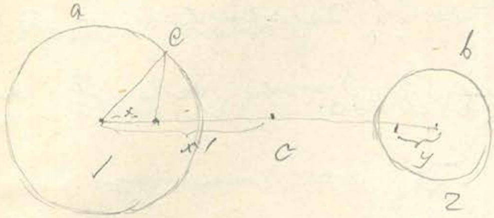
Theorie der Electricität



Potential der auf 1 befindl. Elect. = $f(x)$

Dieses Potential ist. $= \frac{a}{x'} f\left(\frac{a^2}{x'}\right)$

g.1 Das Potential für alle innere Punkte bekannt so ist es auch für alle äussere Punkte der Kugel

§ 2

Stellen wir ähnliche Betr. auf 2 an.

Auf die Centrale in (2, $y < b$

Das Potent. der Elect. auf ~~der~~ 2. sey

$$F(y)$$

Ebenso ausserhalb ~~der~~ ein Punkt y'

$$\text{Pot.} = \frac{b}{y'} \cdot F\left(\frac{b^2}{y'}\right)$$

Es muss $x' > a$ $y' > b$ sein. § 2.

Wir wählen nun y' so dass der Punkt mit dem x zusammen fällt so dass:

$$x + y' = C$$

$y' = c - x$ setzen. —

Hat x irgend einen Werth zwischen $-a$ und $+a$ so wird y' immer grösser als b sein. — also die Bed. erfüllt. —

~~Es~~ ~~Die~~ Für diesen Fall können wir das Gesammtpotential finden dasselbe ist.

$$\frac{b}{c-x} F\left(\frac{b^2}{c-x}\right) + f(x) = h \quad 4$$

Dieses muss nun eine Constante sein, eine Constante die wir uns gegeben denken

$$f(x) + \qquad\qquad = h \quad (1)$$

dies besteht für jeden Werth von x zwischen $-a$ und $+a$. —

Dasselbe gilt für Punkte auf der 2 Leitung.

$$F(y) + \frac{a}{c-y} f\left(\frac{a^2}{c-y}\right) = g \quad \ldots (2)$$

Dies gilt für alle Werthe von y zwischen $-b$ und $+b$. —

Zwei unbekannte Functionen F und f kommen hierin vor, wie dieselben eliminiren wir aus (1, und (2, . –

Wir können in (2, y so wählen können den x gleich werden den Argumenten von F in (1, . – Also wir setzen

$$y = \frac{b^2}{c-x}$$

Dieser Werth liegt offenbar zwischen $-b$ und $+b$ da ja ...

Ich denke mir dies eingesetzt, und dann die Elimination ausgeführt; es ergibt uns

~~F(x)~~

für x zwischen $-a$ und $+a$

$$f(x) - \frac{ab}{c^2-b^2-cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x} \quad (3,$$

Es ist das eine Functionalgleichung sie enthält dieselbe Function zweier Argumente die in einer ~~einer~~ gewissen Beziehung

zwischen einander stehen. —
Wir werden sehen dass durch diese Fun
f wirklich bestimmt werden kann. —
Dann werden wir das Par aufsuchen
eine Reihe auf der Curve zu
finden.

Um zu vereinfachen setze ich $a = 1$

dies für alle Werthe x zwischen -1 und $+1$

$$f(x) = \frac{b}{c^2-b^2-cx}\, f\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x} \qquad (4)$$

§3

Sehen wir zu ob ~~[illegible]~~ für gewisse Werthe von x nicht die ~~Argumente~~ Werthe beider Argumente gleich werden; ist dies so bestimmt man für diese Werth der Fun [illegible].

Wenn $x = \dfrac{c-x}{c^2-b^2-cx^2}$

oder

$$x^2 - \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right) x + 1 = 0 \qquad (7)$$

Wurzeln dieser Gleichung genügen der Bed.
Wir müssen auch noch sehen ob
diese Wurzeln zwischen +1 und −1
liegen oder nicht.

$$\frac{1}{c^2} + \frac{b^2-1}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2} - x - \frac{1-b^2}{c^2} + x = \frac{+b^2}{c^2}$$

für $x = -1$ wird

$$\frac{c^2+1-b^2}{c} = \text{pos.}$$

für $x = +1$ wird

$$\frac{b^2-c^2-1}{c} = \text{neg.} \qquad (c > a+b)$$

Also liegt der Werth zwischen +1 und −1

Ich will noch sehen näher welchen der diese Wurzel vor 5 hat .—

Für $x = 0$ ist + pos. also nur eine Wurz zwischen 0 und +1 liegen, d. i. die Wurzel ist ein positiv echter Bruch für

$x = \frac{1}{c}$ es ist dies ein echter Bruch.

Dann wird die Glei

b^2 also pos.

Die Wurzel liegt also zwischen

$\frac{1}{c}$ und 1

Diese Wurzel wollen wir ~~für~~ mit ξ benennen, —

Wenn ξ ein Wurzel ist, so ist $\frac{1}{\xi}$ die andere Wurzel. – dies keine Bed.

In die Functionalgleichung setze ich für x ξ dann wird:

$$f(\xi) = \frac{h - g\frac{b}{c-\xi}}{1 - \frac{b}{c^2-b^2-c\xi}} \quad \ldots\ldots (8)$$

Also haben wir für einen Werth des Argumentes die Function bestimmt. — (Man könnte einwenden dass dies unbestimmt lässt aber das Pol. zum best. sein. —)

Durch wiederholte Anwendung lässt sich f für jeden Werth von x zum berechnen mit einem

§ 4

des Verfahrens. — Ich setze

$$\left.\begin{aligned} \frac{c-x}{c^2-b^2-cx} &= x_1 \\ \frac{c-x_1}{c^2-b^2-cx_1} &= x_2 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}} &= x_n \end{aligned}\right\} (7)$$

Aus (4) kann ich $f(x)$ ändern dass $f(x_1)$ u. s. w.

Durch wiederholte Anwendung kann ich nun $f(x)$ ändern durch $f(x_n)$

§ 5

Ich will nun nachweisen dass durch wiederholte Anwendung sich das $f(x)$ dem $f(\xi)$ nähert. –

Um dies nachzuweisen führe ich eine Reihe von Grössen ein:

$z \quad z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_{n-1} \quad z_n$

und die durch einfache Gleichungen zusammenhängen mit x_1 – .. etc.

$$z = \frac{1+Ax}{1+Bx}$$

wo A und B zwei Constanten sind

über die wir verfügen wird uns vorbe-
halten. –

$$z_1 = \frac{1 + A x_1}{1 + B x_1}$$

$$\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ z_n = \dfrac{1 + A x_n}{1 + B x_n} \end{array}\right\} (8) \quad A$$

(Übertreibung wird)?
Die Relation zwischen x_{n-1} und x_n giebt
eine relation zwischen z_{n-1} und z_n
Da alle die Formeln linear sind so
lässt sich z_n linear durch z_{n-1} aus-
drücken also z_n = ein Bruch
dessen Zähler und dessen Nenner
lineare Functionen von z_{n-1} sind. –
Dadurch dass man A und B passend
bestimmt vereinfacht man diese

Gleichungen — man wird so ver-
fügen können — dass der <u>Nenner</u>
unabhängig von z_{n-1} wird, und
der Zähler propor. mit z_{n-1} wird
so dass:

$$z_n =$$

Also A und B so bestimmt dass

$$z_n = g^4 z_{n-1} \quad \Big\} \; g$$

Wo g^4 die Constante ist. —
Dadurch kommen wir zu ähnlichen
Reihen wie Ellipt.
Die Grösse g und die Werthe von
A und B müssen durch Rechnung
bestimmt werden. —
= Um dies zu thun schlagen wir
folgenden Weg an. —

Die Gl. (8) sein $\cancel{A x_n B}$

$$\frac{1+A x_n}{1+B x_n} = q^4 \frac{1+A x_{n-1}}{1+B x_{n-1}} \qquad 10$$

Dann (7) aber ich schreibe aber:

$$\frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+\delta x_{n-1}} = x_n \quad \text{dann wird}$$

$$\frac{(\gamma+\delta x_{n-1})+A(\alpha+\beta x_{n-1})}{(\gamma+\delta x_{n-1})+B(\alpha+\beta x_{n-1})} = q^4 \frac{1}{\text{Ound}}$$

ferner denke ich mir die mit x behafteten Glied zusammengenommen

$$(11)\quad \frac{\gamma+A\alpha+(\delta+A\beta)x_{n-1}}{\gamma+B\alpha+(\delta+B\beta)x_{n-1}} = q^4\frac{1+A x_{n-1}}{1+B x_{n-1}}$$

Dies muss für jeden beliebigen Werth von x bestehen: —

$x_{n-1} = 0$ gesetzt:

$1+ax=0 \quad (1+bx)=0$

$$q^4 = \frac{\gamma + A\alpha}{\delta + B\alpha} \qquad (12)$$

also q ausgedrückt durch A und B

da ja α und β bereits ausgedrückt

haben. —

Die Bedingung dass (11), ~~für~~ beide dann zu

(11) für dieselbe werden

$x_{n-1} = 0$ und $x_n = \infty$ werden

Es nun dann

$$A = \frac{\delta + A\beta}{\gamma + A\alpha} \quad \text{sein} \qquad (13)$$

hieraus folgt A.

Wenn für dieselbe aber $x_{n-1} = \infty$ werden

Nenner $= 0$

$$B = \frac{\delta + B\beta}{\gamma + B\alpha} \;\ldots\; (14)$$

hieraus sind A und B zu bestimmen

12 giebt den Werth von q^4.

---

(13) und (14) unterscheiden sich nur dadurch dass da B steht wo A steht — es scheint hieraus zu folgen $A = B$ denn wenn

$$q^4 = 1 \quad \text{also}$$

$$z_n = z_{n-1} = \dots z = 1$$

$A = B$ ist eine Lösung von dieser können wir aber keinen Vortheil ziehen. — Es sind noch 2 andere Lösungen. —

(13) und (14) sind quadratische Gl.

$$\alpha\lambda^2 + (\gamma - \beta)\lambda - \delta = 0 \qquad (15)$$

Diese Gleichung hat 2 Wurzeln — wir können für eine Wurzel A gleich [illegible] andere β setzen. —

Wir können ferner auch α gleich der ersten und β gleich der zweiten Wurzel setzen und umgekehrt. —

Wir müssen nun (15) wieder bilden es ist

$$\alpha = c$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma = c^2 - b^2$$

$$\delta = -c$$

Also wird (15)

$$\lambda^2 + \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right)\lambda + 1 = 0 \qquad (16)$$

Wir suchen die Wurzeln für λ und β. — Wir hatten schon von (5) so wie da war ξ und $\frac{1}{\xi}$

Die Wurzeln von (16) dagegen sind

$$-\xi \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\xi}$$

Diese Werthe haben wir für A und B zu setzen, wir haben dabei nur die Wahl ob wir

$$A = -\xi \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{\xi}$$

oder

$$A = -\frac{1}{\xi} \quad \text{und} \quad B = -\xi$$

setzen. – Je nachdem wir die eine oder die andere Wahl treffen wird der Werth von g^4 ein anderer – diese beiden Werthe müssen aber reciprok sein. –

Ich will nun diejenige Wahl treffen bei welcher g^4 ein echter Bruch wird es findet dies wie wir sehen

werden bei der 2ten Wahl statt.
Dann wird natürlich:

$$q^4 = \frac{c^2-b^2-\frac{c}{\xi}}{c^2-b^2-c\xi}$$

Diesem Ausdrucke sieht man es aber nicht so leicht an. Um zu zeigen daß q^4 wo $\xi < 1$ ist < 1 –
ist wenn denn

$$\xi + \frac{1}{\xi} = c + \frac{1-b^2}{c}$$

Daraus folgt:

$$c^2-b^2 = c\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)-1$$

dann wird:

$$\text{I)} \quad q^4 = \frac{c\xi-1}{\frac{c}{\xi}-1}$$

Das ist ein positiver echter Bruch, wenn man erwägt daß ξ liegt zwischen $\frac{1}{c}$ und 1

Die Grösse z_n kann dann folgendermassen
Zum

$$z_n = \frac{1 - \frac{1}{\xi} x_n}{1 - \xi x_n} \qquad (18)$$

Diese Gl. gilt welchen werth man n haben möge.

Zwischen z_n und z_{n-1} be

$$z_n = q^4 z_{n-1}$$

$$z_{n-1} = q^4 z_{n-2}$$

also $z_n = q^{2 \cdot 4} z_{n-2}$

z_n durch z selb

$$\underline{z_n = q^{4n} \cdot z} \qquad (17)$$

Also folgt dann dass x_n bei wachsendem n mehr und mehr dem ξ nähert

Aus (18) f:

$$x_n = \frac{1 - z_n}{\frac{1}{\xi} - \xi z_n} \quad \ldots \quad (19)$$

z_n nähert sich mit wachsendem n der 0 daher x_n also dem ξ. —

Also $\lim x_n$ für $n = \infty$ ist $= \xi$.

§ 6.

Wir wollen jetzt $f(x)$ wirklich für alle Werthe berechnen. — Um die Formeln zu vereinfachen theile ich die Rechnung in zwei Theile — ich will

$$f(x) = h f_1(x) - g f_2(x) \quad \ldots \quad (20)$$

Ich werde jetzt $f_1(x)$ und $f_2(x)$ aus der Functionalgleichung bestimmen — dann gilt (20) für ($f_1(x)$ und $f_2(x)$ von g und h unabh.)

alle Werthe von g und h. —

Setzen wir 20 in (6), ein so wird:

$$(21)\quad f_1(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx}\, f_1\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = 1$$ Coeff. von h auf beiden Seiten

$$(22)\quad f_2(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx}\, f_2\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = \frac{b}{c-x}.$$

In (21) und (22) wollen wir nach 18

2 ersetzen, und dann noch

Ich setze

$$f_1(x) = M(z)\,\varphi_1(z) \quad \dots \quad (23),$$

wobei die eigentliche Unbekannte φ_1 sei — so dass wir über die Function M passend zu verfügen haben. — Ich kann in (22) und (23) nach § 9 einsetzen dem wenn

$$f_1(x) - \frac{6x_1}{c-x} f_1(x_1) = 1 \qquad (24)$$

für $f_1(x)$ setze ich (23) und dann (18)

~~Ich setze~~ Es ist

$$f_1(x_1) = M(z_1)\varphi_1(z_1)$$

oder (9) und (?) ...

$$f_1(x_1) = M(q^4 z)\varphi_1(q^4 z) \qquad (25)$$

$$M(z)\varphi_1(z) - \frac{6x_1}{c-x} M(q^4 z)\varphi_1(q^4 z) = 1$$

(23) und 25 in in (24), gen

$$M(z)\varphi_1(z) - \frac{6x_1}{c-x} M(q^4 z)\varphi_1(q^4 z) = 1, \qquad (26)$$

Aus dem vorigen § ...1:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-z}{\frac{1}{\xi}-\xi z} \\ x_1 &= \frac{1-q^4 z}{\frac{1}{\xi}-\xi q^4 z} \end{aligned}\right\} \cdots (27)$$

Diese Ausdrücke haben wir zu benutzen ξ um den Factor in (26) zu bilden —

Es ist; wenn man (I) berücksicht —

$$c-x = (c-\xi)\,\frac{1-z q^4}{1-z\xi^2}$$

$$\frac{b x_1}{c-x} = \frac{b\xi}{c-\xi}\cdot\frac{1-\xi^2 z}{1-\xi^2 q^4 z}$$

Hier kommen noch die Const b und c vor statt welchen wir ξ und q einführen wollen

---

Wir kommen dann mit Benutzung von (I), wir können diese Gl. auf die Form bringen.

$$q^4 = \frac{c^2 - c\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + 1}{\left(\frac{c}{\xi} - 1\right)^2} \quad \ldots (28)$$

(Dies geschieht wenn man den N mit dem ~~Nenn~~ Zähler neuen aus Zähler Multiplicirt ?)

Wir können nun ξ und $\frac{1}{\xi}$ ausdrücken aus den Coefficienten der Quadr. Gleichung deren Wurzel sie sind. — Es ist:

$$\underline{\xi + \frac{1}{\xi} = c + \frac{1 - b^2}{c}}$$

Hieraus folgt

$$c^2 - c\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + 1 = b^2$$

Also

$$q^4 = \frac{b^2}{\left(\frac{c}{\xi} - 1\right)^2} \quad \ldots$$

also:

$$q^2 = \frac{b}{\frac{c}{\xi} - 1}$$

$$\boxed{q^2 = \frac{b\xi}{c-\xi}} \qquad (29)$$

Und das ist gerade der Coefficient den wir berechnen wollten denn es

$$\frac{bx_1}{c-x} = q^2 \frac{1-\xi^2 z}{1-\xi^2 q^4 z}$$

Dies setzen wir in (26) ein:

Bemerkung. Beim Quadratwurzelziehen das wir bei (29) vornahmen ist keine Zweideutigkeit da ja alles positiv ist auf beiden Seiten. —

$$M(z)\varphi_1(z) - q^2 \frac{1-\xi^2 z}{1-\xi^2 q^4 z} M(q^4 z)\varphi_1(q^4 z) = 1$$

(30)

Jetzt machen wir passende Wahl über M. — Wir wollen setzen

$$M(z) = 1 - \xi^2 z \quad \text{dann ist} \quad (31)$$

$$M(q^4 z) = 1 - \xi^2 q^4 z$$

Dann wird (30,

$$\varphi_1(z) - q^2 \varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1 - \xi^2 z} \quad \cdots (32)$$

Wir werden sehen dass für $\varphi_1(z)$ eine Reihenentwickelung zu finden ist — welche sogar für unsere Werthe von Z convergirt. —

Vor dem ich das thue entwickeln ich aus (22) wir wenden ausgeda zehen

$$f_2(x) = M(z)\varphi_2(z) \ldots (33),$$

wo über M zu verfügen, wir sollen a priori dann dies dasselbe ist, da ja die Cirkel Sachen dieselben sind. — Also

$$34 \quad M(z)\cdot\varphi_2(z) - q^2\frac{1-\xi^2 z}{1-\xi^2 q^4 z}M(q^4 z)\varphi_2(q^4 z) = \frac{b}{c-x}$$

Hier nennen wir auch x durch z und a und b durch c und q

Ersetzt

$$34 \qquad = \frac{q^2}{\xi}\cdot\frac{1-\xi^2 z}{1-q^4 z}.$$

Setzen wir das für M wird es (31), dann wird:

$$\varphi_2(z) - q^2\varphi_2(q^4 z) = \frac{q^2}{\xi}\cdot\frac{1}{1-q^4 z} \qquad (34)$$

Setzen wir dies in (31), so folgt f_2 . .

Nun drücken wir φ_1 und φ_2 aus

Es ist

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi^2 z} + q^2\varphi_1(q^4 z) \quad \ldots (35)$$

In diese Gleichung welche für alle Werte von z besteht setze ich für z, und $q^4 z$. — So wird

$$\varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1-\xi^2 q^4 z} + q^2\varphi_1(q^8 z)$$

$$\varphi_1(q^8 z) = \frac{1}{1-\xi^2 q^4 z} + q^2\varphi_1(q^{12} z)$$

— — — — — — — — —

Multipliziert man mit $1, q^2, q^4$ etc. und addiert, so ergibt sich

$$(36)\ldots\ \varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi^2 z} + \frac{q^2}{1-\xi^2 q^4 z} + \frac{q^4}{1-\xi^2 q^8 z} + \text{etc.}$$

Ähnlich findet man:

$$(37)\quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left\{\frac{q^2}{1-q^4 z} + \frac{q^4}{1-q^8 z} + \frac{q^6}{1-q^{12} z} + \ldots\right\}$$

Diese Reihen convergiren für jeden Werth von z da q <u>ein echter Bruch</u> ist. – Das Verhältniss zweier aufeinander folgender Glieder nähert sich, welches auch der Werth von z wäre, dem Werthe q^2. – Die Reihen convergiren um so schneller je kleiner q^2 ist, d.h. je grösser die <u>Entfernung beider Kugeln</u> ist. – Dies sieht man ein – aus der Form

$$q^2 + \frac{1}{q^2} = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab}$$

wo a wieder der Radius der Kugel ist

~~je kleiner~~ die Constanten a und b, ~~[illegible]~~ convergen
also die Reihe um so mehr ~~fehlt~~ je grösser.
c ist. – Wenn $c = a + b$ dann wird
$q = 1$, in welchem Falle die Reihen
nicht mehr convergiren. –

Diese Reihen haben grosse Analogie
mit Reihen die in der Theorie
der ellipt. Functionen vor-
kommen – und aber nicht dieselben – In der Abhandlung habe
ich nachgewiesen, dass gewisse
Fragen hier beantwortet werden
können mit Hilfe der elliptischen
Functionen. – Dies ist praktisch
mit solchen in ihm
wenn q nahezu $= 1$ ist. – Hierauf
gehe ich hier nicht näher ein. –
Manche aber Bemerkung über die

Reihen — sie lassen sich in Reihen verwandeln, welche mehr convergent sind. — Dabei bestehen aber diese nur für gewisse Werthe von z. —

§

Betrachten wir nun:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots$$

Setze (36), werde ich diese Entwicklung so, dass ich jedes Glied von (26) so entwickele — dann erhalte ich eine doppelt unendliche Reihe — ich werde aber dann diese selbe in anderer Weise summiren können

$$\cancel{\varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi z} + \frac{q^2}{1-\xi q^4 z} + \dots \text{ etc.}}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) = 1 &+ \xi^2 z + \xi^4 z^2 + \xi^6 z^3 + \text{etc.}\\ &+ q^2 + \xi^2 q^6 z + \xi^4 q^{10} z^2 + \text{etc.}\\ &+ q^4 + \xi^2 q^{12} z + \xi^4 q^{20} z^2 + \xi^6 q^{28} z^3 + \dots\end{aligned}$$

Nun können wir die vertical stehenden Glieder von $\frac{1}{z}$ summiren:

$$(38)\quad \varphi_1(z) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{\xi^2 z}{1-q^6} + \frac{\xi^4 z^2}{1-q^{10}} + \frac{\xi^6 z^3}{1-q^{14}} + \dots \text{ etc.}$$

ähnlich ergiebt sich:

$$(39)\quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6 z}{1-q^6} + \frac{q^{10} z^2}{1-q^{10}} + \dots \text{ etc.}\right)$$

Handelt es sich darum die Werte von $\varphi_1 z$ und $\varphi_2 z$ am kleinen Werte z zu berechnen dann sind diese praktischer als (38) und (39) was bei 36, und 37, nicht der Fall ist.

Diese Reihen convergiren nicht für alle Werthe von z, wohl aber für Werthe von z die den [illegible] der 1 Kugel gelegen Werthen von x gehören — also für Werthe von x zwischen $+1$ und -1 —

Nachweis

Da
$$z = \frac{1 - \frac{x}{\xi}}{1 - \xi x}$$
so ist wenn $x = -1$ so ist $z = \frac{1}{\xi}$

und $x = +1$ so ist $z = -\frac{1}{\xi}$

Wenn x wächst so nimmt z immer ab — d.i. der Diff. von z nach x ist negativ. —

denn es ist:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1-\xi^2}{\xi}\,\frac{1}{(1-\xi x)^2}$$

Wenn also x von 0 bis $+1$ wan[dert]

so nimmt z von $-\frac{1}{\xi}$ bis $\frac{1}{\xi}$ ab.

Der grösste absolute Werth von

z in der Kugel ist also $\frac{1}{\xi}$. –

Das Verhältniss zweier Glieder

der Reihen ist bei höchstens $(\xi^2 z^2)$ also

nie ist ξ d. i. convergent. –

Ebenso ist es für (39), da nähern

sich die Glieder wenn zu $\frac{q^4}{\xi}$

also zu $\frac{q^4}{\xi}$ dies ist $= \frac{c-\frac{1}{\xi}}{\frac{c}{\xi}-1}$

d. i. ein echter Bruch. –

(§. 1

Wir fanden bis jetzt $f(x)$ den Potential für einen im 1ten Kugel gelegenen —

Wir werden somit das Potential auch für äussere Punkte der Centrale bestimmen können — also der ~~x~~' so

$$\frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right) \text{ wenn } a = 1$$

Wir werden somit auch den Potential des auf (1) befindlichen Elementes in Bezug auf irgend einen Punkt berechnen. Dieses Potential ist gleich dem Potentiale einer Reihe von Polen die auf der Centrale innerhalb der Kugel liegen. Den Beweis führe ich derart dass ich beweise dass solche Pole zu existiren sind in Bezug auf die Einwirkung auf einen äusseren Punkt x' der Centrale dann ist der ganz bewiesen. —

Ich nehme an dass

$$h = 1 \qquad g = 0$$

Dann wird (20)

$$\underline{f(x) = f_1(x)}$$

Wir stellen dar

(40) $$f_1(x) = (1-\xi^2 z)\left\{\frac{1}{1-\xi z} + \frac{q^2}{1-q^4\xi^2 z} + \dots \text{etc}\right\}$$

Diese Reihe benütze ich um den Pol auf äusseren Rechts zu finden es war nach (18)

$$z = \frac{1-\frac{x}{\xi}}{1-\xi x} \qquad (18)$$

Dadurch wird:

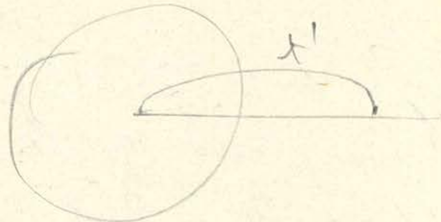
(41) $$f_1(x) = 1 + \frac{q^2(1-\xi^2)}{1-q^4\xi^2-(1-q^4)\xi x} + \dots$$

Nun suche ich:

(42) $$\frac{1}{x'} f_1\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{1}{x'} + \frac{q^2(1-\xi^2)}{(1-q^4\xi^2)x'-(1-q^4)\xi} + \dots$$

hervorzuheben ist hier dass der Zähler in all diesen Gliedern unabh. von x', und der Nenner eine lineare Function von x'^{-1} ist. —

Zu transformiren:



$$= \frac{1}{x'} + \frac{\dfrac{q^2(1-\xi^2)}{1-q^4\xi^2}}{x' - \dfrac{(1-q^4)\xi}{1-q^4\xi^2}} + \ldots$$

Die einzelnen Glieder dieser unendlichen Reihe lassen sich interpretiren.

Das erste Glied ist d. Potential von Masse 1 im Mittelpunkt der Kugel in Bezug auf den Punkt x'

	Erstes Glied	2ten Glied	3ten Glied
Abstand [illegible] auf der [illegible]	0	$\left(\dfrac{(1-q^4)\xi}{1-q^4\xi^2}\right)$	$\dfrac{(1-q^8)\xi}{1-q^8\xi^2}$
Electr. Masse	1	$\dfrac{q^2(1-\xi^2)}{1-q^4\xi^2}$	$\dfrac{q^4(1-\xi^2)}{1-q^8\xi^2}$

Die Abstände der Pole von dem
Mittelpunkte sind alle kleiner
als 1, also liegen sie alle in der
Kugel, sie sind sogar kleiner
als ξ, und ξ ist kleiner als 1. –
Also sind alle Pole welche inn-
halb der Ebene auf der Kugeloberfl.
liegen, lassen sich Pole substituieren,
die zwischen dem Mittelpunkt und
dem Werthe ξ von x liegen. –
Die entsprechenden Werthe von z;

$z, 1, \ldots, q^4, q^8$ etc.

Eine äußerste Controlle ist die..
Die Ebene. Menge der Kugel lässt
sich auf zwei verschiedenen Weisen

berechen. – Einmal ist etc.:

$$= f(0)$$

da dieses Potential der Rad = 1.

2) denn wenn die Pole da sind –
so muss die Summe der Electricität
auf der Kugel gleich sein der
Summe der Electr. der Pole. –

Es ist aus der Reih $f(x)$

$$f(0) = 1 + \frac{q^2(1-\xi^2)}{1+q^4\xi^2} + \frac{q^4(1-\xi^2)}{1-q^8\xi^2}$$

Und diese Reihe ist = Verhältniss
der Summe der Electricitätsmengen
der Pole. –

ξ

2ter spec. Fall, wenn $h=0$ und für $g=-1$ so ist.

$$\frac{f(x) = f_2(x)}{}$$

$$f(x) = \left(\frac{1-\xi^2 z}{\xi}\right)\left\{\frac{q^2}{1-q^4 z} + \frac{q^4}{1-q^8 z} + \dots\right\}$$

$$= \frac{1-\xi^2}{\xi}\left\{\frac{q^2}{1-q^4-x\left(\xi-\frac{q^4}{\xi}\right)} + \dots\right\}$$

Nun bilde ich wieder den Potential für den Punkt x' — dann wird ~~wieder~~ jedes Glied eine constante multipliciert mit einer linearen Function von x' also ein Potential.

$$\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1-\xi^2}{\xi}\left\{ \frac{\frac{q^2}{1-q^4}}{x^2 - \frac{\xi - \frac{q^4}{\xi}}{1-q^4}} + \cdots \right.$$

Also der erste Glied Residuum eines Poles. dessen Abstand der Nenner ist.

Dieser Pol liegt in ein ...

Abstand $\dfrac{\xi - \frac{q^4}{\xi}}{1-q^4}$

Electricitätsmenge : $\dfrac{1-\xi^2}{\xi} \cdot \dfrac{q^2}{1-q^4}$

Das zweite Glied : Abst. = $\dfrac{\xi - \frac{q^8}{\xi}}{1-q^8}$

Electr. Menge = $\dfrac{1-\xi^2}{\xi} \cdot \dfrac{q^4}{1-q^8}$

etc.

Auch diese Pole sind alle innere die Abstände sind nämlich alle kleiner als 1. —

Es werden dem ersten

$$z = , \frac{q^4}{\xi^2} , \dots , \frac{q^8}{\xi^2} \quad \text{etc.}$$

Auch diese Gleichungen können controlirt werden. —

Die ganze Electricitätsmenge ist

$$f(0) = \frac{1-\xi^2}{\xi}\left\{\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^8} + \frac{q^6}{1-q^{12}} + \text{etc.}\right\}$$

Gerade so gross ist sie wenn die Electricitätsmenge des Pols — weg substituirt worden sind. —

§

Diese Ausdrücke beziehen sich auf
spezielle Fälle — wenn sie beliebige
Werthe haben, dann können an
gewisse Pole gesetzt werden —
Und zwar die beiden Systeme die
wir in beiden Fällen betrachteten
die Entfernungen sind dieselben —
die Electricitäts mengen der Pole
dagegen . . —
bei den ersten — h   bei der 2ten
— g

2

§

In Bezug auf Coulombs Drehwage ist
es nicht leicht die Elasticität genau
und die Kraft zu kennen, wenn
solche zwei Kugel auf einander
wirken. — Wir können die Kraft
berechnen, wenn wir früher
die Pole substituiren — thun
wir dies, so können wir $F(x)$
als das Potential der zweiten Kugel
auf die künstlichen Pole der ersten
berechnen

7tes Kapitel

Bei jeder Aufgabe der Electrostatik hat man es zu thun, mit der Laplace'schen Diff. Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z}=0$$

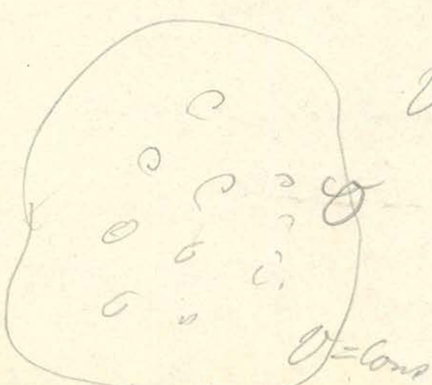
$$\Delta V = 0$$

Bei jeder Aufgabe sind Lösungen dieser Gleichung zu suchen mit Grenzbedingungen welche die Gestalt aussprechen und $\overline{V = \text{Const}}$. – Es gelingt nicht immer denn die Lösung zu finden. –

Man kann auch die Lösung suchen, und dann die Aufgabe suchen der

ze gezeigt — so werden wir eine
grosse Anzahl von Formen finden,
für welche sich die Gleichgewichts-
ordnung der Ebene. Ohne weiteres
finden ist. —

V rührt von vielen Massen her —
suchen wir die ~~Gestalt~~ Oberfläche welche
alle Massen von welchen
V herrührt einschliesst und
es sei V = cons. —



Ich suche eine
Massenvertheilung
auf O — wenn
dasselbe Pot.
hat auf alle Punkte. —

Wenn V für alle Punkte von O = const. ist so kann man dies finden. –

Sei nun U das Potential der Massenvertheilung auf der Oberfläche

Dabei unterscheide ich

$U_a = V$ dies ist nach der Definition von der Massen.

$\overline{U} = \overline{V}$ const.

aber: $U_i = \overline{V}$ dies nach einem Satze

dann wenn der Punkt innerhalb gelegen massen auf der Oberfl. const. dann ist [illegible]

Nun möge e die Dichtigkeit der Massenvertheilung U sein auf einem Elemente der Oberfläche – dann ist:

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} + \frac{\partial U}{\partial N_a} = -4\pi e$$

da U_i = const.

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = -4\pi e$$

Daher

$$e = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial N_a}$$

Wenn V gegeben ist, so hat es keine Schwierigkeit diese e zu berechnen. Dies giebt dann die Dichtigkeit auf der Oberfläche eines Leiters.

Das einfachste wäre annehmen dass V von einem Punkte herrührt, dann ist die Oberfläche eine Kugelfläche — dies giebt eine gleichmässige Dichtigkeit auf der Kugelfläche.

---

2 Pole
Der 2te einfachste wäre z. B.

$$V = \frac{A}{r} + \frac{A'}{r'}$$

Dann muss die Gleichung der Oberfl. O sein

$$\frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} = \text{const.}$$

Es ist das eine Oberfl. 4ten Grades da r und r' Quadratwurzeln. —

Das Princip lässt sich also nicht verallgemeinern. —

Es ist nur so notwendig, dass O alle Ionen einschliesse, sie muss aber nicht eine Gleichfläche

Oberfläche sei — — so lang
am
zwei ~~Oberfl~~ geschlossenem Gebiet
jedem
bestehen — in deren Inneren.
Das Pot. Conste ist 1 — aber
zwischen einander verschieden
Also bei den 2 Polen

Leider führen die Annahme über V
uns zu sehr complicirten Aufg.
Also von keinem Praktischheit

4tes Kapitel

Ich werde einen andern Weg ein-
schlagen, um solche Figuren zu find-
en $V=0$ gegeben ist für andere
($V=0$

Ich will einige Methoden angeben wie
man aus einer Lösung von $\Delta V=0$ andere Lö-
sungen von wesentlich verschiedener Form
bilden kann. Es wäre

$$V(x,y,z)$$

eine solche Lösung, addirt man hiezu Con-
stanten so ist es auch noch eine Lösung.
Wenn ~~dagegen die die Constanten~~ die
Constanten reell dann ist die Lösung

dieselbe — sie wird eine andere

wenn diese imaginär. und — dazu

sind die reellen ..., und die

Factoren von $\sqrt{-1}$ eine andere Wurzel.

Ich wende dies auf experimental

an.

—

Eine Lösung der Glei $\Delta V = 0$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Setze ich $x + ia$ so ist

$$\frac{1}{\sqrt{(x+ia)^2+y^2+z^2}}$$

hier wird das reelle Theil genügen und

auch das Factor von ~~$\sqrt{}$~~ i genügen. —

Ich stelle $\sqrt{\ }$ dar ~~als~~ ~~einfachen~~ in der Form einer complexen Grösse. —

Es ist diese: $\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2+i\,2ax} = \sigma + i\mu$

wo σ und μ reell sein sollen. —

Ich werde zuerst zeigen wie diese Grössen zu finden sind. — Wir wissen a priori dass ~~für~~ ~~μ~~ für μ und σ hier reelle Werthe ergeben werden —

Es ist

$$x^2+y^2+z^2-a^2 = \sigma^2+\mu^2 \quad (1,$$

$$ax = \sigma\mu \quad (2,$$

Nun ist σ und μ zu bestimmen.

Ich multiplicire (2, mit $\frac{1}{\sigma}$, dann quadrire und addire ich. — Ähnlich fortfahrend finde ich:

$$\underbrace{\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2+\sigma^2}}=1 \quad \ldots (3,$$

Wenn ich aber (2) mit μ^2 multiplizire
so kann sich zur Glu.

$$-\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2-\mu^2} = 1 \quad \ldots (4)$$

Es sind σ^2 und $-\mu^2$ die Wurzeln der Gleichung (3) — da σ und μ reell sein müssen so muss σ^2 und μ^2 positiv sein. Es sind also σ^2 und $-\mu^2$ vollkommen eindeutig bestimmt. — Dabei haben eine geometrische Bedeutung. —

$$x = 0$$

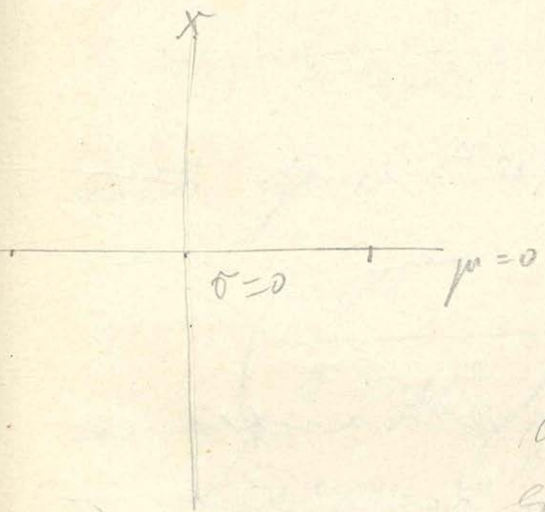
$$\text{u.}\quad y^2+z^2 = a^2$$

sind die Gleichungen eines Kreises beschrieben um den Anfangspunkt. — Die Kreisfläche kann ich ansehen als ein ~~[illegible]~~ Umdrehungsellipsoid dessen Drehungsaxe $= 0$ ist. —
Es ist dann $\sigma = \text{const}$ die Gleichung eines mit der Kreisförmigenscheibe confocalen

Rotations-ellypsoid. –

(4) ist die Gleichung eines confocalen Hyperboloides — $\mu = \mathrm{Const}$ ist also die Gleichung der confocalen Rot. Hyperboloide – wenn nur der $\sigma = \mathrm{Const.}$ confocal sind

Es sind σ^2 und $-\mu^2$ eindeutig bestimmt. σ und μ selbst erlauben eine Zweideutigkeit des Vorzeichens. –



Es lässt sich aus unseren Gleichungen ersehen dass in der Seite der positiven x, σ und μ dasselbe Vorzeichen haben müssen während in der andern Hälfte sie ~~[illegible]~~ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dies zeigt (2). –

Für einen Punkt die Vorzeichen angenommen ergiebt sich den anderen – wenn auf der einen Hälfte von x $\sigma = +$ ist so ist auch $\mu = +$

Ich mache nun zunächst darauf aufmerksam dass für $x = 0$ eine der Grössen σ und μ gleich 0 werden muss, (vgl. ?)

~~Erläutert~~ Wenn $y^2+z^2 > a^2$

so wird für $x = 0$ die linke Seite von (1) pos. es muss dann die rechte Seite $=$ pos. sein – also muss dann $\mu = 0$ sein. –

Wenn aber $y^2+z^2 < a^2$, so muss

$$\sigma = 0 \text{ sein}$$

Ich will nur die Punkte andeuten in welchen der Kreis einwirkt.
Ausserhalb des Kreises ist $\mu = 0$
innerhalb derselben $\sigma = 0$ – in der Kreisperipherie selbst müssen $\sigma = 0$ und $\mu = 0$.

Es ist also

$$\frac{1}{\sqrt{(x+ia)^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sigma+i\mu}$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma^2-\mu^2} + i\frac{\mu}{\sigma^2-\mu^2}$$

Es ist nun

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma^2-\mu^2}\right)$$

ebenso gut eine Lösung, wie auch

$$\left(\frac{\mu}{\sigma^2-\mu^2}\right)$$

eine Lösung ist —

Die Lösung nun das Potential der Elek[tr] darstellen — so muss continuierlich sein innerhalb des Raumes auf welche sie sich beziehen. —

Jede dieser Lösungen wird diese Eigen-
schaft haben, wenn μ und b selbst
keine Sprünge machen. —
Wir werden dies angeben können
der Aufgabe — d. an sich Elasti-
cität nur in und unendlich nahe
zur yz Ebene befindet. — Dann ist
keine Discontinuität — wir müssen
noch die Sache so ein[richten] realisieren
σ und μ ~~...~~ auf einer oder
anderen Seite nicht discontinu-
lich im Vorzeichen sein. —
Wir setzen voraus daß auf der
Seite der $+x$ kein Sprung im Vorzei-
von μ und b stattfinde. —
Ebenso sei es bei der Seite der
$-x$. —

Bei $-x$ kann aber μ und σ verschiedene Vorzeichen besitzen. –

Da kann dem

$\sigma +$ $\quad \mu -$ Fall 1.

$\sigma -$ $\quad \mu +$ Fall 2.

Bei einem Durchgange durch die yz Ebene können σ und μ dadurch einen Sprung erleiden, dass ihr Vorzeichen geändert wird. – Wir sahen, dass wenn $y^2+z^2 > a^2$ ist, dann $\mu = 0$ ist, woraus folgt, dass im dem Falle 1, ~~μ~~ nur μ discontinuierlich werden kann, und im Falle 2 nur σ. –

Im Falle 1) kann σ kein Sprung erleiden da es ja an beiden Seiten + ist. – wohl aber μ. –

Im Falle 2) kann umgekehrt μ keinen Sprung erleiden – wohl aber σ.

Es wird im 1ten Falle μ wirklich discontinuerlich sein, wenn wir innerhalb des Kreises sind — nicht aber wenn wir ausserhalb des Kreises sind wo dann $\mu = 0$ ist. —

Ebenso ist im 2ten Falle σ discontinuerlich ausserhalb des Kreises. —

Im Falle 1) also die beiden Lösungen angesehen werden als Potential von Massen die innerhalb des Kreises liegen auf der XY Ebene. —

2) Fall. Ausserhalb.

§.

Wir wollen ein Beispiel behandeln und zwar die 2te Lösung ansehen

Früher Fehler begangen

$$\frac{\mu}{\sigma^2+\mu^2} = V$$ überall stetig — $\sigma^2+\mu^2$ zu schreiben

wo V das Pot. von Ebenen ist auf

der kreisförmigen Scheibe liegend.

Aber im Innern aus selben

$$\left.\frac{\mu}{\sigma^2-\mu^2} = \frac{\partial V}{\partial x}\right\} \ldots (5)$$

Wenn ich unter V das Potential anderer Massen auf denselben Kreis verstehe. — Da ja die Kontinuitätsbedingungen dieselben sind. — Auf diese Weise kommen wir zu einem schon behandelten Fall. —

Wir werden die Dichtigkeit der Lin. deren Pot. (5) ist leicht finden können. —

Es muss für irgend einen ~~eine~~ Flächenpot.

$$\frac{\partial V}{\partial x_+} - \frac{\partial V}{\partial x_-} = -4\pi e$$

wenn e die Dichtigkeit ist in den Punkten der Scheibe. ~~[illegible]~~ — 142 bilden wir $\frac{\partial V}{\partial x_+} =$

Da ist $\mu = +$ $\sigma = 0$ also $\frac{\partial V}{\partial x} \overset{\text{positiv Wert erg.}}{=} + \frac{1}{\mu}$

μ finden wir aus (1)

$$\frac{\partial V}{\partial x_+} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}}$$ wo die Wurzel + zu nehmen ist.

$\frac{\partial V}{\partial x_-}$ da ist $\sigma = 0$ für $x = 0$ und μ ist negativ - also

$$\frac{\partial V}{\partial x_-} = - \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}}$$

$$4\pi e = \frac{2}{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}}$$

$$e = \frac{\text{Const}}{\sqrt{1 - \frac{y^2 + z^2}{a^2}}} \quad \dots (6)$$

wenn dieser Gerade ist. Die Elektricität verhält deren Potential = 0 ist. —

Diese Gleichung bestimmt die Gleichgewichtsanordnung auf der Scheibe. Es ist also V dem Potential von Elektricität welches auf der Scheibe in Gleichgewicht ist. —

Hieraus werde ich V berechnen

Aus (5, ist:

$$V = \int \frac{\mu\, dx}{\sigma^2 + \mu^2}$$

bei der Integr. y und z als Constanten anzusehen.

Wir sehen σ und μ als Functionen von x an. —

Durch Differentiation von (1, und (2, ergiebt sich:

$$x\,dx = \sigma\,d\sigma - \mu\,d\mu \qquad (7)$$

$$a\,dx = \mu\,d\sigma + \sigma\,d\mu \qquad (8)$$

(7) mit σ (8) mit μ multipliziert und addiert ergibt:

$$(\sigma x + a\mu)\,dx = (\sigma^2 + \mu^2)\,d\sigma$$

$$(\sigma x a + a^2\mu)\,dx = a(\sigma^2 + \mu^2)\,d\sigma$$

$$\mu(\sigma^2 + a^2)\,dx = a(\sigma^2 + \mu^2)\,d\sigma$$

$$\frac{\mu\,dx}{\sigma^2 + \mu^2} = \frac{a\,d\sigma}{\sigma^2 + a^2}$$

also ist

$$V = \int \frac{a\,d\sigma}{\sigma^2 + a^2}$$

Hier ist die einzige Variable σ

$$V = \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{a} + \text{Const} \quad .. (9)$$

Const ist eine von x unabhängige Grösse
welche von y und z abhängig sein könnte,
so dann derartig abhängig sein, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sei} -$$

Wir können aber Const muss $= 0$ setzen.
Wenn dies Gleichgewichtsproblem
so muss das Potential für alle
Punkte der Scheibe an constantes
sein — ~~und constant~~ es muss ferner $\sigma = 0$ also
... unabhängig sein — nähe
von y und z unabhängig

(6) . —

Es ist, σ in der Unendlichkeit $= a$
dann muss ~~auch~~ ~~$V = \dots$~~ $V = 0$ werden, dann
ist a ~~minus~~ Const $= \frac{\pi}{2}$ sein, und:

$$V = \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{a} - \frac{\pi}{2}$$

5tes Kapitel

Andere Methode an einer von einer gar anderen Form. —

Statt der rechtwinkeligen Coordinaten $x\, y\, z$ führe ich neue Variabeln $\xi\, \eta\, \zeta$ ein, welche definiert sind durch

$$x = \frac{\xi}{\rho^2} \qquad y = \frac{\eta}{\rho^2} \qquad z = \frac{\zeta}{\rho^2} \qquad (1)$$

wo

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \qquad (2)$$

Hieraus

$$\xi = \frac{x}{r^2} \qquad \eta = \frac{y}{r^2} \qquad \zeta = \frac{z}{r^2}$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und $\rho = \frac{1}{r}$ ist

Diese wollen wir in

$$\Delta R = 0$$

einführen. — Diese Variabeln haben wir aber einmal zu beleuchten — die Flächen der

Gleichungen und

$$\xi = \text{const} \qquad \eta = \text{const} \qquad \zeta = \text{const} \qquad (3)$$

sind Kugeln deren Mittelpunkte aber nicht zusammenfallen mit dem Anfangspunkte der Coord. axen. –

Die Systeme (2), der Flächen sind orthogonal. Der ergebniss so – ich habe zu beweisen dass $\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$ rechtwinkelig schneiden. – Also habe ich nur zu beweisen dass

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad \ldots (4)$$

Durch Differentiation lässt sich die Richtigkeit dieser Gleichung leicht nachweisen

Es ist

$$(5)\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{1}{r^2} - 2\dfrac{x^2}{r^4} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -2\dfrac{xy}{r^4} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = -2\dfrac{xy}{r^4} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{1}{r^2} - 2\dfrac{y^2}{r^4} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = -\dfrac{xz}{r^4} & \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi} = -2\dfrac{yz}{r^4} \end{array}\right.$$

Diese Werthe machen die Ebenen (4) zu einer identischen — also schneiden sich $\xi = \text{const.}$ und $\eta = \text{const.}$ senkrecht und also symbolisch sehen wir den Schluss dass irgend zwei der Flächensysteme sich rechtwinkelig schneiden.

Wir transformiren also $\Delta\Omega$ für orthogonale Coordinaten. —

Ich führe deshalb ein

$$(6_1)\quad \begin{cases} U = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \\ V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^2} \\ W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2} \end{cases}$$

Dann ist

$$\Delta\Omega = 0$$

$$(6)\quad 0 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)$$

Wir haben nun U V W aus (6) zu berechnen:

Vertauschen sich in (5) die Werthe ξ mit x so findet man:

$$U^2 = \left(\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{\xi^2}{\rho^4}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\eta}{\rho^4}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\zeta}{\rho^4}\right)^2$$

$$\cancel{V^2} \qquad U^2 = \frac{1}{\rho^4}$$

$$\cancel{W^2} \qquad U = \frac{1}{\rho^2}$$

Hiebei haben wir über das Vorzeichen verfügt. — U ist symmetrisch in bezug auf x y z also ist

$$U = V = W = \frac{1}{\rho^2} \quad \ldots (7)$$

Demnach wird (6):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right) \quad (8)$$

Das ist die Form der Diff. Gl. wenn statt x y z ξ, η, ζ eingeführt werden. —

Ich bringen dies auf eine noch mehr zweckmäßigere Form. — Ich führe die Diff. durch

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi} + 2\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$$

Diese Gleichung vergleiche ich mit folgender

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\Omega\right) = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \Omega\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi^2}$$

die letztere Gl. wenn mit $\frac{1}{\varrho}$ multipliziert und die Gleichungen von einander abgezogen ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{\rho}\Omega\right) + \frac{\Omega}{\rho}\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \xi^2}$$

Ich denke mir mit den Folgenden Gliedern von (8) eine ähnliche Transformation durchgeführt [illegible]

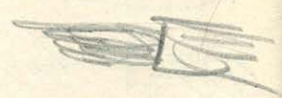
$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{\rho}\Omega\right) + \frac{\Omega}{\rho}\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \xi^2}$$

So bekomme ich schliesslich:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}\Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}\Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}\Omega}{\partial \xi^2}\right) = 0}_{} \quad (9)$$

Wir bekommen also hierdurch für $\frac{1}{\rho}\Omega$ eine ebenartige Gleichung wie die ursprüngliche. —

setzen wir ξ η ζ als die recht-
winkligen Coordinaten eines Punktes
an — so wird $\frac{1}{\rho}\,\Omega$ das Potential
von elektrischen Massen die
ausserhalb des Raumes liegen
in welchem $\xi\eta\zeta$ liegt. — Ich
will ξ η ζ das Bild von
x, y, z nennen. — Ich
werde dann auch von
dem Bilde einer Linie
einer Fläche oder eines
Raumes sprechen können. —
Wir sahen dies schon 
direkt ein

$\Omega(x, y, z)$ sei die

Lösung einer gewissen elektrostatischen Aufgabe für einen gewissen Leiter; so wird

$$\frac{1}{\xi}\,\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$$

die Lösung einer entsprechenden Aufgabe sein die sich bezieht auf denjenigen Leiter der das Bild jenes Leiters ist. —

Ich will die Annahme noch weiter generalisieren. — Es sei Ω das Potential in Bezug auf einen äußeren Punkt — der sich auf dem Leiter im Gleichgewicht befindet und der dann im Inneren $\Omega(x\,y\,z) = 1$ ist so ist, — so wird dann $\frac{1}{\xi}\,\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ die entsprechende

Aufgabe ist — Dabei ist es aber nicht notwendig dass die sich auf die Heizungswärme aufgabe beziehe. – Von allen Punkten des bildes muss

$\Omega(\xi \eta \zeta) = p$ sein.

Also muss

$\frac{1}{\xi} \Omega(\xi \eta \zeta)$ für alle Punkte des Leiters $= \frac{1}{\xi}$ also nicht constant sein. – Von dem Ausgangspunkte der $\xi \eta \zeta$ oder was dasselbe ist der $x y z$. – Für alle Punkte ausserhalb des neuen Bildleiters wird $\Omega(\xi \eta \zeta)$ nur continuirlich und endlich

sein. Dies bedarf eines Nachweises
denn man könnte denken dass die
Ladung für $\varrho = 0$ unendlich würde.
Um zu zeigen dass dies nicht der
Fall ist bilden wir Ω für $r = \infty$
dies können wir machen wenn wir
annehmen dass der ursprüngliche
Leiter nicht unendlich sei —

$$\Omega\,(r = \infty) = \frac{M}{r}\ \text{(als Grenze)}$$

also $$\Omega(\varrho = 0) = \frac{M}{r} = M\varrho$$

Daraus folgt dass das Potential der Belege

$$\left(\frac{1}{\varrho}\,\Omega(\varrho)\right)_{\varrho = 0} = M \text{ ist.}$$

Also bleibt das Potential endlich
und continuirlich für alle Punkte

der innerhalb des neuen Leiters.
Ferner wird sie für $\rho = \infty$ gleich
0. — Hierfür Grund.

Also genügt der Ausdruck der $\Delta V = 0$
— also ist dieser Ausdruck
das Potential von Electricität
das im Inneren oder auf der
Oberfläche des Bildleiters
verbreitet ist. —

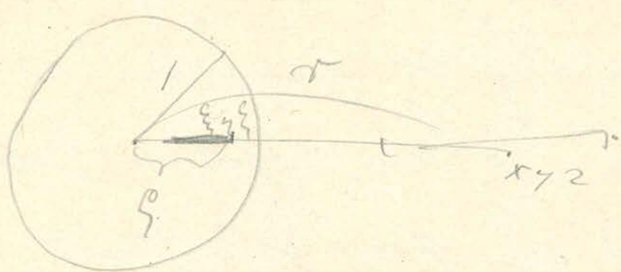
$$\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{P}(\xi\,\eta\,\zeta)$$

Ich erwähnte dann dabei noch
nothwendig ist Gleichgewichtsbedingung
für die Oberfläche ist,
$\frac{1}{\rho}$ P muss constant werden $= \frac{1}{\rho}$

Es ist dann das Gesamtpotential
von Electricität ~~auf~~ in allen
Bildleiter im Gleichgewichts-
und im Coord anfangspunkt elect.
Pol -1. –

Es ist $+\frac{1}{\varrho} R(\xi,\eta,\zeta)$ das Potential
der Electricität welche inducirt
ist durch einen Pol -1 im
Coordinatenanfangspunkte auf
den Leiter verbreitet ist. –

In einem speciellen Falle. –
Das Bild einer Scheibe ist
ebenfalls eine Scheibe, wenn die
erste in der Nähe des Coord. An-
fangspunktes liegt. –



Also ~~und~~ liegt ein
Theil einer Eben
die durch den
Word. Anfangs
Punkt geht 1 ein
Theil derselben Ebene zum Bild.
Eine kreisförmige Scheibe hat dann
~~ebenso~~ dann eine kreisf Scheibe zum Bilde.
werden.
Da das Bild eines Kreises ein
Kreis ist. – Wenn die Scheibe
nicht durch den Anfangspunkt geht,
so ist das Bild ein Kegelschnitt.
Wir fanden das Polarmoment der
kreisförmigen Scheibe. – Dies gelten
wie für ξ_2. – Hierdurch auch
Wir finden die Gleichgewichte

Zuordnung auf eine kreisförmigen
Scheibe auf welcher sie [illegible] eine Ebene
ein Pol wirkt in dem Coord Anfangs-
punkte. — §

Es sei nun Radius der Scheibe l

dann ist

$$\Omega(x,y,z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{l}{\sigma}$$

dabei ist aber so gewählt dass für
$x\ y\ z = 0$ werde $\Omega = 0$. Dabei ist

$$\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2+z^2}{l^2+\sigma^2} = 1$$

Hiebei ist die Annahme gemacht dass der
Anfangspunkt im Mittelpunkte der Scheibe
liegt. — Hievon mache ich nun
Anwendung wenn ich sehen

8 $\qquad \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{(y-b)^2+(z-c)^2}{\lambda^2+\sigma^2} = 1$

Die Gleichung der Peripherie ist dann

$$\underbrace{(y-b)^2 + (z-c)^2 = l^2}$$ da

$$\frac{1}{\varrho}\, P(\xi\, \eta\, \zeta)$$

bewegt sich dann auf einer andere Kreise. — Die Gleichung der Peripherie derselben ist

$$(\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2 = \lambda^2 \quad (2)$$

Wir finden diese Relationen durch Ersetzung der Relationen zwischen $x\, y\, z$ mit $\xi\, \eta\, \zeta$. Wir erh

$$y = \frac{\eta}{\eta^2+\zeta^2}$$

$$z = \frac{\zeta}{\eta^2+\zeta^2}$$

setzen wir diese ein in (1) so muss sie in (2) übergehen — durch Gleichsetzung der Coefficienten finden wir:

$$\beta = \frac{b}{b^2+c^2-l^2}$$

$$\gamma = \frac{c}{b^2+c^2-l^2}$$

$$\lambda = \frac{l}{b^2+c^2-l^2} \quad \text{oder}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2-\lambda^2} \\ c &= \frac{\gamma}{\beta^2+\gamma^2-\lambda^2} \\ l &= \frac{\lambda}{\beta^2+\gamma^2-\lambda^2} \end{aligned}\right\}$$

Wenn wir das Spiegelbild als gegeben ansehen so finden wir an diesem Stellungen die ursprünglichen wenn wir diese Werthe und dann

$$x = \frac{\xi}{\rho^2}$$

$$y = \frac{\eta}{\rho^2}$$

$$z = \frac{\zeta}{\rho^2}$$

einsetzen in f, und den hieraus sich ergebenden positiven reellen Werth einsetzen in

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\operatorname{arctg}\frac{c}{\sigma}$$

So bekommen wir das Potential den auf

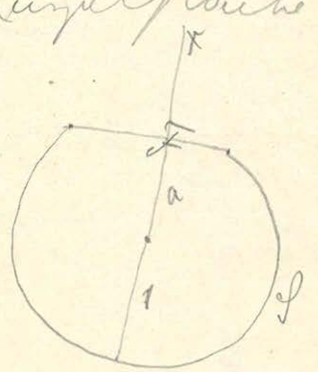
Wir haben aber nicht die Aufgabe gelöst wenn der Pol innerhalb der Ebene liegt. — Wir könnten dies nun wie das Abbildung auf einen Kugelstücken beweisen.

---

könten wie dies

Vorlesung

Kugelfläche begrenzt durch Kreis.



F = kreisförmige Ebene,
der durch S und F begrenzte
Raum = T.
x Axe senkrecht auf F
durch Mittelpunkt gehend:-
Die x Ordinate von F sei = a

Potential von Masse auf F im Gleichgewichte ist,
und in der Weise dass der Constante Potentialwerth in F = 1 sei. – Dieses Pot.

ist $= w$ —

Wie aber wenn es [illegible] dann:

$$w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} \quad \ldots\ldots (3)$$

wo s die pos. reelle Wurzel der quadr. Gl. ist

$$\frac{(x-a)^2}{s^2} + \frac{y^2+z^2}{1+s^2} = 1 - a^2 \quad \ldots\ldots (4)$$

der Unterschied dieser Gl. von der anderen abgeleiteten ist eine Folge davon dass der Coord.-Ursprung und der Radius des Kreises andere sind.
Ich werde aber den Werth von w nicht mehr gebrauchen. —

Ich definire jetzt die Function:

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} W = w \text{ ausserhalb des Raumes } T \\ \text{aber im Innern von } \cancel{T}\ T \text{ soll} \\ W = 2 - w \text{ sein} \end{array} \right.$$

Ich werde jetzt zeigen dass W betrachtet werden kann als das Potential von Massen, die auf dem Kugelsegment S in gewisser Weise verbreitet sind. —

Vor allem sehen wir dass W ~~ausserhalb~~ innerhalb des ganzen unendlichen Raumes der Gleichung

$$\Delta W = 0 \quad \text{genügt}$$

Ferner ändert sich W und seine diff. Quot. stetig beim Durchgange von F – also erleidet keinen Sprung – dies beweise ich. –

Was den Werth von W für einen Punkt von F anbetrifft ist es klar dass da kein Sprung stattfindet – denn für einen Punkt von F ist ~~W~~ $w = 1$

F

$x+$ $\qquad$ $x-$

W $\qquad$ $W = 1$ $\qquad$ $= 1$

hier ist $x+$ und $x-$ für Punkte unendl. nahe zu F auf und unterhalb von F.

Nach derselben Bezeichnung ist:

$$\frac{\partial w}{\partial x_+} = -\frac{\partial w}{\partial x_-}$$

für die pos. Seite habe ich $W = 1$ als

$$\frac{\partial W}{\partial x_+} = \frac{\partial w}{\partial x_+}$$

auf der negativen Seite ist also

$$\frac{\partial W}{\partial x_-} = -\frac{\partial W}{\partial x_-}$$

also

$$\frac{\partial W}{\partial x_+} = \frac{\partial W}{\partial x_-}$$

Also erleidet an dies keinen Sprung. – Daraus dass W selbst keinen Sprung erleidet darf – nur noch weisen dass alle Diff. Quot. nach x gerader Ordnungszahl keinen Sprung erleiden. – Man sieht dies nach der Glgn

$$\Delta W = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)$$

So kann ich es an $\frac{\partial W}{\partial x_-}$ nur beweisen.

Es ist also W das Potential von Electricität welche ~~nicht~~ auf F liegt. –

Wenn aber W wirklich Pot. innerhalb T so muss es auf S beschränkt sein. –

Es könnte allerdings auch W Pot. sein von Massen die theilweise auf S theilweise ~~auf~~ in der ∞ liegen. –

Da nun aber W = 0 sein. –

Aus allen ~~Schluss~~ diesen folgt der Schluss

Dass W Potential von Elect. ist die in gewisser Weise auf S verbreitet ist.

Ich weiss nicht auf welche Weise diese verbreitet ist. –

Ich werde jetzt statt W einen andern machen. –

statt dem ~~Pot~~ Punkte auf welchen se
W bezieht — denke ich mir einen
zweiten Pun $x_1\ y_1\ z_1$, denke mir
dies eingesetzt und neue W_1

Ich will jetzt statt $x_1\ y_1\ z_1$ gehen
gewisse Functionen von $x\ y\ z$ an

$$\underbrace{x_1 = \frac{x}{r^2} \quad y_1 = \frac{y}{r^2} \quad z_1 = \frac{z}{r^2}} \quad (6,$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots (7,$$

Hierdurch wird W eine gewisse Funct
von $x\ y\ z$ für welche ich den Namen
W_1 beibehalten will. —
Diese Gleichung genügt nicht der Gl.

$$\Delta W_1 = 0$$

aber

$$\Delta \frac{1}{r} W_1 = 0$$

wo Potential von Electricität

welche hinzu[?] auf dem Spiegelbe[?]
der Ebene dessen Pot. W ist.
Jeder Punkt vom Radius 1 hat sich
selbst zum Spiegelbild – also
ist das Spiegelbild von S wieder
S. – Und somit ist $\frac{1}{r}W_1$ das
Potential von Elektr. auf S

Ebenso ist es W.

Und summiert eine lineare Fn
von W und W_1 wird das Pot.
auf S sein. –

also

$$\frac{1}{2}\underbrace{\left(W + \frac{1}{r}W_1\right)}$$

Ich werde nachweisen. dass dies
Pot. 1.

Im inneren von T ist

$$v = 2 - w$$

~~W~~ für einen Punkt unendlich nahe zu S innerhalb ist

$$W = 2 - w$$

das Spiegelbild dieses Punktes liegt unendlich nahe zu S aber ausserhalb, daher ist:

$$\frac{1}{r} W_1 = w$$

Das arithm. Mittel ist

$$= 1$$

Wenn der Punkt ausserhalb liegt so ist: $W = w$

Spiegelbild von ihm

$$\frac{1}{r} W_1 = 2 - w$$

Das Arithm. Mittel ist wieder
= 1.

Man wird jetzt auch die Steinigewichts
auf einen Segment auf welchem Palm
dies that.
<u>Lipschitz</u> 66 Band Crelle. Borch.