Ms 5099/20-22. Eötvös Loránd jegyzetei: Gravitáció

Gravitáció

Nehézségi változások mérése

Gróf Lóránd

Régi Kézirat!

A nehézség térbeni változásainak méréséről.

Nehézségnek nevezem a föld vonzásának és a föld forgásából eredő középponttól futó erőnek eredőjét. Erre az erőre vonatkozó ismereteink sok tekintetben várnak még kiegészítésre. Az ingával tett mérések ez erő gyorsulásának értékét ~~a földnek ismert sugarát több pontjában~~ ~~a földnek~~ csak egyes pontokban: s bizony a nagy földön csak igen gyéren elszórt pontokban ismertették meg. Az elmélet, mely a valódi helyett csak egy eszményi földet vesz számításba, csak olyan mértékben igazolhatja és pótolhatja a tapasztalat adatait, a milyen mértékben ~~a két vagy háromtengelyű~~ ez az eszményi alak és eszményi tömegelosztás megközelíti a földnek valódi alakját és valódi tömegelosztását.

A nehézség térbeni változásainak méréséről.

Nehézségnek nevezem azt az erőt mely földi testek tömegére természetes (az az nem mágneses és nem elektromos) állapotukban hatván, azoknak a földhöz viszonyított mozgásában és elhelyezkedésében nyilvánul.

Forgási momentum egy kis test részére miképp egy pontra

~~$mc \sin$~~ $mc^2 \sin 2\vartheta$.

x y z egy. rendszer a testhez kötve

~~x tengely állása~~ z a forgási tengely.

x' el képzelt síkja s.

~~akkor a tengelyen~~

x tengely és a test ... képzelt ... szöge

$\delta \quad \vartheta = \delta + \omega$

akkor az egész forgási momentum –

σ sűrűség

$$= \sigma c^2 \iiint dx\,dy\,dz\, r^2 \sin(2\delta + 2\omega)$$

~~$= 2\sigma c \sin$~~

$$= \sigma c \sin 2\delta \iiint dx\,dy\,dz\, r^2 \cos 2\omega + \sigma c \cos 2\delta \iiint dx\,dy\,dz\, r^2 \sin 2\omega$$

$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$\cos 2\omega = \cos^2\omega - \sin^2\omega$
$= 1 - 2\sin^2\omega$

ha x tengely symmetria tengely akkor a második $\cos 2\delta$-val szorzandó $= 0$, tehát az egész

$$= \sigma c^2 \sin 2\delta \iiint dx\,dy\,dz\, r^2 \cos 2\omega$$

$$= \sigma c \sin 2\delta \iiint dx\,dy\,dz\, r^2 - 2\sigma \sin 2\delta \iiint dx\,dy\,dz\, y^2$$

~~$= \sigma c \sin 2\delta$~~

$$= cK \sin 2\delta \left(1 - \frac{2}{K}\sigma \iiint dx\,dy\,dz\, y^2\right)$$

Golyóra $\iint dx\,dz = \pi(a^2 - y^2)$

lesz

$$\iiint dx\,dy\,dz\, y^2 = \pi a^2 \int y^2\,dy - \pi \int y^4\,dy$$

$$= 2\pi \frac{a^5}{3} - \pi \frac{a^5}{5} = \pi \frac{a^5}{5}$$

$$= \frac{3}{20} m a^2$$

$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

$\frac{4\pi}{3} a^3 = m$

$\pi a^3 = \frac{3}{4} m$

$$= \frac{2\pi a^5}{3} - \frac{\pi a^5}{5}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} m a^2 - 2\cdot\frac{3}{4} m a^2 \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 - \frac{3}{2} m a^2 \frac{1}{5} = m a^2 \frac{5-3}{10} = \frac{m a^2}{5}$$ golyóra

a forgás tengelyével párhuzamos tőle $\underline{b}$-vel álló tengelyre.

$$\sigma \iiint dx\,dy\,dz\,y^2 = m b^2$$

kis körre

Vegyesek

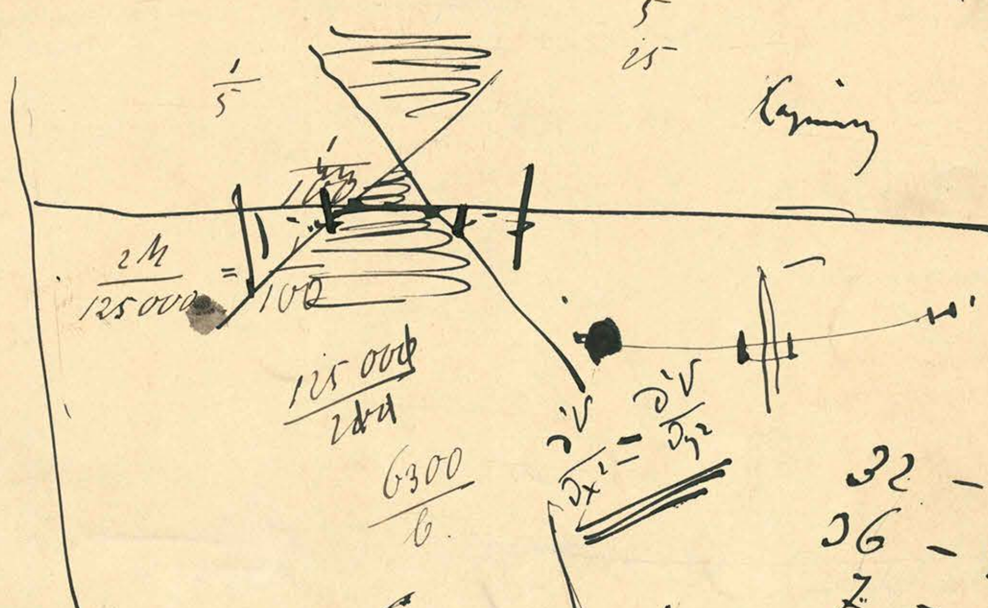
A 1894ik évi állami költségvetés, az a fakultásokon kívül gyűjtemények [illegible]

~~[illegible] [illegible] a [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]~~ [illegible]

~~[illegible] és [illegible]~~.

a jelen évben nem [illegible] a [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~[illegible].

[illegible] [illegible] egy - [illegible] [illegible]



V

$p = p'$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

32 - 8.
36 - 40
7 - 9
52 - 83
2

13.[illegible] 40
15'.
146 p. 21.
145 p. 40.

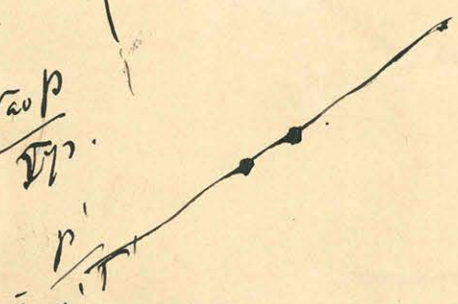
V P

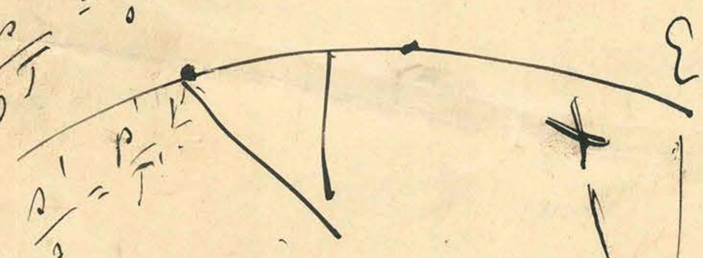
$$\frac{vp}{T} = C$$

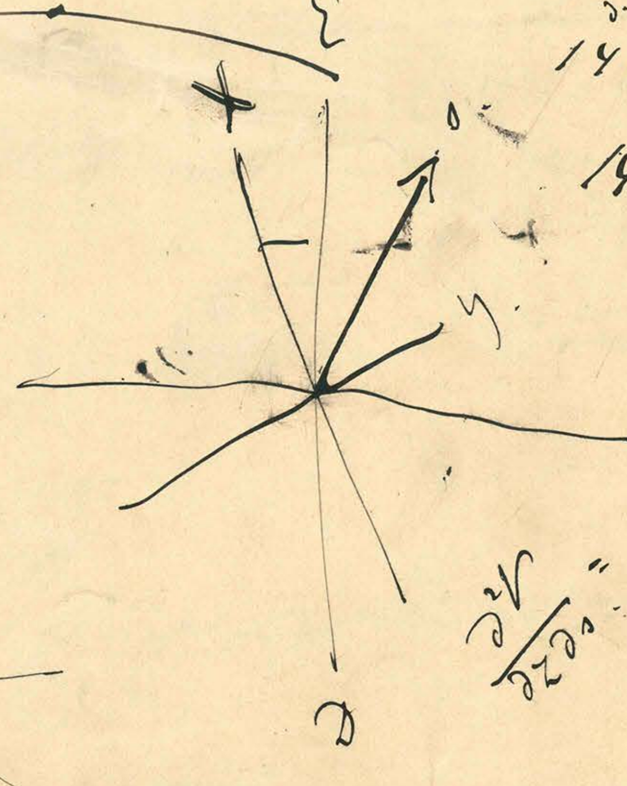
$$\frac{vp}{T} = \frac{v_0 p}{T_0}$$

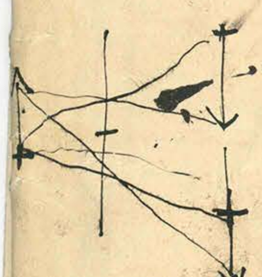
$$\frac{vp}{T} = \frac{p'}{T'}$$

$$\frac{p}{T}$$



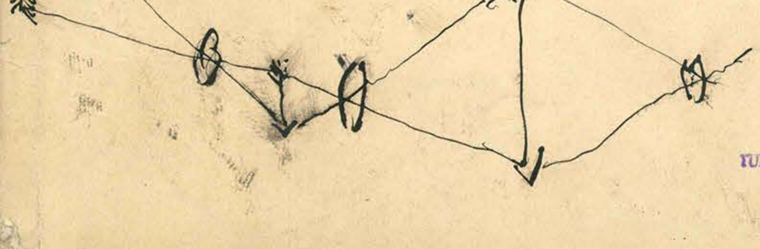






0

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$



I)

Az első esetben:

$$= \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0 \int dm(\xi^2-\eta^2)$$

a második általánosabb ~~esetben~~:

$$= \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0 \int dm(\xi^2-\eta^2) + D\, h\, m\, \xi_0 \frac{\sin(\alpha-\vartheta_0)}{\cancel{\cos\vartheta_0}}$$

~~Az általános ... jelen ...~~

Ez a második eset az általános, mely az előbbi és újabb helyett [illegible]. Ha a rendszerre a forgási momentumok hatnak, a drót forgási momentumát, és pedig ~~az~~ ha a csavarási szöglettel a drót ~~a~~ végén levő [illegible] φ-vel jelöljük, akkor ha ez által forgási momentum $\tau\varphi$, az egész lesz:

$$\cancel{= -\tau\varphi + \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0 \int dm(\xi^2-\eta^2)}$$

$$F = -\tau\varphi + \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0 \int dm(\xi^2-\eta^2) + D\, h\, m\, \xi_0 \frac{\sin(\alpha-\vartheta_0)}{\cancel{\cos\vartheta_0}}$$

ha most tekintetbe vesszük, hogy $\int dm(\xi^2+\eta^2) = K$ a rúd tehetetlenségi momentuma ~~és hogy a drót ... mint hogy ... legyen F_0, ha ... a drót forgási ... ... tartozó ... hat~~

tehát $\int dm(\xi^2-\eta^2) = K\left(1-\frac{2}{K}\int dm\,\eta^2\right)$

~~$F_0 = \tau\varphi\sqrt{\frac{K}{2}}$~~ vagy ha teszünk $\frac{2}{K}\int dm\,\eta^2 = c$

úgy lehetett

$$F = -\tau\varphi + \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0\, K(1-c) + D\, h\, m\, \xi_0 \frac{\sin(\alpha-\vartheta_0)}{\cancel{\cos\vartheta_0}}$$

ha [illegible]

a hol F_0 ~~drót~~ miután [illegible] ~~[illegible]~~ ik

[illegible] és ... úgy lesz:

~~$F = \tau\varphi$~~

Az általam használt mértékegység [illegible] a C [illegible] volt,
mert például egy [illegible] melynek 40 centiméter [illegible] [illegible] egy-egy [illegible]
[illegible] [illegible] ~~30~~ 30 [illegible] 30 gramm súlyú [illegible]
[illegible] [illegible] voltak, ez az érték [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ egy [illegible].
Sok esetben el lehet [illegible] azt [illegible].

A Contact ~~[illegible]~~ [illegible] a ~~[illegible]~~ [illegible] vizsgálására.

A Contact-féle [illegible] ~~[illegible] [illegible] [illegible]~~ [illegible] a [illegible]
~~[illegible]~~ a [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] meg

a) A ~~fő~~ [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]
b) A [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] egyik D-t
c) A [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]
való [illegible] [illegible] [illegible]
d) Az utolsó [illegible] [illegible].

[illegible] ~~[illegible] [illegible] [illegible] D és [illegible] [illegible]~~ és
a [illegible] és [illegible] [illegible].

Egy tömegelemre a forgási momentum

$$= \frac{1}{2}\vartheta r^2 dm \sin 2\vartheta + \frac{\partial y}{\partial s} dm\, \xi r \sin(\alpha - \vartheta)$$

Egy testre nézve a kifejezés forgási momentuma fejezi ezt a forgási momentumot :

Ha a testben felveszünk egy összemeredő i tengelyrendszert, amelynek kezdőpontja az alló $\xi\eta z$-vel összeesik, ξ tengelye a z vel, $\xi\eta$ síkja az xy síkkal esik össze ~~...~~ és tenniük

$$\xi = r\cos\eta$$
$$\eta = r\sin\eta$$

Ha továbbá a ~~ξ~~ a szöget, amelyet a ξ tengely az x el bezár ϑ_0-val jelöljük akkor, az egyes tömegelemekre:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \eta$$

és

A tömegelem forgási momentuma

$$\frac{1}{2}\vartheta r^2 dm \sin 2(\vartheta_0 + \eta) + \frac{\partial y}{\partial s} dm\, \xi r \sin(\alpha - \vartheta_0 - \eta)$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta r^2 dm \sin 2\vartheta_0 \cos 2\eta + \frac{1}{2}\vartheta r^2 dm \cos 2\vartheta_0 \sin 2\eta$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial s} dm\, \xi r \sin(\alpha - \vartheta_0)\cos\eta - \frac{\partial y}{\partial s} dm\, \xi r \cos(\alpha - \vartheta_0)\sin\eta$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(\xi^2 - \eta^2)\, dm \sin 2\vartheta_0 + \vartheta\, \xi\eta\, dm \cos 2\vartheta_0$$

$$+ \frac{dy}{ds} dm\, \xi\xi \sin(\alpha - \vartheta_0) - \frac{\partial y}{\partial s} dm\, \xi\eta \cos(\alpha - \vartheta_0)$$

és az egész testre:

$$= \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta_0 \int dm\,(\xi^2-\eta^2) + D\cos 2\vartheta_0 \int dm\,\xi\eta$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial s}\sin(\alpha-\vartheta_0)\int dm\,\xi\zeta - \frac{\partial g}{\partial s}\cos(\alpha-\vartheta_0)\int dm\,\eta\zeta$$

A mikor ezt a kifejezést alkalmazni fogjuk a tényleg használt Coulomb-féle ingára – ~~mely~~ [illegible] nagyjában [illegible] leírását most alapjában véve. ~~Elégséges~~ ~~Ezt~~ ~~[illegible]~~ A Coulomb-féle mely kis – kis [illegible] ~~rudakból~~ vízszintes rudakból s egyes végein alkalmazott golyók vagy hengerekből állítottam elő. Két alakban használtam az egyikben a rúd végén alkalmazott tömegek ~~[illegible]~~ tengely egy magasságban feküdtek – s ekkor az ezekben az egyes függőleges tengely [illegible] vízszintes volt. A második alakban ~~ettől~~ ~~az [illegible]~~ ettől az egyiken különböztem, hogy a rúd egyik végén alkalmazott tömeg ~~[illegible]~~ valamely D távolsággal [illegible] [illegible] [illegible].

Mindkét esetben a függőleges tengely a $\xi\zeta$ síkban van s

$\int dm\,\xi\eta = 0$ és $\int dm\,\eta\zeta = 0$.

Az első esetben egyenlő volt még $\int dm\,\xi\zeta$ a midőn a ~~[illegible]~~ függőleges tengely az ξ és η [illegible]

A második esetben pedig $\int dm\,\xi\zeta = h\int dm\,\xi =$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

ha t. i. h volt ezt a magasságot jelölöm mely az egyik oldalon levő tömeg alá függesztett attól az illetőtől, mellyel $\int dm\,\xi\zeta = 0$, ; ha ξ_0 az m tömeg tömegközéppontjának [illegible] jelöli, akkor $h\int dm\,\xi = hm\xi_0$ és így a fent ~~[illegible] ξ_0 [illegible]~~ a hol ξ_0 a [illegible] [illegible] nagyjában [illegible] fogja momentum, tehát:

mathematikai kombinációk).

Két ~~egyenlő~~ tömegpont [illegible] súlytalan rúdon egy a

fonál végén át felfüggesztett [illegible]

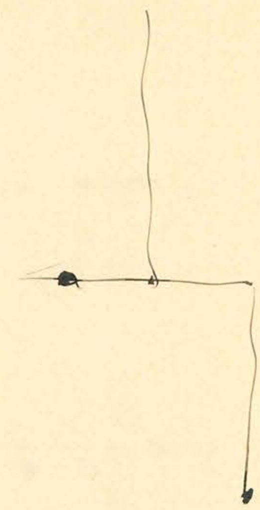
[illegible] [illegible] a [illegible] egyik

[illegible] [illegible]. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ [illegible] a tömegpontok

[illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]

vagy [illegible] [illegible].

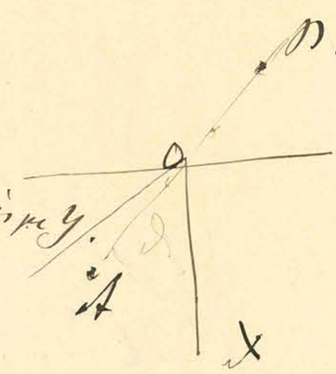


Ha a [illegible] [illegible].

a tömegek μ [illegible] ~~[illegible]~~ és az μX és μY.

forgató momentum az X-től

~~[illegible]~~ = [illegible] $XOA = \vartheta$



~~[illegible]~~

$\xi = r\cos\vartheta \qquad \eta = r\sin\vartheta$

akkor az A-ra ható erőnek forgató momentuma =

$$= -\mu\frac{g}{\varrho'} r^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \mu\frac{dy}{ds}\sin\alpha\,\xi\, r\cos\vartheta + \mu\frac{g}{\varrho} r^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \mu\frac{dy}{ds}\cos\alpha\,\xi\, r\sin\vartheta$$

és ~~a B pontra ható erő forgató momentuma~~

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\mu r^2\sin 2\vartheta + \frac{dy}{ds}\mu\xi r(\sin\alpha\cos\vartheta - \cos\alpha\sin\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\mu r^2\sin 2\vartheta + \frac{dy}{ds}\mu\xi r\sin(\alpha-\vartheta)$$

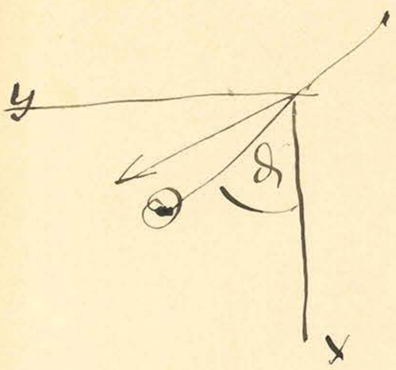
a B pontra nézve ugyanez

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\mu r^2\sin 2\vartheta + \frac{dy}{ds}\mu\xi' r\sin(\vartheta-\alpha)$$

tehát az egész a két pontra:

$$= \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\mu r^2\sin 2\vartheta + \frac{dy}{ds}\mu r\sin(\alpha-\vartheta)(\xi-\xi') \qquad \xi-\xi'=h.$$

$$= \frac{g}{4}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\mu r^2 \sin 2\vartheta + \frac{dg}{ds}\,\mu r h \sin(\alpha-\vartheta)$$



Ha most a drót csavarási rugalmas egyenesi a ϑ irányában ψ-vel ~~...~~, ~~...~~ és a csavarási nyomatékot $-\tau\psi$-val jelöljük akkor az egy. lesz

$$\psi = \frac{\mu r^2}{\tau}\frac{g}{4}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\sin 2\vartheta + \frac{dg}{ds}\frac{\mu r^2}{\tau}\frac{h}{r}\sin(\alpha-\vartheta)$$

Látjuk ebből hogy a nehézség a drótot megcsavaró tényező. A csavarási momentum, két a nehézségnek a tőle függő adatától függ az egyik $g\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ azt a vízszintes görbületi ~~...~~ képességnek nevezni s azt D (Görbületi...) -vel jelöljük, a másik a $\frac{dg}{ds}$ a vízszintes változás együtthatója. Ha hozzátesszük hogy a ϑ is és $\frac{dg}{ds}$ is null volna az az a nehézség állandó

$$T^2 = \pi^2 \frac{K}{\tau}$$

és hogy $\mu r^2 = \frac{K}{2}$ akkor

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{T^2}{\pi^2}\left(D \sin 2\vartheta + \frac{dg}{ds}\frac{h}{r}\sin(\alpha-\vartheta)\right)$$

Vegyük most azt az esetet hogy $h = 0$ akkor

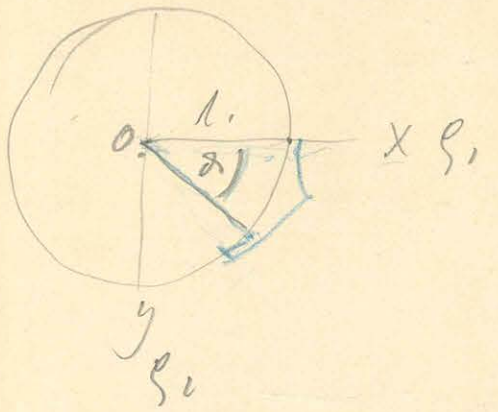
$$\psi = \frac{1}{2}\frac{T^2}{\pi^2} D \sin 2\vartheta$$

Tehát ψ 0 ha $\vartheta = 0$ és $\frac{\pi}{2}$ stb. ugyanígy ha $\psi = \vartheta$ és $\vartheta + \pi$.

A ψ maga nem észlelhető de igenis annak változása.

A D és ϑ meghatározására jöjjünk el következőleg:

Nehézség szintfelületének meghatározása



Vagy a vízszintes síkban. O a forgás tengely, l a forgási kar. m a l karon lévő tömeg, g a nehézség gyorsulása.

Messük át a szintfelületet l sugarú a forgás tengelytől járó egy más tengellyel az elmozdulási görbe elemének hossza ds hajlása a tengelyhez $\frac{dz}{ds}$, ha δ szögben a forgási sugár ρ akkor

$$(z+\rho)^2 = l^2+\rho^2$$ vagyis z igen kicsiny lévén

$$2z\rho = l^2 \qquad z = \frac{l^2}{2\rho}$$

minthogy $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\delta + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\delta$ lévén

$$z = \frac{l^2}{2}\left(\frac{\cos^2\delta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\delta}{\rho_1}\right)$$

a hajlás szöglet

$$\frac{dz}{ds} = \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d(\cos^2\delta)}{ds} + \frac{1}{\rho_2}\frac{d\sin^2\delta}{ds}\right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{l^2}{2}\left(-\frac{2}{\rho_1}\cos\delta\sin\delta\frac{d\delta}{ds} + \frac{2}{\rho_2}\cos\delta\sin\delta\frac{d\delta}{ds}\right)$$

$l\delta = s$ tehát $\frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{l}$ ezért

$$\frac{dz}{ds} = -l\frac{\sin 2\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

~~Az erő~~ ez a hajlás szöglet a vízszintes erő componense

$$\text{erőcomponens} = -mgl\frac{\sin 2\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

a forgási nyomaték ρ_1 től ρ_2 felé (Nb. nem ρ_1 től ρ_2 felé hanem fordítva megjegyzés 1896 márciusban)

$$= - mgl^2 \frac{\sin 2\vartheta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

a rúd másik végén levő tömegre ϑ helyett téve $\vartheta + \pi$.

egyenlő, tehát $\underline{m}$ ahol a két végen az összes tömeget jelelhetni.

ha most legyen $\vartheta = 45°$ lesz.

I állásban forgási moment $= - mgl^2 \frac{\cancel{\sin 2\vartheta}}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$

legyen $\vartheta = -45°$ legyen.

II állásban forgási momentum $= + mgl^2 \frac{\cancel{\sin 2\vartheta}}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$

ha f. a forsát forgási momentum akkor

a kilengési szögek u. I állásban $= \dfrac{-\frac{mgl^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)}{f}$

II állásban $- \frac{mgl^2}{2f}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$

tehát a két állás közötti különbség

$$m = \frac{mgl^2}{f}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

vagy mivel $\frac{ml^2}{f} = \frac{T^2}{\pi^2}$ lesz

$$m = \frac{T^2}{\pi^2} g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

$\cancel{m}$ $T = 1000$ $47\frac{1}{2}$ fok alatt

$m =$ körülbelül $\frac{500}{M} = \frac{1}{2000} = \underline{2 \text{ perc}}$

$T = 3600$

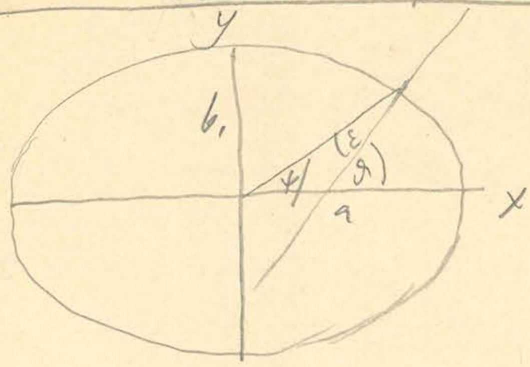
m körülbelül $= \underline{26 \text{ ívperc.}}$

$$T'_m - T_v = T_0^3 \frac{g}{\pi^2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

ha $T_0 = 1000^{mp}$ akkor $T' - T = \frac{1}{2}$ mp

ha $T_0 = 3600$ akkor $T' - T = 23\frac{1}{2}$ perc.

ρ_1 és ρ_2 kiszámítása a földön ϑ geografiai szélességre vonatkozólag a föld forgási ellipszoidján.



$$x = r\cos\psi$$
$$y = r\sin\psi$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

vagyis

$$\frac{r^2\cos^2\psi}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\psi}{b^2}=1$$
$$r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}$$

összefüggés ψ és ϑ között Lignowsky 139

$\varepsilon=\vartheta-\psi$ $\qquad \vartheta = 47^0\,30'$

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\psi}= 11^0\,52'$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{a^2y}{b^2x}\qquad\text{vagyis}\qquad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\psi$$

$$\frac{\cos\psi}{\cos\vartheta}=\frac{a^2}{b^2}\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\vartheta \quad \text{----} \quad 1)$$

ebből kiszámítandó a ϑ-nak megfelelő ψ.

a tehát egyúttal az ellipszisre lesz

$$\rho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{(r^2a^4\sin^2\psi+r^2b^4\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{a^3b^3}{(b^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}\frac{(a^4\sin^2\psi+b^4\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{a_4b^4}$$

$$\rho_1=\frac{a^2}{b}\left(\frac{\sin^2\psi+\frac{b^4}{a^4}\cos^2\psi}{\sin^2\psi+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\psi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\rho_1=\frac{1}{ab}\left(\frac{a^4\sin^2\psi+b^4\cos^2\psi}{a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{---} \quad 2)$$

A másik ~~fő görbület~~ forgási sugár

$$\rho_2=\frac{x}{\cos\vartheta}=r\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\vartheta}=ab\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\vartheta}\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi}}$$

3)

$$\rho_2=b\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\vartheta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^2\psi+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\psi}} \quad \dots \quad 3)$$

vagy

$$\rho_1=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots \quad 2)$$

$$\rho_2=\frac{a}{\cos\vartheta}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\vartheta}} \quad \dots \quad 3)$$

~~[illegible]~~

$$\cancel{\operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\delta} \qquad 1)$$

$$\cancel{\varrho_1 = \frac{a^2}{b}\frac{\left(\sin^2\psi + \frac{b^4}{a^4}\cos^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sin^2\psi + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\psi\right)}}$$

Ezek szerint

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{a}{b^2}\left(\frac{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\delta}{1+\operatorname{tg}^2\delta}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{b^2}\left(\cos^2\delta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\delta\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{\cos\delta}{a}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\delta} = \frac{1}{a}\left(\cos^2\delta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\delta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \sqrt{\cos^2\delta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\delta}\left(\frac{a}{b^2}\cos^2\delta + \frac{1}{a}\sin^2\delta - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \sqrt{\cos^2\delta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\delta}\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}\right)\cos^2\delta$$

$$= \frac{a^2-b^2}{b^2 a}\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\delta}$$

fő végformula $\dfrac{1}{\varrho_1} - \dfrac{1}{\varrho_2} = \dfrac{a^2-b^2}{b^2 a}\cos^3\delta\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\delta}$

~~e szerint~~. $a = 637{,}740000$ C.

$b = 635{,}610000$ C.

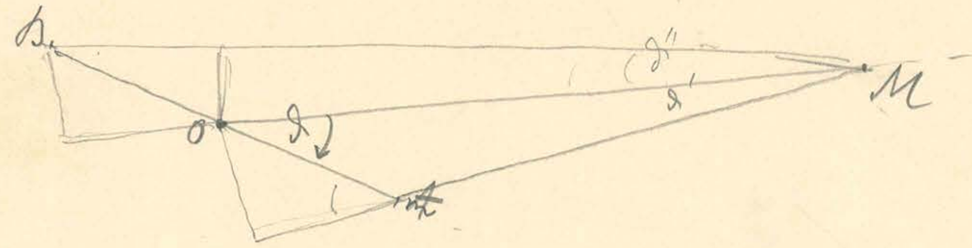
$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{90734 \cdot 10^6}\cos^3\delta\sqrt{1+0{,}99303\operatorname{tg}^2\delta}$$

$\log 90734 \cdot 10^6 = 10{,}95777$ | $\log 0{,}99303 = 0{,}99696-1$

$\delta = 47\frac{1}{2}^\circ$-ra $\dfrac{1}{\varrho_1} - \dfrac{1}{\varrho_2} = 5{,}0324 \cdot 10^{-12}$

különbség $= \dfrac{5}{\text{m.m.}}$

1 Tömegpont (golyó, hegy, hengergyűrű) hatása a forgási tengely körül symmetrikus karra.



M a vonzó tömeg A, B a vonzott tömegek mindegyikben m.

OA = OB = l   OM = r.

$$\text{Erő } A\text{-ra} = f\frac{Mm}{AM^2}$$

$$A \text{ erő forgási momentuma} = -\frac{fMm}{AM^2}\, l \sin(\delta+\delta')$$

$$AM \sin(\delta+\delta') = r \sin\delta \quad \text{tehát}$$

$$A \text{ forgási momentuma} = -\frac{fMm}{AM^3}\, r l \sin\delta$$

$$\text{Erő } B\text{-re} = f\frac{Mm}{BM^2}$$

$$B \text{ erő forgási momentuma} = +\frac{fMm}{BM^2}\, r \sin\delta''$$

$$BM \sin\delta'' = l \sin\delta$$

tehát

$$B \text{ erő forgási momentuma} = +\frac{fMm}{BM^3}\, r l \sin\delta$$

A két m tömeg forgási momentuma együtt $= -fMm\, r l \sin\delta\left(\frac{1}{AM^3} - \frac{1}{BM^3}\right)$

legyen r ∞ l-hez képest

akkor $AM = r - l\cos\delta$ $BM = r + l\cos\delta$

$AM^3 = r^3\left(1 - \frac{l}{r}\cos\delta\right)^3$ $BM^3 = r^3\left(1 + \frac{l}{r}\cos\delta\right)^3$

$AM^3 = r^3\left(1 - 3\frac{l}{r}\cos\delta\right)$ $BM^3 = r^3\left(1 - 3\frac{l}{r}\cos\delta\right)$

$$\frac{1}{AM^3} - \frac{1}{BM^3} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{1-3\frac{l}{r}\cos\vartheta} - \frac{1}{1+3\frac{l}{r}\cos\vartheta}\right)$$

$$1+3\frac{l}{r}\cos\vartheta \qquad 1-3\frac{l}{r}\cos\vartheta$$

$$\frac{1}{AM^2} - \frac{1}{BM^2} = \frac{6}{r^4}\,l\cos\vartheta$$

tehát a forgás momentum

$$= -fM\,ml^2\frac{6}{r^3}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$= -3f\frac{M\,ml^2}{r^3}\sin 2\vartheta$$

m a fél tömeg tehát $\Sigma ml^2 = \frac{K}{2}$

K tehetetlenségi momentum.

forgás momentum. $= -\frac{3}{2}fM\frac{K}{r^3}\sin 2\vartheta$

ha F a drót csavarási momentuma akkor a kitérés $\measuredangle$a

ennek $\perp$ állásban:

$$= \frac{3fM}{r^3}\frac{K}{F} \quad \text{minthogy} \quad \frac{K}{F} = \frac{T_0^2}{\pi^2} \text{ lesz}$$

A kitérési szöget $2u = \frac{3fM}{r^3}\frac{T_0^2}{\pi^2}$ 1)

a longitudinális állásban forgási moment $= -3fM\frac{K}{r^3}$

arra merőlegesen $+3fM\frac{K}{r^3}$

tehát

$$T^2 = \pi^2\frac{1}{\frac{F}{K} - \frac{3fM}{r^3}} = \pi^2\frac{1}{\frac{\pi^2}{T_0^2} - \frac{3fM}{r^3}} = T_0^2\frac{1}{1-\frac{3fM}{r^3\pi^2}T_0^2}$$

$$T'^2 = T_0^2\frac{1}{1+\frac{3fM}{r^3\pi^2}T_0^2}$$

$$1 - \frac{3fM}{r^3\pi^2} T_0^2 = \frac{T_0^2}{T^2}$$

$$1 + \frac{3fM}{r^3\pi^2} T_0^2 = \frac{T_0^2}{T'^2}$$

$$\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{6fM}{r^3\pi^2} \cancel{\frac{T_0^2}{3}}$$

$$\frac{(T'-T)(T'+T)}{T'^2T^2} = \quad \text{tehát}$$

~~közelítőleg~~

$$T' - T = \frac{T'^2T^2}{T'+T} \, 6\frac{fM}{r^3\pi^2} \qquad 2)$$

közelítőleg $\quad T' - T = 3\, T_0^3 \frac{fM}{r^3\pi^2} \qquad 2')$

h magasságú σ sűrűségű félgömb hatását hogy $M = \frac{2}{3}\pi h^3 \sigma$

hogy $\quad 2u = \frac{2}{\pi} f\sigma \frac{h^3}{r^3} T_0^2$

$$T' - T = \frac{2}{\pi} f\sigma \frac{h^3}{r^3} T_0^3$$

A hegy által keletkezett függőón eltérítés.

$$\frac{f \frac{2}{3}\pi h^3 \sigma}{r^2} : \frac{4}{3} f\pi R^2 K$$

$$\varepsilon = \frac{h^3}{2r^2R} \frac{\sigma}{K}$$

σ a hegy,
K a föld sűrűség,
R a földsugár

Számpélda. $\sigma = 2,5$ akkor $\frac{2}{\pi} f\sigma = \frac{10,7}{100m}$

$$T_0 = 1000$$

a hegy tövében $h = r$ $2u = \frac{10,7}{100} = 0,107 = 6^\circ\, 8'$

$$T' - T = 107 \text{ s.}$$

$h = 100$ $\varepsilon = \frac{1}{256000}$ kevesebb mint 1 másodperc

---

Robert Sterneck Best. des Einflusses localer Massenattraction

Mittheilungen des k. k. mil.-geogr. Institutes

VIII Band

1888

Liezy-ban az eltérések nagysága

északról 5,27 kilométer távolban egy két kilométer hosszú

délről 6,80 km széles 80 köbkilométer 2,6 sűrűségű

$\overline{12,07}$ 6 149 [illegible]

e szerint teendő 1) és 2) formulákba

$$M = 2,6 \cdot 149,000 \text{ M.M.}$$

$r = 600\,000$ c. lesz $\frac{3fM}{r^3\pi^2} = \frac{0,036}{m}$

$2u = 0,036 = 2^\circ\, 4'$

$T' - T = 36$ s.

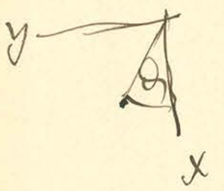
Forgási momentum akkor a mikor a forgó rendszer méretei kicsinyek a távolsághoz képest akkor.

$$X = X_0 + x\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}y + \frac{\partial X}{\partial z}z$$

$$Y = Y_0 + x\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}y + \frac{\partial Y}{\partial z}z$$

A forgási irányú X Y-ék

~~$x = l\cos\vartheta$~~



tehát a forgási momentum

$$\cancel{Yx - Xy = X_0 x + x\frac{\partial X}{\partial x}}$$

$$Yx - Xy = Y_0 x + x^2\frac{\partial Y}{\partial x} + xy\frac{\partial Y}{\partial y} + xz\frac{\partial Y}{\partial z} - X_0 y - xy\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}y^2 - \frac{\partial X}{\partial z}zy$$

miután pedig $x = l\cos\vartheta$
$y = l\sin\vartheta$

$$Yx - Xy = Y_0 l\cos\vartheta - X_0 l\sin\vartheta + l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + l^2\cos 2\vartheta\frac{\partial X}{\partial y}$$
$$+ l\cos\vartheta\, z\frac{\partial Y}{\partial z} - l\sin\vartheta\, z\frac{\partial X}{\partial z}$$

Legyen a vonzó golyó vagy tömegpont az XZ síkban akkor. ~~$Y_0 = 0$~~

$\rho^2 = a^2 + c^2$

$$X_0 = fM\frac{a}{\rho^3} \qquad Y_0 = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{fM}{\rho^3} + 3fM\frac{a^2}{\rho^5} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{fM}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \cancel{3fM} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = 3fM\frac{ac}{\rho^5}$$

tehát

$$\cancel{Yx - Xy = \frac{fM}{\rho^3} - \frac{fM}{\rho^3}a\,l\sin\vartheta - \frac{3}{2}fM}$$

$$Yx - Xy = -\frac{fM}{\rho^3}a\,l\sin\vartheta - \frac{3}{2}\frac{fM}{\rho^5}a^2 l^2\sin 2\vartheta - 3\frac{fM}{\rho^5}acz\,l\sin\vartheta$$

dm tömegelemre akkor a forgási momentum. ez dm-el szorozva az egész testre a forgási momentum = ennek integrálja.

ε szerint a [illegible] [illegible] fejlesztésben.

$$\mathfrak{F} = -\frac{fM}{\rho^3} a \int dm\, l \sin\vartheta - \frac{fM}{\rho^5}\frac{3}{2} a^2 \int l^2 dm \sin 2\vartheta - 3\frac{fM}{\rho^5} ac \int z\, l\, dm \sin\vartheta$$

Vegyünk fel a testben egy $\xi\ \eta\ \zeta$ tengelyrendszert melynek $\xi\eta$ síkja xy-al összeesik, ζ tengelye z-vel — és ξ tengelye x-el ϑ_0 szöget képez akkor

$$l \sin\vartheta = l \sin(\vartheta_0 + \varepsilon) = l \sin\vartheta_0 \cos\varepsilon + l \cos\vartheta_0 \sin\varepsilon$$

$$l\cos\varepsilon = \xi \qquad l \sin\varepsilon = \eta$$

$$\underline{l \sin\vartheta = \xi \sin\vartheta_0 + \eta\cos\vartheta_0}$$

$$l\cos\vartheta = l\cos(\vartheta_0+\varepsilon) = l\cos\vartheta_0\cos\varepsilon - l\sin\vartheta_0 \sin\varepsilon = \xi\cos\vartheta_0 - \eta\sin\vartheta_0$$

$$l^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = l^2\frac{\sin 2\vartheta}{2} = (\xi^2-\eta^2)\frac{\sin 2\vartheta_0}{2} + \xi\eta\cos 2\vartheta_0$$

tehát

$$\mathfrak{F} = -\frac{fM}{\rho^3} a \sin\vartheta_0 \int \xi\, dm - \frac{fM}{\rho^3} a \cos\vartheta_0 \int \eta\, dm - \frac{fM}{\rho^5}\frac{3}{2} a^2 \sin 2\vartheta_0 \int (\xi^2-\eta^2)\, dm - \frac{fM}{\rho^5} a^2 3 \cos 2\vartheta_0 \int \xi\eta\, dm$$

$$- 3\frac{fM}{\rho^5} ac \sin\vartheta_0 \int \xi z\, dm - 3\frac{fM}{\rho^5} ac \cos\vartheta_0 \int \eta z\, dm$$

$$\int \xi\, dm = m\xi_0 \qquad \int\eta\, dm = m\eta_0$$

3) [illegible] esetére alkalmazva

1) ~~Centrum~~ Rúd alakú esetét, a hol mind~~en~~ a $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ síkok ~~két symmetria síkja — azaz a $\xi\zeta$ és~~ symmetria síkok akkor $\int \xi\eta\, dm = 0$

$$\int \eta\zeta\, dm = 0 \qquad \int \xi\zeta\, dm = 0 \qquad \int \xi\, dm = 0 \qquad \int \eta\, dm = 0.$$

$$\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm = K - 2\int \eta^2 dm$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{fM}{\rho^5} a^2 \frac{3}{2} \sin 2\vartheta \int (\xi^2-\eta^2)\, dm$$

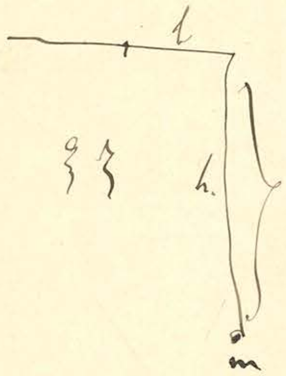
$$\mathfrak{F} = -\frac{3}{2}\frac{fM}{\rho^5} a^2 \sin 2\vartheta \left(K - 2\int\eta^2 dm\right)$$

péld.

[Vonalas inga]

2) Az Coulomb mely a $\xi\zeta$-ben egyensúlyban áll.

$$\int \eta\xi\, dm = 0 \qquad \int \xi\, dm = 0 \qquad \int \eta\, dm = 0$$



$$\int \xi z\, dm = lmh$$

$$\int \eta z\, dm = 0$$

akkor

$$F = -\frac{3}{2}\frac{km}{\varrho^5} a^2 \sin 2\vartheta_0 \left(K - 2\int \eta^2 dm\right) - 3\frac{km}{\varrho^5} ac \sin\vartheta_0\, lmh$$

3) Ingán $\int \eta\, dm = 0 \quad \int \xi\eta\, dm = 0 \quad \int \xi z\, dm = 0 \quad \int \eta z\, dm = 0$

m a függő tömeg ξ_0 a súlypontjának

$$F = -\frac{km}{\varrho^3} a \sin\vartheta_0\, \xi_0 m - \frac{km}{\varrho^5}\frac{3}{2} a^2 \sin 2\vartheta_0 \left\{K - 2\int \eta^2 dm\right\}$$

$$Y_x - X_y = -m\xi_0 \sin\vartheta_0 - \frac{3}{2}\sin 2\vartheta \frac{fM}{r^3} K$$

$$- gm\xi_0 - 3\frac{g}{r} K.$$

$$T^2 = \pi^2 \frac{K}{mg\xi_0 - 3\frac{g}{r}K}$$

$$\cancel{T^2 = T_0^2}$$

$$T^2 = T_0^2 \frac{1}{1 - \frac{3gK}{mg\xi r}} = T_0^2 \frac{1}{1 - 3\frac{g}{r}\frac{T_0^2}{\pi^2}}$$

$$T^2 = T_0^2\left(1 - 3\frac{g}{r\pi^2}T_0^2\right)$$

hogy a kell ugy adni annak $3\frac{g}{r\pi^2}T_0^2$ jól

$$\frac{1}{200000}$$

$$T_0^2 : \pi^2$$

$$\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = Y_0 l\cos\delta - X_0 l\sin\delta + l^2\sin\delta\cos\delta\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + l^2\cos 2\delta\frac{\partial X}{\partial y}$$
$$+ l\cos\delta\, z\frac{\partial Y}{\partial z} - l\sin\delta\, z\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$l\sin\delta = \xi\sin\delta_0 + \eta\cos\delta_0$$
$$l\cos\delta = \xi\cos\delta_0 - \eta\sin\delta_0$$
$$l^2\sin\delta\cos\delta = (\xi^2-\eta^2)\frac{\sin 2\delta_0}{2} + \xi\eta\cos 2\delta$$
$$l^2\cos 2\delta = (\xi^2-\eta^2)\frac{\cos 2\delta_0}{\cancel{2}} - 2\xi\eta\sin 2\delta_0$$

$$\cancel{\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = Y_0\cos\delta_0\int\xi dm + Y_0}$$
$$\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = Y_0\cos\delta_0\int\xi dm - Y_0\sin\delta_0\int\eta dm - X_0\sin\delta_0\int\xi dm - X_0\cos\delta_0\int\eta dm$$
$$\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = (Y_0\cos\delta_0 - X_0\sin\delta_0)\int\xi dm - (Y_0\sin\delta_0 + X_0\cos\delta_0)\int\eta dm$$
$$+\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\sin 2\delta_0}{2}\int(\xi^2-\eta^2)dm + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\cos 2\delta\int\xi\eta dm + \frac{\partial X}{\partial y}\cos 2\delta\int(\xi^2-\eta^2)dm$$
$$- \frac{\partial X}{\partial y}2\sin 2\delta\int\xi\eta dm$$
$$+ \cancel{z}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\cos\delta_0 - \frac{\partial X}{\partial z}\sin\delta_0\right)\int\zeta\xi dm - \cancel{z}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\sin\delta_0 + \frac{\partial X}{\partial z}\cos\delta_0\right)\int\zeta\eta dm$$

eszkből $\int\xi\eta\, dm = 0$

~~x) Contact mily~~ $\cancel{X_0 = 0 \quad Y_0 = 0}$ $\int\xi dm = 0 \quad \int\eta dm = 0$

---

inga $\int\eta dm = 0 \quad \int\zeta\eta\, dm = 0 \quad \int\eta\xi\, dm = 0$

$Y_0 = 0$

$$\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = -X_0 m\xi_0\sin\delta_0 + \left(K - \int\eta^2 dm\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\sin 2\delta}{2} + \left(K - \int\eta^2 dm\right)\frac{\partial X}{\partial y}\cos 2\delta$$
$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\cos\delta_0 - \frac{\partial X}{\partial z}\sin\delta_0\right)\int\zeta\xi dm$$

Le most. 1 test alm. 1 pont alatt.

$$X_0 = \frac{fM}{r^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{fM}{r^3} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{fM}{r^3} + 3\frac{fM}{r^3} = 2\frac{fM}{r^3}$$

$$\mathfrak{Y}_x - \mathfrak{X}_y = -\frac{fM}{r^2}m\xi_0\sin\delta_0 - \frac{3}{2}\sin 2\delta\frac{fM}{r^3}\left(K - \int\eta^2 dm\right)$$

2

$$\frac{d^2w}{ds^2} = -\frac{Fw + \mathcal{E}\frac{dw}{ds}}{K+k}$$

$$(K+k)\frac{d^2w}{ds^2} + Fw + \mathcal{E}\frac{dw}{ds} = 0$$

$$w = Ae^{-\alpha t}\pi\frac{t-t_0}{T} \qquad w = Ae^{-\alpha t}\pi\frac{t}{T}$$

$$\frac{\pi}{T} = \sqrt{\frac{F}{K+k} - \alpha^2} \qquad \alpha = \frac{\mathcal{E}}{2(K+k)}$$

$$w = Ae^{-\alpha t}\sin\pi\frac{t}{T}$$

$t = 0 \quad w = 0$

$\frac{dw}{dt} \quad t = t' = \frac{T}{\pi}\operatorname{arctg}\pi\frac{T}{\alpha} \qquad w = Ae^{-\alpha t'}\sin\pi\frac{t'}{T}$

$t = T \quad w = 0 \qquad w' = -Ae^{-\alpha t' - \alpha T}\sin\pi\frac{t'}{T}$

$t =$

$t = 2T \quad w = 0 \qquad w'' = Ae^{-\alpha t' - 2\alpha T}\sin\pi\frac{t'}{T}$

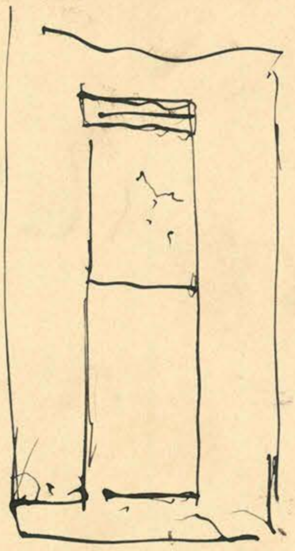
$$\frac{dw}{ds} = Ae^{-\alpha t}\frac{\pi}{T}\cos\pi\frac{t}{T} - \alpha Ae^{-\alpha t}\sin\pi\frac{t}{T} = 0$$

$$\operatorname{tg}\pi\frac{t}{T} = \frac{\pi}{T\alpha}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\pi}{T\alpha} = \pi\frac{t}{T}$$

$$\frac{w - w'}{w'' - w} = \frac{1 + e^{-\alpha T}}{e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}} \qquad t = \frac{T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{T\alpha}$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha T}}$$



$\rho \underline{\varepsilon} = \rho' \varepsilon'$

$\rho \varepsilon_1 = \rho' \varepsilon_1'$

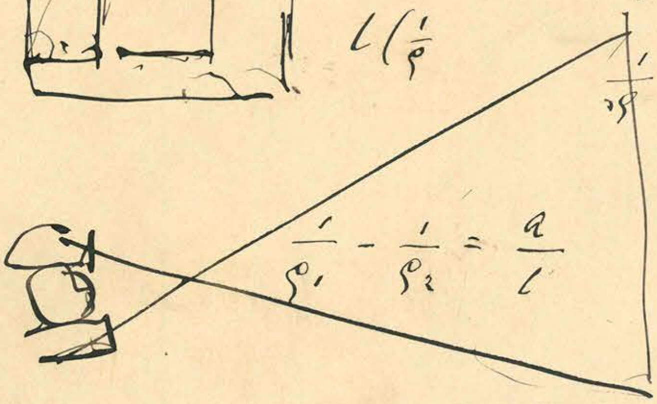
$l(\varepsilon - \varepsilon') = a$

$l_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_1') = b$

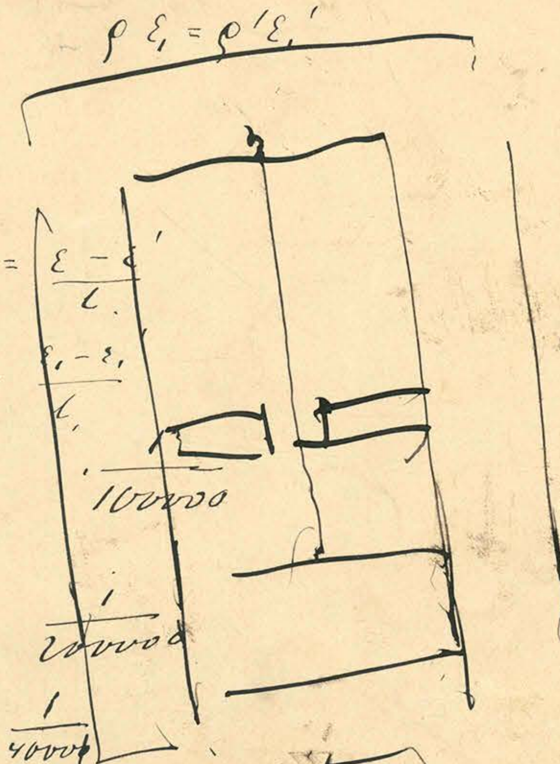
$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{l}$

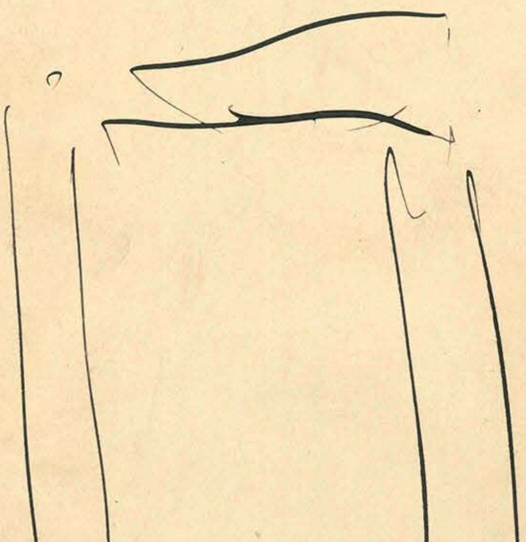
$l(\frac{1}{\rho}$

$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{l_1}$

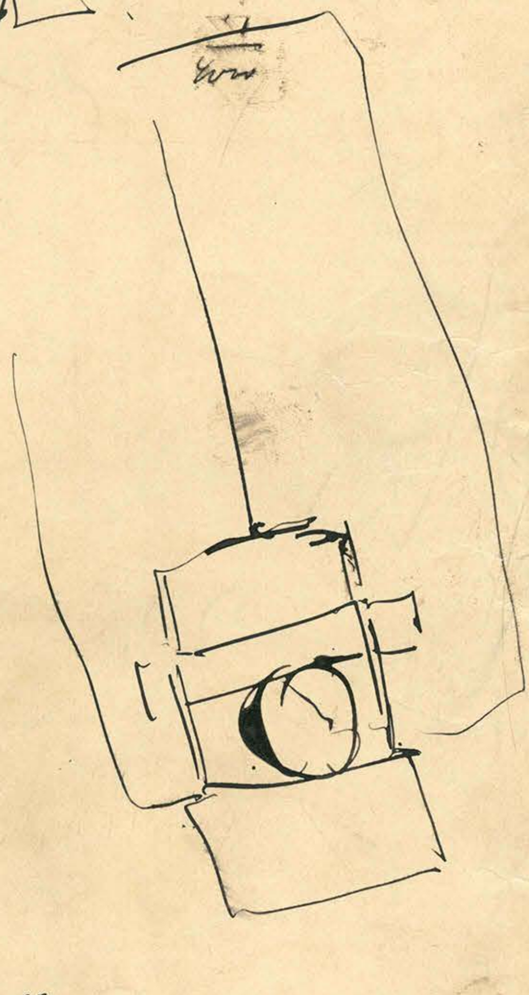


$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{a}{l}$



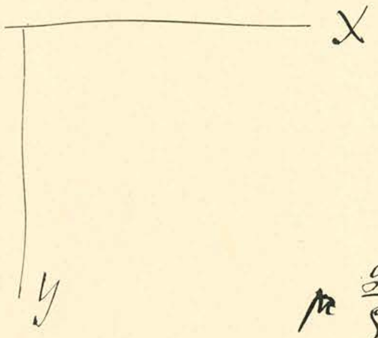


$\frac{1}{50\,000}$



$T\alpha + T_1\beta = C(P+p)\beta + Cp\alpha.$

Földtekintetbeli rendszer.



$$y_x - X_y$$

$$\mu \frac{g}{\varrho} \xi \eta - \frac{\partial g}{\partial s} \cos \alpha \, \xi \eta - \mu \frac{g}{\varrho} \xi \eta + \frac{\partial g}{\partial s} \sin \alpha \, \xi \xi$$

$+ \sin$

0,001 181	0,003720
9448	2976
2543	1116
0,044878	14136

$\psi = \mathfrak{D} \sin 2\vartheta$

$\psi' = -\mathfrak{D} \sin(2\vartheta + 2(\psi' - \psi))$

$\psi' - \psi = -\mathfrak{D} (\sin 2\vartheta \cancel{+} \sin 2\vartheta \cos 2(\psi' - \psi) + \cos 2\vartheta \sin 2(\psi' - \psi)$

$\psi' - \psi \doteq -\mathfrak{D} (2 \sin 2\vartheta + 2 \cos 2\vartheta (\psi' - \psi)$

$\psi'' = \mathfrak{D} \cos(2\vartheta + (\psi'' - \psi))$

$\psi''' = \mathfrak{D} \cos$

$\delta_1 = 0$

$\delta_2 = \frac{\pi}{2}$

$\delta_3 = \frac{\pi}{4}$

$\delta_4 = 3\frac{\pi}{4}$

$\psi_1 = \mathfrak{D} \sin 2\vartheta \quad = \mathfrak{D} \sin 2\vartheta$

$\psi_2 = \mathfrak{D} \sin(2\vartheta + 2(\psi_2 - \psi_1) + \pi) = -\mathfrak{D} \sin(2\vartheta + 2(\psi_2 - \psi_1))$

$\psi_3 = \mathfrak{D} \sin(2\vartheta + 2(\psi_3 - \psi_1) + \frac{\pi}{2}) = \mathfrak{D} \cos(2\vartheta + 2(\psi_3 - \psi_1))$

$\psi_4 = \mathfrak{D} \sin(2\vartheta + 2(\psi_4 - \psi_1) + \frac{\pi}{2} + \pi = \cancel{-} \mathfrak{D} \cos(2\vartheta + 2\psi_4 - \psi_1)$

$\psi_1 = \mathfrak{D} \sin 2\vartheta$

$\psi_2 = -\mathfrak{D} \sin 2\vartheta - \mathfrak{D} \cos 2\vartheta \cdot 2(\psi_2 - \psi_1)$

$\psi_3 = \mathfrak{D} \cos 2\vartheta - \mathfrak{D} \sin 2\vartheta \cdot 2(\psi_3 - \psi_1)$

$\psi_4 = -\mathfrak{D} \cos 2\vartheta + \mathfrak{D} \sin 2\vartheta \, 2(\psi_4 - \psi_1)$

$\psi_2 - \psi_1 \doteq 2\mathfrak{D} \sin 2\vartheta - 2\mathfrak{D} \cos 2\vartheta (\psi_2 - \psi_1)$

$\cancel{\psi_3 - \psi_1 = \mathfrak{D} \cos 2\vartheta}$

$\psi_4 - \psi_3 = -2\mathfrak{D} \cos 2\vartheta + 2\mathfrak{D} \sin 2\vartheta (\psi_4 - \psi_3)$

$$\frac{\partial y}{\partial s}\sin(x-\vartheta)\int dm\,\xi r\cos\varepsilon - \frac{\partial y}{\partial s}\cos(x-\vartheta)\int dm\,\xi r\sin\varepsilon$$

$r\cos\varepsilon = \xi$ $\qquad r\sin\varepsilon = \eta$

$$\int dm\,\xi r\sin\varepsilon = 0$$

$$\frac{dy}{ds}\sin(x-\vartheta)\int dm\,\xi\xi$$

a hossz irányában az felület egyezése [illegible]

~~Egyenes vízszintes irányú~~ Ugy választjuk hogy a tehetetlenségi egy vízszintes. akkor $\int\xi\xi=0$.

Ha most az összmechanikai tengelyrendszert úgy választjuk, hogy annak ~~[illegible]~~ XY ~~síkja~~ az összmechanikai kezdőpontjául, s abszcissza [illegible] az XZ és XY síkok pedig fő ~~[illegible]~~ normálsíkok [illegible] legyenek ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ akkor:

$X_0 = 0 \mid Y_0 = 0 \mid Z_0 = g_0$

~~továbbá~~ továbbá

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

A nehézség térbeni változásainak méréséről.

Nehézségnek a [illegible] térben a testek esését okozó erőt nevezzük. Ez az erő a föld tömeg vonzásának és a föld forgásának megfelelő középpontfutó erőnek eredője. Erre az erőre vonatkozó ismereteink ~~[illegible]~~ még sok tekintetben várnak még kiegészítésre.

~~[illegible]~~ Az igen nagy ~~[illegible]~~ az erő [illegible] gyorsulásának értékét a föld [illegible] megfelelő nagy ~~gyorsulásának értékét a föld [illegible]~~ számú pontjaiban ~~[illegible]~~ [illegible] ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ s az elméletet fel tudta állítani azt a pontot, melybe az észlelések adatai nagyságban beleillenek —
~~de [illegible]~~
~~[illegible]~~,
~~[illegible]~~
de azok a pontok melyekben ~~egy~~ a gyorsulás értékét [illegible] megmutatják mégis csak nagyon gyéren ~~[illegible]~~ [illegible] szétszórva a földön, s az elmélet pontosságának előre ~~[illegible]~~ megközelítésének bizonyságául szolgálnak,
~~[illegible]~~ feladatunk ismertetjük egy erő nagyságának az egész térben, melyhez az [illegible] hozzájuthat.

~~A nehézségi~~

Bizony a nehézségi [illegible] [illegible]
még annyira sem [illegible] mint a föld-
mágneses erőé, ~~[illegible]~~ mert
[illegible] a [illegible] az egyező nehézségi
vonalait ([illegible]) még [illegible]
a [illegible] [illegible] [illegible] mint az ugyanazon
irányban vonalakat. [illegible]
a [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]
[illegible] a ~~[illegible]~~ nehézségi [illegible] [illegible]
[illegible], [illegible] ~~[illegible]~~ eléggé [illegible]
[illegible] még [illegible] elég eléggé
[illegible] [illegible].

Éppen így állnak ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ a föld
egy jellem szintfelületének
alakjának ~~[illegible]~~ tekintetében is,
a mely az ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible]
oly szoros összefüggés. ~~[illegible]~~
Az a kis vagy három [illegible] elágazások,
melyet ~~[illegible]~~ a geodetikus
mérések adnak csak arra vizsgált
~~[illegible]~~ szolgáltatják, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~
a szintfelületek [illegible] és
[illegible] [illegible]. ~~[illegible]~~ Magyar a [illegible] felület
függőleges vonalairól, és a [illegible]
mindig új [illegible].

~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~
~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~,

Ez is teljesen új módszert fog követni, ~~mert tagja~~ a nehézség változásait meghatározza a egyetlen legmegbízhatóbb a nehézség mérés- feltüntetések ~~főleg kelet irányában~~ megfigyelésére. Az eljárás, melyet arra használtam a kortól jól mutatja.

Első vizsgálataimnak egyet az ország más helyein is itt végeztem, egyes eredményeit a m. t. akadémiának röviden szóval jelentést is tettem, ma már ~~kijelentést~~ igen különböző helyeken és különféle körülmények között megfigyeléseket — ezért ezeket közöl közzétettem.

1 a feladat. kör vonalozása. (Auflösung der Aufgabe.

~~Az ingás nehézség értékek egyes pont~~
~~Az inga, így mint eddig használtatott volt,~~
a ~~nehézség értékét egyes pontokban, a függő~~
A függő a nehézség irányát, az inga, így mint eddig használva volt a nehézség nagyságát egyes pontokban adja. ~~Feladatnak tekintem~~ ~~A feladat megoldására állítottam~~ A Feladatot, ~~melyet magam~~ mit magam elé tűztem ~~nagyon röviden kifejezve a nehézség megfigyelési olyan pontokban~~ melyek nagyon közel kis távolságban egymástól kifejezve ez: meghatározni a nehézség nagyságát és irányát ~~olyan változásait~~

olyan térrészt minden pontjában, mely ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ a nehézség a térbeli összetevőit ~~[illegible]~~

lineáris függvényeik tekinthetők.

Ha az ilyen tér e pontjában ~~xyz~~

$\xi\ \eta\ \zeta$ egy pont derékszögű összetevői,

X, Y, Z az erőösszetevők és $X_0\ Y_0\ Z_0$

ezeknek értékeit az koordinátarendszer kezdőpontjában

jelölik akkor.

$$
\begin{aligned}
X &= X_0 + \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta \\
Y &= Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x}\xi + \frac{\partial Y}{\partial y}\eta + \frac{\partial Y}{\partial z}\zeta \\
Z &= Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x}\xi + \frac{\partial Z}{\partial y}\eta + \frac{\partial Z}{\partial z}\zeta
\end{aligned}
\qquad 1)
$$

~~[illegible]~~

Ezek szerint az erőnek a ~~tekintetbe vett térben~~ térben és mértékben a tekintetbe vett térben

összesen tizenkét meghatározó adatra

van szükségünk, úgy mint az $X_0\ Y_0\ Z_0$

erőösszetevőkre és a fenti egyenletekben előforduló kilenc differential hányadosra

~~Ha [illegible]~~ a nehézségnek

mint a tömegvonzás és a centrifugális

erő eredőjének potentiálja van, ~~[illegible]~~ ezt V-vel

jelöljük, ~~akkor [illegible]~~

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

és a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = +2\omega^2$$

a hol ω^2 a Föld forgásának szögsebességét jelenti

Ezek az $X_0\ Y_0$ és Z_0-on kívül még 5 adatra van szükség.

Válasszuk most a összrendgyői koordinátarendszerünket úgy, hogy annak XY síkja a nívófelületet a kezdőpontban érintő sík legyen ~~akkor~~ akkor

$$X_0 = 0 \qquad Y_0 = 0 \qquad Z_0 = g_0 .$$

Ha a nehézségi g-vel s annak az O pontbeli értékét g_0-al jelöljük.

~~Élegyszerűsödnek az~~

Ha egyszerűsítjük az ~~X tengelyt és Y ty~~ koordinátarendszert úgy választjuk, hogy annak XZ ~~síkja~~ és YZ síkjai a felületnek fő normálmetszetei legyenek akkor,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

miáltal könnyen megszűnő [illegible] ha megjegyezzük, hogy az csatlakozás ~~[illegible]~~ a felületnek normálisa olyan pontokban

~~[illegible] a [illegible] megjegyzőpontokba~~

Az így választott koordinátarendszerre vonatkozólag az csak X tengely irányában összetevője a felületnek egy olyan pontjában mely a koordináta kezdőpontjától ~~[illegible]~~ az y tengely irányában dy végtelen kicsiny távolságra fekszik $\frac{\partial X}{\partial y} dy$ ~~lesz végtelen kicsiny másodrendű~~ ~~[illegible]~~ (általában elsőrendű végtelen kicsiny mennyiség lesz). Ha azonban az XZ és az YZ síkok főnormálmetszetek akkor az előbb megjelölt pontban

~~[illegible]~~ felület normálisa ~~[illegible]~~ és így az erő is mindenben az YZ síkba esnék ennek az iránya X irányában összetevője

$$\frac{\partial X}{\partial y} dy = 0$$

~~Ezért ha az~~ ~~...~~ Tehát az előbbiek tekintetbe vételével

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

A koordinátákban ~~tegyük egy fogjuk~~ koordinátáink XZ és YZ síkjai gyanánt együk a főgörbületi síkokat fogjuk választani. ~~Ezt ...~~ ~~Az~~ Erre a koordinátarendszerre vonatkozólag az 1) egyenlet a következő alakot ölti

$$X = \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta$$

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial y}\eta + \frac{\partial Y}{\partial z}\zeta \qquad \ldots \quad 2)$$

$$Z = g_0 + \frac{\partial X}{\partial z}\xi + \frac{\partial Y}{\partial z}\eta + \frac{\partial Z}{\partial z}\zeta$$

Az ~~ebben~~ e három egyenletben előforduló differen. hányadosoknak fontos ~~megegyeznek~~, ~~fontos~~ jelentősége van. Mindenek előtt kiemelendő hogy ha ϱ és ϱ' a főgörbületi sugarakat jelentik és pedig úgy hogy ~~a pozitív~~ e sugarak ~~a tengely irányában~~ pozitívak akkor lesznek ha a görbületi középpontok a pozitív Z tengely irányában fekszenek, akkor.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{g}{\varrho}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{g}{\varrho'}$$

s ennek következtében, a függélyesre

erőre vonatkoztatott kiegészítések helyett

áll egyelőre ~~felírhatjuk~~ állandók :

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = g\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) + 2\omega^2$$

Továbbá világos hogy

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

és

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

A $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ ott hányadosok a nehézség

változásának egységéül az x és y

vízszintes tengelyek irányában.

~~Ha meg ... OS az egység~~

~~vízszintes irányt melyben a nehézség,~~

~~ne legyen OS az XY síkban a~~

Ha továbbá OS az XY síkban azon

irány melyre nézve

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{ds}\cos\alpha$$

és

$$\frac{dg}{dy} = \frac{dg}{ds}\sin\alpha$$

akkor

$$\frac{dg}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

A $\frac{dg}{ds}$ megjelöli a következőkben mindig

a nehézség vízszintes változását ~~mely~~ együtthatójának a

~~$\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ megjelöltetik~~ szerint nevezzük.

A $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ ennek összetevői.

~~A ... ... koordinátarendszerre~~

~~... ... ...~~

~~Az ... koordinátarendszer ...~~

~~tehát, ...~~

A mi végre a $\frac{\partial Z}{\partial z}$ diff. hányadost illeti, világos, hogy

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

az az a nagyság a nehézség lefelé való változásának együtthatója.

~~Az~~ A választott koordinátarendszerben érvényesek:

$$\cancel{\begin{aligned} X &= -\frac{g}{\rho}\xi + \frac{\partial g}{\partial x}\zeta \\ Y &= -\frac{g}{\rho}\eta + \frac{dg}{dy}\zeta \\ Z &= g_0 + \frac{dg}{dx}\xi + \frac{dg}{dy}\eta + \frac{dg}{dz}\zeta \end{aligned}} \quad \ldots \; 3)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{g}{\rho}\xi + \frac{\partial g}{\partial s}\cos\alpha\,\zeta \\ Y &= -\frac{g}{\rho'}\eta + \frac{dg}{ds}\sin\alpha\,\zeta \\ Z &= g_0 + \frac{\partial g}{\partial s}\cos\alpha\,\xi + \frac{dg}{ds}\sin\alpha\,\eta + \frac{dg}{dz}\zeta \end{aligned}\right\} \quad 3$$

Ebből jönnek a kiegészítés Laplace féle egyenlet

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) + 2\omega^2$$

A nehézség ennek szerint az egész térben a térbeli és mértékbeli lineáris függvényeként kiszámítható meg nem határozva, ha ismertek;

A kezdeti pontban a nehézség gyorsulásának nagysága és iránya,

a fő ~~...~~ normálmetszetek iránya és a két fő görbületi sugár értéke

A nehézség vízszintes változásának együtthatója és ~~a~~ változásának iránya.

Az itt felsorolt adatok, még egy megadott vizre is időben megjegyzett határozzák meg D.i. a nehézség lefelé való irányváltozásának coefficiensét. ~~Ha~~ ~~[illegible]~~ Jelöljük ξ-t dz-val azt a szögletet melyet a nehézség iránya ~~[illegible]~~ ~~[illegible] irányával a nehézség irány~~ egy a ξ szöglethez ~~ξ távolságban~~ az ismeretlen kezdetpontja alatt $\xi\, dz$ ~~távolságra~~ vonal ~~[illegible]~~ felelő pontban képez, a nehézség irányával az ismeretlen kezdetpontjában képez akkor világos mindenki:

$$\eta = \frac{d\eta}{dz}\,\xi = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial z}}{g}\,\xi$$

és így az irányváltozás coefficiense

$$\frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial s} \quad . \; . \; . \qquad 4)$$

~~Az itt felsorolt [illegible] közül mechanikai úton a g mellett csak még a lefelé irányváltozás coefficiensnek $\frac{\partial g}{\partial z}$ ~~[illegible]~~ meghatározására [illegible]~~

Az itt felsorolt adatok közül mindig csak a g meghatározására és a $\frac{dg}{dz}$ meghatározására vallottak kísérleti módszerek. ~~[illegible]~~ Az első megjegyzett az inga, a másodikat Jolly módszerével a mérleg szolgáltatta.

A Coulomb-féle mérleg alkalmazásával sikerült nekem, ~~mind a~~ a többi (4) egyenletben jegyzett meghatározó adatokat is biztosan kimérni, úgy hogy most csak a g és $\frac{dg}{dz}$ ~~mit~~ megmérését hol ~~[illegible]~~ végezzük a kitűzött feladatnak teljes megoldását adják.

Ezen ~~A~~ Coulomb féle ~~mérleg~~ ~~alkalmazás~~ olyan használatára alapított módszereinek teljes megállapításának lehetőségét, a mérésben ugyanakkor még több ~~[illegible]~~ kísérletben is próbáltam. ~~Vizsg~~ Kutatásom azonban a $\frac{dg}{dz}$ meghatározására egy új módjára is kiterjednek, és pedig az inga segítségével. Ezt is megállapítottam a módszer elméletét, de mert kísérletekig addig még nem jutottam.

A Coulomb féle inga mechanikája.

A Coulomb féle inga, feltéve, midőn arra a ~~[illegible]~~ nehézségen kívül más erő nem működik ~~a rúd súlypontjában~~ az ~~[illegible]~~ [illegible] tengely körül és a nehézség

~~Az első kérdés~~

Ha a Coulomb féle inga [illegible] ~~[illegible]~~ adatait megállapítani akarjuk, ~~[illegible]~~ azt értjük, mikor ~~[illegible]~~ arra más erő nem működik mint a nehézség -

Első feladatunk lesz a Coulomb féle inga mechanikájának megállapítani ~~azt~~ arra az esetre, midőn arra ~~[illegible]~~ ~~a nehézség erő nem működik~~ - a nehézségen kívül más erő nem működik. Ezt a feladatot a nehézség változásainak kimutatása kérdésével ~~[illegible]~~ [illegible] megoldani úgy [illegible] a nehézséget mint azt ~~[illegible]~~ megelőző fejezetekben tettük a térbeli [illegible] lineáris függvényének tekintjük.

Könnyen meggyőződhetünk mindenekelőtt arról, hogy a ~~[illegible]~~ [illegible] egy [illegible] tengelyének s ennek [illegible] a mérleg forgási tengelyének ~~a rúd súlypontja~~ ~~[illegible]~~ iránya egyenes mint a ~~rúd~~ nehézségé a felfüggesztett rúdnak súlypontjában.

Ha 2. i. ~~az előbbi~~ a megelőző jegyzetben megke-

resett tengelyrendszerük kezdőpontját

Ha a tömegközéppontba helyezzük.

Akkor a vándor ~~k~~ ható összes nehézségnek

összetevői közül az X ~~[illegible]~~ és Y ~~[illegible]~~
legfeljebb jelentéktelen értéke nincs[?]

~~[illegible]~~. s így a drótot kifeszítő összes

erő a Z tengely irányába esik ~~[illegible] a~~

~~nehézség [illegible] a súlypont~~ ~~könnyen~~ ható és pedig nem

egyéb mint a tömegközéppontban

a nehézség ereje.

~~E miatt a [illegible] gyakorlati [illegible] összetevők~~

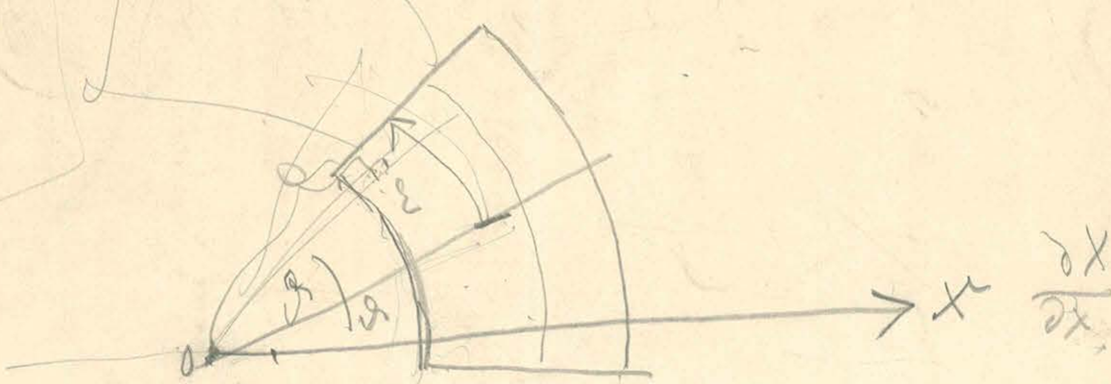
~~és [illegible] 2) vagy 3) egyenletekből~~

~~[illegible]~~ [illegible]

E ~~[illegible]~~

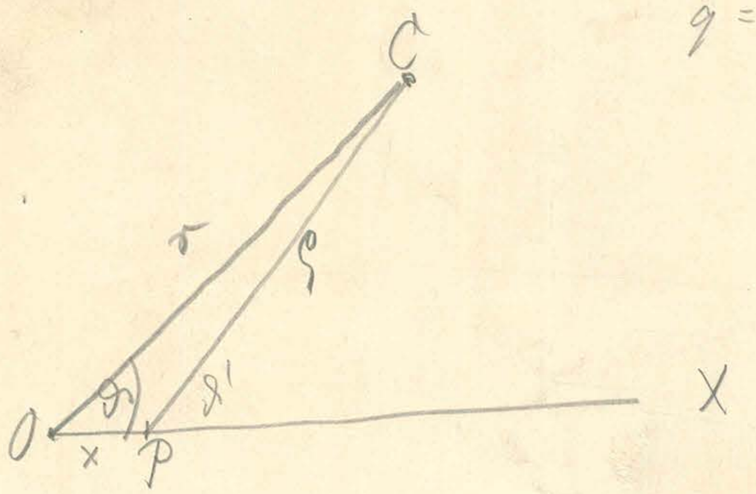
Gravitatiónalis compensatiók

Homogen hengeres sectorok variatiója.



$\frac{\partial X}{\partial x}$

$q = r\,d\vartheta\,dr$



$$\frac{\partial X}{\partial x} = f k q 2h \left\{ \frac{\cos 2\vartheta}{r^2\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{\cos^2\vartheta}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$f k 2h \left\{ \frac{dr \cos 2\vartheta\, d\vartheta}{r\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{r\,dr \cos^2\vartheta\, d\vartheta}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ϑ helyett $\vartheta + \varepsilon$ $\qquad d\vartheta = d\varepsilon$

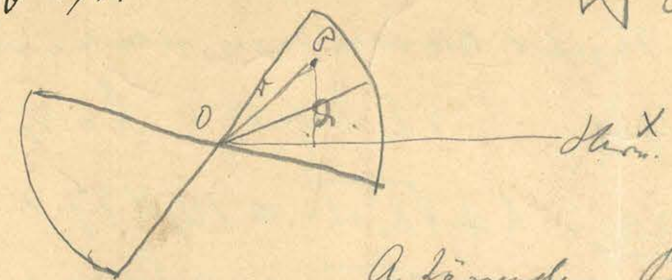
$$f k 2h \int_0^{\varepsilon} \left\{ \frac{dr}{r\sqrt{r^2+h^2}} \Big(\cos 2\vartheta \underbrace{\cos 2\varepsilon\, d\varepsilon}_{\frac{1}{2}}\Big) - \cancel{\sin \ldots} + \frac{r\,dr}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{(\cos^2\vartheta \cos^2\varepsilon + \sin^2\vartheta \sin^2\varepsilon)\,d\varepsilon}_{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 2\vartheta} \right\}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \qquad -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$f k 2h \left\{ \frac{1}{2}\cos 2\vartheta \int_r^{R} \frac{dr}{r\sqrt{r^2+h^2}} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 2\vartheta\right) \int_r^{R} \frac{r\,dr}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\frac{1}{2h} \log \frac{\sqrt{r^2+h^2} - h}{\sqrt{r^2+h^2} + h} \qquad -\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

Révidéban
1896 ápr. 13.



Compensáló súlyokra vonatkozó integrálok $OP = r$

A könnyeden P-ben $\sigma r\,dr\,d\vartheta\,dz = dm$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = -\frac{f\,dm}{\rho^3} + 3\frac{f\,dm}{\rho^5}a^2$$

$$\rho^2 = r^2 + z^2 \qquad a^2 = r^2\cos^2\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iiint\left(-f\frac{dm}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3f\frac{dm\,r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cos^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f\sigma\frac{\pi}{2}\iint\frac{r\,dr\,dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3f\sigma\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos 2\vartheta_0}{2}\right)\iint\frac{r^3\,dr\,dz}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \Big|_{R_1}^{R_2} -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^3\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \Big|_{R_1}^{R_2}\left(-r^2 - \frac{2z^2}{3}\right)\frac{1}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3R_1^2+2z^2}{3(R_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3R_2^2+2z^2}{3(R_2^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f\sigma\frac{\pi}{2}\left\{\int_{-h}^{+h}\frac{dz}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \int_{-h}^{+h}\frac{dz}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right\} + 3f\sigma\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos 2\vartheta_0}{2}\right)\left\{\int_{-h}^{+h}\frac{3R_1^2+2z^2}{3(R_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz - \int_{-h}^{+h}\frac{3R_2^2+2z^2}{3(R_2^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$\int_{-h}^{+h}\frac{dz}{\sqrt{R_1^2+z^2}} = \Big|_{-h}^{+h}\log\left(z+\sqrt{R_1^2+z^2}\right) = \log\frac{\sqrt{R_1^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h}$$

$$\int_{-h}^{+h}\frac{dz}{(R_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \cancel{\Big|_{-h}^{+h}\frac{1}{R_1^2\sqrt{R_1^2+z^2}} = 0} = \Big|\frac{z}{R_1^2\sqrt{R_1^2+z^2}} = \frac{2h}{R_1^2\sqrt{R_1^2+h^2}}$$

$$\int_{-h}^{+h}\frac{z^2\,dz}{(R_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \Big|\left\{-\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} + \log\left(z+\sqrt{R_1^2+z^2}\right)\right\} = -\frac{2h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} + \log\frac{\sqrt{R_1^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h}$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f\sigma\frac{\pi}{2}\left\{\log\frac{\sqrt{R_1^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h} - \log\frac{\sqrt{R_2^2+h^2}+h}{\sqrt{R_2^2+h^2}-h}\right\} + 2f\sigma\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos 2\vartheta_0}{2}\right)\left\{-\frac{2h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} + \frac{2h}{\sqrt{R_2^2+h^2}} + \log\frac{\sqrt{R_1^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h} - \log\frac{\sqrt{R_2^2+h^2}+h}{\sqrt{R_2^2+h^2}-h}\right\}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cancel{-f\sigma\pi h\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+h^2}}\right)} + f\sigma\cos 2\vartheta_0\left\{-2h\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+h^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_2^2+h^2}}\right) + \log\frac{\sqrt{R_1^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h} - \log\frac{\sqrt{R_2^2+h^2}+h}{\sqrt{R_1^2+h^2}-h}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f\sigma \frac{\pi}{2}\left\{\frac{h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} - \frac{h}{\sqrt{R_2^2+h^2}}\right\} + f\sigma \cos 2\vartheta_0 \left\{\frac{h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} - \frac{h}{\sqrt{R_2^2+h^2}} + 2\log \frac{R_2}{R_1}\,\frac{h+\sqrt{R_1^2+h^2}}{h+\sqrt{R_2^2+h^2}}\right\}$$

járvák kalibrálása 1896 ápril 13ikán Tanglhal tett ellenőrzés alkalmával

$$R_1 = 2{,}5 \qquad R_2 = 12 \qquad 2h = 9{,}5 \qquad h = 4{,}75$$

$$\sqrt{R_1^2+h^2} = 5{,}367729 \qquad h+\sqrt{R_1^2+h^2} = 10{,}11773$$

$$\sqrt{R_2^2+h^2} = 12{,}90590 \qquad h+\sqrt{R_2^2+h^2} = 17{,}65590$$

$$\frac{h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} = 0{,}884918$$

$$\frac{h}{\sqrt{R_2^2+h^2}} = 0{,}368049$$

$$\cancel{2\log \frac{R_2}{R_1}\,\frac{h+\sqrt{R_1^2+h^2}}{h+\sqrt{R_2^2+h^2}}} = \cancel{0{,}000011}$$

$$\log \frac{R_2}{R_1}\,\frac{h+\sqrt{R_1^2+h^2}}{h+\sqrt{R_2^2+h^2}} = \cancel{1{,}01135} \; 1{,}01183$$

$$\frac{h}{\sqrt{R_1^2+h^2}} - \frac{h}{\sqrt{R_2^2+h^2}} = 0{,}51687 \qquad \left| \; 2\log\frac{R_2}{R_1}\frac{h+V}{h+V} = \cancel{2{,}02270} \; 2{,}02366\right.$$

$$\log f\sigma\left\{\frac{h}{V} - \frac{h}{V} + 2\log -\right\} = \cancel{0{,}0444870}-6 \quad 0{,}2700121-6$$

$$f\sigma\{\ \} = \cancel{0{,}000\,001\,12069} = 0{,}000\,001\,86014$$

$$f\sigma\frac{\pi}{2}\{\ \} = 0{,}000\,000\,595\,292$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0{,}000\,000\,595\,292 + \cancel{R_1} \cos 2\vartheta_0 \; 0{,}000\,001\,\cancel{12069}\;86014$$

Revisiónál $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0{,}000\,0005\,9480 + \cos 2\vartheta_0 \; 0{,}000\,001\,8612$

$$\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0{,}000\,001\,180\,784 + \cos 2\vartheta_0 \; 0{,}000\,002\,24138}$$

$$\log 0{,}000\,001\,86014 = 0{,}2700121-6$$

a két sectorra $2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0{,}000\,001\,180\,784 + \cos 2\vartheta_0 \; 0{,}000\,003\,72028$

Revisiónál $2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0{,}000\,001\,190 + 0{,}000\,003\,722 \cos 2\vartheta_0$ ~~hiszen $k = 25$~~

téven $x = k\varphi$ a rúd gyöjtésa az ellenőrző

forgási momentum $F = k^2 m\, 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ | $k = 25$ $m = 60$ $k^2 m = 37500$ log. ~~[illegible] $F = 0{,}045 + 0{,}141 \cos 2\vartheta$~~

$$F = 0{,}04462 + 0{,}13957 \cos 2\vartheta_0$$

ha $\vartheta = 54^\circ 19' 22''$ no $F = 0$

$\vartheta = 0$ nál $F = 0{,}18419$

Új Quarz drót felfüggesztve Junius 18ikán délben 12 órakor

⊥ esetben a 4 állásban, irányító kör 333°2, úgy hogy a

külső irányító erő null vagy legalább kicsiny legyen.

Skálatávol 471 C.

Leng 100 és 400 között pontosabban 102,2 és 396 között

Compensáló súly lakik az ostában.

Egyébként semmi súly.

3h. 50m 20s — 166,0

170m	3h – 51m 58s	
		97
180 "	— – 53m 25s	
		62
190 "	— – 54m 27s	
		53
200 "	— – 55m 20s	
		47,5
210 "	— – 56m 7,5	
		47,0
220 "	— – " " 54,5	
		44,5
230 "	— – 57m 39,0	
		44,0
240 "	— – 58m 23,0	
		44,0
250 "	— – 59m 7,0	
		45,0
260 "	— – " " 52,0	
		47,5
270 "	4h – 0m 39,5	
		51,0
280 "	— – 1m 30,5	
		57,5
290 "	— – 2m 28,0	
		67,0
300 "	— – 3m 35,0	
		92,0
310 "	— – 5m 7,0	

4h. 8m 0s 316,8

4h. 25m 20s 140,0

4h. 42m 40s 179,4

166,0) 150,8
316,8) 0,509
140,0) 76,8
179,4) 0,513) 39,4

egyensúly 266,1

4h. 48 min. oda tettem ~~az~~ Compensáló súlyokat

$\vartheta = 0$

Compensáló áramkörben

$\delta = 0$

4h. 52m 0s ... 270,1
54m ... 269,2 × ~~[illegible]~~
56m — — — 269,2 × [illegible]
58m — — 270,1 [illegible].

$\delta = 0{,}4$ el.

5h. 2m — — 272,9) 4,7
6m — — — 277,6) 4,5
10m — — — 282,1) 3,0
14m — — — 285,1) 1,5
— — 286,6) 0
18m —
20m = — — — 286,6

269,2) 17,4
286,6

egyenlő 281,6.

5h. 24m. [illegible] No 15
[illegible] 28 C. [illegible].

280 .. 5h — 28m — 33,5 s.
270 — 5h — 33m — 50,0 s
260 — 5h. 39m 58,0 s
5h. 48m 0s 255,8

[illegible] első lappa 15 C. [illegible]

14 | 17,4 | 124 ... 269,2 ... 6 ... 34 ... 6 ... 2 ... 28

Jul. 19.

Tegnegitől fogva $\vartheta = 0$, ólomkoszka elő lapja 15,0 Calibrálva.

Jul. 19 D.e. 8h. 58 248,2
9h. -8 248,2

Ólomkoszka el. 9h. 8m 50 km.

9h. 33m 294,3
9h 58m 276,8
, 22m 284,5
, 46m 281,0 33,9

=248,2) 46,1 ~~10,380~~
294,3) 17,5) 0,444
276,8) 7,7) 0,454
284,5) 2,5
281,0

egyensúly 282,1

10h. 46 km. $\vartheta = 90°$

11h. 15m 269,0) 8,1) 0,531
11h 30m 260,9) 4,3
11h. 45m 265,2) 2,3) 0,524
12h. 0m 262,9

egyensúly 263,7

12h. 0 km. oda ólom $p = 15$.

12h. 15m 243,1
12h. 30m 254,0
12h. 45m 249,0
1h. 0m 251,6

243,1) 10,9
254,0) 5,0
249,0) 2,0
251,0

~~14,1~~ 13,3

egyensúly 250,4 ~~249,6~~

1h. 10 km. elvitten a vízet.

és a kompenzáló anyagok üresen

19. d. u. ~~2h. 30 266,7.~~

40 m 267,1) 11

56 266,0

egyensúly 266,4

odaállunk Nº 15.

2h. 58 m kor.

Dec. 5h. 0 m 250,1

10 m 250,1

12 m 250,1

16,3

el engedünk 5h. 12 kor.

d. u. 5h 30 m 275,2) 13,4 d=0,51 egyensúly

4 261,8

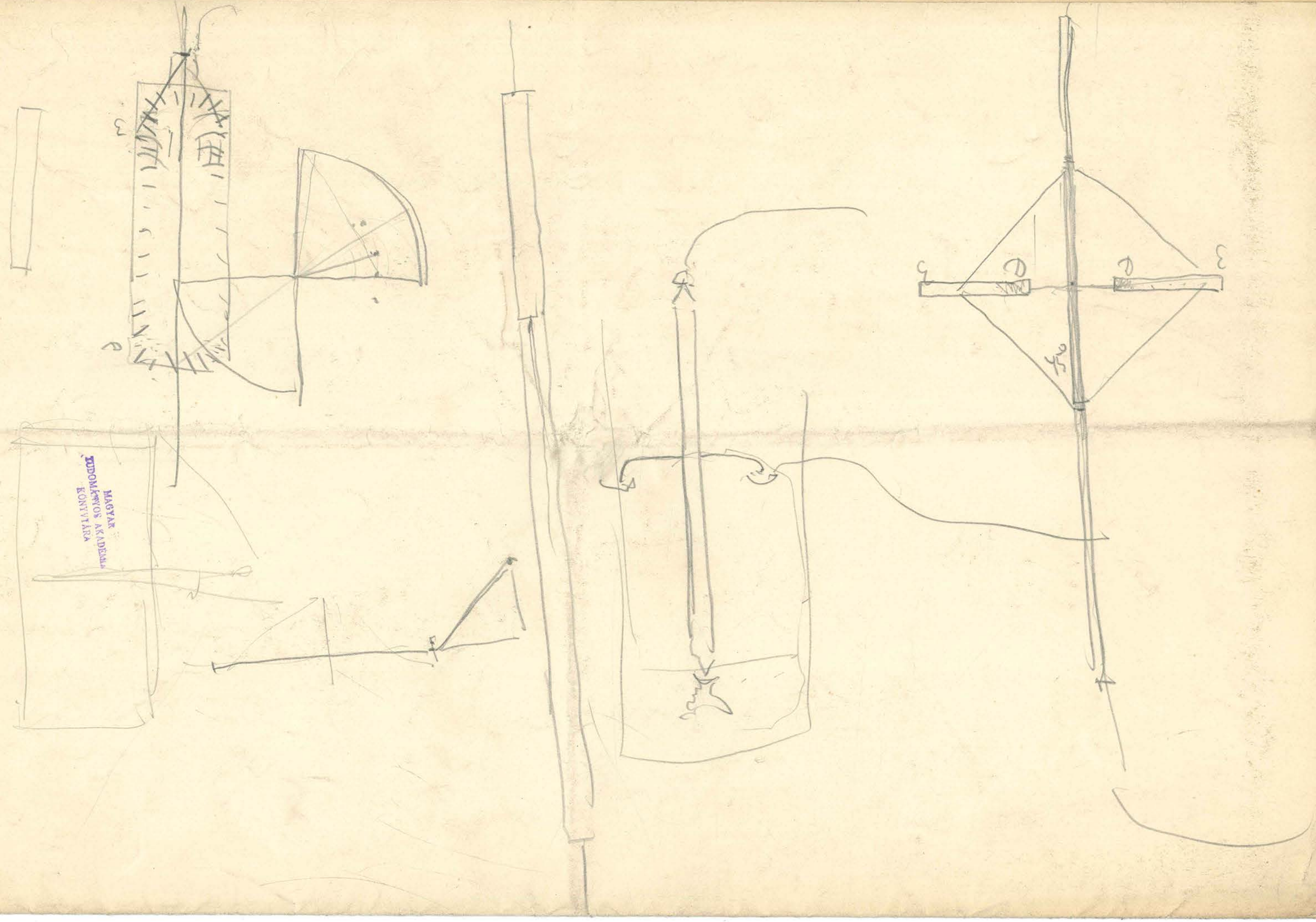
266,4 bravó

$$(\tau + \varrho_1 k)\,\varepsilon_1 = F$$

$$(\tau + \varrho_2 k)\,\varepsilon_2 = F$$

$$\tau\,\varepsilon_0 = F$$

$$\tau\varepsilon_1 + \varrho_1 k \varepsilon_1 = \tau\varepsilon_2 + \varrho_2 k \varepsilon_2$$



$$\frac{f''(\xi)}{bc} = \frac{-4(a-\xi)}{N_0} - \frac{2(a-\xi)^2+b^2+c^2}{N_0^2}\left\{\varrho\left(-2(a-\xi)\varrho^2-2(a-\xi)^3\right) - \left((a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right)\frac{(a-\xi)}{\varrho}\right\}$$

$$= -\frac{4(a-\xi)}{\left((a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right)\varrho} + \frac{(a-\xi)\{(a-\xi)^2+\varrho^2\}}{N_0^2\,\varrho}\left\{2\varrho^2\left(\varrho^2+(a-\xi)^2\right)+(a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right\}$$

$$= \frac{a-\xi}{N_0}\left\{-4+\frac{2\varrho^2\left((a-\xi)^2+\varrho^2\right)^2}{\left((a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right)\varrho^2}+\frac{\left((a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right)}{\left((a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2\right)\varrho^2}\left((a-\xi)^2+\varrho^2\right)\right\}$$

$$\left\{-4+\frac{2\left[(a-\xi)^2+\varrho^2\right]^2}{(a-\xi)^2\varrho^2+b^2c^2}+\frac{(a-\xi)^2+\varrho^2}{\varrho^2}\right\}$$

$$\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{6}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)$$

$T^2=\pi^2$

$$\frac{\pi^2}{T^2}=\frac{T+C}{K}$$

$$\frac{\pi^2}{T''}=\frac{1}{T^2} \quad \text{hogy}$$

$$\frac{1}{T''}-\frac{1}{T^2}=\ldots \quad 0{,}000\,000\,66$$

hogy $0{,}0{,}000\,000\,42$

1,612
485
1,745
485

2097
~~117~~

2230
1260

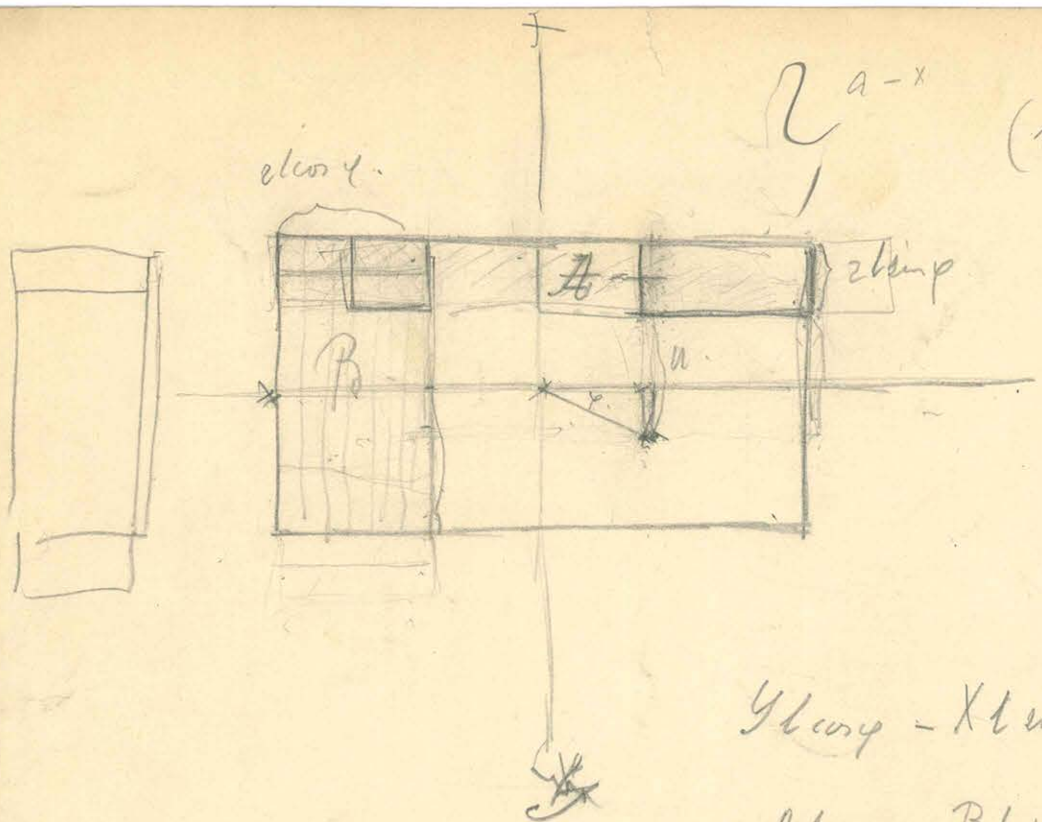
1,745
486
2330
1260

1,612
486
1056
1157
2097

126 / 2097 / 166
126
837
756
810

42 / 66 / 1.57
240
300
294

126 / 2230 / 1.77
126
970
882
880



2^{a-x}

$(a\varphi + b\varphi^2 + c\varphi^3)(1 - c\varphi^2$

$-ac\varphi^3$

$\cancel{a\varphi}$

$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi(1-\cos\varphi)}$

$Yl\cos\varphi - Xl\sin\varphi$

$\underline{-Al\cos\varphi + Bl\sin\varphi}$

$$X = f\sigma\int_{a-\xi}^{a+\xi} d\xi \,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{bc}{(a+\xi)\sqrt{}}$$

$a-l$

$-Al$

$$\log\sqrt{(a-l)^2+b^2} + \log\left(c+\sqrt{(a-l)^2+c^2}\right) - \log(a-l) - \log\left(c+\sqrt{(a-l)^2+b^2+c^2}\right)$$

$$\frac{b}{[(a-l)^2+b^2]} - \frac{b}{\left(c+\sqrt{(a-l)^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{(a-l)^2+b^2+c^2}}$$

$$(\varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3)(1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^3 - \tfrac{1}{6}\varphi^3$$

$cg + g^2 - (a-l)^2 - b^2 \qquad cg + c^2 \qquad c(g+c)$

$$\frac{c}{g[(a-l)^2 + b^2]}$$

757,8 649,5

774,8 884

0,00000174136

757,8 2,879555

0,00000166526

774,8 2,889246

649,5 872579

0,00000237051

0,00000127967

884,0 946452

0,00000062915

0,00000038569

5,759110
0,240890 − 6

2,2

5778492

0,221508 − 6

5,625158
0,374842 − 6

5892904

0,107096

174136
166526

127967

237051

386/62915 / 1630
386
2431
2316
1150
1158

166526
127967
38569

237051
174136
062915

126/210 / 1
126
840

477120
903090
0,574030 -1

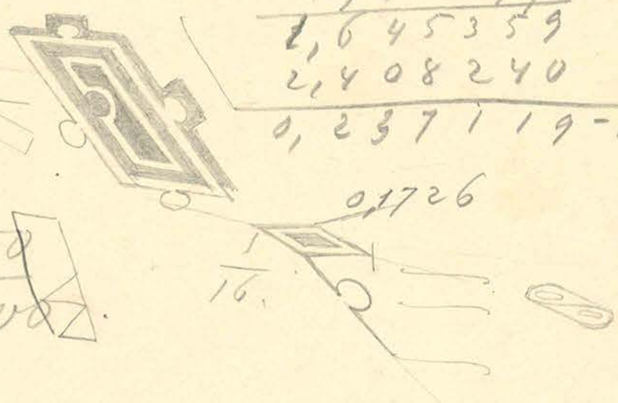
0,574030 -1
0,602060
0,822822 -8
1,049218
0,048130 -5
994300
0,053830 -6
0,164650
5,6139,20
0,832400 -1
2,806960
1,639360
2408240
0,231120 -1
500

0,574030 -1
0,602060
0,822822 -8
1,049218
0,048130 -5
994200
0,053830 -6
0,788338 -1
5,868794
0,710962 -1
2,934397
1,645359
2,408240
0,237119 -1

lgit

2,806960
2,934297

1703



0,1726

$\frac{250}{4000}$

$\frac{1}{16}$

1,204120

26227
63605

626
61
626
2816
2822

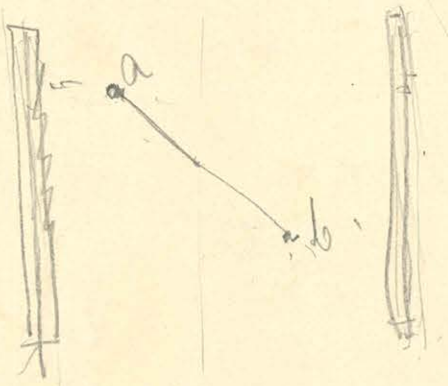
146
26
876
292
3796

2,302585

362216
637784

$F = \frac{F}{2} + \frac{F}{2}$

$\frac{1}{130}$



$A + B = F$

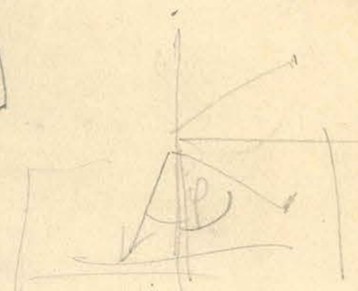
$A = B$

III

$$\log\left(B + \sqrt{(B - l\sin\varphi)^2 + C^2}\right) - \log C - \log\left[(B - l\sin\varphi) + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + l^2 - 2Al\cos\varphi - 2Bl\sin\varphi}\right] + \frac{1}{2}\log\left((A - l\cos\varphi)^2 + C^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\,\mathrm{III} = \frac{\cancel{\qquad}}{\cancel{B - l\sin\varphi + \sqrt{(B - l\sin\varphi)^2 + C^2}}}$$

$$= \frac{-\sin\varphi + \dfrac{(B - l\sin\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{(B - l\sin\varphi)^2 + C^2}}}{B - l\sin\varphi + \sqrt{(B - l\sin\varphi)^2 + C^2}} - \frac{-\sin\varphi + \dfrac{l - A\cos\varphi - B\sin\varphi}{\sqrt{}}}{B - l\sin\varphi + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + l^2 - 2Al\cos\varphi - 2Bl\sin\varphi}} - \frac{1}{2}\,\frac{(A - l\cos\varphi)\cos\varphi}{(A - l\cos\varphi)^2 + C^2}$$



für $l = 0$

$$\frac{\partial}{\partial l}\,\mathrm{III} = \frac{-\sin\varphi - \dfrac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}\sin\varphi}{B + \sqrt{B^2 + C^2}} - \frac{-\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi + B\sin\varphi}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}{B + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - \frac{A\cos\varphi}{A^2 + C^2}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = \frac{4A\cos\varphi}{\left(B + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - \frac{4A\cos\varphi}{A^2 + C^2}$$

Gravitació