0	0
I+45	−399,294	−798,588		−191,275	−382,550
II	0	0		0	0
II+45	+399,294	+798,588		+191,275	+382,550
III	0	0		0	0
III+45	−399,294	−798,588		−191,275	−382,550
IV	0	0		0	0
IV+45	+399,294	+798,588		+191,275	+382,550

		$a=+50$	$c=0$								$a=-50$	
	I	I_{+45}	II	II+45	III	III+45	IV	IV+45	I	I+45	II	
$\frac{1}{m_a} X \, 10^9$	+31250	+23002	+13925	+10198	+9259	+10198	+13925	+23002	+9259	+10198	+13925	+
$\frac{1}{m_a} Y \, 10^9$	0	−5841,6	−4351,7	−1924,8	0	+1924,8	+4351,7	+5841,6	0	+1924,8	+4351,7	+
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial x} 10^9$	+2343,8	+1543,2	+786,65	+523,86	+462,96	+523,86	+786,65	+1543,2	−462,96	−523,86	−786,65	−
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial y} 10^9$	−1171,9	−716,63	−357,48	−257,64	−231,48	−257,64	−357,48	−716,63	+231,48	+257,64	+357,48	+
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial y} 10^9$	0	−526,33	−331,40	−132,36	0	+132,36	+331,40	+526,33	− 0	−132,36	−331,40	−

$a=+50$ re m_a
és $a=-50$ re m_a

$\frac{1}{m_a} X \, 10^9$	+40509	+33200	+27850	+33200	+40509	+33200	+27850	+33200	+21991	+12804	0	−
$\frac{1}{m_a} Y \, 10^9$	0	−3916,80	0	+3916,80	0	−3916,80	0	+3916,80	0	−7766,40	−8703,40	−
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial x} 10^9$	+1880,84	+1019,34	0	−1019,34	−1880,84	−1019,34	0	+1019,34	+2806,76	+2067,06	+1573,30	+
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial Y}{\partial y} 10^9$	−940,42	−464,99	0	+464,99	+940,42	+464,99	0	−464,99	−1403,38	−968,27	−702,96	−
$\frac{1}{m_a} \frac{\partial X}{\partial y} 10^9$	0	−658,69	−662,80	−658,69	0	+658,69	+658,69	+658,69	0	−393,97	0	+

-50 $c = 0$

	II+45	III	III+45	IV	IV+45
25	+23002	+31250	+23002	+13925	+10198
,7	+5841,6	0	-5841,6	-4357,7	-1924,8
65	-1543,2	-2343,8	-1543,2	-786,65	-523,86
18	+716,63	+1171,9	+716,63	+357,48	+257,64
10	-526,33	0	+526,33	+331,40	+132,36

$a = +50$ re m_a
$a = -50$ re $-m_a$

	-12804	-21991	-12804	0	+12804
40	-7766,40	0	+7766,40	+8703,40	+7766,40
0	+2067,06	+2806,76	+2067,06	+1573,30	+2067,06
	-968,27	-1403,38	-968,27	-702,96	-968,27
	+393,97	0	-393,97	0	+393,97

2) Két egyirányú mágnes

$x = +67,3278$

$y = -14,5948$

$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -44,0949$

$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +9,5738$

$x^2 = +4533,033$

$y^2 = +213,008$

$xy = -982,636$

$x\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -2968,813$

$x\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +644,583$

$y\frac{\partial x}{\partial \alpha} = +643,556$

$y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -139,728$

$$\frac{y^2-x^2}{2} + x\frac{\partial y}{\partial \alpha} + y\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -871,874$$

$$-xy + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} - x\frac{\partial x}{\partial \alpha} = +3811,721$$

$$x\frac{\partial x}{\partial \alpha} + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -3108,541$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{45} = \\ F_{225} = \end{array}\right\} \left[-(a_{11}-a_{22})\,1743,748 - a_{12}\,15246,884 - (a_{11}+a_{22})\,6217,082\right] m^2 v\, 10^{-12}$$

3) Két ellentett mágnes

$x = +33,4296$

$y = -22,9838$

$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -54,5033$

$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -3,0188$

$x^2 = +1117,538$

$y^2 = +528,255$

$xy = -768,339$

$x\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -1822,024$

$x\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -100,917$

$y\frac{\partial x}{\partial \alpha} = +1252,693$

$y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +69,383$

$$\frac{y^2-x^2}{2} + x\frac{\partial y}{\partial \alpha} + y\frac{\partial x}{\partial \alpha} = +857,134$$

$$-xy + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} - x\frac{\partial x}{\partial \alpha} = +2520,980$$

$$x\frac{\partial x}{\partial \alpha} + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -1752,641$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{45} = \\ F_{225} \end{array}\right\} \left[(a_{11}-a_{22})\,1714,268 + a_{12}\,10083,920 - (a_{11}+a_{22})\,3505,282\right] m^2 v\, 10^{-12}$$

− 4320,025

− 2160,013
+ 1288,139
− 871,874

~~+xxxx,xxx~~
+ 3951,449
139 728
+ 3811 721

− 2968,813
139.728
− 3108 541

− ~~589,283~~
− 294,642
− 100,917
− 395 559
1 252,693
+ 857,134

+ 2590,363
69,383
2520 980

69,383
− 1752,641

$(a-x) = 32,2218$ $\quad x = 7,7781$

$(a-x)^2 = 1038,24$

$x = \frac{11}{\sqrt{2}} = y \quad y^2 = 60,5$

$X = \frac{2015,98}{1098,74^{\frac{5}{2}}} = +50,3787$

$y = -\frac{757,881}{1098,74^{\frac{5}{2}}} = -18,7893$

$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{2167581}{1098,74^{\frac{7}{2}}} = -49,2991$

$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +\frac{144104}{1098,74^{\frac{7}{2}}} = +3,2775$

3,704487 2,876150
7,602240 7,602240

0,702247-5 0,273910-5
503787 187893

6,335975 5,158676
10,643136 10,643136

0,692839-5 0,515540-6
492991 327748

$X^2 = +2538,013$

$y^2 = +353,038$

$Xy = -946,581$

$X\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -2483,625$

$X\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +165,116$

$y\frac{\partial X}{\partial \alpha} = +926,296$

$y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -61,582$

$\frac{y^2-x^2}{2} + X\frac{\partial y}{\partial \alpha} + y\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 1,076$

$-Xy + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} - X\frac{\partial X}{\partial \alpha} = +3368,624$

$X\frac{\partial X}{\partial \alpha} + y\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 2545,207$

$-a-x = -47,7782$ $\quad x = 7,7782$

$(a-x)^2 = 2282,76$

$x^2 = xy = y^2 = 60,5$

$X = +\frac{4525,02}{2343,26^{\frac{5}{2}}} = +16,9491$

$y = +\frac{1114,885}{2343,26^{\frac{5}{2}}} = +4,1945$

$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = +\frac{3241353}{2343,26^{\frac{7}{2}}} = +5,2042$

$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = +\frac{3921506}{2343,26^{\frac{7}{2}}} = +6,2963$

3,653697 3,047232
8,424550 8,424550

0,229147-5 0,622682-6
169491 419452

6,510726 6,593453
11,794370 11,794370

0,716356-6 0,799083-6
520423 629627

$= +287,272$

$= +17,594$

$= +71,093$

$= +88,207$

$= +106,717$

$= +21,829$

$= +26,410$

$= -6,293$

$= -132,890$

$= +114,617$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\kappa_1^2\lambda_1^2 + \kappa_2^2\lambda_2^2 + \kappa_3^2\lambda_3^2 - \kappa_1^2\lambda_1^4 - 2\kappa_1\kappa_2\lambda_1^2\lambda_2^2 - \kappa_2^2\lambda_2^4 - 2\kappa_1\kappa_3\lambda_1^2\lambda_3^2 - 2\kappa_2\kappa_3\lambda_2^2\lambda_3^2 - \kappa_3^2\lambda_3^4}{\kappa_1^2\lambda_1^2 + \kappa_2^2\lambda_2^2 + \kappa_3^2\lambda_3^2}$$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\kappa_1^2\lambda_1^2(1-\lambda_1^2) + \kappa_2^2\lambda_2^2(1-\lambda_2^2) + \kappa_3^2\lambda_3^2(1-\lambda_3^2) - 2\kappa_1\kappa_2\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\kappa_1\kappa_3\lambda_1^2\lambda_3^2 - 2\kappa_2\kappa_3\lambda_2^2\lambda_3^2}{}$$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\kappa_1^2\lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2) + \kappa_2^2\lambda_2^2(\lambda_1^2+\lambda_3^2) + \kappa_3^2\lambda_3^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2) - \cdots}{}$$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\lambda_2^2\lambda_3^2(\kappa_2^2+\kappa_3^2-2\kappa_2\kappa_3) + \lambda_3^2\lambda_1^2(\kappa_1^2+\kappa_3^2-2\kappa_1\kappa_3) + \lambda_1^2\lambda_2^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2-2\kappa_1\kappa_2)}{}$$