Ms 5098/1–5. Eötvös Loránd a kapillaritásra vonatkozó anyaggyűjtése

Seefehlner J. L. m. k. udvari papír és festőszer

Kapilláris

Kísérletek és egy-

szerű észlelések



kereskedéséből Kigyó utcza 4 sz. Pest.

V. I. h.

Homorú destillált vízfelület V.I.h.
Környezetben. Lebúrtés után megvárva bura alatt.
Theodolith corr. $x_2 - x_1$ $\frac{1}{500}$ millimeterekben.

| | |
|---|---|
| 40° 20′ } | 457 |
| 63° 30′ } | 457 |
| | 456 |
| | 455 |
| üvegérintkezés | 462 |

---

üvegérintkezés Aether A. I. h.
homorú felület bura alatt, a hygrometer állása 17,4 °C és 18,6 C.

Theod. $x_2 - x_1$

~~40° 20′~~
62° 30′ 7 - 250
40° 20′ - 75 | 78 ) 318
62° 30′ 0 - 22 ) 306

240
75
318

78
228
306

Szivattyúzás után hygr. 18,5 C és 3 °C.

62° 30′ 60 - 250 ) 331
40° 20′ - 141 | 145 - 0
62° 30′ 89 ) 309

190
141
331

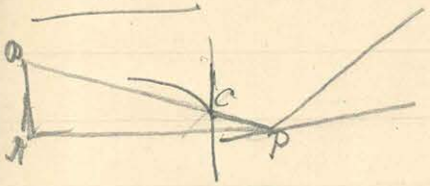
145
164
309

H.I.d.

merev érintkezés

## Higany felület H.I.d.

meghatározása az érintkezési vonal köre-
tében.




PA vízszintes
AB verticalis

PA = 533 centiméter
AB = 279,5 Centim.

Theod. 64°   $\cancel{x_2}$ $x_2 - x_0 = 369$

második mérés és beállítás

PA = 533 C.

AB = 271,5

Theod. 65° 30'   $x_2 - x_1 = 375$

$a = 2,363$



$a = 2,382$

V.II h.

Homorú destillált vízfelület VII h. üveg

feltöltve január 15 d.e 8 h. 30 m.

Theod.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 80° 30′ | 103 – 250 | } 242 | 147 / 95 / 242 |
| 62° 30′ | – 95 | } 465 | 155 / 310 / 465 |
| 40° 20′ | – 250 – 250 – 60 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 40° 20′ | 75 – 0 – 0 | } 450 | 75 / 250 / 125 / 450 |
| 62° 20′ | 125 | } 240 | 125 / 115 / 240 |
| 80° 30′ | 0 – 135 | | |

befejezve 10 órakor [illegible] [illegible].

Ugyanazon víz nyugodtan állott

Jan 16 ikán d.e 8 – 10 a következő mérések

| | | | |
|---|---|---|---|
| 80° 30′ | 202 – 250 | } 266 | 218 / 48 / 266 |
| 62° 30′ | – 218 – | } 526 | 32 / 244 / 250 / 526 |
| 40° 20′ | – 250 – 250 – 244 | | |

V.II.h.

40°20′ 234 − 0 } 572
62°30′ 0 − 222 }
80°30′ −0 − 207 } 265

80°30′ 221 − 250 } 263
62°30′ −234 } 508
40°20′ −250 −250 −242

40°20′ 246 − ~~0~~ } 506
62°30′ 0 − 0 − 240
80°30′ 0 − 226 } 264

80°30′ 212 − ~~250~~ } 264
62°30′ −250 − 226 } 510
40°20′ −251 − 250 − 236

234
28
250
512

222
43
265

29
234
263

16
250
242
508

~~234~~
~~250~~
~~9~~
~~48/2~~

246
16
250
506

240
24
264

14
236
24
250
510

V.III.d.

Domború vízfelület V III d. ívvel

Mérések 16ikán d.e. 10h 30m – 11h.
Közvetlenül feltöltés után.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 80° 30' | ~~205~~ | 205 | } 219 | 205 / 14 |
| 62° 30' | -~~250 – 2~~16 | 0 – 236 | | 236 / 186 / 422 |
| 40° 20' | -~~250 – 250~~ – 64 | 0 – 64 | } 422 | |
| 40° 20' | ~~61~~ | 61 | } 420 | 189 / 231 / 420 |
| 62° 30' | ~~250~~ – 231 | -250 – 231 | | |
| 80° 30' | -~~250~~ – | -250 – 200 | } 219 | |

ugyanazon felület d.u. 3 órakor

| | | | |
|---|---|---|---|
| 80° 30' | 76 | } 214 | 76 / 138 / 214 |
| 62° 30' | 0 – 112 | | 112 / 250 / 34 / 396 |
| 40° 20' | 0 – 0 – 216 | } 396 | |
| 40° 20' | 200 | } 416 | 134 / 82 / 216 |
| 62° 30' | ~~250~~ 250 – 116 | | |
| 80° 30' | -250 – 82 | } 216 | |

V III d. | V IV d.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 80° 30' | 88 | 208 | |
| 62° 30' | -0-130 | | 130<br>250<br>13<br>393 |
| | | 393 | |
| 40° 20' | 0-0-237 | | |
| 40° 20' | 218 - 250 | | 32<br>250<br>135<br>417 |
| | | 417 | |
| 62° 30' | -250 - 135 | | |
| | | 221 | |
| 80° 30' | -250-106 | | 115<br>106 |

Dombori vízfelület V.IV.d

Az előbbi magasabbra ívelve ível

Jan. 16 d.u. 3h.30 m.

lemérve 3h.27 m – 3h.55 m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 80° 30' | 164 | | 164<br>58<br>222 |
| | | 222 | |
| 62° 30' | -200-192 | | |
| | | 427 | 192<br>235<br>427 |
| 40° 20' | 0-15 | | |
| 40° 20' | 248- | | 183<br>250 |
| | | 433 | |
| 62° 30' | -250-250-181 | | |
| | | 224 | 69<br>155<br>224 |
| 80° 30' | -250-155 | | |

Capillaritás

Fölg

Unduloid és Nodoid

| $\alpha^\circ$ | $\frac{r}{h}=\frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos^2\alpha)\mathfrak{F}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\mathfrak{E}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ | $\frac{a}{h}=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{2}}$ | $\frac{r}{a}=\frac{\frac{r}{h}}{\frac{a}{h}}$ | $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2}}{tg\,\alpha}$ | $\frac{2hr}{a^2}$ | Laplace - Poisson $\frac{2hr}{a^2}\left(1+(1-\frac{\pi}{4})\frac{r}{h}\right)$ | Volkmann $\frac{2hr}{a^2}\left(1+0{,}2146\frac{r}{h}-0{,}052\frac{r^2}{h^2}\right)$ $0{,}2146=1-\frac{\pi}{4}$ | Hagen $\frac{2hr}{a^2}\sqrt[3]{1+2\frac{r^2}{a^2}}$ | $\frac{2hr}{a^2}\left(1+2(1-\frac{\pi}{4})\frac{r^2}{a^2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0, | 0, | 0, | ∞ | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, |
| 10 | 0,0077619 | 0,1246820 | 0,0622360 | 8,0204000 | 0,99833 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00091 | 1,00000 |
| 20 | 0,0328862 | 0,2573660 | 0,1277867 | 3,8855180 | 0,99303 | 1,00004 | 0,99998 | 1,00373 | 1,00000 |
| 30 | 0,0819190 | 0,4082480 | 0,2006645 | 2,4494920 | 0,98306 | 1,00031 | 0,99997 | 1,00874 | 1,00001$_8$ |
| 40 | 0,1700450 | 0,5933340 | 0,2865920 | 1,6853920 | 0,96605 | 1,00130 | 0,99986 | 1,01627 | 1,00001 |
| 50 | 0,3328830 | 0,8426960 | 0,3950210 | 1,1866670 | 0,93752 | 1,00449 | 0,99909 | 1,02637 | 1,00007 |
| 60 | 0,6659470 | 1,2247460 | 0,5437440 | 0,8164950 | 0,88793 | 1,01482 | 0,99429 | 1,03664 | 1,00060 |
| 70 | 1,5016210 | 1,9427590 | 0,7729320 | 0,5147320 | 0,79571 | 1,05212 | 0,95875 | 1,03408 | 0,99744 |
| 80 | 4,8328000 | 4,0102000 | 1,2051280 | 0,2493640 | 0,60103 | 1,22437 | 0,49441 | 0,94643 | 0,97570 |
| 81 | 5 7091440 | 4,4644970 | 1,2787880 | 0,2239894 | | | | | |
| 82 | 6,8303430 | 5.0313270 | 1,3575630 | 0,1987547 | | | | | |
| 83 | 8,3372660 | 5,7589230 | 1,4477130 | 0,1736436 | | | | | |
| 84 | 10,4462050 | 6,7276720 | 1,5527280 | 0,1486398 | | | | | |
| 85 | 13,5619050 | 8,0822670 | 1,6779890 | 0,1237277 | | | | | |
| 86 | 18,5304100 | 10,1121000 | 1,8324990 | 0,0988914$_2$ | | | | | |
| 87 | 27,4313300 | 13,4924000 | 2,0330900 | 0,0741158 | | | | | |
| 88 | 46,9271300 | 20,2488900 | 2,3175170 | 0,0493854$_2$ | | | | | |
| 89 | 113,6727800 | 40,5101200 | 2,8060350 | 0,0246852 | | | | | |
| 90 | ∞ | ∞ | ∞ | 0, | | | | | |

| $\alpha°$ | $\frac{r}{h}=\frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos^2\alpha)\mathfrak{F}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\mathfrak{E}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ | $\frac{a}{h}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{2}}$ | $\frac{r}{a}=\frac{\frac{r}{h}}{\frac{a}{h}}$ | $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2}}{tg\alpha}$ | $\frac{2hr}{a^2}$ | Laplace-Poisson $\frac{2hr}{a^2}\left(1+(1-\frac{\pi}{4})\frac{r}{h}\right)$ | Volkmann $\frac{2hr}{a^2}\left(1+0{,}2146\frac{r}{h}-0{,}052\frac{r^2}{h^2}\right)$ $0{,}2146=1-\frac{\pi}{4}$ | Hagen $\frac{2hr}{a^2}\sqrt[3]{1+2\frac{r^2}{a^2}}$ | $\frac{2hr}{a^2}\left(1+2(1-\frac{\pi}{4})\frac{r^2}{a^2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0, | 0, | 0, | $\infty$ | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, |
| 10 | 0,0077619 | 0,1246820 | 0,0622360 | 8,0204000 | 0,99833 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00091 | 1,00000 |
| 20 | 0,0328862 | 0,2573660 | 0,1277867 | 3,8855180 | 0,99303 | 1,00004 | 0,99998 | 1,00373 | 1,00000 |
| 30 | 0,0819190 | 0,4082480 | 0,2006645 | 2,4494920 | 0,98306 | 1,00031 | 0,99997 | 1,00874 | 1,00001$_8$ |
| 40 | 0,1700450 | 0,5933340 | 0,2865920 | 1,6853920 | 0,96605 | 1,00130 | 0,99986 | 1,01627 | 1,00001 |
| 50 | 0,3328830 | 0,8426960 | 0,3950210 | 1,1866670 | 0,93752 | 1,00449 | 0,99909 | 1,02637 | 1,00007 |
| 60 | 0,6659470 | 1,2247460 | 0,5437440 | 0,8164950 | 0,88793 | 1,01482 | 0,99429 | 1,03664 | 1,00060 |
| 70 | 1,5016210 | 1,9427590 | 0,7729320 | 0,5147320 | 0,79571 | 1,05212 | 0,95875 | 1,03408 | 0,99744 |
| 80 | 4,8328000 | 4,0102000 | 1,2051280 | 0,2493640 | 0,60103 | 1,22437 | 0,49441 | 0,94643 | 0,97570 |
| 81 | 57091440 | 4,4644970 | 1,2787880 | 0,2239894 | | | | | |
| 82 | 6,8303430 | 5,0313270 | 1,3575630 | 0,1987547 | | | | | |
| 83 | 8,3372660 | 5,7589230 | 1,4477130 | 0,1736436 | | | | | |
| 84 | 10,4462050 | 6,7276720 | 1,5527280 | 0,1486398 | | | | | |
| 85 | 13,5619050 | 8,0822670 | 1,6779890 | 0,1237277 | | | | | |
| 86 | 18,5304100 | 10,1121000 | 1,8324990 | 0,0988914$_2$ | | | | | |
| 87 | 27,4313300 | 13,4924000 | 2,0330900 | 0,0741158 | | | | | |
| 88 | 46,9271300 | 20,2488900 | 2,3175170 | 0,0493854$_2$ | | | | | |
| 89 | 113,6727800 | 40,5101200 | 2,8060350 | 0,0246852 | | | | | |
| 90 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0, | | | | | |

| $\alpha^\circ$ | $\frac{r}{h}=\frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos^2\alpha)\mathcal{F}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\mathcal{E}_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ | $\frac{a}{h}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$ | $\frac{r}{a}=\frac{\frac{r}{h}}{\frac{a}{h}}$ | $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\frac{2hr}{a^2}$ | Laplace - Poisson $\frac{2hr}{a^2}\left(1+(1-\frac{\pi}{4})\frac{r}{h}\right)$ | Volkmann $\frac{2hr}{a^2}\left(1+0{,}2146\frac{r}{h}-0{,}052\frac{r^2}{h^2}\right)$ $0{,}2146=1-\frac{\pi}{4}$ | Hagen $\frac{2hr}{a^2}\sqrt[3]{1+2\frac{r^2}{a^2}}$ | $\frac{2hr}{a^2}\left(1+2(1-\frac{\pi}{4})\frac{r^2}{a^2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0, | 0, | 0, | $\infty$ | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, |
| 10 | 0,0077619 | 0,1246820 | 0,0622360 | 8,0204000 | 0,99833 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00091 | 1,00000 |
| 20 | 0,0328862 | 0,2573660 | 0,1277867 | 3,8855180 | 0,99303 | 1,00004 | 0,99998 | 1,00373 | 1,00000 |
| 30 | 0,0819190 | 0,4082480 | 0,2006645 | 2,4494920 | 0,98306 | 1,00031 | 0,99997 | 1,00874 | $1{,}00001_8$ |
| 40 | 0,1700450 | 0,5933340 | 0,2865920 | 1,6853920 | 0,96605 | 1,00130 | 0,99986 | 1,01627 | 1,00001 |
| 50 | 0,3328830 | 0,8426960 | 0,3950210 | 1,1866670 | 0,93752 | 1,00449 | 0,99909 | 1,02637 | 1,00007 |
| 60 | 0,6659470 | 1,2247460 | 0,5437440 | 0,8164950 | 0,88793 | 1,01482 | 0,99429 | 1,03664 | 1,00060 |
| 70 | 1,5016210 | 1,9427590 | 0,7729320 | 0,5147320 | 0,79571 | 1,05212 | 0,95875 | 1,03408 | 0,99744 |
| 80 | 4,8328000 | 4,0102000 | 1,2051280 | 0,2493640 | 0,60103 | 1,22437 | 0,49441 | 0,94643 | 0,97570 |
| 81 | 5,7091440 | 4,4644970 | 1,2787880 | 0,2239894 | | | | | |
| 82 | 6,8303430 | 5,0313270 | 1,3575630 | 0,1987547 | | | | | |
| 83 | 8,3372660 | 5,7589230 | 1,4477130 | 0,1736436 | | | | | |
| 84 | 10,4462050 | 6,7276720 | 1,5527280 | 0,1486398 | | | | | |
| 85 | 13,5619050 | 8,0822670 | 1,6779890 | 0,1237277 | | | | | |
| 86 | 18,5304100 | 10,1121000 | 1,8324990 | $0{,}0988914_2$ | | | | | |
| 87 | 27,4313300 | 13,4924000 | 2,0330900 | 0,0741158 | | | | | |
| 88 | 46,9271300 | 20,2488900 | 2,3175170 | $0{,}0493854_2$ | | | | | |
| 89 | 113,6727800 | 40,5101200 | 2,8060350 | 0,0246852 | | | | | |
| 90 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0, | | | | | |

| $\alpha^\circ$ | $\frac{r}{h}=\frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos^2\alpha)F_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-E_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ | $\frac{a}{h}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{2}}$ | $\frac{r}{a}=\frac{\frac{r}{h}}{\frac{a}{h}}$ | $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2}}{tg\alpha}$ | $\frac{2hr}{a^2}$ | Laplace-Poisson $\frac{2hr}{a^2}\left(1+(1-\frac{\pi}{4})\frac{r}{h}\right)$ | Volkmann $\frac{2hr}{a^2}\left(1+0{,}2146\frac{r}{h}-0{,}052\frac{r^2}{h^2}\right)$ $0{,}2146=1-\frac{\pi}{4}$ | Hagen $\frac{2hr}{a^2}\sqrt[3]{1+2\frac{r^2}{a^2}}$ | $\frac{2hr}{a^2}\left(1+2(1-\frac{\pi}{4})\frac{r^2}{a^2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0, | 0, | 0, | $\infty$ | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, |
| 10 | 0,0077619 | 0,1246820 | 0,0622360 | 8,0204000 | 0,99833 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00091 | 1,00000 |
| 20 | 0,0328862 | 0,2573660 | 0,1277867 | 3,8855180 | 0,99303 | 1,00004 | 0,99998 | 1,00373 | 1,00000 |
| 30 | 0,0819190 | 0,4082480 | 0,2006645 | 2,4494920 | 0,98306 | 1,00031 | 0,99997 | 1,00874 | 1,00001$_8$ |
| 40 | 0,1700450 | 0,5933340 | 0,2865920 | 1,6853920 | 0,96605 | 1,00130 | 0,99986 | 1,01627 | 1,00001 |
| 50 | 0,3328830 | 0,8426960 | 0,3950210 | 1,1866670 | 0,93752 | 1,00449 | 0,99909 | 1,02637 | 1,00007 |
| 60 | 0,6659470 | 1,2247460 | 0,5437440 | 0,8164950 | 0,88793 | 1,01482 | 0,99429 | 1,03664 | 1,00060 |
| 70 | 1,5016210 | 1,9427590 | 0,7729320 | 0,5147320 | 0,79571 | 1,05212 | 0,95875 | 1,03408 | 0,99744 |
| 80 | 4,8328000 | 4,0102000 | 1,2051280 | 0,2493640 | 0,60103 | 1,22437 | 0,49441 | 0,94643 | 0,97570 |
| 81 | 57091440 | 4,4644970 | 1,2787880 | 0,2239894 | | | | | |
| 82 | 6,8303430 | 5,0313270 | 1,3575630 | 0,1987547 | | | | | |
| 83 | 8,3372660 | 5,7589230 | 1,4477130 | 0,1736436 | | | | | |
| 84 | 10,4462050 | 6,7227670 | 1,5527280 | 0,1486398 | | | | | |
| 85 | 13,5619050 | 8,0822670 | 1,6779890 | 0,1237277 | | | | | |
| 86 | 18,5304100 | 10,1121000 | 1,8324990 | 0,0988914$_2$ | | | | | |
| 87 | 27,4313300 | 13,4924000 | 2,0330900 | 0,0741158 | | | | | |
| 88 | 46,9271300 | 20,2488900 | 2,3175170 | 0,0493854$_2$ | | | | | |
| 89 | 113,6727800 | 40,5101200 | 2,8060350 | 0,0246852 | | | | | |
| 90 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0, | | | | | |

Capillaritás 5.

Az Undoloide és Nodoide folytatása.

$$z = -\alpha_2 \int \Delta(k,\vartheta)\, d\vartheta \mp \alpha_1 \int \frac{d\vartheta}{\Delta(k,\vartheta)}$$

$$u^2 = \alpha_1^2 \sin^2\vartheta + \alpha_2^2 \cos^2\vartheta.$$

$\Delta(k\vartheta) = \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}$

$\alpha_2 \gtrless \alpha_1$

mindkettő pos.

1) eset $\alpha_1 = 0$

$$z = -\alpha_2 \sin\vartheta$$

$$u^2 = \alpha_2^2 \cos^2\vartheta.$$

$$z^2 + u^2 = \alpha_2^2 \quad \text{kör.}$$

2 eset a felső jel.

$$z = -\alpha_2 F(k,\vartheta) - \alpha_1 E(k,\vartheta)$$

E az első fajú, F a 2ik fajú ellypticus integrál.

$$u^2 = \alpha_1^2 \sin^2\vartheta + \alpha_2^2 \cos^2\vartheta.$$

$\vartheta$ $-\infty$ től $+\infty$ ig. $\vartheta$ $0 \to \frac{\pi}{2}$.

$z=0$ $u=\pm\alpha_2$ $\quad z_0 = -\alpha_2 F' - \alpha_1 E' \quad u = \pm\alpha_1$

$\vartheta = \pi$ $\quad z = -\alpha_2 2F' - \alpha_1 2E' = 2z_0 \quad u \pm \alpha_2$

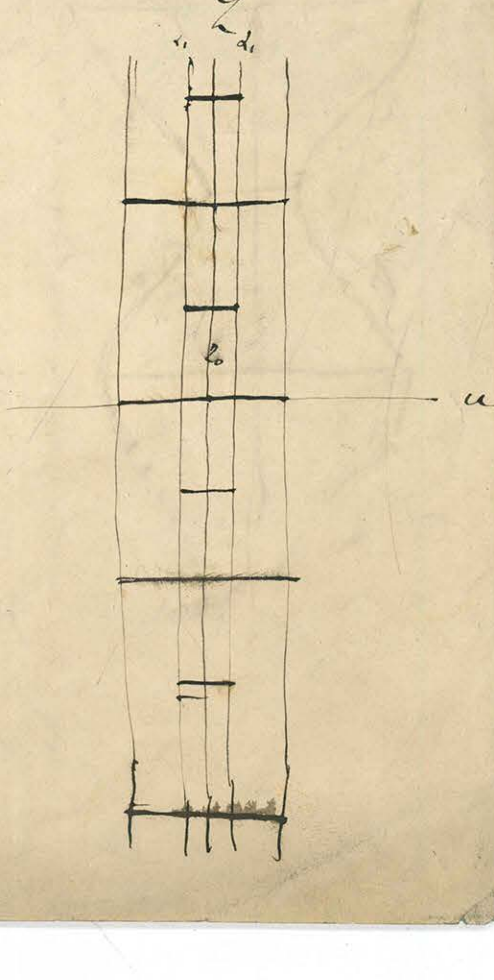
$z = \quad = 3z_0 \quad u \pm \alpha_1$



$\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ $\quad z_0 = \alpha_2 F' + \alpha_1 E' \quad u = \pm\alpha_1$

$\vartheta = \pi$ $\quad z \quad = 2z_0 \quad u = \pm\alpha_2$

etc.



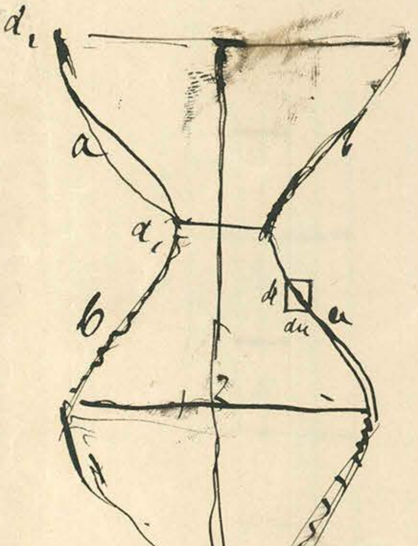
Lássuk most hogy lesz ez.

$$\frac{dz}{du} = \frac{u^2 \pm \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(u^2-\alpha_1)(\alpha_2-u^2)}}$$

Itt még a gyökjelnek ± ~~+~~ jele lehet, mint erről meggyőződhetünk, ha a képlet levezetésére visszagondolunk. – ~~A~~ A mi esetünkben a felső + jegy használandó s ha R jelenti a $\sqrt{(u^2-\alpha_1)(\alpha_2-u^2)}$ pos. absolut értékét, úgy.

$$\frac{dz}{du} = \frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{\pm R}$$

a) $$\frac{dz}{du} = \frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{+R}$$ dz és du növekedések egy előjelűek




b) $$\frac{dz}{du} = -\frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{R}$$

~~± du~~ Mind egyenletekből összetéve.

$\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ től $\vartheta = -\pi$ ig.

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{tg}\omega \qquad \omega = \sphericalangle(u, \text{érintő.})$$

Ez a részlet. $\frac{du}{dy}$, $\frac{d\,\ldots}{dt}$ ; $\frac{d^2z}{du^2} = \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{du}$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{R}\right)$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{2u}{R} + (u^2+\alpha_1\alpha_2)\frac{d\frac{1}{R}}{du}.$$

$$R = \sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)}$$

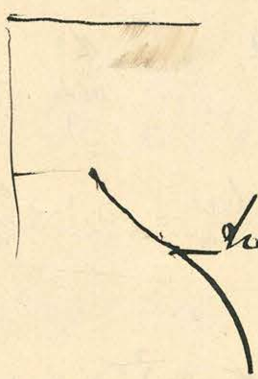
eredm

$$\frac{d^2z}{du} = \frac{u}{R^3}(\alpha_1+\alpha_2)^2(u^2-\alpha_1\alpha_2)$$

$$\frac{d^2\omega}{du} = \cos^2\omega\,\frac{u}{R^3}(\alpha_1+\alpha_2^2)(u^2-\alpha_1\alpha_2)$$

$\omega$ a szöglet melyet a $-\frac{\pi}{2}$ től $-\pi$ ig növekedő lapjain képez az $u$ tengelyével..

a szöglet eleinte fogy végre $u^2=\alpha_1\alpha_2$, azután nő



hajlási pont, inflexiós pont.



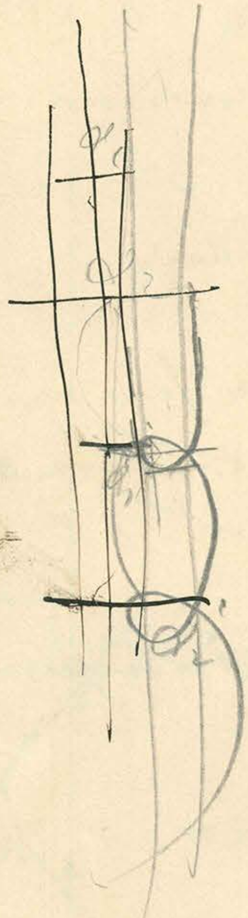
Unduloide.

## 2 eset.

$$z = -\alpha_2 \mathcal{F} + \alpha_1 \mathcal{E}.$$

$$u^2 = \alpha_1^2 \sin^2 \vartheta + \alpha_2^2 \cos^2 \vartheta .$$

ez csekély munka 2o



$$\frac{dr}{du} = \frac{u^2 - \alpha_1 \alpha_2}{R}. \qquad R = \sqrt{\ }$$

$$u = \alpha_2 \qquad \frac{dr}{du} = +\infty$$

$$u = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \qquad \frac{dr}{du} = 0.$$

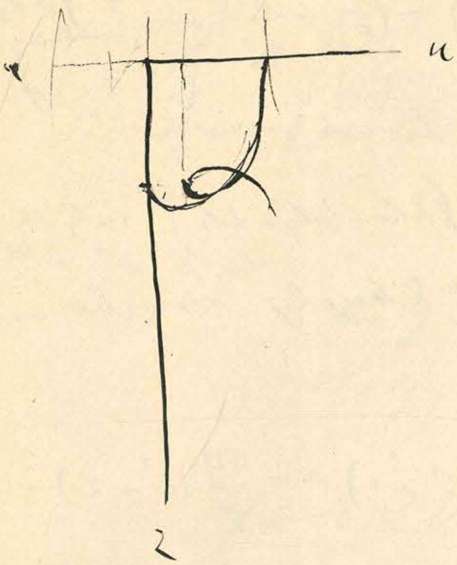
$$u = \alpha_1 \qquad \frac{dr}{du} = -\infty$$

$$\frac{dr}{du} = \operatorname{tg} \omega \qquad \frac{d\omega}{du} = \cos^2\omega \frac{d^2 r}{du^2}$$

$$\frac{d^2 r}{du^2} = \frac{d}{du} \frac{u^2 - \alpha_1 \alpha_2}{R} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 \alpha_2 + u^2)\, u}{R^3}$$

$\frac{d\omega}{du}$ = pozitív

$\vartheta = 0 \qquad z = 0 \qquad u = u_0$




$\frac{dz}{du} = \operatorname{tg} \omega$

Csepp. ~~talpa~~ horizontalis sikon alapon.

~~A~~ Tételünk volt

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right) = -\frac{\sigma\int_{xyz}^{x'y'z'} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{\gamma}$$

és $\alpha$ [illegible]

A nehézkedési erőre nézve $\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ csak a $g$ következménye. s egy ha a z tengely összeesik a $g$ irányával

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right) = -\frac{\sigma g}{\gamma}(z'-z)$$

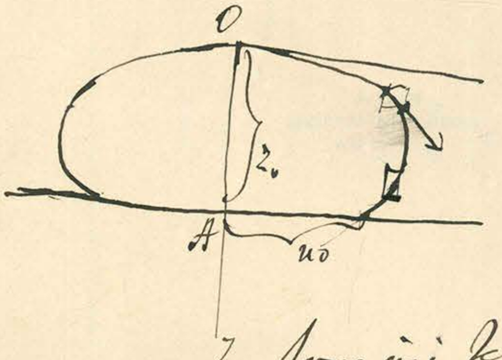
$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}+\frac{\sigma g}{\gamma}(z-z')$$

Csepp forgási felület.

A tetőpont O z lefelé pozitív.

akkor $z'=0$

$$\frac{1}{\varrho_1'}=\frac{1}{\varrho_2'}=\frac{1}{\varrho'}$$




tehát.

$$c=\frac{\sigma g}{\gamma}$$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{2}{\varrho'}+cz$$

z forgási felületekre nézve

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{dz}{du}}{u\sqrt{1+\frac{dz^2}{du}}}$$

és

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)u\,du = d\left\{\frac{u\frac{dz}{du}}{\left[1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

tehát tekintetbe véve hogy $\frac{dz}{du} = tg\,\omega$

$$d\left[\frac{u\,tg\,\omega}{\sqrt{1+tg^2\omega}}\right] = \frac{2}{\varrho'}u\,du + c\,z\,u\,du$$

$$\left[\frac{u\,tg\,\omega}{\sqrt{1+tg^2\omega}}\right]_0^{u_0} = \frac{2}{\varrho'}\int_0^{u_0} u\,du + c\int_0^{u_0} z\,u\,du$$

$(tg\,\omega)_{u_0} = tg\,\varphi$ $\qquad\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\frac{u_0\,tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{2}{\varrho'}\frac{u_0^2}{2} + c\,z_0\frac{u_0^2}{2} - \frac{c}{2}\int_0^{u_0} u^2\,dz$$

$$\pi\int_0^{u_0} u^2\,dz = V \qquad\qquad \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \sin\varphi$$

$$u_0\sin\varphi = \frac{u_0^2}{\varrho'} + c\,z_0\frac{u_0^2}{2} - \frac{c}{2\pi}V$$

$$z_0 = \left(\frac{c}{2\pi}V + u_0\sin\varphi - \frac{u_0^2}{\varrho'}\right)\frac{2}{c\,u_0^2}$$

$$z_0 = \frac{V}{\pi u_0^2} + \frac{2}{c\,u_0}\sin\varphi - \frac{2}{c\,\varrho'}$$

A mint $V$ nagyobbodik úgy inkább és inkább elhanyagolhatók az utóbbi tagok az elsőért

tehát $\lim z_0 = \frac{V}{\pi u_0^2}$

tehát ha nagy a térfogat akkor a felület a horizontálishoz közeledik.

Eggerletiner ...

$$C = \frac{2u_0\left(\sin\varphi - \frac{u_0}{\varrho'}\right)}{z_0 u_0^2 - \frac{V}{\pi}}$$

Quincke P. Ann. 130.

| | temperature | $\gamma$ |
|---|---|---|
| Pt. | 2000 °C | −169,04 |
| Au | 1200 | −100,22 |
| Hg | −40 | −58,79 |
| Ag | 1000 | 42,75 |
| Pb | 330 | 45,66 |
| Sulfur | 111 | 4,25 |

etc

__Nagy edény vagy sík lemez merőlegesen bemártva.__

Ez esetben henger felület magassági iránya az y tengely
A folyadék a lemeztől távol horizontális
Tengelyrendszer: x y sík a horizontális folyadék felület
Y tengely keresztmetszete c síknak a lemezfelülettel
Z a nehézkedési erő iránya.

Nehézkedési erőre nézve alapegyenlet

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}+\frac{\sigma g}{\gamma}(z-z')$$

ha z' egy pont a horizontális felületen úgy lesz.

téve: $c=\frac{\sigma g}{\gamma}$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=cz$$

és
$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

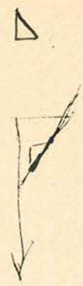
— azért mert mi ~~már~~ a $\varrho_1$ és $\varrho_2$ irányára nézve a szokásostól eltérünk. x és z függ. az y tól.
Ez esetben midőn $q=0$ $s=0$ és $t=0$

$p=\frac{dz}{dx}$ $q=\frac{dz}{dy}$ $r=\frac{d^2z}{dx^2}$
$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

tehát

$$-\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(1+\frac{dz}{dx}^2\right)^{\frac{3}{2}}}=cz$$

c mindig negatív.



$$-\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = c\,z$$

$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg}\vartheta$ $\vartheta$ a szöglet, az érintő és $z$ tengely között az érintőt a növekedő $x$-ek felé húzva. —

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dx}.$$

1) Ha $z$ positiv úgy $\frac{d^2z}{dx^2}$ pos. és úgy $\frac{d\vartheta}{dx}$ negativ.

2) Ha $z$ negativ akkor $\frac{d^2z}{dx^2}$ neg és úgy $\frac{d\vartheta}{dx}$ positiv.


Mindkét esetben ha $x$ véges úgy

$\frac{d\vartheta}{dx} = 0$ tehát $\vartheta = \mathrm{Const} = \frac{\pi}{2}$

általános lefolyás ebből látszik.

Integratio.

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{\frac{dz}{dx}\,d\frac{dz}{dx}}{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = c\,z\,dz$$

integrálva

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{c}{2}z^2 + C \quad +)$$

+) Legyen $1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = u$ akkor $2\frac{dz}{dx}\,d\frac{dz}{dx} = du$ és úgy

$$-\int \frac{1}{2}\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

tekintetbe véve, hogy $z=0$ esetben $\frac{dz}{dx}=0$ lesz $C=1$
tehát:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{c}{2}z^2+1$$

vagy tekintetbe véve hogy $\frac{dz}{dx} = \cot g\,\vartheta$

$$\sin\vartheta = \frac{c}{2}z^2+1$$

Ez első Integrálból azon legnagyobb nagyságot találhatjuk mely a folyadék emelkedik, illetőleg alászállás. Legn. v. legkisebb az a lemezzel érintkező tehát azon pontban melyre nézve $x=0$. — Ott egyszersmind $\vartheta=\varphi$ érintkezési szög. Azon nagyságot $z_0$ al jelelve lesz:

$$\sin\varphi = \frac{c}{2}z_0^2+1 \quad \text{tehát}$$

$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{c}(\sin\varphi-1)}$$

$$\text{vagy} \quad z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{-c}}\sqrt{(1-\sin\varphi)}$$

A hol a felső jel a ~~homo~~ domború az alsó jel a homorú felületre vonatkozik

$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{c}}\sqrt{(1-\sin\varphi)}$$

felső jel domború alsó jel homorú.

$$\cos\varphi = -\frac{\alpha}{\gamma}$$

<u>Ha α positiv</u> ~~akkor~~ akkor nagyobb vonzás az edény falaihoz mint a folyadékhoz — azért az edény fala megnedvesíttetik s azon folyadékréteg keletkezik. Ily esetben azután a folyadék magával emelkedik s az érintkezési felület egységének keletkezése által a szabad felület egység megsemmisíttetik tehát $-\gamma$ munka végeztetik így ez esetben

$\alpha = -\gamma$ és $\cos\varphi = 1$ $\underline{\varphi = 0}$

Ezen első esetnek midőn megfelelőleg tehát. $z_0 = -\sqrt{\frac{2}{c}}$

és pedig akár milyen legyen a másod edény fala. — Tehát p. víz se nézve $z_0$ mindig ugyanaz akár üveg akár más ~~[illegible]~~ anyagban foglaltatnék, melyek megnedvesít. —

A $\varphi$-nek ily módon csak egy ~~[illegible]~~ $\frac{\pi}{2}$ nél kisebb értéke lehet b. s. =

Vízre nézve $z_0 = 3{,}09$ millim;

Nem úgy lesz az akkor ha $\alpha$ negatív akkor $\cos\varphi$ is negatív. Szerencsére nincs is általában

$$\cancel{z_0 z_0} \quad z_0 = +\sqrt{\frac{2}{-c}}\sqrt{1-\sin\varphi}$$

további integratió.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{c}{2}z^2+1$$

$$1 = \left(\frac{c}{2}z^2+1\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{c}{2}z^2+1\right)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-\frac{c^2}{4}z^4 - cz^2}}{\left(\frac{c}{2}z^2+1\right)}$$

z ~~legnagyobb érté~~ke.

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{z\sqrt{-c\left(1+\frac{c}{4}z^2\right)}}{\frac{c}{2}z^2+1}$$

z legnagyobb értéke.
$\sqrt{-\frac{2}{c}}$ tehát
$z^2$-é $-\frac{2}{c}$

Ily módon a gyökjel mindig reális ha $z$ positív akkor $\frac{dz}{dx}$ negatív, ha $z$ negatív akkor $\frac{dz}{dx}$ positív tehát a két (elő)jel közül az alsó használandó és így

$z \cancel{\frac{dz}{dx}}$

Megfordítva a hányadost:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\frac{c}{2}z^2+1}{z\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}}$$

tehát

$$x = -\int\frac{\left(\frac{c}{2}z^2+1\right)dz}{z\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}} + C$$

$$x = -\frac{c}{2}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}} - \int\frac{dz}{z\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}} + C.$$

---

1) $\displaystyle\int\frac{z\,dz}{\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}}$

$$-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right) = u$$
$$-\frac{c^2}{2}z\,dz = du \quad \Big| \quad z\,dz = -\frac{2\,du}{c^2}$$

$$= -\int\frac{2}{c^2}\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{4}{c^2}\sqrt{u} = -\frac{4}{c^2}\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}$$

---

2) $\displaystyle\int\frac{dz}{z\sqrt{-c\left(1+\frac{cz^2}{4}\right)}}$

$z^2 = u \qquad 2z\,dz = du$

$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{du}{u}$ és így

$$= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{-c-\frac{c^2}{4}u}}$$

legyen most:

$\sqrt{-c-\frac{c^2}{4}u} = v$ tehát

$-c-\frac{c^2}{4}u = v^2$ úgy hogy

$$-\frac{c^2}{4}\,du = 2v\,dv$$

$$du = -\frac{8v\,dv}{c^2}$$

$$u = -\frac{4(v^2+c)}{c^2}$$

Ily módon integrálunk ken.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{c^2}\cdot\frac{c^2}{4}\int\frac{v\,dv}{(v^2+c)v} = \int\frac{dv}{c+v^2} = c\int\frac{dv}{1+\frac{v^2}{-c}} = \frac{c}{\sqrt{-c}}\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{c}{2\sqrt{-c}}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\sqrt{\frac{v^2}{-c}} = x^2 \qquad \cancel{2v\,dv}$$

$$\frac{v}{\sqrt{-c}} = x \qquad \frac{v}{\sqrt{-c}} = x$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{-c}}$$

$$= \frac{\sqrt{-c}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{-c}+v}{\sqrt{-c}-v}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-c}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{-c}+\sqrt{-c-\frac{c^2}{4}z^2}}{\sqrt{-c}-\sqrt{-c-\frac{c^2}{4}z^2}}\right)$$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{-c}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{-c}}\sqrt{4+z^2} - \frac{\sqrt{-c}}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{c}{4}z^2}}{1-\sqrt{1+\frac{c}{4}z^2}}\right)$$

# Capillaritás.

Nagy edénybe sík lemez merőlegesen bemártva.

Az alapegyenlet volt.

$$\gamma\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\right\} = \sigma\int_{xyz}^{x'y'z'}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

xy sík legyen a horizontális folyadékfelület – a z tengely az attól felfelé húzott merőleges, akkor $Y=0$ $X=0$ $Z=-g$ tehát

$$\cancel{\gamma}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right) = -\frac{\sigma}{\gamma}g\,(z'-z)$$

ha $x'y'z'$ a horizontális felület egy pontja úgy ott $\varrho_1'=\infty$ és $\varrho_2'=\infty$, úgy, hogy téve $\frac{\sigma g}{\gamma} = c$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = cz$$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}\qquad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

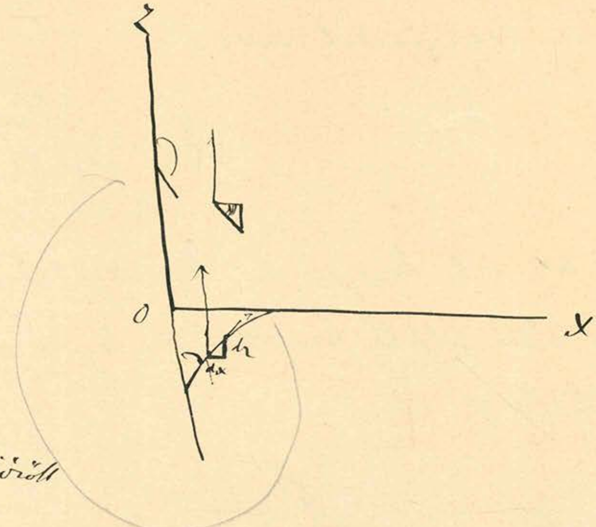


ez esetben ha y a horizontális síknak és a bemártott lemez felületének keresztmetszete úgy mind a z mind annak diff. hányadosai függetlenek az $y$-tól, úgy hogy:

$$q = 0 \quad s = 0 \quad t = 0$$

lesz tehát

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = cz$$




$$dx \, tg\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = dz \qquad \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

$$\frac{dz}{dx} = + \cot g \, \vartheta \qquad \text{differen}$$

$\vartheta$ a szöglet érintő és $z$ tengely között

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx}$$

1) Ha $z$ positiv akkor $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ tehát $\frac{d\vartheta}{dx}$ positiv

$\frac{1}{\varrho_1}$ és $\frac{1}{\varrho_2}$ a folyadékba be hurok sugarakat jelentik a neve

a felület domború ha $z$ negativ, homorú ha $z$ positiv.

Integratio.

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{\frac{dz}{dx}\, d\frac{dz}{dx}}{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = cz\,dz$$

Legyen $1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = u$ akkor $2\frac{dz}{dx}\, d\frac{dz}{dx} = du$

és

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{c}{2}z^2 + C$$

ha $z = 0$ akkor $\frac{dz}{dx} = 0$ tehát $C = 1$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{c}{2}z^2 + 1 \qquad \frac{dz}{dx} = \cot\vartheta$$

a határoló vonal egy pontjára nézve $\vartheta = \pi - \varphi$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\vartheta}} = \sin\vartheta = \frac{c}{2}z^2 + 1$$



$$-\sin\varphi = \frac{c}{2}\, \cancel{h} -$$

$$+\sin\varphi = \frac{c}{2}z_0^2 + 1 \qquad \sin\varphi = \frac{c}{2}z_0^2 + 1$$

$$z_0^2 = -\frac{2}{c}(1+\sin\varphi) \qquad z_0^2 = -\frac{2}{c}(1-\sin\varphi)$$

Ha domborún felület alkot $\varphi$ hegyes szög

ha homorún alk. $\varphi$ tompa szög

$z_0 = \pm\sqrt{-\frac{2}{c}(1-\sin\varphi)}$ kifejezésben + jel a hegyes szög

– jel a tompa szög esetében használandó.

Vízre nézve ~~és üvegre~~ Hagen (Über die Oberfläche der Flüssigkeiten, Abhandl. d. Berliner Akad. d. W. 1845 és 1846) azt találta hogy $z_0$ mindig ugyanaz akár sárgarez, üveg, pala, vagy falemezeket mártott be.

Vízre nézve

$$z_0 = 3{,}09 \text{ millimeter}$$

$$\sqrt{-\frac{2}{c}} = 3{,}09$$

$$-\frac{2}{c} = 3{,}09^2 = 9{,}55 \text{ m.m.}$$

$$-\frac{2\gamma}{\sigma g} = 9{,}55 \text{ mm.}$$

$$\sigma = 1 \qquad g = 9814{,}360 \text{ mm.}$$

2

Kiindulási alap.

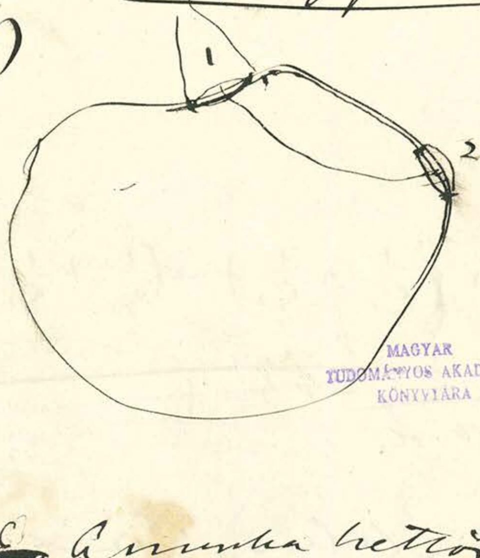
Felületi réteg létezik.

Szabad felületen az egység alakításához munka kell. Ez a munka független a görbülettől = $\not\alpha$ és negatív. — E munka független a külső behatoló erőktől

A közös felületre eső munka kell $\not\alpha$ mely nagy + vagy − lehet

alapegyenletek.

1)



Kettős homogén folyadék, külső hegy erőkkel,

Válasszunk ki egy $f_1$ és egy $f_2$ felületet úgy hogy $f_1 = f_2$ szorult el mindkettőt egyenlő módon $\delta f$ felületelemekre

E munka kettős egyenlő elemeire hat. $\sigma$ állandó

$$\sum \delta f \cdot \cancel{d}\sigma \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$\cancel{\delta f = \varrho_1 \varrho_2}$$

$$\delta f_1 = \varrho_1 \varrho_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\delta f_1' = (\varrho_1 + \delta n)(\varrho_2 + \delta n) \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - x^2)$$

A feltételi munka

$$= \sum \delta f\, \delta n\, \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) - \sum \delta \lambda\, \delta n\, \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)$$

$$\sum \delta f \left[ \sigma \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \alpha\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) - \alpha\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\right] \geqq 0$$

megfordítva

$$\sum \delta \lambda \left[ \qquad\qquad \right] \leqq 0$$

tehát

$$\sum \left( \qquad \right) = 0$$

$$\boxed{\sigma \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \alpha\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) - \left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\right\} = 0}$$

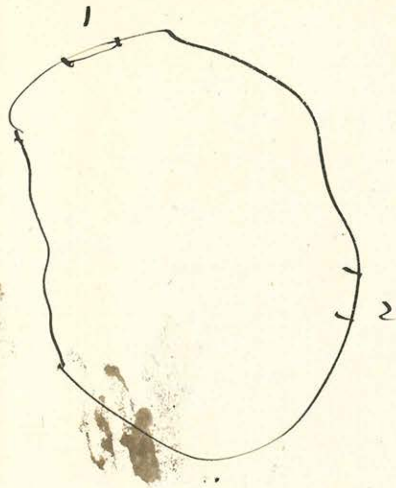
X Y Z a vagyis ~~csak~~ távolság erők

[illegible] X Y Z = 0 akkor gömb

főirányok

merőleges metszet

## Két alaptétel




1 nél tóljuk a $\delta f$-eket $\delta n$-el befelé akkor:

felület nagyobbodás $= \delta f \, \delta n \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$

ha $\varrho$ positiv midőn a felülettől a folyadékhoz kifelé, negativ ha befelé esik.

2 nél. lesz.

$$- \delta f \, \delta n \left(\frac{1}{\varrho_1'} + \frac{1}{\varrho_2'}\right)$$

tehát a végzett molecularis munka:

$$\delta f \, \delta n \, \gamma \left[\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - \left(\frac{1}{\varrho_1'} + \frac{1}{\varrho_2'}\right)\right]$$

A nagy távolban ható
erők irányában végzett
munka eleme :

$$\underline{\delta f\, dn\, \sigma}\left(X_{,} dx + Y dy + Z dz\right)$$

$$\delta f\, dn\, \sigma \left(X\right.$$

$$\delta f\, dn\, \sigma \int_{xyz}^{x'y'z'} \left(X dx + Y dy + Z dz\right)$$

$$\Sigma\, \delta t \cdot dn \left\{ \sigma\left[\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2'}\right)\right] + \sigma \int \left(X dx + Y dy + Z dz\right) \right\} \geqq 0$$

a megfordítottja is $\geqq 0$ és így $= 0$.

A $\delta f\, dn$-ek önkényesek ha a $\{\ \}$ nem null úgy lehetne választani úgy hogy $\Sigma$ ne lenne null tehát

I

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_2'}\right) = \frac{\sigma \int_{xyz}^{x'y'z'} \left(X dx + Y dy + Z dz\right)}{\gamma}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\sigma \int_{xyz}^{x'y'z'} \left(X \cdot dx + Y dy + Z dz\right)$$

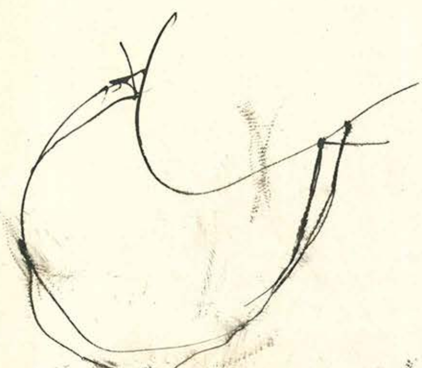
$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$p=\frac{dz}{dx}\quad q=\frac{dz}{dy}\quad r=\frac{d^2z}{dx^2}\quad s=\frac{d^2z}{dxdy}\quad t=\frac{d^2z}{dy^2}$$

---

~~Itt még~~

# II tétel.



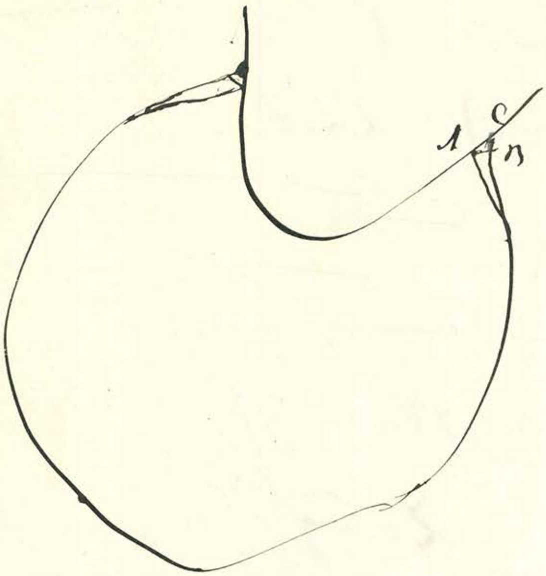
Érintkezési szöglet
Az érintkezési vonalra merőleges
síkban a [illegible]

ha konvex

a) fel.

$$\sum \delta n\, \delta f\, \gamma\left(\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\right) + \ldots$$

II tétel.




$\underline{\delta l \cos\varphi}$ –

Előttünk áll az I

I ha konvex

$\cancel{\delta n}$ $\quad \delta l\, \cancel{\sin}\varphi = \delta n$

$\delta l\, \cancel{\cos\varphi} = \delta a$

$\cancel{\delta u} \quad \cancel{\frac{\delta u\, \delta h}{\sin\varphi}} \cos\varphi$

$\gamma \frac{\delta n}{\sin\varphi} \cos\varphi\, \delta u + \frac{\delta n}{\sin\varphi}\, \delta u . \cancel{\alpha} + \frac{1}{2}\, \delta n\, \delta u \frac{\delta n}{\delta u} \cos(x,$

$\gamma \cos\varphi = -\alpha$

II ha domború $\quad \alpha = -\gamma\cos\varphi$

Akár konvex akárhogy

I Tétel

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right) = -\frac{\sigma\int_{xyz}^{x'y'z'}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)}{\gamma}$$ Eötvös.

$$\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)+\sigma\int_{xyz}^{x'y'z'}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) = \text{Const.}$$

$$\int_{xyz}^{x'y'z'} = gz.$$

$x'y'z'=0$ $\quad Z=-g$

$$\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)+\sigma g z = \text{Const.}$$ egységnyi nehézségi erőre reducált Eötvösben.

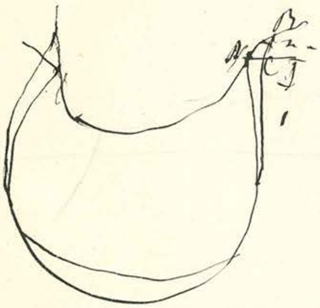
$$-2a\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)+z = \text{Const.}$$ Gauss.

$$-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)+gz = \text{Const.}$$

II tétel.

érintkezési szög.

I homorú. az érintk. szög $< \frac{\pi}{2}$.



I áll az 1ső tétel.

tehát az 1 rész munkája [illegible].

az I 2 része $= \Sigma \tfrac{1}{2}\, \delta n\, \delta l$

ha az f. felületre [illegible]

$$\frac{\Sigma \tfrac{1}{2}\, \delta n\, \delta l \cdot \delta n}{f}$$

úgy a [illegible] gyűrű

munkája ugyanazon [illegible]

rendű. Míg a felületek [illegible]

1ső rendűek.

Amde új felületek keletkeznek, melynek eleme. $Bl\, \delta n$ $\quad Bl = \delta l \cos\varphi$

$\Sigma\, \delta l\, \delta n \cos\varphi$

és új érintkezési felületek melynek eleme $\Sigma\, \delta l$. tehát munka $\Sigma\, \delta n\, \delta l(\alpha + \gamma\cos\varphi)$

$\cos\varphi = -\frac{x}{\gamma}$

<u>Dornborn</u>


hetstheruls in 't rubbad geluilet eleme:

$-\cancel{\delta b} \quad + \delta l \cos\varphi + \ldots$

Capillaritás látható egyensúlyi

Mozgási egyenlet az esetben alapelv
midőn látható mozgás nincs
és midőn ~~a belső elevenerő~~
~~o~~ hőmérséki egyensúly van.

Ha egy test látható egyensúlyban
van, úgy az annyit jelent hogy
$L_k = 0$ és hogy ha azt e
helyzetéből kimozdítjuk az Stabil.
abban vagy ~~megfogyna~~ visszatérni vagy
megmaradni vagy egyenletes ~~Neu~~ Neutral.
sebességgel mozogni fog.
~~Ha~~ A testre nézve van.

$$d\ L_k + L_b = U + C$$

Lökjük meg a testet úgy hogy
minden pontjai annak közöt-
[illegible] tetszőleges helyzetbe
juthatnának. ~~Akkor~~ a
lökési ~~alt~~ pillanatában

$$L_k + \Delta L_k + L_b + \Delta L_b = U + C'$$

~~ahol $C'$~~ =

Most a rendszer annak környezetében átmegy egy más helyzetbe.

$$L_k + \cancel{\Delta L_k} + \delta L_k + L_b + \cancel{\Delta L_b} + \delta L_b = U' + C'$$

tehát

$$\delta U = \left[\delta L_k - \Delta L_k\right] + \left[\delta L_b - \Delta L_b\right]$$

Egyensúly esetében $\delta L_k - \Delta L_k$ = negatív.

1) $\delta L_k - \Delta L_k$ = a látható eleven erő növekedése ~~az ala~~ a virtuális eltolódás alatt;

2) $[\delta L_b - \Delta L_b]$ a meleg szaporodása alatt.

Az egész folyamat alatt két dolog történik

1) a) látható Eleven erő munkává
és meleggé alakul.
a $\Delta L_b$ meleg átterjed s a
hőben annak egy része
munkává alakul. ~~$\Delta L$ ...~~
Ez a rész azonban $\Delta L_b$ ker
hez ... mert $\Delta L_b \frac{dT}{T}$
pedig $dT$ végtelen kicsiny
ez esetben.

$\delta U = \delta L_k - \Delta L_b$

egy esetben midőn

$\delta U_1' = \delta L_1 - \Delta L_b$

$\delta U_2 = m_1 - m$

$$\underbrace{\delta U_1}_{neg.} + \underbrace{\delta U_2}_{neg.} = \left[\text{negativ}\right]_1 + \left[\text{posit}\right]_2 - \Delta L_b$$

Az mindig positiv lesz,
de kisebb mint $\Delta L_b$. tehát

$\delta U$ mindig negativ

neg $\delta U$ mindig negativ ~~$\Delta L$~~ $(\delta L_k - \Delta L_k)$
posi $\delta U$ - - - ...

Molecularis erők

[illegible]

~~Feltételek~~
Szilárd testek folyadékok
Gázalakúak mozgékonyság.

Folyadékok összenyomha-
tóság, felületi réteg.

Folyadékok

1) Nagy mozgékonyság tehát
az előbbi alkalmazható.
2) Összenyomhatóság
3) Nyomás egyenlősége.

Molecularis erők hatásköre.

Quincke Pogg. Ann. 1869 [illegible]

Üveg – Ezüstön át vízre $\lambda =$ 0,0000542

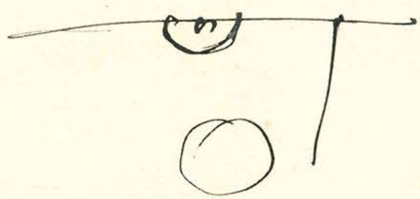
— Kénezüstön át Hg. $\lambda =$ 0,0000482 m.

— Jodezüstön Hg. $\lambda$ 0,0000590

— Collodiumon Hg $\lambda$ 0,0000797

[illegible] 0,00005 $\frac{1}{10}$ [illegible]

Hatási sphaera.



~~A + [illegible]~~

$A + f$

$A + p$

$A + dp_1 + dp_2 + dp_3 \ldots$

$A + \Sigma dp$

Wilhelmy Pogg. Ann. 18[illegible]

Sűrű réteg ~~hatású~~ tapadó. Verdichtungsschicht

~~Ezüst~~

Túlsúly. 1 □ Millim. Milligrammokban

| | Aethylalkohol $s = 0{,}793$ $t = 17^\circ 5$ | Amylalkohol $0{,}815$ $t = 15^\circ$ |
|---|---|---|
| Ezüst | 0,01512 | 0,01160 |
| Üveg | 0,01259 | 0,01242 |
| Aluminium | 0,00716 | 0,00657 |
| Zink | 0,00709 | 0,00786 |
| Platin | 0,00641 | 0,00449 |
| Réz | 0,00467 | 0,00405 |

Glycerinbe mártva [illegible]

Gyakorlatot egyszerre szükséges
minden.

& a i [illegible]

I. tétel:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right) = -\frac{\sigma\int_{xyz}^{x'y'z'}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)}{\gamma}$$

II. Az érintkezési szöglet $\varphi = \text{const}$ és pedig:

$$\cos\varphi = -\frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

~~Plateau olajat tett alcohol és víz keverékébe~~ ahol a ~~Newton féle törvény szerinti hatások, erők~~ $X, Y, Z = 0$ s így

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=C.$$

Plateau: „Mémoires de l'académie royale de Belgique XVI, XXIII, XXX, XXXI

Annak elmélete: Statique expérimentale et théorique des liquides, Plateau 1873

Beer Tractatus de theoria mathematica phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum. Bonn 1857



Einleitung in die math. Theorie der Elast. u. Capillar. 1869 tekintetbe veve, hogy

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hol.

$$p=\frac{dz}{dx}\quad q=\frac{dz}{dy}\quad r=\frac{d^2z}{dx^2}\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Kitűnik hogy $\underline{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}}=C.$ a felületek egy különös nemét fejezik ki, t. i. az állandó térfogat melletti <u>minimális</u> felületet, a superficies minimae areae -t állandó térfogat mellett. –

<u>Egy felületnek</u> melynek egyenlete $z=f(x,y)$ kiterjedése

$$F.=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

nnek minimumát ~~Ezt~~ keressük azon feltét mellett hogy

$$\mathfrak{U}=\iint z\,dx\,dy=\text{Const.}\quad\text{vagy}\quad\iint(z-\alpha)\,dx\,dy=0$$

a feladat a Variatió számítás körébe esik. –

Az arra tanít: ~~a max~~

~~E~~ hogy a maximum ker. absolut maximum kem.

$$\iint \left\{ \sqrt{1+p^2+q^2} + \lambda(z-\alpha) \right\} dx\,dy \cdot \text{nak.}$$

s hogy azután ~~tem~~ ha

$$\iint V\,dx\,dy$$

maximuma kerestetik, a hol

$$V = f(x\,y\,z \cdot p\,q)$$

akkor kell hogy minimum értékben legyen:

$$N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0$$

a hol $N = \frac{\partial V}{\partial z}$ $\quad P = \frac{\partial V}{\partial p}$ $\quad Q = \frac{\partial V}{\partial q}$

a mi értelmünkben.

$$V = \sqrt{1+p^2+q^2} + \lambda z - \lambda\alpha$$

tehát.

$$N = \lambda \qquad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

tehát. minimum lesz midőn.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\lambda$$

---

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-p\frac{p\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial q}{\partial x}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{\partial q}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-q\frac{p\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial q}{\partial y}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\lambda.$$

$$=\frac{r+t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{p^2r+pqs+pqs+q^2t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cancel{r+p^2t+q}$$

$$=\frac{\cancel{r}+t+\cancel{p^2r}+p^2t+q^2r+\cancel{q^2t}-\cancel{p^2r}-2pqs-\cancel{q^2t}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\lambda=\text{const.}$$

---

Végtelen térben. ~~Xot~~ egy cylinder szilárd testből rotatió felület. — a szilárd tengely legyen = a z tengely. az attól távolság X' $u=\sqrt{x^2+y^2}$

---

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{u}\cdot\frac{dz}{du}\qquad r=\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{x^2}{u^2}\frac{d^2z}{du^2}+\frac{y^2}{u^3}\frac{dz}{du}$$

$$s=\frac{d^2z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{u^2}\frac{d^2z}{du^2}-\frac{xy}{u^3}\cdot\frac{dz}{du}$$

$$q=\frac{dz}{dy}=\frac{y}{u}\frac{dz}{du}\qquad t=\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{y^2}{u^2}\frac{d^2z}{du^2}+\frac{x^2}{u^3}\frac{dz}{du}$$

lásd Laplace 20 lap.

így lesz:

$$u\frac{\frac{d^2r}{du^2}}{\left(1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{dr}{du}}{\left(1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=Cu$$

$$1)\quad \underbrace{d\left\{\frac{u\frac{dr}{du}}{\left[1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=Cu\,du}_{\text{bizonyítás kiszámítás által}}$$

$$\frac{\frac{dr}{du}}{\left[\quad\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{u\frac{d^2r}{du^2}}{\left[\quad\right]^{\frac{1}{2}}}-\frac{u\frac{dr}{du}}{\left[1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{dr}{du}\frac{d^2r}{du^2}$$

1) bal következtetés 2 láng Beer 162 lap.

$$u\left[1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]-u\Big\}\frac{d^2r}{du^2}$$

# Súlytalan folyadék.

$$\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)=\sigma\int_{xyz}^{x'y'z'}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

ha $X=0$ $Y=\sigma$ $Z=0$ akkor.

$$\underline{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=C.}$$ minimae vagy maximae areae

Maximal vagy Minimál felület állandó tér fogat mellett.

Plateau, Mémoires de l'académie royale de Belgique – azóta összegyűjtve. Statique expérimentale et théoriques des liquides 1873.

Beer Tractatus de theoria mathematica phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum. Bonn 1857.

Beer Einleitung in die math. theorie der Elast. u. Capill. 1869

A legegyszerűbb megoldás a gömb.

~~Egy minimál area vall~~ Más megoldások forgási felületek ha t. i. egy súlytérd teret mértünk be, mely forgási felület által határoltatik. Forgási felületekre nézve

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)u\,du=d.\frac{u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\frac{dz}{du}^2}}$$



ennek alapján ez esetben:

$$d\left\{\frac{u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\right\} = cudu$$

$$\frac{2u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}} = c\frac{u^2}{\cancel{2}} + c'$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2\left(4u^2-(cu^2+c')^2\right) = (cu^2+c')^2$$

$$dz = \frac{(cu^2+c')\,du}{\sqrt{4u^2-(cu^2+c')^2}}$$

$$dz = \frac{\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)du}{\sqrt{\frac{4u^2}{c^2}-\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)^2}}$$

$$-\frac{4u^2}{c^2}+\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)^2 = (u^2-\omega_1)(u^2-\omega_2) \qquad 1)$$

$\omega_1$ és $\omega_2$ a gyökei a

$$-\frac{4u^2}{c^2}+\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)^2 = 0 \qquad \text{egyenletnek}$$

ha $u^2=\omega$ úgy

$$-\frac{4\omega}{c^2}+\omega^2+2\frac{c'}{c}\omega+\left(\frac{c'}{c}\right)^2 = 0$$

vagy $\omega^2+\left(2\frac{c'}{c}-\frac{4}{c^2}\right)\omega+\frac{c'^2}{c^2} = 0$

$x_1 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-9}$ $\qquad \omega_1\omega_2 = \frac{c'^2}{c^2}$

$x_2 = \frac{a}{2}$

$$dz = \frac{u^2 \pm \sqrt{\omega_1\omega_2}}{\sqrt{(u^2-\omega_1)(\cancel{u_2^2}-\cancel{u_2^2})}} \qquad 2)$$

$\omega_1 < u \qquad \omega_2 > u.$

$w_1$ és $w_2$ mindig positivak $w^2 > w_1$

és így tehetjük $w_1 = \alpha_1^2$ $w_2 = \alpha_2^2$

$$dz = \frac{u^2 \pm \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)}}\, du$$

az $u^2$ mindig $w_1$ és $w_2$ közt fekszik

tehát az $u$ mindig $\alpha_1$ és $\alpha_2$ közt e szerint

tehetjük

$$u^2 = \alpha_1^2\sin^2\varphi + \alpha_2^2\cos^2\varphi.$$

$$u = \alpha_2\sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sin^2\varphi} = \alpha_2\Delta(k,\varphi)$$ $\varphi$ amplitud

$k$ modulus

$$k^2 = \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\alpha_2 k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)} \qquad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta(k,\varphi)$$

$$du = -\frac{\alpha_2 k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\, d\varphi$$

$$\sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)} = (\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$dz = -\frac{(\alpha_1^2\sin^2\varphi + \alpha_2^2\cos^2\varphi)\,\alpha_2 k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)\cdot(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin\varphi\cos\varphi}\, d\varphi \mp \alpha_1\alpha_2\frac{\alpha_2 k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin\varphi\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\alpha_2\cdot\frac{k^2\alpha_1^2\sin^2\varphi}{\Delta(k\varphi)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}} - \alpha_2\frac{k^2\alpha_2^2\cos^2\varphi}{\Delta(k,\varphi)(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}}$$

$$\mp \alpha_1\frac{1}{\Delta(k,\varphi)}$$

$$= -\alpha_2\frac{k^2}{\Delta(k\varphi)}\cdot\frac{1}{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}(\alpha_1^2\sin^2\varphi - \alpha_2^2\sin^2\varphi + \alpha_2^2) \mp \alpha_1\frac{1}{\Delta(k,\varphi)} = -\alpha_2\Delta(k,\varphi) \mp \alpha_1\frac{1}{\Delta(k,\varphi)}$$

$$z = -\alpha_2 \int_0^{\varphi} \Delta(\kappa,\varphi)\, d\varphi \mp \alpha_1 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\kappa,\varphi)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\kappa,\varphi)} = F(\kappa,\varphi) \text{ Első fajú} \\ \displaystyle\int \Delta(\kappa\varphi)\, d\varphi = \mathcal{E}(\kappa,\varphi) \text{ második fajú} \end{array}\right\} \text{ elliptikus integrál}$$

ha $\alpha_1 = 0$ ~~$\alpha_1\ \alpha_2 = 0$ akkor~~.

1) eset.

$$z = -\alpha_2 \int \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$z = -\alpha_2 \int \cos\varphi\, d\varphi = \alpha_2 \sin\varphi$$

$$u = \alpha_2 \cos\varphi$$

$$z^2 + u^2 = \alpha^2 \quad \text{kör}$$

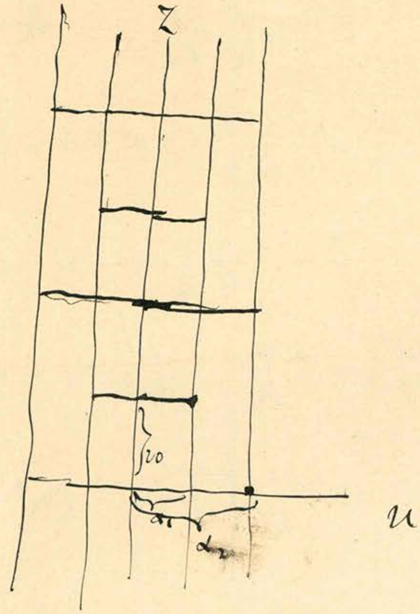
2) eset.

$$\begin{cases} z = -\alpha_2 \mathcal{E}(\kappa\varphi) - \alpha_1 F(\kappa,\varphi) \\ u^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi \end{cases}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ha | $\varphi = 0$ akkor | $z = 0$ | $u = \pm\alpha_2$ |
| ha | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ akkor | $z = z_0 = -\alpha_2 \mathcal{E}' - \alpha_1 F'$ | $u = \pm\alpha_1$ |
| " | $\varphi = \pi$ | $z_q = 2z_0$ | $u = \pm\alpha_2$ |
| | $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$ | $z = 3z_0$ | $u = \pm\alpha_1$ |
| | $\varphi = 2\pi$ | $z = 4z_0$ | $u = \pm\alpha_2$ |

a
ar
er
és

A görbe tehát az $u = \pm\alpha_1$ és $u = \pm\alpha_2$ egyenesek közt ideoda mozog.




$$\frac{dz}{du} = \frac{u^2 \pm \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)}}$$

A gyöknek két értéke van + és −. Az absolut érték legyen R akkor. ez esetben a számlálóban + jegy és így:

$$\frac{dz}{du} = \frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{\pm R}$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{\pm R}\right)$$

$$= \frac{2u}{\pm R} + (u^2+\alpha_1\alpha_2)\frac{d\frac{1}{\pm R}}{du}$$

$$\cancel{\frac{d\frac{1}{\pm R}}{du} = \mp\frac{1}{R^2}2u(\alpha_2^2-u^2) \pm \frac{1}{R^2}(u^2-\alpha_1^2)2u}$$

$$\cancel{= \pm\frac{2u}{R^2}(u^2-\alpha_2^2+u^2-\alpha_1^2)}$$

$$\cancel{\frac{d^2z}{du^2} = \pm\frac{2u}{R} \pm \frac{2u}{R^2}(u^2+\alpha_1\alpha_2)(2u^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2)}$$

$$\cancel{= \pm\frac{2u}{R^2}}$$

$$\frac{d\frac{1}{\pm R}}{du} = \mp\frac{1}{R^2}\frac{dR}{du} \qquad \cancel{R = \sqrt{\alpha_1^2 - u^2}} \quad R = \sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)}$$

$$\frac{dR}{du} = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{R}\left\{(\alpha_2^2-u^2)2u - (u^2-\alpha_1^2)2u\right\}$$

$$\frac{d\frac{1}{\pm R}}{du} = \pm\frac{u}{R^3}\left\{2u^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1^2\right\}$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \pm\frac{2u}{R} \pm \frac{u}{R^3}(u^2+\alpha_1\alpha_2)(2u^2-\alpha_2^2-\alpha_1^2)$$

$$= \pm\frac{u}{R^3}\Big\{\cancel{2u^2\alpha_2^2} - \cancel{2u^4} - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 2u^2\alpha_1^2 + \cancel{2u^4} - \cancel{u^2\alpha_2^2} - \cancel{u^2\alpha_1^2} + 2\alpha_1\alpha_2u^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_1^2\Big\}$$

$$= \pm\frac{u}{R^3}\left(u^2\alpha_2^2 + u^2\alpha_1^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2u^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_1^2\right)$$

$$= \pm\frac{u}{R^3}\left(u^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2)\right)$$

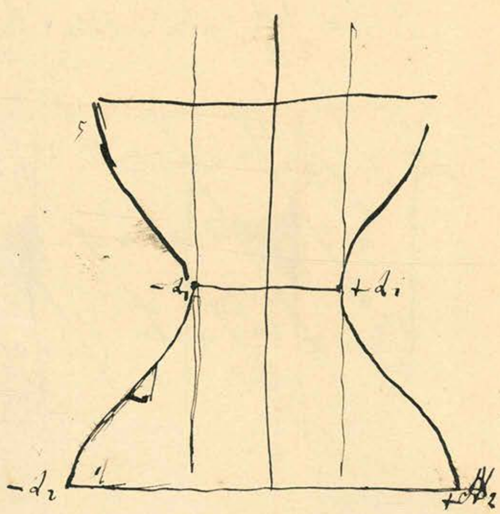
$$\begin{cases} \dfrac{d^2z}{du^2} = \pm\dfrac{u}{R^3}(u^2-\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2)^2 \\[2ex] \dfrac{dz}{du} = \dfrac{u^2+\alpha_1\alpha_2}{\pm R} \end{cases}$$

$\pm R$ előjele a $+$ jel. $\frac{dz}{du}$ pozitív

e szerint $\frac{dz}{du} = \operatorname{tg}\omega$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{1}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{du}$$

$$\frac{d\omega}{du} = \cos^2\omega\,\frac{u}{R^3}(u^2-\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2)^2$$



ty w = positiv

A süvglet positiv, zéo pontból számítva eleinte fogy a míg

$u^2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$ onnét aztán nő a $z$vel vagy $u$val $\left(\frac{dz}{du} = \text{pos}\right)$

$u = \alpha_1$ nél nő ott a görbe átcsapja a másik oldalra

---

Unduloïde.

$u = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ hajlásipont

$u = \pm\alpha_1$ vagy $u = \pm\alpha_2$ nél $\frac{dz}{du} = \infty$

---

A ~~második~~ harmadik esetben

$$z = -\alpha_2 \mathcal{E}(\kappa,\varphi) + \alpha_1 \mathcal{F}(\kappa\varphi)$$

$$u^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi$$

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi = 0$ | $u = \pm\alpha_2$ | $z = 0$ |
| $\varphi = \frac{\pi}{2}$ | $u = \pm\alpha_1$ | $z = -\alpha_2\mathcal{E}' + \alpha_1\mathcal{F}' = z_0$ |
| $\varphi = \pi$ | $u = \pm\alpha_2$ | $z = 2z_0$ |
| $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$ | $u = \pm\alpha_1$ | $z = 3z_0$ |
| $\varphi = 2\pi$ | $u = \pm\alpha_2$ | $z = 4z_0$ etc |



$$\frac{dz}{du} = tg\,w = \frac{u^2 - \alpha_1\alpha_2}{\pm R}$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{1}{\cos^2 w}\frac{dw}{du} = \pm\frac{u}{R^3}(u^2+\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)^2$$

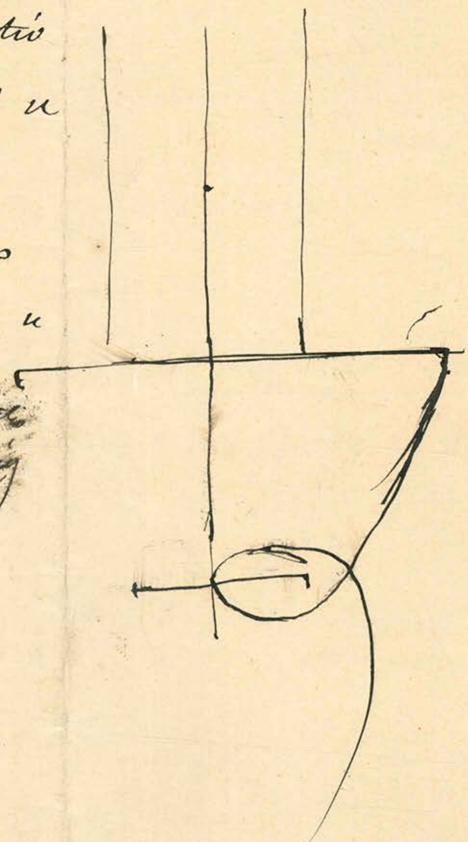
$$tg\,\omega = \frac{u^2 - \alpha_1\alpha_2}{R}$$

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{u}{R^3}\cos^2\omega\,(u^2+\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)^2$$

ha $u$ positív akkor $\frac{d\omega}{du}$ mindig positív.

ha $u=\alpha_2$ akkor $tg\,\omega$ positív

ha mostan $\varphi$ nő s így avval $u$ nő



$z=0$ $\quad u = \pm\alpha_2 \quad tg\,\omega = \infty$

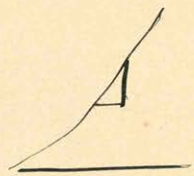
onnét attán $u$ folyton nő ha $u$ positív folyton fogy ha $u$ negativ avval. tehát mindaddig míg $u = +\alpha_1$ nél újra $tg\,\omega = \infty$

[illegible]

Kimárlott erő

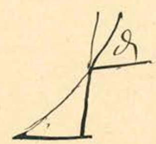
$$\pm\left\{\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{dz}{du}}{u\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=cz$$

---



$\frac{dz}{du}$ pozitív.

$$\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\left(1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{dz}{du}}{u\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\ \cancel{\tfrac{dz}{du}}=\pm cz$$



$$d\left\{\frac{u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\right\}=\pm\ \cancel{\tfrac{dz}{du}}\ cuz\,du$$

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\frac{1}{\cos\vartheta}}\quad\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$\cancel{r\cos\varphi}$

$$r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$\vartheta=\quad\frac{\pi}{2}-\vartheta=\varphi$$

$$-r\cos\varphi=\pm c\int uz\,du$$

$$-r\cos\varphi=\pm\frac{cV}{2\pi}$$

$$2\pi\int_0^r u\,du\,z=V$$

$$\cancel{\tfrac{dz}{du}}V=\mp\frac{1}{c}2\pi r\cos\varphi$$

$$V=-\frac{1}{c}2\pi r\cos\varphi$$

$$V=-\frac{1}{c}2\pi r\qquad V=\pi r^2h$$

$$\pi r^2h=-\frac{1}{c}2\pi r$$

$$h=-\frac{2}{c}\cdot\frac{1}{r}$$

Beer 162. Capillaritás 4

Találtuk

$$d\left\{\frac{u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\right\} = cu\,du.$$

$$x^2+ax+b=0$$
$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)$$
$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$
$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$
$$x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

$$\frac{2u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\frac{dz}{du}^2}} = cu^2+c'$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2\left(4u^2-(cu^2+c')^2\right) = cu^2+c'$$

$$dz = \frac{(cu^2+c')\,du}{\sqrt{4u^2-(cu^2+c')^2}}$$

$$dz = \frac{\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)dz}{\sqrt{\frac{4u^2}{c^2}-\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)^2}}$$



legyenek $\frac{4u^2}{c^2}-\left(u^2+\frac{c'}{c}\right)^2=(u^2-\omega_1)(\omega_2-u^2)$

a hol $\omega_1$ és $\omega_2$ gyökei következő másodfokú egyenletnek.

$$\omega^2+\left(2\frac{c'}{c}-\frac{4}{c^2}\right)\omega+\left(\frac{c'}{c}\right)^2=0$$

$$\omega=\frac{c'}{c}-\frac{2}{c^2}\pm\sqrt{\frac{2c'}{c}-\frac{4}{c^2}}$$

$$\omega_1\omega_2=\frac{c'^2}{c^2}$$

mert $x^2+px+q=0$ egyenlet két gyökét $x_1$ és $x_2$-vel jelölve $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ és $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}}$..

tehát.

$$dz=\frac{\left(u^2\pm\sqrt{\omega_1\omega_2}\right)du}{\sqrt{(u^2-\omega_1)(\omega_2-u^2)}}$$

csak reális értékeke ki- legyenek $\omega_1=\alpha_1^2$ és $\omega_2=\alpha_2^2$

$\omega_2>\omega_1$

a kifejezésben az $u$-k realitások

$\sqrt{u_1} = \alpha_1 \qquad \sqrt{u_2} = \alpha_2$ ha $\frac{dx}{dx}$ reális úgy $\omega_1$ és $\omega_2$ nek 1 fléves

$\alpha_1$ és $\alpha_2$. és pedig pozitívnak kell lenni

$$dx = \frac{u^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-\alpha^2)}}$$

$$u^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi.$$

$$u = \alpha_2\sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = K \text{ modul.}$$

$$u = \alpha_2\sqrt{1 - K\sin^2\vartheta}$$

$\vartheta$ = Amplitud

$$u = \alpha_2 \Delta(K\vartheta)$$

$K$ = Modulus

$$\frac{du}{d\vartheta} = -\frac{\alpha K \sin\vartheta\cos\vartheta}{\Delta(K,\vartheta)}$$

$$du = -\frac{\alpha K \sin\vartheta\cos\vartheta}{\Delta(K,\vartheta)}d\vartheta$$

$\cancel{du\ dx}$

$$\sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)} = (\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$\cancel{u\ (\alpha_2^2 \pm \alpha_1^2)u^2 = \alpha_1^2\alpha_2^2}\ u^4$

$$u^2 - \alpha_1^2 = \alpha_2^2\cos^2\vartheta - \alpha_1^2\cos^2\vartheta$$

$$= (\alpha_2^2-\alpha_1^2)\cos^2\vartheta$$

$$\alpha_2^2 - u^2 = (\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin^2\vartheta$$

$$\cancel{dr = -\frac{\alpha_1^2 \sin^2\vartheta\, \alpha_2 k \sin d \cos\vartheta}{\Delta(k\vartheta_1)}\, d\vartheta_1 - \frac{\alpha_2^2 \cos^2\vartheta\, \alpha_2 k \sin d \cos\vartheta}{\Delta(k\vartheta_1)}}$$

$$\cancel{= -\frac{\alpha_1^2}{\Delta(k\vartheta_1)}\cdot\frac{\alpha_2 k}{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}\sin^2\vartheta - \frac{\alpha_2^2\cdot\alpha_2 k}{\Delta(k\vartheta)(\alpha_2^2-\alpha_1)}\cos^2\vartheta}$$

$$\mp \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_2 k}{\Delta(k\vartheta)}$$

$$dr = -\alpha_2\Delta(k,\vartheta_1)\,d\vartheta \mp \alpha_1\frac{d\vartheta}{\Delta(k\vartheta)}$$

$$\int dr = -\alpha_2\int\Delta(k,\vartheta_1)\,d\vartheta \mp \alpha_1\int\frac{d\vartheta}{\Delta(k\vartheta)}$$

2ik fajú első fajú

ellyptikus integral

$\vartheta$ = Amplitud ; $k$ = modulus

$\alpha_1$ lehet = 0 akkor $k = 1$ és így

$$z = -\alpha_2\int\sqrt{1-\sin^2\vartheta}\,d\vartheta$$

$z = -\alpha_2\cos\vartheta$ tehát

$u = \alpha_2\cos\vartheta$ $\quad u^2+z^2=\alpha_2^2$

Kör

$(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\cos^2\varphi$

$(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\sin^2\varphi$

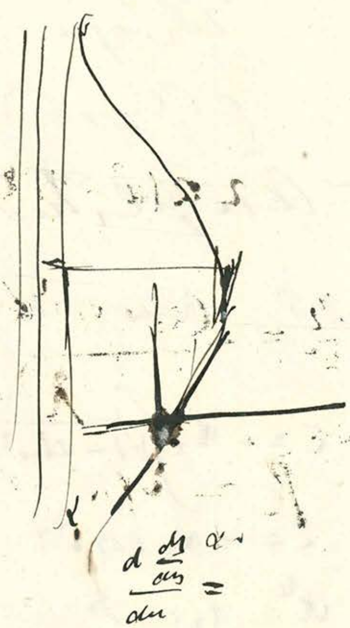
A többi feltételek vagy az $\alpha_2$ előtti − vagy + jelnek felelnek meg. <u>$\alpha_1$ pozitív</u> fele $\alpha_2$ ettől $\infty$-ig nő mindig!

$\varphi = 0$

$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2\vartheta + \alpha_0^2 \cos^2\vartheta$

$$z = -\alpha_1 F(\kappa,\vartheta) - \alpha_2 E(\kappa,\vartheta)$$

tehát látszik, hogy ha $\vartheta$ $-\infty$-től egész $+\infty$ nő nem akar ide oda meg



$\frac{d\frac{dy}{du}}{du} =$

Az Interval

$$2(\alpha_1 F' + \alpha_2 E')$$

ha $\varphi = 0$ vagy $\xi = 0$ és $x = \pm\alpha_2$

$$\frac{dr}{du} = \frac{u^2 + \alpha_1\alpha_2}{R}$$

$$\frac{d^2r}{du^2} = \frac{2u}{R} - \frac{(u^2+\alpha_1\alpha_2)}{R^2} \frac{1}{R}((u^2-\alpha_1^2)-u+(\alpha_2^2-u^2)u$$

$$-u^3 + \alpha_1^2 u + \alpha_2^2 u - u^3$$

$$2u(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2) - (u^2+\alpha_1\alpha_2)(-2u^3+\alpha_1^2 u -$$

$$\frac{d^2r}{dx^2} = -\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1\alpha_2-u^2)u}{R^3}$$

$$R = \sqrt{(u^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-u^2)}$$