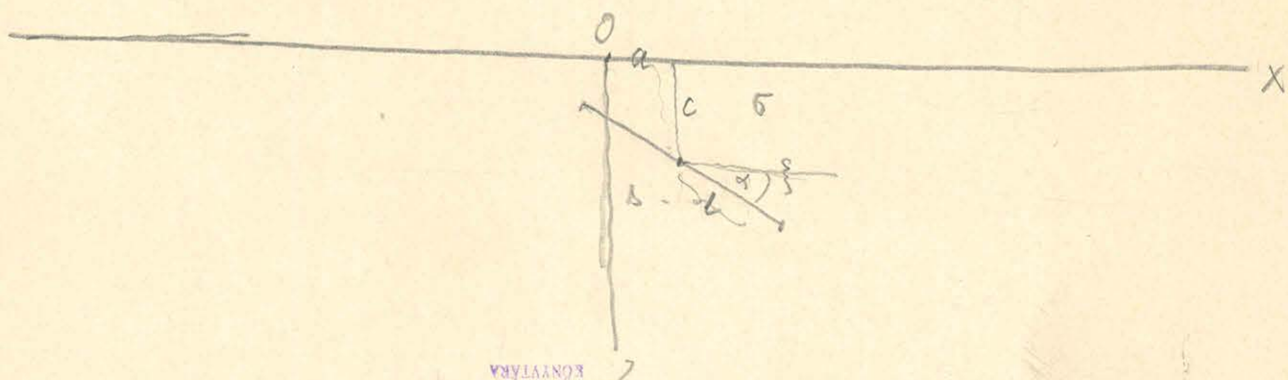
Ms 5099/17. Eötvös Loránd jegyzetei Gravitáció

Gravitációs hatás

Vízszintes és lejtős tömeg

1904. November



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int (\sigma - s)\sin\alpha \, \frac{a + l\cos\alpha - x}{(a + l\cos\alpha - x)^2 + (c + l\sin\alpha - z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \int (\sigma - s)\sin\alpha \, \frac{c + l\sin\alpha - z}{(a + l\cos\alpha - x)^2 + (c + l\sin\alpha - z)^2}$$

$a^2 + c^2 + l^2 + x^2 + z^2$
$+ 2al\cos\alpha - 2ax - 2lx\cos\alpha$
$+ 2cl\sin\alpha - 2cz - 2lz\sin\alpha$
$\cancel{} + l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2$
$+ (a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha.$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int (\sigma - s)\sin\alpha \left\{ \frac{a - x}{l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2} + \frac{l\cos\alpha}{l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2} \right\} \frac{1}{1 + \frac{(a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha}{(a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \int (\sigma - s)\sin\alpha \left\{ \frac{c - z}{l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2} + \frac{l\sin\alpha}{l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2} \right\} \frac{1}{1 + \frac{(a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha}{(a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{(a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha}{(a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2}} = 1 - \frac{(a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha}{(a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2} + \frac{((a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha)^2}{((a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2)^2} \cdots$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int (\sigma - s)\sin\alpha} \int^{l} \left\{ \cancel{\frac{(a-x)\,dl}{l^2 + (a-x)^2 + (c-z)^2}} - \cancel{\frac{((a-x)\cos^2\alpha + (c-z)\sin\alpha\cos\alpha)\,l\,dl}{(\quad)^2}} + \frac{(a-x)((a-x)l\cos\alpha + (c-z)l\sin\alpha)^2}{(\quad)^3} l^2\,dl$$

$+\sin\alpha \quad -\sin\alpha \qquad +\cos\alpha \quad -\cos\alpha$ portpirra line $\underline{N = (a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\int (\sigma - s)\sin\alpha \Big\{ (c-z)\frac{dl}{N} - \sin\alpha\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}\frac{l^2\,dl}{N^2} + (c-z)\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}^2\frac{l^2\,dl}{N^3}$$
$$- \sin\alpha\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}^3\frac{l^4\,dl}{N^4} + (c-z)\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}^4\frac{l^4\,dl}{N^5}$$
$$- \sin\alpha\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}^5\frac{l^6\,dl}{N^6} + (c-z)\{(a-x)\cos\alpha + (c-z)\sin\alpha\}^6\frac{l^6\,dl}{N^7} - \cdots \Big\}$$

$$N = (a-x)^2 + (c-z)^2 + l^2 \qquad a = (a-x)^2 + (c-z)^2$$

$$b = 1$$

$$\int_0^l \frac{dl}{N} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+(c-z)^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{l}{\sqrt{(a-x)^2+(c-z)^2}} \qquad \frac{l}{\sqrt{(a-x)^2+(c-z)^2}} = \varphi$$

$$\int \frac{l^2\,dl}{N^2} = -\frac{l}{2N} + \frac{1}{2\sqrt{(a-x)^2+(c-z)^2}} \operatorname{arc\,tg} \varphi$$

$$\int \frac{l^2\,dl}{N^3} = \left\{\frac{l^3}{8\{(a-x)^2+(c-z)^2\}} - \frac{l}{8}\right\}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{8\{(a-x)^2+(c-z)^2\}^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \varphi$$

$$\int \frac{l^4\,dl}{N^4} = \left\{\frac{l^5}{16\{(a-x)^2+(c-z)^2\}} - \frac{l^3}{6} - \frac{((a-x)^2+(c-z)^2)\,l}{16}\right\}\frac{1}{N^3} + \frac{1}{16\{(a-x)^2+(c-z)^2\}^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \varphi$$

$$\int \frac{l^4\,dl}{N^5} =$$

Közelítő formula.

$$\delta = a \sin\alpha + b\cos\alpha + A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha$$

$\alpha_1 = 0$	$\sin\alpha_1 = 0$	$\cos\alpha_1 = +1,0000$
$\alpha_2 = 72^\circ$	$\sin\alpha_2 = +0,9511$	$\cos\alpha_2 = +0,3090$
$\alpha_3 = 144^\circ$	$\sin\alpha_3 = +0,5878$	$\cos\alpha_3 = -0,8090$
$\alpha_4 = 216^\circ$	$\sin\alpha_4 = -0,5878$	$\cos\alpha_4 = -0,8090$
$\alpha_5 = 288^\circ$	$\sin\alpha_5 = -0,9511$	$\cos\alpha_5 = +0,3090$

$2\alpha_1 = 0$	$\sin 2\alpha_1 = 0$	$\cos 2\alpha_1 = +1,0000$
$2\alpha_2 = 144^\circ$	$\sin 2\alpha_2 = +0,5878$	$\cos 2\alpha_2 = -0,8090$
$2\alpha_3 = 288^\circ$	$\sin 2\alpha_3 = -0,9511$	$\cos 2\alpha_3 = +0,3090$
$2\alpha_4 = 72^\circ$	$\sin 2\alpha_4 = +0,9511$	$\cos 2\alpha_4 = +0,3090$
$2\alpha_5 = 216^\circ$	$\sin 2\alpha_5 = -0,5878$	$\cos 2\alpha_5 = -0,8090$

$$\delta_2 - \delta_5 = 1,9022\,a + 1,1756\,A \;\ldots\; 1)$$ helyes!

$$\delta_3 - \delta_4 = 1,1756\,a - 1,9022\,A \;\ldots\; 2)$$

$$(\delta_3-\delta_1) + (\delta_4-\delta_1) = -3,6180\,b - 1,3820\,B \;\ldots\; 3)$$ helyes!

$$(\delta_2-\delta_1) + (\delta_5-\delta_1) = -1,3820\,b - 3,6180\,B \;\ldots\; 4)$$ helyes!

δ új egységekben

$$\begin{cases} a = +0,3804(\delta_2-\delta_5) + 0,2351(\delta_3-\delta_4) \\ A = +0,2351(\delta_2-\delta_5) - 0,3804(\delta_3-\delta_4) \\ b = +0,3236\{(\delta_1-\delta_3)+(\delta_1-\delta_4)\} - 0,1236\{(\delta_1-\delta_2)+(\delta_1-\delta_5)\} \\ B = -0,1236\{(\delta_1-\delta_3)+(\delta_1-\delta_4)\} + 0,3236\{(\delta_1-\delta_2)+(\delta_1-\delta_5)\} \end{cases}$$

helyes. helyes. helyes! helyes!

[illegible] Harkányi!

Számtábla

Csoportosítás 1) 2) 3) 4) formátum a 4 oldalon.

1	2	3	4	
—	\	|	/	állású lapok.

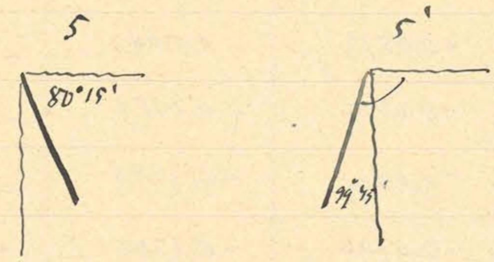
x'		σ $\frac{1}{12}\,3(\varsigma'^2-\tau'^2)$	τ $\frac{1}{12}\,6\varsigma'\tau'$	$\dot{\delta}'_1$	1) — $\varsigma'+\sigma$	2) \ $\varsigma'+\tau$	3) | $\varsigma'-\sigma$	4) / $\varsigma'-\tau$	$\dot{\tau}'$
−6,0		+0,0001	+0,0001	+0,0256	+0,0257	+0,0257	+0,0255	+0,0255	+0,0088
−5,0	−250	+0,0003	+0,0003	+0,0358	+0,0361	+0,0361	+0,0355	+0,0355	+0,0148
−4,0	−200	+0,0005	+0,0007	+0,0519	+0,0524	+0,0526	+0,0514	+0,0512	+0,0277
−3,0	−150	+0,0007	+0,0024	+0,0800	+0,0807	+0,0824	+0,0793	+0,0776	+0,0600
−2,4	−120	−0,0001	+0,0054	+0,1041	+0,1040	+0,1095	+0,1042	+0,0987	+0,1050
−1,8	−90	−0,0086	+0,0125	+0,1246	+0,1160	+0,1371	+0,1332	+0,1121	+0,2002
−1,4	−70	−0,0225	+0,0175	+0,1096	+0,0871	+0,1271	+0,1321	+0,0921	+0,3196
−1,2	−60	−0,0376	+0,0149	+0,0739	+0,0363	+0,0888	+0,1115	+0,0590	+0,4031
−1,0	−50	−0,0625	0	0	−0,0625	0	+0,0625	0	+0,5000
−0,9	−45	−0,0747	−0,0158	−0,0580	−0,1327	−0,0738	+0,0167	−0,0422	+0,5494
−0,8	−40	−0,0842	−0,0399	−0,1339	−0,2181	−0,1738	−0,0497	−0,0940	+0,5949
−0,7	−35	−0,0862	−0,0724	−0,2297	−0,3159	−0,3021	−0,1435	−0,1573	+0,6306
−0,6	−30	−0,0754	−0,1123	−0,3460	−0,4214	−0,4583	−0,2706	−0,2337	+0,6488
−0,5	−25	−0,0448	−0,1536	−0,4800	−0,5248	−0,6336	−0,4352	−0,3264	+0,6400
−0,4	−20	+0,0092	−0,1856	−0,6243	−0,6151	−0,8099	−0,6335	−0,4387	+0,5945
−0,3	−15	+0,0829	−0,1934	−0,7659	−0,6830	−0,9593	−0,8488	−0,5725	+0,5050
−0,2	−10	+0,1611	−0,1679	−0,8876	−0,7265	−1,0555	−1,0487	−0,7197	+0,3784
−0,1	−5	+0,2256	−0,0951	−0,9705	−0,7449	−1,0656	−1,1961	−0,8754	+0,1961
0	0	+0,2500	0	−1,0000	−0,7500	−1,0000	−1,2500	−1,0000	0
+0,1	+5	+0,2256	+0,0951	−0,9705	−0,7449	−0,8754	−1,1961	−1,0656	−0,1961
+0,2	+10	+0,1611	+0,1679	−0,8876	−0,7265	−0,7197	−1,0487	−1,0555	−0,3784
+0,3	+15	+0,0829	+0,1934	−0,7659	−0,6830	−0,5725	−0,8488	−0,9593	−0,5050
+0,4	+20	+0,0092	+0,1856	−0,6243	−0,6151	−0,4387	−0,6335	−0,8099	−0,5945
+0,5	+25	−0,0448	+0,1536	−0,4800	−0,5248	−0,3264	−0,4352	−0,6336	−0,6400
+0,6	+30	−0,0754	+0,1123	−0,3460	−0,4214	−0,2337	−0,2706	−0,4583	−0,6488
+0,7	+35	−0,0862	+0,0724	−0,2297	−0,3159	−0,1573	−0,1435	−0,3021	−0,6306
+0,8	+40	−0,0842	+0,0399	−0,1339	−0,2181	−0,0940	−0,0497	−0,1738	−0,5949
+0,9	+45	−0,0747	+0,0158	−0,0580	−0,1327	−0,0422	+0,0167	−0,0738	−0,5494
+1,0	+50	−0,0625	0	0	−0,0625	0	+0,0625	0	−0,5000
+1,2	+60	−0,0376	−0,0149	+0,0739	+0,0363	+0,0590	+0,1115	+0,0888	−0,4031
+1,4	+70	−0,0225	−0,0175	+0,1096	+0,0871	+0,0921	+0,1321	+0,1271	−0,3196
+1,8	+90	−0,0086	−0,0125	+0,1246	+0,1160	+0,1121	+0,1332	+0,1371	−0,2002
+2,4	+120	−0,0001	−0,0054	+0,1041	+0,1040	+0,0987	+0,1042	+0,1095	−0,1050
+3,0	+150	+0,0007	−0,0024	+0,0800	+0,0807	+0,0776	+0,0793	+0,0824	−0,0600
+4,0	+200	+0,0005	−0,0007	+0,0519	+0,0524	+0,0512	+0,0514	+0,0526	−0,0277
+5,0	+250	+0,0003	−0,0003	+0,0358	+0,0361	+0,0355	+0,0355	+0,0361	−0,0148
+6,0		+0,0001	−0,0001	+0,0256	+0,0257	+0,0255	+0,0255	+0,0257	−0,0088

1) — $T'+\tau$	2) \ $T'-\sigma$	3) | $T'-\tau$	4) / $T'+\sigma$
+0,0089	+0,0087	+0,0087	+0,0089
+0,0151	+0,0145	+0,0145	+0,0151
+0,0284	+0,0272	+0,0270	+0,0282
+0,0624	+0,0593	+0,0576	+0,0607
+0,1104	+0,1051	+0,0996	+0,1049
+0,2127	+0,2088	+0,1877	+0,1916
+0,3371	+0,3421	+0,3021	+0,2971
+0,4180	+0,4407	+0,3882	+0,3665
+0,5000	+0,5625	+0,5000	+0,4375
+0,5336	+0,6241	+0,5652	+0,4747
+0,5550	+0,6791	+0,6348	+0,5107
+0,5582	+0,7168	+0,7030	+0,5444
+0,5365	+0,7242	+0,7611	+0,5734
+0,4864	+0,6848	+0,7936	+0,5952
+0,4089	+0,5853	+0,7801	+0,6037
+0,3116	+0,4221	+0,6984	+0,5879
+0,2105	+0,2173	+0,5463	+0,5395
+0,1010	−0,0295	+0,2912	+0,4217
0	−0,2500	0	+0,2500
−0,1010	−0,4217	−0,2912	+0,0295
−0,2105	−0,5395	−0,5463	−0,2173
−0,3116	−0,5879	−0,6984	−0,4221
−0,4089	−0,6037	−0,7801	−0,5853
−0,4864	−0,5952	−0,7936	−0,6848
−0,5365	−0,5734	−0,7611	−0,7242
−0,5582	−0,5444	−0,7030	−0,7168
−0,5550	−0,5107	−0,6348	−0,6791
−0,5336	−0,4747	−0,5652	−0,6241
−0,5000	−0,4375	−0,5000	−0,5625
−0,4180	−0,3665	−0,3882	−0,4407
−0,3371	−0,2971	−0,3021	−0,3421
−0,2127	−0,1916	−0,1877	−0,2088
−0,1104	−0,1049	−0,0996	−0,1051
−0,0624	−0,0607	−0,0576	−0,0593
−0,0284	−0,0282	−0,0270	−0,0272
−0,0151	−0,0151	−0,0145	−0,0145
−0,0089	−0,0089	−0,0087	−0,0087

Számtábla

Köpel merőleges oszlopos lapjához

a 4) oldalon 5 formula ebből következő 5'



x'		$\frac{1}{12}3(S'^2-T'^2)\,0{,}9426$	$\frac{1}{12}6S'T'\,\frac{1}{3}$	$-\sigma.0{,}9426+\tau\,\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}6S'T'\,0{,}9426$	$\frac{1}{12}3(S'^2-T'^2)\,\frac{1}{3}$	$-\tau.0{,}9426-\sigma\,\frac{1}{3}$
−6,0		+0,0001	+0,0000	−0,0001	+0,0001	+0,0000	−0,0001
−5,0	−250	+0,0003	+0,0001	−0,0002	+0,0003	+0,0001	−0,0004
−4,0	−200	+0,0005	+0,0002	−0,0003	+0,0007	+0,0002	−0,0009
−3,0	−150	+0,0007	+0,0008	+0,0001	+0,0023	+ +0,0002	−0,0025
−2,4	−120	−0,0001	+0,0018	+0,0019	+0,0051	−0,0000	−0,0051
−1,8	−90	−0,0081	+0,0042	+0,0123	+0,0118	−0,0029	−0,0089
−1,4	−70	−0,0212	+0,0058	+0,0270	+0,0165	−0,0076	−0,0089
−1,2	−60	−0,0354	+0,0050	+0,0404	+0,0140	−0,0125	−0,0015
−1,0	−50	−0,0589	0	+0,0589	0	−0,0208	+0,0208
−0,9	−45	−0,0704	−0,0053	+0,0651	−0,0149	−0,0249	+0,0398
−0,8	−40	−0,0794	−0,0133	+0,0661	−0,0376	−0,0281	+0,0657
−0,7	−35	−0,0813	−0,0241	+0,0572	−0,0682	−0,0287	+0,0969
−0,6	−30	−0,0711	−0,0374	+0,0337	−0,1059	−0,0251	+0,1310
−0,5	−25	−0,0422	−0,0512	−0,0090	−0,1448	−0,0149	+0,1597
−0,4	−20	+0,0087	−0,0619	−0,0706	−0,1749	+0,0031	+0,1718
−0,3	−15	+0,0781	−0,0645	−0,1426	−0,1823	+0,0276	+0,1547
−0,2	−10	+0,1519	−0,0560	−0,2079	−0,1583	+0,0537	+0,1046
−0,1	−5	+0,2127	−0,0317	−0,2444	−0,0896	+0,0752	+0,0144
0	0	+0,2357	0	−0,2357	0	+0,0833	−0,0833
+0,1	+5	+0,2127	+0,0317	−0,1810	+0,0896	+0,0752	−0,1648
+0,2	+10	+0,1519	+0,0560	−0,0959	+0,1583	+0,0537	−0,2120
+0,3	+15	+0,0781	+0,0645	−0,0136	+0,1823	+0,0276	−0,2099
+0,4	+20	+0,0087	+0,0619	+0,0532	+0,1749	+0,0031	−0,1780
+0,5	+25	−0,0422	+0,0512	+0,0934	+0,1448	−0,0149	−0,1299
+0,6	+30	−0,0711	+0,0374	+0,1085	+0,1059	−0,0251	−0,0808
+0,7	+35	−0,0813	+0,0241	+0,1054	+0,0682	−0,0287	−0,0395
+0,8	+40	−0,0794	+0,0133	+0,0927	+0,0376	−0,0281	−0,0095
+0,9	+45	−0,0704	+0,0053	+0,0757	+0,0149	−0,0249	+0,0100
+1,0	+50	−0,0589	0	+0,0589	0	−0,0208	+0,0208
+1,2	+60	−0,0354	−0,0050	+0,0304	−0,0140	−0,0125	+0,0265
+1,4	+70	−0,0212	−0,0058	+0,0154	−0,0165	−0,0076	+0,0241
+1,8	+90	−0,0081	−0,0042	+0,0039	−0,0118	−0,0029	+0,0147
+2,4	+120	−0,0001	−0,0018	−0,0017	−0,0051	−0,0000	+0,0051
+3,0	+150	+0,0007	−0,0008	−0,0015	−0,0023	+0,0002	+0,0025
+4,0	+200	+0,0005	−0,0002	−0,0007	−0,0007	+0,0002	+0,0005
+5,0	+250	+0,0003	−0,0001	−0,0004	−0,0003	+0,0001	+0,0002
+6,0	+300	+0,0001	−0,0000	−0,0001	−0,0001	+0,0000	+0,0001

3) $\frac{1}{2\sigma f}\frac{c^2}{Q}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ = $S' - \sigma . 0{,}9926 + \frac{1}{3}\tau$	5) $\frac{1}{2\sigma f}\frac{c^2}{Q}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ $T' - \tau . 0{,}9926 - \sigma\frac{1}{3}$	5' $S' - \sigma . 0{,}9926 - \frac{1}{3}\tau$	5'') $T' - \tau . 0{,}9926 + \sigma\frac{1}{3}$
+0,0255	+0,0087	+0,0255	+0,0087
+0,0356	+0,0144	+0,0354	+0,0146
+0,0516	+0,0268	+0,0512	+0,0272
+0,0801	+0,0575	+0,0785	+0,0579
+0,1060	+0,0999	+0,1024	+0,0999
+0,1369	+0,1913	+0,1285	+0,1855
+0,1366	+0,3107	+0,1250	+0,2955
+0,1143	+0,4016	+0,1041	+0,3766
+0,0589	+0,5208	+0,0589	+0,4792
+0,0071	+0,5892	+0,0177	+0,5394
−0,0678	+0,6606	−0,0412	+0,6044
−0,1725	+0,7275	−0,1243	+0,6701
−0,3123	+0,7798	−0,2375	+0,7296
−0,4890	+0,7997	−0,3866	+0,7699
−0,6949	+0,7663	−0,5711	+0,7725
−0,9085	+0,6597	−0,7795	+0,7149
−1,0955	+0,4830	−0,9835	+0,5904
−1,2149	+0,2105	−1,1515	+0,3609
−1,2357	−0,0833	−1,2357	+0,0833
−1,1515	−0,3609	−1,2149	−0,2105
−0,9835	−0,5904	−1,0955	−0,4830
−0,7795	−0,7149	−0,9085	−0,6597
−0,5711	−0,7725	−0,6949	−0,7663
−0,3866	−0,7699	−0,4890	−0,7997
−0,2375	−0,7296	−0,3123	−0,7798
−0,1243	−0,6701	−0,1725	−0,7275
−0,0412	−0,6044	−0,0678	−0,6606
+0,0177	−0,5394	+0,0071	−0,5892
+0,0589	−0,4792	+0,0589	−0,5208
+0,1041	−0,3766	+0,1143	−0,4016
+0,1250	−0,2955	+0,1366	−0,3107
+0,1285	−0,1855	+0,1369	−0,1913
+0,1024	−0,0999	+0,1060	−0,0999
+0,0785	−0,0579	+0,0801	−0,0575
+0,0512	−0,0272	+0,0516	−0,0268
+0,0354	−0,0146	+0,0356	−0,0144
+0,0255	−0,0087	+0,0255	−0,0087

Számtábla

Oszlopos tömeg (I) formulájához a 31 oldalon.

$\frac{x}{c}=x'$	$T'=-2\frac{x'}{(x'^2+1)^2}$	$\mathcal{S}'=\frac{x'^2-1}{(x'^2+1)^2}$	T'^2	$\mathcal{S}'^2$	$\mathcal{S}'T'$	$3(\mathcal{S}'^2-T'^2)$	$6\mathcal{S}'T'$
−9·0	+0·0027	+0·0119	+0·0000	+0·0001	+0·0000	+0·0003	+0·0000
−8·5	+0·0032	+0·0133	0·0000	0·0002	+0·0000	+0·0006	+0·0001
−8·0	+0·0038	+0·0149	0·0000	0·0002	+0·0001	+0·0006	+0·0005
−7·5	+0·0046	+0·0169	0·0000	0·0003	+0·0001	+0·0009	+0·0007
−7·0	+0·0056	+0·0192	0·0000	0·0004	+0·0001	+0·0012	+0·0009
−6·5	+0·0069	+0·0216	0·0000	0·0005	+0·0002	+0·0015	+0·0012
−6·0	+0·0088	+0·0256	0·0001	0·0007	+0·0002	+0·0018	+0·0015
−5·5	+0·0113	+0·0300	0·0001	0·0009	+0·0003	+0·0024	+0·0019
−5·0	+0·0148	+0·0358	0·0002	0·0013	+0·0005	+0·0033	+0·0030
−4·5	+0·0199	+0·0427	0·0004	0·0018	+0·0008	+0·0042	+0·0048
−4·0	+0·0277	+0·0519	0·0008	0·0027	+0·0014	+0·0057	+0·0084
−3·5	+0·0398	+0·0642	0·0016	0·0041	+0·0025	+0·0075	+0·0150
−3·0	+0·0600	+0·0800	0·0036	0·0064	+0·0048	+0·0084	+0·0288
−2·8	+0·0717	+0·0876	0·0051	0·0077	+0·0062	+0·0078	+0·0372
−2·6	+0·0914	+0·0957	0·0084	0·0091	+0·0087	+0·0021	+0·0536
−2·4	+0·1050	+0·1041	0·0110	0·0108	+0·0109	−0·0006	+0·0654
−2·2	+0·1290	+0·1126	0·0166	0·0127	+0·0145	−0·0117	+0·0870
−2·0	+0·1600	+0·1200	0·0256	0·0144	+0·0192	−0·0336	+0·1152
−1·8	+0·2002	+0·1246	0·0400	0·0155	+0·0249	−0·1035	+0·1494
−1·6	+0·2525	+0·1231	0·0638	0·0151	+0·0311	−0·1461	+0·1866
−1·4	+0·3196	+0·1096	0·1021	0·0120	+0·0349	−0·2703	+0·2094
−1·2	+0·4031	+0·0739	0·1624	0·0055	+0·0298	−0·4707	+0·1788
−1·0	+0·5000	0	0·2500	0	0	−0·7500	0
−0·9	+0·5494	−0·0580	0·3020	0·0034	−0·0319	−0·8958	−0·1914
−0·8	+0·5949	−0·1339	0·3545	0·0179	−0·0797	−1·0098	−0·4782
−0·7	+0·6306	−0·2297	0·3975	0·0527	−0·1447	−1·0344	−0·8682
−0·6	+0·6488	−0·3460	0·4212	0·1197	−0·2246	−0·9045	−1·3476
−0·5	+0·6400	−0·4800	0·4096	0·2304	−0·3072	−0·5376	−1·8432
−0·4	+0·5945	−0·6243	0·3534	0·3900	−0·3712	+0·1098	−2·2272
−0·3	+0·5050	−0·7659	0·2550	0·5868	−0·3868	+0·9954	−2·3208
−0·2	+0·3784	−0·8876	0·1432	0·7877	−0·3359	+1·9335	−2·0154
−0·1	+0·1961	−0·9705	0·0384	0·9409	−0·1901	+2·7075	−1·1406
0	0	−1·0000	0	1	0	+3·0000	0

$\frac{x}{c} = x'$	$T' = -2\frac{x'}{(x'^2+1)^2}$	$S' = \frac{x'^2-1}{(x'^2+1)^2}$	T'^2	S'^2	$S'T'$	$3(S'^2-T'^2)$	$6S'T'$
0	0	− 1,0000				+ 3,0000	0
+ 0,1	− 0,1961	− 0,9705				+ 2,7075	+ 1,1406
+ 0,2	− 0,3784	− 0,8876				+ 1,9335	+ 2,0154
+ 0,3	− 0,5050	− 0,7659				+ 0,9954	+ 2,3208
+ 0,4	− 0,5945	− 0,6243				+ 0,1098	+ 2,2272
+ 0,5	− 0,6400	− 0,4800				− 0,5376	+ 1,8432
+ 0,6	− 0,6488	− 0,3460				− 0,9045	+ 1,3476
+ 0,7	− 0,6306	− 0,2297				− 1,0344	+ 0,8682
+ 0,8	− 0,5949	− 0,1339				− 1,0098	+ 0,4782
+ 0,9	− 0,5494	− 0,0580				− 0,8958	+ 0,1914
+ 1,0	− 0,5000	0				− 0,7500	0
+ 1,2	− 0,4031	+ 0,0739				− 0,4707	− 0,1788
+ 1,4	− 0,3196	+ 0,1096				− 0,2703	− 0,2094
+ 1,6	− 0,2525	+ 0,1231				− 0,1461	− 0,1866
+ 1,8	− 0,2002	+ 0,1246				− 0,1035	− 0,1494
+ 2,0	− 0,1600	+ 0,1200				− 0,0336	− 0,1152
+ 2,2	− 0,1290	+ 0,1126				− 0,0117	− 0,0870
+ 2,4	− 0,1050	+ 0,1041				− 0,0006	− 0,0654
+ 2,6	− 0,0914	+ 0,0957				+ 0,0021	− 0,0536
+ 2,8	− 0,0717	+ 0,0876				+ 0,0078	− 0,0372
+ 3,0	− 0,0600	+ 0,0800				+ 0,0084	− 0,0288
+ 3,5	− 0,0398	+ 0,0642				+ 0,0075	− 0,0150
+ 4,0	− 0,0277	+ 0,0519				+ 0,0057	− 0,0084
+ 4,5	− 0,0199	+ 0,0427				+ 0,0042	− 0,0048
+ 5,0	− 0,0148	+ 0,0358				+ 0,0033	− 0,0030
+ 5,5	− 0,0113	+ 0,0300				+ 0,0024	− 0,0019
+ 6,0	− 0,0088	+ 0,0256				+ 0,0018	− 0,0015
+ 6,5	− 0,0069	+ 0,0216				+ 0,0015	− 0,0012
+ 7,0	− 0,0056	+ 0,0192				+ 0,0012	− 0,0009
+ 7,5	− 0,0046	+ 0,0169				+ 0,0009	− 0,0007
+ 8,0	− 0,0038	+ 0,0149				+ 0,0006	− 0,0005
+ 8,5	− 0,0032	+ 0,0133				+ 0,0006	− 0,0001
+ 9,0	− 0,0027	+ 0,0119				+ 0,0003	− 0,0000

tábla 6 oldalhoz

$s' = -\frac{x'}{x'^2+1}$ és $t' = \frac{1}{x'^2+1}$ -ra

$x' = \frac{x}{c}$	$s' = -\frac{x'}{1+x'^2}$	$t' = \frac{1}{1+x'^2}$
−9,0	+ 0,1098	+ 0,0122
−8,5	+ 0,1165	+ 0,0137
−8,0	+ 0,1232	+ 0,0154
−7,5	+ 0,1313	+ 0,0175
−7,0	+ 0,1400	+ 0,0200
−6,5	+ 0,1495	+ 0,0230
−6,0	+ 0,1620	+ 0,0270
−5,5	+ 0,1760	+ 0,0320
−5,0	+ 0,1925	+ 0,0385
−4,5	+ 0,2115	+ 0,0470
−4,0	+ 0,2352	+ 0,0588
−3,5	+ 0,2639	+ 0,0754
−3,0	+ 0,3000	+ 0,1000
−2,8	+ 0,3167	+ 0,1131
−2,6	+ 0,3351	+ 0,1289
−2,4	+ 0,3550	+ 0,1479
−2,2	+ 0,3766	+ 0,1712
−2,0	+ 0,4000	+ 0,2000
−1,8	+ 0,4246	+ 0,2359
−1,6	+ 0,4494	+ 0,2809
−1,4	+ 0,4729	+ 0,3378
−1,2	+ 0,4918	+ 0,4098
−1,0	+ 0,5000	+ 0,5000
−0,9	+ 0,4973	+ 0,5525
−0,8	+ 0,4878	+ 0,6098
−0,7	+ 0,4698	+ 0,6711
−0,6	+ 0,4412	+ 0,7353
−0,5	+ 0,4000	+ 0,8000
−0,4	+ 0,3448	+ 0,8621
−0,3	+ 0,2752	+ 0,9174
−0,2	+ 0,1923	+ 0,9615
−0,1	+ 0,0990	+ 0,9901
0	0	+ 1,000

$x' = \frac{x}{6}$	$s' = -\frac{x'}{1+x'^2}$	$t' = \frac{1}{1+x'^2}$
0	± 0,0	+ 1,0000
+ 0,1	- 0,0990	+ 0,9901
+ 0,2	- 0,1293	+ 0,9615
+ 0,3	- 0,2752	+ 0,9174
+ 0,4	- 0,3448	+ 0,8621
+ 0,5	- 0,4000	+ 0,8000
+ 0,6	- 0,4412	+ 0,7353
+ 0,7	- 0,4698	+ 0,6711
+ 0,8	- 0,4878	+ 0,6098
+ 0,9	- 0,4973	+ 0,5525
+ 1,0	- 0,5000	+ 0,5000
+ 1,2	- 0,4918	+ 0,4098
+ 1,4	- 0,4729	+ 0,3378
+ 1,6	- 0,4494	+ 0,2809
+ 1,8	- 0,4246	+ 0,2359
+ 2,0	- 0,4000	+ 0,2000
+ 2,2	- 0,3766	+ 0,1712
+ 2,4	- 0,3550	+ 0,1479
+ 2,6	- 0,3351	+ 0,1289
+ 2,8	- 0,3167	+ 0,1131
+ 3,0	- 0,3000	+ 0,1000
+ 3,5	- 0,2639	+ 0,0754
+ 4,0	- 0,2352	+ 0,0588
+ 4,5	- 0,2115	+ 0,0470
+ 5,0	- 0,1925	+ 0,0385
+ 5,5	- 0,1760	+ 0,0320
+ 6,0	- 0,1620	+ 0,0270
+ 6,5	- 0,1495	+ 0,0230
+ 7,0	- 0,1400	+ 0,0200
+ 7,5	- 0,1313	+ 0,0175
+ 8,0	- 0,1232	+ 0,0154
+ 8,5	- 0,1165	+ 0,0137
+ 9,0	- 0,1098	+ 0,0122

az konstrukcziói [illegible] [illegible].

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2 f \sigma dq \frac{a-x}{(a-x)^2+(c-z)^2} = 2 f \sigma dq\, s$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2 f \sigma dq \frac{c-z}{(a-x)^2+(c-z)^2} = 2 f \sigma dq\, t$$

ha $a=0 \quad z=0$

$$s = -\frac{x}{x^2+c^2} \qquad t = +\frac{c}{x^2+c^2}$$

téve $\frac{x}{c} = x'$

$$s = -\frac{1}{c}\frac{x'}{1+x'^2} \qquad t = +\frac{1}{c}\frac{1}{1+x'^2}$$

$$s' = c\,s \qquad t' = c\,t$$

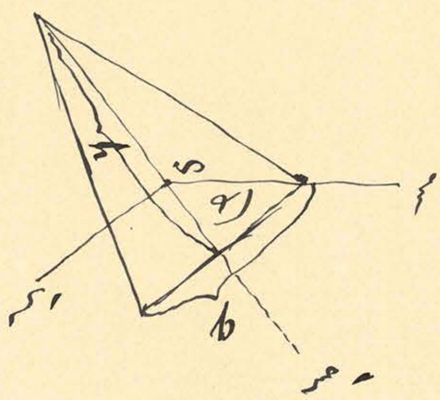
$$s' = -\frac{x'}{1+x'^2} \qquad t' = \frac{1}{1+x'^2}$$

ehhez tábla.

Egyenszárú háromszöges oszlop.

$$\int \xi''^2 dq = \frac{1}{18} Q h^2$$

$$\int \xi'^2 dq = \frac{1}{24} Q b^2$$

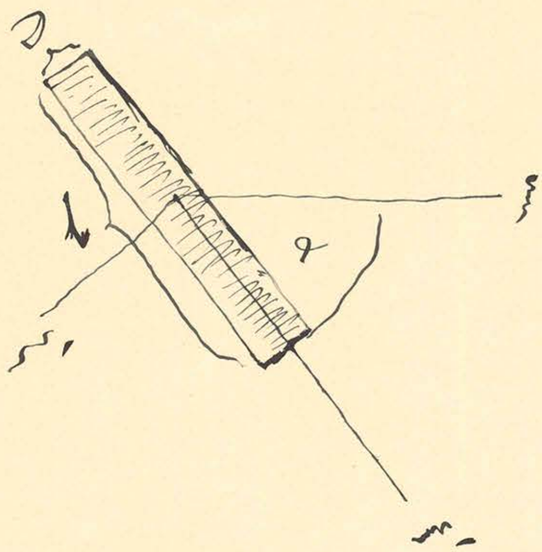


$$\int (\xi''^2 - \xi'^2) dq = \frac{1}{72} Q (4h^2 - 3b^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f \left\{ \frac{Q}{c^2} S' + \frac{Q}{c^2} \frac{4h^2 - 3b^2}{72 c^2} \left(3(S'^2 - T'^2) \cos 2\alpha + 6 S'T' \sin 2\alpha \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\sigma f \left\{ \frac{Q}{c^2} T' + \frac{Q}{c^2} \frac{4h^2 - 3b^2}{72 c^2} \left(6 S'T' \cos 2\alpha - 3(S'^2 - T'^2) \sin 2\alpha \right) \right\}$$

Parallelepipedikus oszlop.



$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \xi'^2 d\xi' d\zeta' = Q\frac{L^2}{12}$$

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \zeta'^2 d\xi' d\zeta' = Q\frac{D^2}{12}$$

Lesz

$$\int(\xi'^2-\zeta'^2)\,dq = \frac{1}{12}Q(L^2-D^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}S' + \frac{Q}{c^2}\frac{L^2-D^2}{c^2}\cdot\frac{1}{12}\left(3(S'^2-T'^2)\cos 2\alpha + 6S'T'\sin 2\alpha\right)\right.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}T' + \frac{Q}{c^2}\cdot\frac{L^2-D^2}{c^2}\,\frac{1}{12}\left(6S'T'\cos 2\alpha - 3(S'^2-T'^2)\sin 2\alpha\right)\right.$$

tegyük $\frac{L^2-D^2}{c^2}=1$

$$\alpha = 0 - \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{S' + \frac{1}{12}\cdot 3(S'^2-T'^2)\right\} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{T' + \frac{1}{12}\cdot 6S'T'\right\}\end{cases} \qquad 1)$$

$$\alpha = 45^0 \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{S' + \frac{1}{12}\,6S'T'\right\} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{T' - \frac{1}{12}\,3(S'^2-T'^2)\right\}\end{cases} \qquad 2)$$

$$\alpha = 90^0 \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{S' - \frac{1}{12}\,3(S'^2-T'^2)\right\} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{T' - \frac{1}{12}\,6S'T'\right\}\end{cases} \qquad 3)$$

$$\alpha = 135^0 \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{S' - \frac{1}{12}6S'T'\right\} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{T' + \frac{1}{12}3(S'^2-T'^2)\right\}\end{cases} \qquad 4)$$

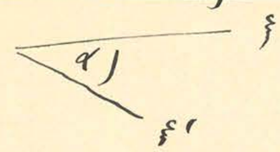
$$\alpha = 80^0 15' \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{S' - \frac{1}{12}3(S'^2-T'^2)\cdot 0{,}9426 + \frac{1}{12}6S'T'\cdot\frac{1}{3}\right\} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = 2\sigma f\frac{Q}{c^2}\left\{T' - \frac{1}{12}\,6S'T'\cdot 0{,}9426 - \frac{1}{12}3(S'^2-T'^2)\,\frac{1}{3}\right\}\end{cases} \qquad 5)$$

$$S' = \frac{x'^2 - 1}{(x'^2+1)^2} \qquad T' = -2\frac{x'}{(x'^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}S' + 3(S'^2 - T'^2)\frac{1}{c^4}\int(\xi^2-\zeta^2)\,dq + 12\,S'T'\frac{1}{c^4}\int\xi\zeta\,dq\right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}T' + 6\,S'T'\frac{1}{c^4}\int(\xi^2-\zeta^2)\,dq - 6(S'^2-T'^2)\frac{1}{c^4}\int\xi\zeta\,dq\right\}$$

ξ' főtehetetlenségi tengelyre.



(I) Formula $\quad \measuredangle(\xi'\xi) = \alpha \qquad \int\xi'\zeta'\,dq = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}S' + 3(S'^2-T'^2)\cos 2\alpha\frac{1}{c^4}\int(\xi'^2-\zeta'^2)\,dq + 6\,S'T'\sin 2\alpha\frac{1}{c^4}\int(\xi'^2-\zeta'^2)\,dq\right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = 2\sigma f\left\{\frac{Q}{c^2}T' + 6\,S'T'\cos 2\alpha\frac{1}{c^4}\int(\xi'^2-\zeta'^2)\,dq - 3(S'^2-T'^2)\sin 2\alpha\frac{1}{c^4}\int(\xi'^2-\zeta'^2)\,dq\right\}$$

$$V = \alpha\frac{a_0-\xi}{r^3} + \alpha\frac{a}{r^3} + \beta\frac{b_0-\eta}{r^3} + \beta\frac{b}{r^3} + \gamma\frac{c_0-\zeta}{r^3} + \gamma\frac{c}{r^3}$$

$$r^2 = \underbrace{(a_0-\xi)^2 + (b_0-\eta)^2 + (c_0-\zeta)^2}_{r_0^2} + 2a(a_0-\xi) + 2b(b_0-\eta) + 2c(c_0-\zeta) + a^2+b^2+c^2$$

$$r^2 = r_0^2 + N \qquad N = 2a(a_0-\xi) + 2b(b_0-\eta) + 2c(c_0-\zeta) + a^2+b^2+c^2$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} - \frac{3}{2}\frac{N}{r_0^5} + \frac{15}{8}\frac{N^2}{r_0^7}.$$

$$V = \alpha\frac{a_0-\xi}{r_0^3} - \alpha\frac{3}{2}\frac{a_0-\xi}{r_0^5}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \alpha\frac{15}{8}\frac{(a_0-\xi)}{r_0^7}\int\left(4a^2(a_0-\xi)^2 + 4b^2(b_0-\eta)^2 + 4c^2(c_0-\zeta)^2\right)dq$$

$$-3\alpha\frac{(a_0-\xi)}{r_0^5}\int a^2\,dq - 3\alpha\frac{(b_0-\eta)}{r^5}\int ab\,dq - 3\alpha\frac{(c_0-\zeta)}{r^5}\int ac\,dq$$

$$+\beta\frac{b_0-\eta}{r_0^3} - \beta\frac{3}{2}\frac{b_0-\eta}{r_0^5}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \beta\frac{15}{8}\frac{(b_0-\eta)}{r_0^7}\int\left(4a^2(a_0-\xi)^2 + 4b^2(b_0-\eta)^2 + 4c^2(c_0-\zeta)^2\right)dq$$

$$-3\beta\frac{(a_0-\xi)}{r_0^5}\int ab\,dq - \beta 3\frac{(b_0-\eta)}{r_0^5}\int b^2\,dq - \beta 3\frac{(c_0-\zeta)}{r_0^5}\int bc\,dq$$

Mágneses potenciál

$$+\gamma\frac{c_0-\zeta}{r_0^3} - \gamma\frac{3}{2}\frac{(c_0-\zeta)}{r_0^5}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \gamma\frac{15}{8}\frac{(c_0-\zeta)}{r_0^7}\int\left(4a^2(a_0-\xi)^2 + 4b^2(b_0-\eta)^2 + 4c^2(c_0-\zeta)^2\right)dq$$

$$-3\gamma\frac{(a_0-\xi)}{r_0^5}\int ac\,dq - 3\gamma\frac{b_0-\eta}{r_0^5}\int bc\,dq - 3\gamma\frac{c_0-\zeta}{r_0^5}\int c^2\,dq$$

Jó

---

egyszerűsítés $b_0-\eta=0$ $c_0-\zeta=0$ akkor. akkor $r_0 = a_0-\xi$

$$\cancel{V = \alpha\frac{a_0-\xi}{r_0^3}} \qquad V = \alpha\frac{1}{(a_0-\xi)^2} - \frac{3}{2}\alpha\frac{1}{(a_0-\xi)^4}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \frac{15}{2}\alpha\frac{1}{(a-\xi)^4}\int a^2\,dq - 3\alpha\frac{1}{(a-\xi)^4}\int a^2\,dq$$

$$-3\beta\frac{1}{(a_0-\xi)^4}\int ab\,dq - 3\gamma\frac{1}{(a-\xi)^4}\int ac\,dq.$$

$a-\xi = r$

$d\xi = -dr.$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = +2\frac{\alpha}{r^3} - \frac{6}{\cancel{8}}\frac{\alpha}{r^5}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \frac{30}{\cancel{8}}\frac{\alpha}{r^5}\int a^2\,dq - 12\frac{\alpha}{r^5}\int a^2\,dq - 12\frac{\beta}{r^5}\int ab\,dq - 12\frac{\gamma}{r^5}\int ac\,dq$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +6\frac{\alpha}{r^4} - \frac{30}{\cancel{8}}\frac{\alpha}{r^6}\int(a^2+b^2+c^2)\,dq + \frac{150}{\cancel{8}}\frac{\alpha}{r^6}\int a^2\,dq - 60\frac{\alpha}{r^6}\int a^2\,dq - 60\frac{\beta}{r^6}\int ab\,dq - 60\frac{\gamma}{r^6}\int ac\,dq$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +6\frac{\alpha}{r^4} + 60\frac{\alpha}{r^6}\int a^2\,dq - 30\frac{\alpha}{r^6}\int(b^2+c^2)\,dq - 60\frac{\beta}{r^6}\int ab\,dq - 60\frac{\gamma}{r^6}\int ac\,dq$$

M tömeg potentiálja s ennek diff. hányadosai x, y, z = 0 pontban.

a, b, c a tömegközéppont összetevői:

$$U = f\frac{m}{r} - \frac{1}{2} f \frac{1}{r^3}\left\{\int(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dm\right\} + \frac{3}{2} f \frac{a^2}{r^5}\int\xi^2 dm + \frac{3}{2} f \frac{b^2}{r^5}\int\eta^2 dm + \frac{3}{2} f\frac{c^2}{r^5}\int\zeta^2 dm +$$

$$+ 3f\frac{ab}{r^5}\int\xi\eta\, dm + 3f\frac{bc}{r^5}\int\eta\zeta\, dm + 3f\frac{ca}{r^5}\int\zeta\xi\, dm$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = fm\frac{a}{r^3} - \frac{9}{2} f\frac{a}{r^5}\int\xi^2 dm - \frac{3}{2} f\frac{a}{r^5}\int\eta^2 dm - \frac{3}{2} f \frac{a}{r^5}\int\zeta^2 dm$$

$$+ \frac{15}{2} f\frac{a^3}{r^7}\int\xi^2 dm + \frac{15}{2} f\frac{ab^2}{r^7}\int\eta^2 dm + \frac{15}{2} f\frac{ac^2}{r^7}\int\zeta^2 dm$$

$$+ f\left(-3\frac{b}{r^5} + 15\frac{ba^2}{r^7}\right)\int\xi\eta\, dm + 15 f\frac{abc}{r^7}\int\eta\zeta\, dm + f\left(-3\frac{c}{r^5} + 15\frac{a^2c}{r^7}\right)\int\zeta\xi\, dm$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -f\frac{m}{r^3} + 3fm\frac{a^2}{r^5} + \frac{9}{2} f\frac{1}{r^5}\int\xi^2 d\tau - 6 f\frac{1}{r^5}\int\eta^2 d\tau - 6 f\frac{1}{r^5}\int\zeta^2 d\tau$$

$$-45 f\frac{a^2}{r^7}\int\xi^2 d\tau + \frac{15}{2} f\frac{c^2}{r^7}\int\eta^2 d\tau + \frac{15}{2} f\frac{b^2}{r^7}\int\zeta^2 d\tau$$

$$+ \frac{105}{2} f\frac{a^4}{r^7}\int\xi^2 d\tau + \frac{105}{2} f\frac{a^2b^2}{r^9}\int\eta^2 d\tau + \frac{105}{2} f\frac{a^2c^2}{r^9}\int\zeta^2 d\tau$$

$$+\left(-45\frac{ab}{r^7} + 105\frac{ba^3}{r^9}\right)\int\xi\eta\, dm + \left(-15\frac{bc}{r^7} + 105\frac{bca^2}{r^9}\right)\int\eta\zeta\, dm + \left(-45\frac{ac}{r^7} + 105\frac{ca^3}{r^9}\right)\int\zeta\xi\, dm$$

ha $b = 0$, $r = a$, $c = 0$, $\int\xi\eta\, dm = 0$, $\int\eta\zeta\, dm = 0$, $\int\zeta\xi\, dm = 0$.

$$U = f\frac{m}{a} + f\frac{1}{a^3}\left\{\int\xi^2 dm - \frac{1}{2}\int\eta^2 dm - \frac{1}{2}\int\zeta^2 dm\right\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f\frac{m}{a^2} + 3f\frac{1}{a^4}\left\{\int\xi^2 dm - \frac{1}{2}\int\eta^2 dm - \frac{1}{2}\int\zeta^2 dm\right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = +2f\frac{m}{a^3} + 12 f\frac{1}{a^5}\left\{\int\xi^2 dm - \frac{1}{2}\int\eta^2 dm - \frac{1}{2}\zeta^2 dm\right\}$$

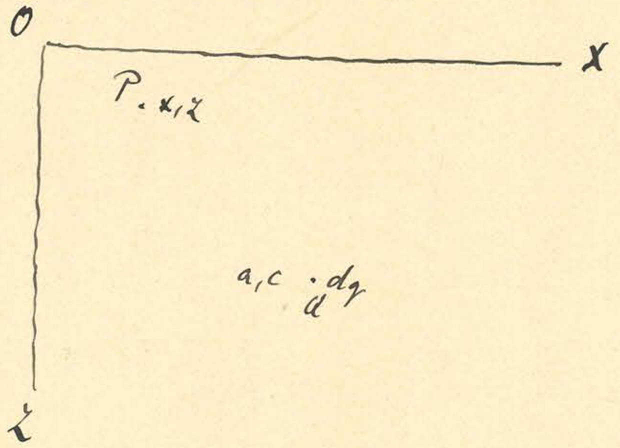
1

Vízszintes két irányban végtelen homogén oszlopos tömegre

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ és } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$

(Összeállítva régiekből 1904 Novemberben.)

Coordináta rendszer. Y tengely az oszlop tengelyének irányában vízszintes
XZ sík erre merőleges függőleges sík
X vízszintes
Z függőleges lefelé pozitív.



P az észlelés helye x, z
dq a keresztmetszet elem helye a, c

$$\frac{\partial U}{\partial x} = +2f\sigma dq \frac{a-x}{(a-x)^2+(c-z)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = +2f\sigma dq \frac{c-z}{(a-x)^2+(c-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2f\sigma dq \frac{(a-x)^2-(c-z)^2}{((a-x)^2+(c-z)^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 4f\sigma dq \frac{(c-z)(a-x)}{((a-x)^2+(c-z)^2)^2}$$

teszem

$$s = \frac{a-x}{(a-x)^2+(c-z)^2} = \frac{1}{2f\sigma dq}\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 2f\sigma dq . s$$

$$t = \frac{c-z}{(a-x)^2+(c-z)^2} = \frac{1}{2f\sigma dq}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 2f\sigma dq . t$$

e szerint $\quad \underline{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2f\sigma dq (s^2 - t^2)} \qquad \underline{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2f\sigma dq . 2st}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^3 U}{\partial z \partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial x} = 2f\sigma dq (2s(s^2-t^2) - 4st^2) = 2f\sigma dq (2s^3 - 6st^2)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} = 2f\sigma dq (4s^2 t + 2t(s^2-t^2)) = 2f\sigma dq (6s^2 t - 2t^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 2f\sigma dq \left(6(s^2-t^2)^2 - 24s^2t^2\right) = 2f\sigma dq (6s^4 + 6t^4 - 36s^2t^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \qquad = 2f\sigma dq (24s^3 t - 24st^3)$$

téve

$$s^2 - t^2 = \mathcal{S} \quad \text{és} \quad 2st = \mathcal{T}$$

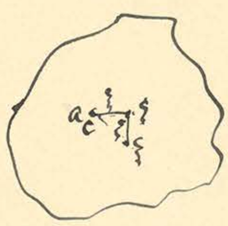
az az $$\mathcal{S} = \frac{(a-x)^2 - (c-z)^2}{((a-x)^2 + (c-z)^2)^2} \quad \text{és} \quad \mathcal{T} = 2\frac{(a-x)(c-z)}{((a-x)^2+(c-z)^2)^2}$$

lesz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2f\sigma\, dq \cdot 6(S^2 - T^2) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2f\sigma\, dq \cdot 12 \cdot S \cdot T$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2f\sigma\, dq\; 6(S^2 - T^2) \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2f\sigma\, dq\; 12\, S T$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2f\sigma\, dq\; 12\, S T \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2f\sigma\, dq\; 6(S^2 - T^2)$$



A keresztmetszetnek felvő a_0, c_0 ~~[illegible]~~ súlypontra mint legalkalmasabb kezdőpontjára vonatkoztatva.

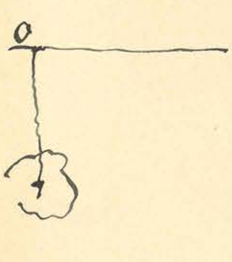
~~[illegible]~~ $$a = a_0 + \xi$$
$$c = c_0 + \zeta$$

$$f(a_0+\xi, c_0+\zeta) = f(a_0 c_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a_0 c_0}\xi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{a_0 c_0}\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \xi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 \zeta^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 \xi\zeta$$

az egész keresztmetszetre integrálva:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\sigma f\left\{Q\mathcal{S} + 3(S^2 - T^2)\int \xi^2 dq - 3(S^2 - T^2)\int \zeta^2 dq + 12\, S T \int \xi\zeta\, dq\right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\sigma f\left\{\mathcal{T} Q + 6\, S T \int \xi^2 dq - 6\, S T \int \zeta^2 dq - 6(S^2 - T^2)\int \xi\zeta\, dq\right\}$$



legyen $a_0 = 0 \qquad c_0 = c \qquad z = 0$ akkor:

$$S = \frac{x^2 - c^2}{(x^2 + c^2)^2} \qquad T = -2\frac{xc}{(x^2+c^2)^2}$$

tegyük: $\frac{x}{c} = x'$

$$S = \frac{1}{c^2} S' \qquad \text{~~[illegible]~~} \quad T = \frac{1}{c^2} T'$$