Ms 5097/10-11. Eötvös Loránd [illegible]
egyetemi jegyzetei

Bis jetzt haben wir stets den Widerstand der Luft vernachlässigt. Nehmen wir nun aber an, dass der Schwerpunkt des Pendels, der der verdrängten Luftmasse und die Drehungsachse in einer geraden Linie liegen und bezeichnen mit M' die Masse mit S' die Entfernung des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse von der Drehungsaxe, so ist das Drehungsmoment des Pendels $= Mg.S\sin u$, das der verdrängten Luft $= -M'g.S'\sin u$ also das resultirende Moment $(MS - M'S')g\sin u$. Bezeichnet man ferner mit M das Trägheitsmoment des Pendels, so ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{(MS - M'S')g\sin u}{\mathsf{M}}$$

und

$$l = \frac{\mathsf{M}}{M.S - M'S'}$$

Das Pendel setzt aber die Luft durch seine Schwingungen in Bewegung und dadurch wird sein Trägheitsmoment M vergrössert durch einen Ausdruck der, wie Bessel gefunden, proportional mit der Dichtigkeit der umgebenden Luft ist also mit M' und zwar ist

$$l = \frac{\mathsf{M} + M'S'^2.K}{MS - M'S'}$$

worin K einen constanten Factor bezeichnet der bei Bessels Pendelversuchen $= 1,95$ war. Ein Reversionspendel kann so eingerichtet sein, dass der Einfluss der Luft ganz eliminirt wird. Es wird dies der Fall sein, wenn S und K auf beiden Schneiden dieselben sind, weil sie dann durch das Subtrahiren der beiden Gleichungen

$$l_1 = \frac{\mu + M s_1^2 + M'S'^2 K}{M s_1 - M'S'}$$

$$l_2 = \frac{\mu + M s_2^2 + M'S'^2 K}{M s_2 - M'S'}$$

fortfallen. Dies geschieht, sobald die Gestalt des Pendels symmetrisch ist in Bezug auf beide Schneiden und dann ist

$$l M(s_1 - s_2) = M(s_1^2 - s_2^2)$$

$$l = s_1 + s_2$$

Nach Bessels Pendelversuchen ist in Königsberg die Länge des einfachen Secundenpendels 440,8147''' Par. also
$g = 4350,666'''$ Par. oder

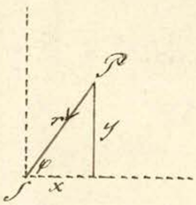
$$g = 9^m,814360$$

Eine genaue Beschreibung aller Details und ihrer Berichtigung giebt Bessel in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1826.

Das Gravitationsgesetz.

Newton, der Entdecker des allgemeinen Gravitationsgesetzes, wonach 2 Massen auf einander mit einer Kraft wirken, die proportional dem Producte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entspannung ist, leitete aber durch folgende Betrachtungen die 3 Keplerschen Gesetze ab.

Nehmen wir die Masse des Planeten zur Einheit und nennen die der Sonne M; bezeichnen wir ferner mit f die Kraft, mit der zwei der Einheit gleiche Massen in der Einheit der Entfernung aufeinander wirken, und mit r die Entfernung SP; nehmen wir ferner die Sonne zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und setzen



$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

und betrachten wir endlich eine Bewegung als positiv, wenn sie in den Richtungen der Axen, als negativ wenn sie in den entgegengesetzten geschieht, so sind die Componenten der Anziehungskraft

$$\frac{fM}{r^2} \cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{fM}{r^2} \cdot \sin\varphi$$

Vigyázni ~~az ej~~ bolygók
tömegének kiszámítására
fM helyett írd f(M+m)

oder

$$\frac{fM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \frac{fM}{r^2} \cdot \frac{y}{r}$$

also die Componenten der Beschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fMx}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{fMy}{r^3}$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} = -x : -y$$

oder

$$-y\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das vollständige Differential von $-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$; wir haben also

$$d\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

oder

$$-y \cdot \frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{dy}{dt} = C$$

Diese Gleichung spricht das erste Keplersche Gesetz aus, wie wir sehen werden. Übertragen wir sie nämlich in Polarcoordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi\frac{dr}{dt} - r \cdot \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\varphi\frac{dr}{dt} + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

also

$$\begin{aligned}-y \cdot \frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} &= -r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt} + r^2\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}\\ &\quad + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt} + r^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = C\end{aligned}$$

also

$$r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C$$

oder

$$\text{I} \quad r^2 \cdot d\varphi = C\,dt$$

Der Ausdruck $r^2 d\varphi$ ist aber ein unendlich kleiner Sektor der im Zeitelement dt beschrieben wird. Dieser Sektor ist nach dieser Gleichung stets gleich gross für ein gleich grosses Zeitelement, welche Werthe auch φ und r haben mögen. Integrirt man, so gilt dies auch für endliche Sektoren und wir haben daher das erste Keplersche Gesetz:

<u>Der radius vector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.</u>

Suchen wir nun ein anderes erstes Integral der Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f M . x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{f . M . y}{r^3}$$

Multipliciren wir die erste mit dx und die 2te mit dy so erhalten wir, wenn wir sie addiren, links die Summe zweier vollständigen Differentiale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -f M . \frac{x\,dx + y\,dy}{r^3}$$

Differentiiren wir nun die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

so folgt

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr$$

also

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{r^3} = \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$$

Es folgt also wenn man dies einsetzt

$$2)\ \left(\frac{dx}{dt}\right) d.\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right).\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) = + fM d.\left(\frac{1}{r}\right)$$

Bezeichnet man mit ds ein Bogenelement der Bahn, mit v die Geschwindigkeit, so ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

also

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Differentiirt man diese Gleichung, so folgt

$$v\,dv = \frac{dx}{dt}.\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Setzt man dies in Gleichung 2) ein, so folgt

$$v\,dv = fM.d\left(\frac{1}{r}\right)$$

und integrirt und bezeichnet mit $-\frac{h}{2}$ die willkürliche Constante, so folgt

$$v^2 = \frac{2fM}{r} - h$$

Führt man jetzt durch die schon oben gebrauchten Formeln Polarcoordinaten ein, so folgt, wenn man statt v^2 wieder $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ setzt

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\cos\varphi\sin\varphi\,\frac{dr}{dt}.\frac{d\varphi}{dt} + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ + \sin^2\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2r\cos\varphi\sin\varphi\,\frac{dr}{dt}.\frac{d\varphi}{dt} + r^2\cos^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\end{array}\right\} = \frac{2fM}{r} - h$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2fM}{r} - h$$

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left(2f\frac{M}{r} - h\right) dt^2$$

und da nach dem ersten Gesetze

$$r^2 d\varphi = c\,dt$$

oder

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

so ist

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left(2f\frac{M}{r} - h\right)\frac{r^4 d\varphi^2}{c^2}$$

$$c^2 dr^2 = r^2 d\varphi^2\left(-hr^2 + 2fMr - c^2\right)$$

$$d\varphi = \frac{c\,dr}{r\sqrt{-hr^2 + 2fMr - c^2}}$$

$$\varphi = \int_c^r \frac{c\,dr}{r\sqrt{-hr^2 + 2fMr - c^2}}$$

Um die Integration auszuführen, setzen wir $\left[r = \frac{1}{z}\right]$. Dann ist

$$dr = -\frac{dz}{z^2}$$

also

$$\varphi = -\int \frac{c\,dz}{\sqrt{-h + 2fMz - c^2 z^2}}$$

Nun setzen wir

$$\underline{-h + 2fMz - c^2 z^2 = \alpha - (\beta z - \gamma)^2}$$

so daß also

$$\beta^2 = c^2 \qquad -h = \alpha - \gamma^2 \qquad \beta\gamma = fM$$

d. h.

$$[\beta = c]$$

$$\left[\gamma = \frac{fM}{c}\right]$$

$$\left[\alpha = -h + \frac{f^2M^2}{c^2}\right]$$

Dann wird

$$\varphi = -\int \frac{c\,dz}{\sqrt{\left(-h+\frac{f^2M^2}{c^2}\right) - \left(cz - \frac{fM}{c}\right)^2}} = -\int \frac{c\,dz}{\sqrt{-h+\frac{f^2M^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\left(cz-\frac{fM}{c}\right)^2}{-h+\frac{f^2M^2}{c^2}}}}$$

Setzen wir endlich

$$\left[\frac{cz - \frac{fM}{c}}{\sqrt{-h+\frac{f^2M^2}{c^2}}} = u\right]$$

so ist

$$\frac{c\,dz}{\sqrt{-h+\frac{f^2M^2}{c^2}}} = du$$

und

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

oder wenn φ_0 die willkürliche Const.

$$\varphi = \operatorname{arc.cos} u + \varphi_0$$

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = u$$

und wenn für u wieder der Werth in r gesetzt wird

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{\frac{c}{r} - \frac{fM}{c}}{\sqrt{-h+\frac{f^2M^2}{c^2}}}$$

$$\text{II} \quad r = \frac{\frac{c^2}{fM}}{1+\cos(\varphi-\varphi_0)\sqrt{1-\frac{hc^2}{f^2M^2}}}$$

Diese Gleichung drückt, wie sich zeigen wird das 1te Keplersche Gesetz aus.

$$r = \frac{c}{\cos(\varphi-\varphi_0)\sqrt{\;} + \frac{fM}{c}}$$

Dann nehmen wir die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so kann sie geschrieben werden

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 = b^4 + b^2c^2$$ +) (l. mellék iv.

Zählt man nun die Abscissen von einem Brennpunkte aus, setzt also $c - x$ statt x, so folgt

$$a^2y^2 - 2b^2cx + b^2x^2 = b^4$$

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{b^4 + 2b^2cx}{a^2}$$

$$y^2 + x^2 = \frac{b^4 + 2b^2cx + c^2x^2}{a^2} = \left(\frac{b^2 + cx}{a}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \left(a \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2} + \frac{c}{a}x\right)^2$$

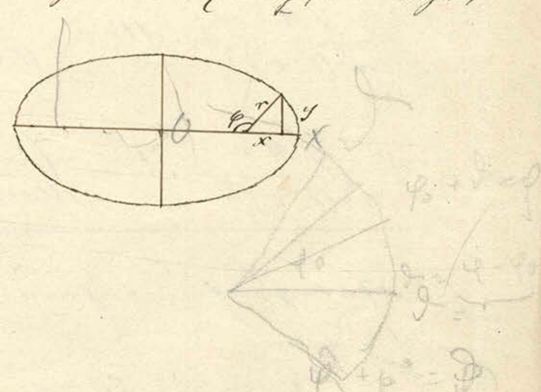
oder $\left[\frac{c}{a} = e\right]$ gesetzt:

$$x^2 + y^2 = \left(a(1-e^2) + ex\right)^2$$

Dies ist also die Brennpunktsgleichung einer Ellipse. Setzen wir nun

$$x = -r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$



so folgt

$$r = a(1-e^2) - er\cos\varphi$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\varphi}$$

Setzen wir hierin statt φ $\varphi - \varphi_0$, so geht die Gleichung dieser E. in die Gleichung einer über, deren große Axe mit der früheren den Winkel φ_0 bildet. Vergleichen wir dann diese Gleichung mit II, so finden wir, daß die Planetenellipsen um die Sonne beschreiben und zwar ist für sie

$$1 - \frac{hc^2}{f^2M^2} = e^2$$

$$\frac{fM}{h} = a$$

Hieraus folgt

$$c = \sqrt{a(1-e^2)fM}$$

Nach dem ersten Gesetze war

$$r^2 d\varphi = c\,dt$$

Setzt man für r^2 und c ihren Werthe, so folgt

$$\sqrt{a(1-e^2)fM}\,dt = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$\frac{fM^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dt = \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}$$

$$3)\quad \frac{fM^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot t = \int \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}$$

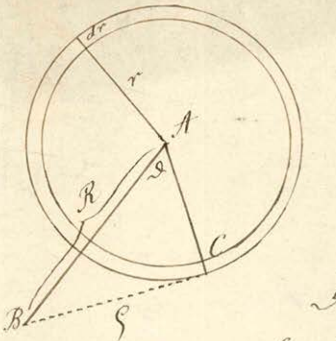
$$T = \frac{(a(1-e^2))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f\mu}} \int_{\varphi'}^{\varphi'+2\pi} \frac{d\varphi}{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}$$

Zur Integration führen wir eine neue Variable ein, indem wir setzen

$$\left[\ tg\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ tg\,\frac{\varepsilon}{2}\ \right]$$

und bestimmen daß für $\varphi = 0$ auch $\varepsilon = 0$ sein soll. Die Astro=

mit dem Radius r, der Dicke dr, der Dichtigkeit κ. Der



Punkt, auf den sie wirkt, sei B um R vom Mittelpunkte A entfernt. Wir nehmen nun einen variabeln Punkt C auf der Schicht an und nennen den Winkel AB gegen AC ϑ. Lassen wir ϑ von 0 bis π variiren, so haben wir einen unendlich dünnen Halbkreis.

Denken wir uns nun durch AB eine feste Ebene gelegt und nennen den Winkel derselben mit der variirenden ABC ω, so haben wir, wenn wir ω von 0 bis 2π variiren lassen die ganze Kugelschicht. ϑ kann mit der Breite, ω mit der Länge verglichen werden. Ein Element der Kugelschale ist

$$r\,d\vartheta \,.\, r\sin\vartheta \,.\, d\omega \,.\, dr$$

also ein Massenelement

$$\kappa r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega = dm$$

und wenn $BC = \rho$, so folgt

$$dV = \frac{dm}{\rho}$$

also

$$V = \int_{2\pi}^{0}\int_{\pi}^{0} f\kappa \frac{r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\omega}{\rho}$$

$$V = f.\kappa r^2 dr \int_{2\pi}^{0}\int_{\pi}^{0} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega}{\rho}$$

Aus $\triangle$ ABC folgt

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta$$

$$-\cos\vartheta = \frac{\rho^2 - R^2 - r^2}{2Rr}$$

Differentiirt man diese Gleichung, so folgt

$$\sin\vartheta . d\vartheta = \frac{\varrho\, d\varrho}{Rr}$$

Dies in den Werth von V eingesetzt, giebt

$$V = C.\int_{2\pi}^{0}\int_{\pi}^{0}\frac{d\omega\, d\varrho}{rR}$$

Integrirt man in Bezug auf ω von 0 bis 2π, so folgt

$$V = f.\kappa r^2 dr.\, 2\pi\int_{\pi}^{0}\frac{d\varrho}{rR}$$

Bei der 2ten Integration müssen wir den innen liegenden Punkt, für den $r > R$ von dem außenliegenden, für den $r < R$, unterscheiden. Es ist nämlich

$$V_a = f.\kappa.4\pi r^2 dr.\frac{1}{R}$$

$$V_i = f.\kappa.4\pi r^2 dr.\frac{1}{r}$$

oder da die Masse der Kugelschicht

$$m = 4\pi r^2 dr.\kappa$$

$$V_a = fm.\frac{1}{R}$$

$$V_i = fm.\frac{1}{r}$$

Es folgen hieraus die beiden wichtigen Sätze: Eine Kugelschicht übt auf einen außenliegenden Punkt eine solche Anziehung aus, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre. Und eine Kugelschicht übt auf einen innerhalb liegenden Punkt keine Wirkung aus, da V_i von $x\,y\,z$ unabhängig, also die Differentialquotienten $= 0$.

Sei nun R' der Erdradius und M die Erdmasse, die wir uns aus lauter concentrischen Schichten zusammengesetzt denken. Ist dann R die Entfernung eines Punktes, so ist seine Anziehung $\frac{fM}{R^2}$. An der Erdoberfläche, wo $R = R'$ ist die Anziehung d.h. die Schwere also

$$g = \frac{fM}{R'^2}$$

In der Höhe h über der Oberfläche ist also

$$g_h = \frac{fM}{(R'+h)^2} = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R'}\right)^2}$$ Anm. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots$

Ist h gegen R' klein, so können wir $\left(\frac{h}{R'}\right)^2$ vernachlässigen und dann folgt

$$g_h = g\left(1 - 2\frac{h}{R'}\right)$$

Nehmen wir ferner an, die Dichtigkeit hänge nur von der Entfernung r vom Mittelpunkte ab, es sei also

$$k = f(r)$$

so ist die Anziehung d.h. Schwere, wenn man bis auf die Entfernung R vom Mittelpunkte unter die Oberfläche steigt

$$g_{(R'-R)} = \frac{f \cdot 4\pi}{R^2}\int_R^0 k\,r^2\,dr$$

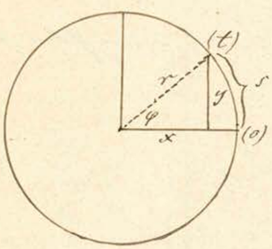
Da uns aber das Gesetz der Dichtigkeit unbekannt ist und stets bleiben wird, so können wir dies Integral niemals finden. Wäre R constant, so würde sein

$$g_{(R'-R)} = f\,\frac{4\pi}{3}\,\kappa \cdot R$$

Dann würde also g abnehmen mit zunehmender Tiefe. In Wirklichkeit nimmt die Schwere zu, sobald man in die Erde niedersteigt und wir können daraus schließen, daß ihre Dichtigkeit im Innern größer ist als an der Oberfläche.

Kräfte, die die Schwere modificiren.

1) Die Centrifugalkraft. Nehmen wir an, daß ein Körper mit constanter Schnelligkeit sich in einem Kreise bewegt.



Welche Kraft kann dies bewirken? Wir wollen sie aufsuchen. Sei m die Masse des Körpers, so sind die Componenten der bewegenden Kraft

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

Nehmen wir an, daß für $t = 0$ auch $y = 0$ war, d.h. daß sich der Körper auf der x Axe befand, als man die Zeit zu zählen anfing, und nennen wir den in der Zeit t beschriebenen Bogen s und die Geschwindigkeit v, so ist

$$s = v \cdot t$$

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{vt}{r}$$

Setzen wir nun $x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$ d.h.

$$x = r \cdot \cos\frac{vt}{r}$$

$$y = r\sin\frac{vt}{r}$$

so folgt durch 2malige Differentiation dieser Gleichungen

$$X = -m\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}$$

$$Y = -m\frac{v^2}{r}\sin\frac{vt}{r}$$

oder

$$X = -m\frac{v^2}{r^2}x$$

$$Y = -m\frac{v^2}{r^2}y$$

also

$$X : Y = x : y$$

Die Resultante d.h. die Centrifugalkraft hat also die Richtung von r und zwar vom Mittelpunkt fort.

Sie ist

$$\sqrt{X^2+Y^2} = m\frac{v^2}{r}$$

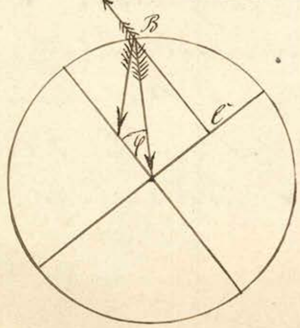
Setzen wir $\frac{v^2}{r} = \alpha$, so finden wir für den Aequator

$$mg = mg' - m\alpha$$

denn die Centrifugalkraft wirkt der Schwere am Aequator direkt entgegen. Für den Aequator ist $\alpha = 0^m{,}03361$

also

$$g = g' - 0^m{,}03361$$



An den übrigen Theilen der Erde aber wirkt die Centrifugalkraft der Schwere nicht direkt entgegen. Die Geschwindigkeit eines Punktes B, der die Breite φ hat ist, wenn R der Erdradius

$$\frac{2\pi R\cos\varphi}{24.60.60} = v$$

$$\left[\frac{2\pi R}{24.60.60} = \alpha\right] \qquad \underline{v = \alpha\cos\varphi}$$

~~Es ist nun wenn g die Resultante der Schwere g' und der Centrifugalkraft bedeutet~~

~~$$g^2 = g'^2 - 2g'\alpha\cos\varphi + \alpha^2\cos^2\varphi$$~~

~~oder $\alpha^2\cos^2\varphi$ vernachlässigt werden kann~~

~~$$g = g'\sqrt{1-2\frac{\alpha}{g'}\cos\varphi}$$~~

~~Dies giebt nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt~~

~~$$g = g' - \alpha\cos^2\varphi$$~~

und da wenn G die Schwere am Aequator

$$G = g' - \alpha$$

a centrifugalerő ~~érvényesül~~ egyenlő a

$$\frac{\alpha^2\cos^2\varphi}{R\cos\varphi} = \frac{\alpha^2}{R}\cos\varphi$$

ez az erő

nem hat egyenesen

a nehézségerő

ellenében / ugyanis

so folgt

$$\underline{g = G + \alpha\sin^2\varphi}$$

Die aus Pendelversuchen abgeleitete Gleichung

$$\underline{g = 9^m,78048 + 0,05091 \cdot \sin^2\varphi}$$

stimmt im Werth von α nicht ganz überein mit jener; es kommt dies daher, dass wir die Erde als genaue Kugel betrachtet haben. Die Abplattung und die Grösse α können theoretisch nicht beide bestimmt werden, aber Clairaut hat einen Satz aufgestellt, der eine Relation dieser Grössen herstellt. Dieser Satz findet sich im 3ten Bande der mécanique céleste entwickelt und lautet:

Wenn G die Schwere unter dem Aequator, $G + \Delta G$ die Schwere am Pol und a die Abplattung und α jener Faktor 0,3367, so ist

$$\Delta G + a \cdot G = \alpha \cdot \frac{5}{2}$$

Die Abplattung können wir aus astronomischen Messungen angeben $= \frac{1}{300}$ und nehmen wir G [illegible]18048 so folgt

$$\Delta G = 0^{m},0516$$

also fast genau übereinstimmend mit dem empirischen Werth 0,05091.

nennen wir nun

φ die wahre Anomalie des Planeten zur Zeit t

E — excentrische — — —

Wir haben also

$$\int \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}$$

zu finden. Es ist

$$1+e\cos\varphi = (1+e)\cos^2\frac{\varphi}{2} + (1-e)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{(1+e)+(1-e)\,tg^2\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{(1-e^2)+(1-e^2)\,tg^2\frac{E}{2}}{(1-e)+(1+e)\,tg^2\frac{E}{2}}$$

$$\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^2}\left((1-e)\cos^2\frac{E}{2} + (1+e)\sin^2\frac{E}{2}\right)^2$$

Ferner ist

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{dE}{\cos^2\frac{E}{2}}$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,dE}{\cos^2\frac{E}{2}\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$d\varphi = \sqrt{1-e^2}\,\frac{dE}{(1-e)\cos^2\frac{E}{2}+(1+e)\sin^2\frac{E}{2}}$$

$$\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left((1-e)\cos^2\frac{E}{2}+(1+e)\sin^2\frac{E}{2}\right)dE$$

$$\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1\mp e\cos E\right)dE$$

Nehmen wir nun, daß die Zeit mit Beginn der Bewegung angefangen wurde zu zählen, daß also E φ t zugleich verschwinden und integrieren dann, so fällt die willkürliche Constante fort und wir haben:

$$\int \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,(E - e\sin E)$$

oder nach 3)

$$\text{III} \quad t = a^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{fM}}\,(E - e\sin E)$$

$$g = \frac{fm}{R^2} = 9{,}81645$$

$$T^2 = a^3 \frac{1}{f(M+m)}\, 4\pi^2$$

$$R = 6364551\,m \cdot \frac{M}{m^3}$$

$$a = 23984\, r$$

$$T = 365{,}2563 \cdot 86400''$$

Für $\varphi = 0$ ist auch $t = 0$ und $E = 0$. Für $\varphi = 2\pi$ und $E = 2\pi$ folgen wir $t = T$, wo also T die Umlaufszeit des Planeten bedeutet. Dann ist

$$\frac{M}{m} = 354592$$

$$T = a^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{fM}} \cdot 2\pi$$

Da fM nur von der Sonne abhängig, so haben wir für einen zweiten Planeten

$$T_1 = a_1^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{fM}} \cdot 2\pi$$

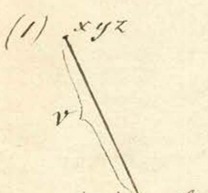
also das 3te Keplersche Gesetz:

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

	Umlaufsz. d. T		Körp. Entfernung a
Merkur	87,97	–	0,387
Venus	224,70	–	0,723
Erde	365,25	–	1,000
Mars	686,98	–	1,524
Jupiter	4332,59	–	5,203
Saturn	10758,97	–	9,539
Uranus	30688,71	–	19,182
Neptun	60452,40	–	30,145

Weitere Folgerungen des Gravitationsgesetzes.

Humboldt Atlas



Denken wir uns eine Masse m im Punkte abc, so wird diese auf die im Punkte xyz gedachte Masseneinheit eine Wirkung ausüben, deren Componenten (wenn wir und f die Kraft bezeichnet, mit der 2 der Einheit gleiche Massen in der Einheit der Entfernung auf einander wirken) nach den Axen sind

$$\frac{fm(a-x)}{r^3}\,,\qquad \frac{fm(b-y)}{r^3}\,,\qquad \frac{fm(c-z)}{r^3}$$

wo r die Entfernung der Punkte xyz und abc ist. Nehmen wir nun noch andere Massen $m_1\, m_2 \ldots$ in $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2 \ldots$ an, so sind die Componenten der Resultante aller Wirkungen dieser Massen auf die Masseneinheit in xyz:

$$X = f\left(m\frac{a-x}{r^3} + m_1\frac{a_1-x}{r_1^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$Y = f\left(m\frac{b-y}{r^3} + m_1\frac{b_1-y}{r_1^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$Z = f\left(m\frac{c-z}{r^3} + m_1\frac{c_1-z}{r_1^3} + \ldots\ldots\right)$$

wo $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$

$$r_1^2 = (a_1-x)^2 + (b_1-y)^2 + (c_1-z)^2$$

Differentiirt man die Gleichung

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

partiell nach x, so folgt

$$r\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -(a-x)$$

$$1)\quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r}$$

Ferner ist

$$2)\quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$

Multiplicirt man 1) mit 2), so folgt

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = + \frac{a-x}{r^3}$$

also

$$\frac{\partial\left(\frac{m}{r}\right)}{\partial x} = m \cdot \frac{a-x}{r^3}$$

und ebenso

$$\frac{\partial\left(\frac{m}{r}\right)}{\partial y} = m \cdot \frac{b-y}{r^3}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{m}{r}\right)}{\partial z} = m \cdot \frac{c-z}{r^3}$$

Die Componenten der Anziehung sind also die partiellen Differentialquotienten einer Function nach $x\,y\,z$. Dehnen wir dies auf die übrigen Massen aus, so folgt

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

worin $V = f\left(\frac{m}{r} + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots\right)$

Diese Function V heisst d. Potential der anziehenden Massen in Bezug auf die Masseneinheit in $x\,y\,z$. Spricht man vom Potential in Bezug auf einen Punkt, so denkt man sich darin stets die Masseneinheit.

Es soll jetzt die Anziehung der Erde auf einen Punkt unter der Voraussetzung berechnet werden, dass in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte die Dichtigkeit gleich sei, dass die Erde also aus lauter concentrischen Schichten von gleicher Dichtigkeit bestehe. Nehmen wir eine unendlich dünne Schicht

Wir wollen nun die Relation zwischen Druck und Volumen eines Gases ableiten, wenn es sich ausdehnt, ohne daß ihm Wärme zugeführt wird. Wir betrachten dabei wieder p und v als die unabhängigen Variabeln. Es war

$$dQ = Pdp + Vdv$$

hier soll nun $dQ = 0$ sein also

$$Pdp + Vdv = 0$$

oder wenn man die Werthe von P und V S. 175 einsetzt

$$Cvdp + C'pdv = 0$$

Dieses integrirt giebt

$$p \cdot v^{\frac{C'}{C}} = const.$$

Diese Constante kann entweder aus der Temperatur oder aus 2 zusammengehörenden Werthen von p und v bestimmt werden. Hiezu haben wir noch die Relationen

$$pv = R(1+\alpha t)$$

$$T = a + t$$

$$\frac{v^{\frac{c'}{c}}}{v} = \frac{A}{T}$$

$$T = A \cdot \frac{v}{v^{\frac{c'}{c}}} = A v^{\frac{c-c'}{c}}$$

worin $a = 273^{\circ}$ ungefähr.

Wir wollen jetzt eine allgemeine Betrachtung der schon bisher behandelten beiden Hauptgleichungen geben, indem wir 2 beliebige noch jedesmal zu bestimmende Variabeln x und y einführen und p v t als Functionen derselben betrachten. Dann wird

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

also

$$\int pdv = \int p\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

Wir setzen nun

$$\text{I}\quad dQ = X\,dx + Y\,dy$$

Der Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit liefert uns also

$$\int\left\{\left(\varkappa X - p\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\varkappa Y - p\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right\} = 0$$

Dieses Integral muss über eine beliebige geschlossene Kurve genommen, 0 sein d. h. sein Inhalt muss ein vollständiges Differential sein, also

$$\frac{\partial\left(\varkappa X - p\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\varkappa Y - p\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

$$\text{II}\quad \varkappa\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Aus dem 2ten Satze

$$\int\frac{dQ}{T} = 0$$

erhalten wir ferner, indem wir $T = a + t$ setzen

$$\int\left(\frac{X}{a+t}\,dx + \frac{Y}{a+t}\,dy\right) = 0$$

also hieraus ähnlich wie vorher, da dies ein vollständiges Differential ist

$$\text{III}\quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{a+t}\left(X\frac{\partial t}{\partial y} - Y\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

Wir wollen nun annehmen, dass der von uns betrachtete Körper eine Flüssigkeit ist, die mit ihrem eigenen Dampf in Berührung ist. Wir setzen die eine Variable y = der Temperatur t und die andere x = dem Gewicht des Dampfes. Da wir schon oben das ganze Gewicht des betrachteten Körpers zur Einheit genommen haben, so wird das Gewicht der Flüssigkeit $= 1 - x$ sein. Es ist hier also

$$1)\; dQ = X dx + Y dt.$$

Setzen wir hierin $dt = 0$, so wird

$$2)\; \frac{dQ}{dx} = X$$

also ist X die Wärmemenge, welche unserem Körper zugeführt werden muß, damit er in Dampf von derselben Temperatur verwandelt werde d.h. die latente Wärme des Dampfes, die wir $= r$ setzen wollen. Dieses r wird dann allein eine Function von t sein. Setzen wir dagegen $x = \text{const.}$ d.h. $dx = 0$, so wird

$$3)\; \frac{dQ}{dt} = Y.$$

Es ist also Y die specifische Wärme des Körpers bei constantem x. Wenn x constant sein soll, so muß der Druck p so geändert werden, daß er stets gleich der Spannung des Dampfes der Flüssigkeit ist. Der Druck p ist also nur eine Function von der Temperatur t. Bezeichnen wir mit c die specifische Wärme der Flüssigkeit und mit h die des Dampfes bei solchem Drucke p, der stets gleich der Spannung des Dampfes ist, so können wir Y in 2 Theile zerlegen, nämlich

$$4)\; Y = (1 - x)\, c + x \,.\, h$$

hierzu

$$5)\; X = r$$

Nehmen wir an, daß das Volumen der Gewichtseinheit der Flüssigkeit bei t und p = σ und das des Dampfes = s sei und bezeichnen mit v das ganze Volumen, so ist

$$6)\quad v = (1-x)\sigma + x \cdot s$$

s und σ sind von x unabhängig und nur Funktionen von t. Wir haben also p, s, σ, v als Funktionen nur von t zu betrachten. Dann erhalten wir aus den Gleichungen II und III S. 181 sofort, indem wir die Gleichungen 4) 5) 6) berücksichtigen

$$7)\quad \varkappa\left(\frac{dr}{dt} + c - h\right) = \frac{dp}{dt}(s-\sigma)$$

$$8)\quad \frac{dr}{dt} + c - h = \frac{r}{a+t}$$

und hieraus

$$9)\quad r = \frac{a+t}{\varkappa} \cdot (s-\sigma)\frac{dp}{dt}$$

oder

$$10)\quad dt = dp \cdot \frac{a+t}{\varkappa} \cdot \frac{s-\sigma}{r}$$

Wir können also aus 10) die Erhöhung des Siedepunktes berechnen, wenn wir den Druck verstärken.

Diese Betrachtungen haben sofort auch Gültigkeit für einen Körper der theils fest und theils flüssig ist, wenn wir die Bedeutung der Zeichen entsprechend übertragen. Dann können wir aus 10) die Änderung der Temperatur des Schmelzpunktes finden. Ist $s-\sigma > 0$ d. h. dehnt sich der feste Körper beim Schmelzen aus, so wird der Schmelzpunkt in die Höhe gerückt; ist $s-\sigma < 0$ d. h. zieht sich der Körper beim Schmelzen zusammen wie z. B. das Wasser so wird der Schmelzpunkt erniedrigt. Diese theoretischen Resultate sind durch W. Thomson experimentell bestätigt worden.

Wir fahren nun in der allgemeinen Betrachtung fort und setzen das Element der Arbeit, welches $= pdv$ ist,

$$11)\quad dA = X_1 dx + Y_1 dy$$

dann erhält man hier anstatt der Sätze II und III

$$12)\quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{a+t}\left(X\frac{\partial t}{\partial y} - Y\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

Wir setzen nun y wieder $= t$, dann bedeutet Y die spezifische Wärme des Körpers bei constantem x. Dann folgt aus 12)

$$13)\quad \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial X_1}{\partial t} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{a+t}\cdot X$$

Wir denken uns nun, daß x geändert wird ohne Wärmezufuhr. Dann haben wir $dQ = 0$ zu setzen und es folgt

$$0 = X dx + Y dt$$

$$14)\quad \frac{dt}{dx} = -\frac{Y}{X}$$

Sei nun unser Körper ein Draht, oben befestigt und unten ein Gewicht P tragend. Das Gewicht des Drahtes nehmen wir wieder zur Einheit. Wir setzen $x = P$ und bezeichnen die Länge des Drahtes mit L, dann wird sein

$$dA = -P dL$$

oder da L von P und t abhängig sein wird also

$$dL = \frac{\partial L}{\partial P} dP + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

ist:

$$dA = -P\frac{\partial L}{\partial P}\cdot dP - P\frac{\partial L}{\partial t}\cdot dt$$

Hier sehen wir die Bedeutung von X_1, Y_1. Es ist nämlich

$$15)\quad X_1 = -P\frac{\partial L}{\partial P}$$

$$16)\quad Y_1 = -P\frac{\partial L}{\partial t}$$

Setzt man diese Werthe ein, so folgt aus 13):

$$17)\quad X = (a+t)\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}$$

und aus 14)

$$\frac{\partial t}{\partial P} = -\frac{X}{Y} = -\frac{a+t}{\varkappa}\cdot\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$18)\quad Y = -(a+t)\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}\cdot\frac{\partial P}{\partial t}$$

Hier ist $\frac{\partial l}{\partial t}$ der thermische Ausdehnungscoefficient multipliciert mit der ursprünglichen Länge L des Drahtes.

Wir setzen nun die allgemeine Betrachtung in etwas anderer Richtung fort. Wir setzen

$$dQ = Xdx + Tdt$$

wobei wir bemerken, daß dieses T nicht etwa die absolute Temperatur wie früher bedeutet, sondern ein ganz neu eingeführtes ist, das die specifische Wärme des Körpers bei constantem x bedeutet. Das Element der Arbeit ist pdv. Wir haben schon oben wiederholt bemerkt, daß dann

$$\int(pdv - \varkappa dQ) = 0$$

ist und daß der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein vollständiges Differential sein muß. Wir wollen nun diese Funktion, deren vollständiges D. $pdv - \varkappa dQ$ ist, betrachten. Da wir x und t als unabhängige Variable betrachten, so ist

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}\,dt$$

also muß

$$\left(p\frac{\partial v}{\partial x} - \varkappa X\right)dx + \left(p\frac{\partial v}{\partial t} - \varkappa T\right)dt$$

ein vollständiges Differential einer Funktion die wir mit W bezeichnen wollen, sein. Wir haben also

$$1)\quad \frac{\partial W}{\partial x} = p\frac{\partial v}{\partial x} - \varkappa X \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = p\frac{\partial v}{\partial t} - \varkappa T$$

$$2)\quad X = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - p\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad T = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial W}{\partial t} - p\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

Der 2te Hauptsatz liefert uns die Gleichung

$$\int \frac{dQ}{a+t} = 0$$

Dies muß ein vollständiges Differential sein und so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{X}{a+t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{a+t}\right)$$

$$-\frac{X}{(a+t)^2} + \frac{1}{a+t}\cdot\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{a+t}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$3)\quad -\frac{X}{a+t} + \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Setzen wir hier die Werthe aus 2) ein, so folgt

$$-\frac{1}{\varkappa(a+t)}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - p\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - p\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - p\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + p\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)^2\left\{\frac{\partial\cdot\frac{p}{a+t}}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\cdot\frac{p}{a+t}}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

$$4)\quad W = W_0 + (a+t)^2\int_{x_0}^{x} dx\left\{\frac{\partial\cdot\frac{p}{a+t}}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\cdot\frac{p}{a+t}}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

wo W_0 die Constante der Integration nämlich der Werth von W für $x = x_0$. Dies W_0 wird noch von t abhängen.
Seien für $x = x_0$: $p = p_0$ $v = v_0$ $T = T_0$ dann folgt aus 1)

$$\frac{dW_0}{dt} = p_0 \frac{dv_0}{dt} - \varkappa T_0$$

also

$$5) \quad W_0 = \int_0^t \left(p_0 \frac{dv_0}{dt} - \varkappa T_0\right) dt$$

Wir wollen nun zunächst das Gesetz der Spannung des Wasserdampfes aufzustellen. Wir nehmen an, dass wir ein gewisses Wasserquantum hätten, dann sind 3 Fälle möglich: 1) Kann aller Dampf condensirt sein 2) Kann Flüssigkeit und Dampf da sein 3) Kann nur Dampf da sein. Wir nehmen
I nun zuerst an, dass nur Flüssigkeit vorhanden sei, also der Druck p grösser als die Spannung des Wasserdampfes bei der Temperatur t. Hier folgen wir die 2te Variable $x = p$. Dann folgt aus 5)

$$W_0 = \text{const.} + p_0 v_0 - \varkappa \int^t T_0\, dt$$

Setzen wir dies in 4) ein, und in 4) $p = x$, so folgt

$$W = \text{const.} + p_0 v_0 - \varkappa \int_0^t T_0\, dt + \int_{p_0}^{p} dp \left((a+t)\frac{\partial v}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial p}\right)$$

Da das Wasser fast incompressibel ist, so kann man v als von p unabhängig ansehen also $\frac{\partial v}{\partial p} = 0$ setzen. Ferner ist die Ausdehnung des Wassers $\frac{\partial v}{\partial t}$ sehr klein also können wir auch dieses Glied fortlassen d. h. das ganze letzte Integral fällt fort, und wenn wir noch

$$\text{const.} = -p_0 v_0$$

setzen, so folgt

nicht umkehrbare Kreisprocesse

$$-\frac{i^2 w}{a+t_0} - i\left\{\frac{f(t_1)}{a+t_1} - \frac{f(t_2)}{a+t_2}\right\} \leqq 0$$

Wir können nun hierin i so klein werden lassen, dass das 2te Glied das Vorzeichen der ganzen linken Seite bestimmt, indem wir die Rotationsgeschwindigkeit der Scheiben steigern und dadurch den Induktionsstrom so verstärken, dass der Thermostrom fast aufgehoben wird. Ja wir haben es in der Gewalt ihn sogar stärker als den Thermostrom zu machen, so dass wir ein sehr kleines positives oder negatives i herstellen können. Da stets jene Relation erfüllt sein muss, der Ausdruck aber willkürlich positiv oder negativ gemacht werden kann, so muss er 0 sein d.h. der Faktor muss 0 sein.

$$\underline{\frac{f(t_1)}{a+t_1} - \frac{f(t_2)}{a+t_2} = 0}$$

Da diese Temperaturen t_1 t_2 beliebig, so haben wir also

$$\frac{f(t)}{a+t} = const. = c$$

$$\underline{f(t) = c(a+t)}$$

also ist die thermoelektromotorische Kraft

$$\underline{\underline{f(t_2) - f(t_1) = c(t_2 - t_1)}}$$

Diese Gleichung ist von der Erfahrung nicht genau bestätigt worden und daraus schliessen wir, dass unsere Annahme nicht richtig war, sondern dass die Wärmeleitung die thermoelektrischen Kräfte beeinflusst.

Denken wir uns endlich eine geschlossene Hydrokette. Man hat gefunden, dass das Zersetzungsgesetz folgendes ist: Das Gewicht jedes Zersetzungsproduktes, welches in der Zeiteinheit abgeschieden ist, ist proportional mit der Intensität i. Nehmen wir an, dass ein Strom von der Intensität 1 in der Zeiteinheit chemische Prozesse erzeuge, die die Wärmemenge $\frac{1}{\varkappa} W$ erzeugen. Dann wird der Strom von der Intensität i die Menge

$$\frac{1}{\varkappa} i W$$

hervorbringen. In den kontinuierlichen Theilen der Leitung wird die Wärmemenge

$$\frac{1}{\varkappa} i^2 w$$

in der Zeiteinheit erzeugt. An den Berührungsstellen der Metalle wird zwar auch Wärme entwickelt, die aber so klein gegen die an den Berührungsstellen von Flüssigkeit und Metall ist, dass sie vernachlässigt werden kann. An den Berührungsstellen der heterogenen Leiter werde in Summa die Menge

$$\frac{1}{\varkappa} i Q$$

erzeugt. Dann ist

$$\frac{1}{\varkappa} i W = \frac{1}{\varkappa} i^2 w + \frac{1}{\varkappa} i Q$$

$$i = \frac{W - Q}{w}$$

Es ist also $W - Q$ die elektromotorische Kraft der Hydrokette. Ist in der Kette Polarisation vorhanden, wie dies in jeder wirklich darstellbaren stattfindet, so wird also die Intensität vermindert; da w und nach der Definition von W auch

W constant sind, so muss also Q variiren. Nimmt man als Einheiten

1^{mgr} 1^{mm} 1^{s} $1^{\circ}C$

so ist

$$H = 123500 \cdot 9811$$

Wir wollen nun W für die Daniell'sche Kette bestimmen. In einer Secunde zersetzt ein Strom von der Intensität 1 nach unseren Einheiten = 0,009376 Wasser. Derselbe Strom löst in 1 Secunde 0,003389 Zink auf und da nach Favre und Silbermann 1^{mgr} Zink bei seiner Oxydation die Wärmemenge (in unseren Einheiten) 714 erzeugt, so ist

$$\frac{1}{H} W = 714 \cdot 0,003389$$

$$W = 1,006 \cdot 10^{11}$$

Da nach Versuchen für die Daniell'sche Kette die electromotorische Kraft $= 1,025 \cdot 10^{11}$, so ist für dieselbe Q gleich oder sehr nahe an 0, so dass diese Kette die am meisten constante ist.

$$W = -\varkappa \int_0^t T_0\, dt$$

T_0 ist die specifische Wärme des Körpers bei constantem Druck also wenn wir sie mit c bezeichnen

$$\text{I} \quad W = -\varkappa \int_0^t c\, dt$$

II Sei nun ein Theil der Flüssigkeit schon in Dampf verwandelt, also der Druck constant = der Spannung des Dampfes, die wir mit p_1 bezeichnen wollen. Wir setzen für die 2te Variable x = dem Gewicht des schon gebildeten Dampfes also $1-x$ = Gewicht der Flüssigkeit. Setzen wir wieder $-p_0 v_0 = \text{const.}$ setzen haben wir

$$W_0 = -\varkappa \int_0^t c\, dt$$

und

$$W = W_0 - (a+t)^2 (v - v_0) \cdot \frac{d \cdot \frac{p_1}{a+t}}{dt}$$

Bezeichnen wir das Volumen der Gewichtseinheit des Dampfes mit σ und des Wassers mit s, so ist, da wir uns die Werthe $p_0\, x_0\, v_0\, T_0$ nach, als alles Wasser flüssig war, dachten

$$v_0 = 1 \cdot s$$

$$v = (1-x)s + x \cdot \sigma$$

$$v - v_0 = (\sigma - s)x$$

also

$$\text{II} \quad W = -\varkappa \int_0^t c\, dt - (a+t)^2 (\sigma - s)\, x\, \frac{d \cdot \frac{p_1}{a+t}}{dt} \quad \text{für} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{bis}\ x = 1 \end{array} \right.$$

Ist endlich alles Wasser schon in Dampf verwandelt, so setzen wir $x = v$ und finden so

$$W = -\varkappa\int_0^t T_0\,dt - (a+t)^2\int_{v_0}^{v} dv \cdot \frac{\partial\frac{p}{a+t}}{\partial t}$$

Da wir v_0 beliebig wählen können, so setzen wir $v_0 = \infty$. Dann bezeichnet T_0 die spezifische Wärme bei constantem unendlich großen Volumen und es ist

$$\text{III}\quad W = -\varkappa\int_0^t T_0\,dt + (a+t)^2\int_v^\infty dv\,\frac{\partial\frac{p}{a+t}}{\partial t}$$

Wenn der Dampf so ausgedehnt ist, so verhält er sich wie ein Gas. Seine spezifische Wärme bei constantem Volumen ist dann eine Constante γ also

$$-\varkappa\int_0^t T_0\,dt = -\varkappa\gamma t + K$$

Setzen wir dies ein

$$W = \varkappa\gamma t + (a+t)^2\int_v^\infty dv\,\frac{\partial\frac{p}{a+t}}{\partial t} + K$$

Um die Bedeutung der Constanten K zu finden, setzen wir $v = \infty$, wodurch das Integral verschwindet und $t = 0$; dann folgt

$$K = W$$

K ist also der Werth von W für den Wasserdampf bei $0°$ unter der Voraussetzung, daß der Dampf sich wie ein Gas verhalte, also sehr ausgedehnt sei. Die Größe W belegen wir nach Kirchhoff mit dem Namen der Wirkungsfunktion, nach Thomson mit dem Namen Energie (doch ist diese $= -W$). Setzen wir in II $x = 1$ und in III $v = \sigma$, so kommen wir auf den 3ten Fall zurück, daß alles gesättigter Dampf ist. Ziehen wir dann die Werthe von W von einander ab, So folgt

$$\text{IV} \quad K = \varkappa\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) - (a+t)^2\left\{(\sigma - s)\frac{d\cdot\frac{p_1}{a+t}}{dt} + \int_\sigma^\infty dv\,\frac{\partial\cdot\frac{p}{a+t}}{\partial t}\right\}$$

Hier können wir s gegen σ vernachlässigen und die specifische Wärme des Wassers $c = 1$ setzen. Nehmen wir nun ferner an, daß das Mariottesche Gesetz bis zum Condensationspunkte gelte, so können wir also setzen

$$\sigma = R\,\frac{a+t}{p_1}$$

Wir bemerken, daß das hier gebrauchte Zeichen R mit dem früher eingeführten nicht ganz übereinstimmt, sondern daß dies R = dem früheren dividirt durch α ist. Wenn wir ferner $\sigma = \infty$ setzen also ein großes Dampfvolumen annehmen, so verschwindet das Integral in der Klammer und wir haben

$$K = \varkappa(\gamma - 1)t - (a+t)^2\,\frac{d.l\,\frac{p_1}{a+t}}{dt}\,.\,R$$

$$R.\,\frac{d.l\,\frac{p_1}{a+t}}{dt} = \frac{-K + \varkappa(\gamma-1)t}{(a+t)^2}$$

$$R.\,\frac{d.l\,\frac{p_1}{a+t}}{dt} = \frac{-K - \varkappa(1-\gamma)t}{(a+t)^2}$$

Zerlegen wir dies in Partialbrüche, so folgt

$$R\,\frac{d.l\,\frac{p_1}{a+t}}{dt} = -\,\frac{K - \varkappa(1-\gamma)a}{(a+t)^2} - \frac{\varkappa(1-\gamma)}{a+t}$$

dies giebt integrirt

$$R.\,l\,\frac{p_1}{a+t} = \frac{K - \varkappa(1-\gamma)a}{a+t} - \varkappa(1-\gamma)\,l(a+t) + \text{const.}$$

$$R\,l\,p_1 = \frac{K - \varkappa(1-\gamma)a}{a+t} + \text{const.} - \left\{\varkappa(1-\gamma) - R\right\} l(a+t)$$

Wir haben eben S. 176 gefunden (wenn wir die Bedeutung von R entsprechend verändern)

$$\gamma' = \gamma + \frac{R}{\varkappa}$$

wo γ' die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Hieraus folgt

$$\varkappa(1-\gamma) - R = \varkappa(1-\gamma')$$

und wenn wir dies einsetzen, so haben wir

$$R\,l\,p_1 = \text{const.} + \frac{K - \varkappa(1-\gamma)a}{a+t} - \varkappa(1-\gamma')\,l(a+t)$$

Dies ist das Gesetz, nach welchem die Spannung variiren würde, wenn der Dampf genau dem Mariotteschen Gesetze folgte.

Wir wollen nun eine andere Anwendung der Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie machen; wir wollen nämlich das Gesetz der inducirten Ströme ableiten. Wir denken uns z. B. einen geschlossenen Draht, der um eine Axe rotirt und auf den elektrische oder magnetische Kräfte wirken. Dann werden diese Kräfte in dem Drahte Ströme induciren, welche die Bewegung hindern, die lebendige Kraft vermindern. Es wird hier also Kraft verbraucht, die aber als durch den inducirten Strom im Draht erzeugte Wärme wieder erscheint. Nehmen wir nun an, daß z. Z. t_1 der Draht geschlossen und gleich darauf z. Z. t_2 wieder geöffnet werde und bezeichnen mit i die Intensität des inducirten Stromes z. Z. t (die also zwischen t_1 und t_2 liegt) und mit V das Potential der elektrischen Kräfte in Bezug auf einen Strom, der die Intensität 1 statt i hat, so ist die im Zeittheil dt geleistete Arbeit

$$= i\,\frac{dV}{dt}\,dt$$

also die ganze geleistete Arbeit

$$= \int_{t_1}^{t_2} i \frac{dV}{dt}\, dt$$

Nach einem von Joule experimentell aufgestellten Gesetze ist die im Zeittheilchen dt erzeugte Wärmemenge proportional mit $i^2 w$ wo w den Widerstand des Drahtes bedeutet. Wählen wir nun die Einheit des Widerstandes so, daß diese Wärmemenge

$$= \frac{1}{\varkappa}\, i^2 w\, dt$$

also die ganze Wärmemenge

$$\frac{1}{\varkappa} \int_{t_1}^{t_2} i^2 w\, dt$$

Hieraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} i \frac{dV}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2 w\, dt$$

$$i \frac{dV}{dt} = i^2 w$$

$$\frac{dV}{dt} = i \cdot w$$

Hier ist $\frac{dV}{dt}$ die Größe, welche man inducirte elektromotorische Kraft nennt und die wir mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen können. Es ist also dann

$$\mathfrak{E} = i\, w$$

welches Gesetz mit dem schon bei der Elektricitätstheorie aufgestellten vollständig übereinstimmt.

Wir wollen nun die Intensität der elektromotorischen Kraft eines Thermostromes aufsuchen. Denken wir uns einen geschlossenen aus 2 Metallen bestehenden Draht.

Die eine Lötstelle möge auf der Temperatur t_1, die andere auf t_2 erhalten werden. Dann entsteht ein Thermostrom, der wie jeder Strom Wärme erzeugt. Wir können wieder die Einheit des Widerstandes so wählen, daß die in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge $= \frac{1}{\varkappa} i^2 w$ ist. Da nun hier keine Arbeit geleistet wird, so kann auch keine Wärme entstehen, es muß also an den beiden Lötstellen zusammen dieselbe Wärmemenge $\frac{1}{\varkappa} i^2 w$ vernichtet werden. Peltier fand, daß an der einen Lötstelle Wärme erzeugt, an der andern vernichtet werde. Nach Quintus Icilius ist die an der Berührungsstelle erzeugte Wärme proportional mit i. Sie wird außerdem von der Temperatur abhängen, also können wir die in Lötstelle 1 erzeugte Wärme setzen

$$= \frac{1}{\varkappa} i f(t_1)$$

und dann werden wir die in Lötstelle 2 erzeugte setzen können

$$= -\frac{1}{\varkappa} i f(t_2)$$

Die an beiden Lötstellen zusammen vernichtete Wärmemenge ist also

$$\frac{1}{\varkappa} i \left\{ f(t_2) - f(t_1) \right\}$$

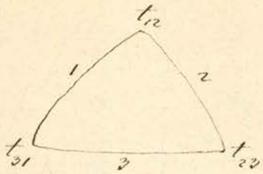
und die in der ganzen Leitung erzeugte

$$\frac{1}{\varkappa} i^2 w$$

also folgt

$$\underline{i \cdot w = f(t_2) - f(t_1)}$$

Es ist also $f(t_2) - f(t_1)$ die elektromotorische Kraft dieser Thermokette.



Haben wir nun eine aus 3 Metallen gebildete Leitung, deren Lötstellen auf den Temperaturen t_{12} t_{23} t_{31} erhalten werden und bezeichnen mit $\frac{1}{\varkappa} f_{12}(t_{12})$ die Wärmemenge welche in der Zeiteinheit an der Lötstelle 12 verrichtet wird, wenn der Strom von 1 nach 2 fließt und entsprechend die anderen, so finden wir für die elektromotorische Kraft dieser Kette auf dieselbe Weise

$$f_{12}(t_{12}) + f_{23}(t_{23}) + f_{31}(t_{31})$$

Die Erfahrung hat uns gezeigt, daß, wenn $t_{12} = t_{23} = t_{31}$ ist, gar kein Thermostrom fließt. Es muß also

$$f_{12}(t) + f_{23}(t) + f_{31}(t) = 0$$

sein oder da

$$f_{31} = -f_{13}$$

so folgt

$$\underline{f_{12}(t) = f_{13}(t) - f_{23}(t)}$$

Lassen wir nun die Metalle 1 und 2 sich ändern, während 3 constant bleibt und setzen

$$f_{13} = \varphi_1 \qquad f_{23} = \varphi_2$$

so folgt

$$\underline{f_{12}(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)}$$

Wir nehmen nun an, daß wir von der Wärmeleitung, die in der Thermokette stattfindet, absehen können, daß diese ohne Einfluß auf die elektrischen Kräfte ist. Wir werden später sehen, daß diese Annahme nicht genau richtig ist.

Unter dieser Voraussetzung denken wir uns nun eine aus 2 heterogenen Leitern bestehende Kette an ihren Lötstellen verwendet, und zwar auf der Temperatur t_1 und t_2 erhalten werde. Der continuirliche Theil der Leitung soll die constante Temperatur t_0 haben. Denken wir uns nun, dass z. B. durch ein Coulomb'sches Rädchen Ströme inducirt würden, die sich dann mit dem Thermoströmen vereinigen. Wenn hier Arbeit geleistet wird, so muss Wärme verschwinden. Nehmen wir an, dass der inducirte Strom dem Thermostrome entgegengesetzt wirke. Die Intensität des inducirten Stromes ist abhängig von der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe und beide Ströme geben eine resultirende Stromintensität, die wir mit i bezeichnen. Wenn Arbeit geleistet wird, so findet hier ein Kreisprocess statt. Hier wird in der Zeiteinheit in der Leitung die Wärmemenge

$$+\frac{1}{\mathcal{H}}\, i^2 w$$

erzeugt, wo w den Widerstand der ganzen Leitung bedeutet, also die Wärmemenge

$$-\frac{1}{\mathcal{H}}\, i^2 w$$

aus dem Reservoir R_0 von der Temperatur t_0 aufgenommen. An der Lötstelle 1 wird ferner aus dem Reservoir R_1 bei der Temperatur t_1 die Wärmemenge

$$-\frac{1}{\mathcal{H}}\, i f(t_1)$$

aufgenommen und aus R_2 bei t_2 die Menge

$$+\frac{1}{\mathcal{H}}\, i f(t_2)$$

Da $T = a + t$, so haben wir nach dem 2ten Hauptsatze für

Theorie der inducirten electrischen Ströme

Wenn ein geschlossener Leiter, z. B. ein Draht, dessen Enden verbunden sind, bewegt wird in der Nähe eines electrischen Stromes, oder umgekehrt, wenn jener Leiter ruht und in seiner Nähe ein electrischer Strom bewegt wird, oder endlich auch, wenn beide ruhen, die Intensität des Stromes aber geändert wird – in allen diesen Fällen wird in dem Leiter ein electrischer Strom inducirt, der so lange währt, als die Bewegung oder die Intensitätsänderung dauert. 57.

Ebenso wird in dem geschlossenen Leiter ein electrischer Strom inducirt, wenn er in der Nähe eines Magneten oder ein Magnet in seiner Nähe bewegt wird, oder wenn der Magnet seinen magnetischen Zustand ändert. In der That ein Magnet ist oder kann betrachtet werden als ein System von electrischen Strömen: es muß daher durch einen Magneten ein inducirter electrischer Strom erregt werden, wenn derselbe durch einen an seiner Stelle befindlichen electrischen Strom erregt worden wäre.

Diese inducirten Ströme sind von Faraday in den 20er Jahren entdeckt und ihre Gesetze unabhängig von Neumann(*) und W. Weber(**) untersucht worden.

Ich will von dem Neumann'schen Gesetz der Induction ausgehen. Denkt man sich den Leiter, in welchem Induction stattfindet, von einem Strome durchflossen, dessen Intensität = 1 ist (nach der electromagnet. Einheit der Stromstärke) – und zwar soll der Strom den Leiter in der Richtung durchfließen, in welcher der inducirte Strom als positiv gerechnet werden soll – so soll U das Potential sein des inducirenden Stromes in Bezug auf den inducirten Strom.

Soll Induction stattfinden, so muß U eine Function der Zeit t sein.

Bezeichnet man mit i die Intensität und mit w den Widerstand des inducirten Stromes zur Zeit t, so findet nach Neumann die einfache Beziehung statt, daß iw mit $\frac{dU}{dt}$ proportional ist. Man kann daher setzen

$$1.)\qquad iw = \varepsilon \cdot \frac{dU}{dt}$$

wo ε unabhängig ist von den Verhältnissen, unter welchen man experimentirt, ~~unab~~ aber abhängig ist von der Wahl der Einheiten.

Das Product iw nennt man, wenn der Strom durch eine hydroelectrische Kette hervorgebracht ist, bekanntlich die electromotorische Kraft der Leitung. Denselben Namen braucht man für dieses Product iw auch hier, wo der Strom durch Induction hervorgebracht ist und nennt dasselbe speciell die „inducirte electromotorische Kraft." Bezeichnet man dieselbe mit E, so ist nach Neumann

$$2.)\qquad E = \varepsilon \cdot \frac{dU}{dt}$$

Wenn man die Einheit der electromotorischen Kraft ändert, die andern Einheiten unverändert läßt, so ändert sich ε und man kann diese Einheit so bestimmen, daß ε = 1 wird. In der That ist von Weber diese Einheit, die hierdurch definirt ist, vorgeschlagen und vielfach angenommen worden.

Wir haben als Einheit der Stromstärke die electromagnetische angenommen und man nennt die eben bestimmte Einheit der electromotorischen Kraft E, die „electromagnetische Einheit der electromotorischen Kraft." Damit ist zugleich auch eine Einheit des Widerstandes w festgesetzt, die auch die „electromagnetische Einheit des Widerstandes" heißt. In der That, da nach dem Ohm'schen Gesetz $i = \frac{E}{w}$ ist, so ist, wenn für i und E Einheiten festgesetzt sind

---

(*) Neumann: 1.) „Allgemeine Gesetze der inducirten el. Ströme" 1846. Acad. d. Wiss. Berlin.
2.) „Allgemeines Princip der math. Theorie der inducirten el. Ströme." 1847.

(**) W. Weber „Electrodynamische Maaßbestimmungen." Leipzig 1846.

die Einheit für w dadurch bestimmt und zwar ist es der Widerstand, den die Leitung haben muß, damit eine electromotorische Kraft, die der Einheit gleich ist, eine Intensität hervorbringt, die der Einheit gleich ist.

Nach der Definition, die wir früher (~~pag.~~ ...) von der electromagnetischen Einheit der Stromstärke gaben, beruht dieselbe auch den Einheiten der Zeit, Masse und Länge. Ferner muß auch die Einheit des Widerstandes dadurch bedingt sein. Doch ist dieselbe unabhängig von der Einheit der Masse, ist vielmehr eine Geschwindigkeit, also eine $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$. Die folgende Betrachtung soll dies zeigen.

Denken wir uns einen inducirten Strom, dessen Intensität i und dessen Widerstand w ist, derselbe möge hervorgebracht sein durch einen stationären electrischen Strom von der Intensität i', indem dieser gegen den Leiter bewegt wird. Dann wollen wir uns die Gleichung

$$3.)\qquad i.w = \frac{dU}{dt}$$

bilden, in welcher ε übergegangen ist, da durch die Wahl der Einheiten ε=1 gemacht wurde. Wenn wir uns der Bedeutung von U erinnern, so können wir den Werth dieser Größe aus ~~Gl. 8.)~~ ~~vid. Gl.~~ .) entnehmen, indem wir dort $i=1$ setzen. Dann nimmt Gl. 3.) die Gestalt an:

$$4.)\qquad i w = i'\frac{d}{dt}\iint\frac{ds\,ds'}{r}\cos(ds,ds')$$

Aus dieser Gleichung wollen wir ableiten, was für eine Art von Größe w ist. Schreiben wir dieselbe in die Form

$$w = \frac{i'}{i}\cdot\frac{d}{dt}\iint\frac{ds\,ds'}{r}\cdot\cos(ds,ds')$$

So sehen wir: $\frac{i'}{i}$ ist eine reine Zahl; das Doppelintegral ist eine Länge, denn $\cos(ds\,ds')$ ist eine Zahl und $\frac{ds,ds'}{r}$ eine Länge. Es ist also w der Differentialquotient einer Länge nach der Zeit. Das Verhältniß $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$ ist aber Geschwindigkeit. Es muß also die Einheit des Widerstandes auch eine

Geschwindigkeit sein und zwar ist es die Geschwindigkeit, mit der in der Einheit der Zeit die Einheit der Länge durchlaufen wird.
Siemens hat für practische Zwecke folgende Widerstandseinheit vorgeschlagen: den Widerstand einer Quecksilbersäule bei 0° von 1^m Länge und einem $1^{\square m.m}$ Querschnitt. diese Siemens'sche Widerstandseinheit stimmt sehr nahe überein mit einer Widerstandseinheit die von der British Association (B A) vorgeschlagen worden ist und zwar stehen sie in dem Verhältniss zur electromagnetischen Einheit.

$$B.A = 10^{10} \cdot \frac{1^{m.m}}{1^{sec}} = \frac{\underline{\text{Erdquadrant}}}{1^{sec}}$$

(da ein Meter der $\frac{1}{10\,\text{mill}}$ Theil eines Erdquadranten ist)
Ich führe noch an, dass die Leitungsfähigkeit des Kupfers ungefähr 52 mal so gross ist als die des Quecksilbers. Nach diesen Angaben kann man den Widerstand eines Kupferdrahtes von bekannten Dimensionen in der Einheit des electromagnetischen Maßsystems angeben. Allerdings weichen verschiedene Kupfersorten, nach ihrer Reinheit und der Aggregation, sehr von einander ab, so daß die genannte Annahme nur als eine ungefähre zu betrachten ist.
Ich will nun noch zeigen, welche Art von Größe die electromotorische Kraft einer Kette nach dem electromagnetischen Maßsystem ist. Wenn wir als Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit resp. 1^{mm}, 1^{mgr}, 1^{sec} festsetzen, so ist die electromotorische Kraft einer Daniell'schen Kette sehr nahe

$$D = 10^{11}$$

Diese Angabe will ich nun noch anders schreiben, so daß man sehen kann, wie der Zahlenwerth sich mit den Grundeinheiten ändert. Zu dem Zwecke muß ich zunächst zeigen, was für eine Art von Größe die Stromintensität im electromagnetischen Maßsystem ist. Die Kraft, mit der zwei

Stromelemente auf einander wirken nach diesem System

$$\frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + 3\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)$$

da nun der Faktor ( ) nur eine Zahl, $\frac{ds\,ds'}{r^2}$ aber auch, so ist eine Kraft eine Grösse derselben Art, wie das Quadrat einer Intensität, oder

$$\text{Intens} = (\text{Kraft})^{\frac{1}{2}}$$

daraus kann man beurtheilen, was für eine Art von Grösse die electromot. Kraft ist, denn

$$\text{El. Kr} = \text{Intens} \cdot \text{Widerstand}$$

$$= (\text{Kraft})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$$

Hier soll man nun die Kraft herausschaffen und dafür die Masse einführen. Es ist

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigg.}$$

$$= \text{Masse} \cdot \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^2}$$

daher

$$\text{El. Kr} = \frac{(\text{Masse})^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{Länge})^{\frac{3}{2}}}{(\text{Zeit})^2}$$

d. h. die electromot. Kraft wird

$$= \text{Zahl} \cdot \frac{(1^{mgr})^{\frac{1}{2}} \cdot (1^{mm})^{\frac{3}{2}}}{(1^{sec})^2}$$

Eine Grösse dieser Art muss auch D sein. Bei diesen Einheiten ist $D = 10^{11}$, woraus folgt, dass bei beliebigen Einheiten

$$D = 10^{11} \cdot \frac{(1^{mgr})^{\frac{1}{2}} (1^{mm})^{\frac{3}{2}}}{(1^{sec})^2}$$

Hier muss ich bemerken noch, dass wenn man diese Einheiten braucht, so ist die electromot. Kraft $D = 10^{11}$, die Siemens'sche Widerstandseinheit $S = 10^{10}$

das Verhältniß beider oder 10, d. h. die Intensität eines Stromes, den ein Daniell'sches Element einer Leitung gibt, deren Widerstand Eins ist = 10

Ein Strom, dessen Intensität sich ändert, inducirt nicht nur benachbarte Nebenleiter, sondern auch seine eigene Leitung nach demselben Gesetze. Wir können dieß beurtheilen, wie die Intensität eines Stromes nach hergestellter Leitung anwächst, bis der Strom stationär geworden ist, das Ohm'sche Gesetz also in Kraft tritt.

Es sei E die electromotorische Kraft der Kette, welche geschlossen wird – z. B. eines Daniell'schen. Es sei w der Widerstand der Leitung, i die Intensität des Stromes,* der die Leitung mit der Intensität 1 durchfließt, in Bezug auf sich selbst, d. h.

*zur Zeit t. Endlich sei P das Potential eines Stromes,

$$P = \iint \frac{ds\,ds'}{r}\cos(ds, ds').$$

wo ds und ds' zwei Elemente unseres Leiters sind. Beide Integrationen sind auszudehnen über die ganze Strombahn.

Das Product $i.w.$ wird dann gleich sein der electromotorischen Kraft der Leitung zur Zeit t. diese setzt sich zusammen aus der electromot. Kraft E der Kette und aus der inducirten electromot. Kraft $\left(\frac{du}{dt}\right)$ daher ist

$$iw = E - P.\frac{di}{dt}$$

| denn $u = iP$ ~~[illegible]~~ und P ist von i unabhängig.

Dabei muß die Bedingung erfüllt sein, daß zur Zeit $t = 0$ auch $i = 0$ ist. diese Bedingung bestimmt die Constante der Integration. Man findet

$$\frac{di}{dt} = -\frac{w}{P}\left(i - \frac{E}{w}\right)$$

daher

$$i = \frac{E}{w} + C.e^{-\frac{w}{P}t}$$

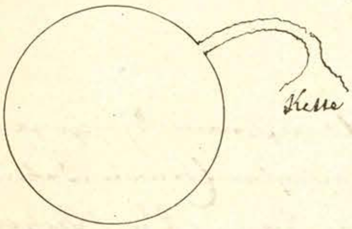
Für $t = 0$ wird $e^{-\frac{w}{P}t} = 1$ und $i = 0$, d. h. $C = -\frac{E}{w}$, also ist die Lösung, welche der Grenzbedingung entspricht

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{p}t}\right).$$

Messungen über das allmählige Ansteigen des Stromes nach Helmholtz haben dieses Resultat bestätigt. Eine Drahtrolle von mächtigen Dimensionen gibt ein so langsames Ansteigen des Stromes, dass dasselbe gut ~~betrachtet~~ beobachtet werden kann (in Bruchtheilen einer Secunde). Schon in einer sehr kleinen Zeit ist $\frac{w}{p}$ als sehr gross zu betrachten, daher $i = \frac{E}{w}$

56. In Bezug auf die Berechnung von P führe ich eine Betrachtung durch, welche P wenigstens schätzen lehrt.

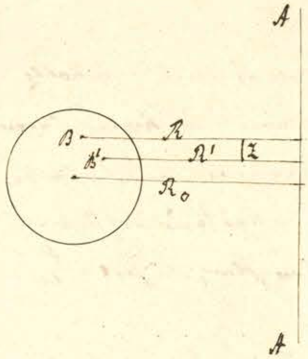
Wir wollen den denkbar einfachsten Fall nehmen, dass der Schliessungsdraht ein kreisförmiger Ring sei. Genau lässt sich das natürlich nicht herstellen, da die Kette selbst einen Theil der Schliessung bildet; wenn wir aber den kreisförmigen Draht sehr gross nehmen, so werden wir den übrigen Theil der Schliessung dagegen vernachlässigen können, so



dass dieser Fall sich näherungsweise verwirklichen lässt. Für einen solchen Kreisstrom soll nun das Potential P in Bezug auf sich selbst berechnet werden.

Dabei dürfen wir den Draht nicht als Linie betrachten, denn wenn wir das thun, so wird der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ∞ gross, so oft ds mit ds' zusammenfällt. Wir müssen also den Querschnitt des Drahtes berücksichtigen.

Sei AA die Achse des Kreisstromes, dann erhalten wir einen Querschnitt des Ringes, wenn ich durch AA eine Ebene lege; diese Ebene sei die Ebene der Zeichnung. Vom Mittelpunkte des Querschnittes fälle ich eine Senkrechte auf die Achse AA, die ich R_0 nenne, so ist R_0 der Radius des



Kreises, den die Mittelpunkte aller Querschnitte des Kreisstromes bilden.
In der Ebene des Querschnittes nehme ich nun zwei Punkte B und B' und stelle mir die 2 Kreise vor, die durch diese Punkte gelegt sind und ihre Achse in AA haben. Den Radius des einen dieser Kreise nenne ich R, den des anderen Kreises R'. Wenn ich dann ein Element des ersten Kreises mit ds, und des zweiten mit ds' bezeichne, so will ich zunächst das Potential zweier Kreisströme von obiger Lage berechnen, die beide die Intensität 1 haben. Dieses Potential ist

$$p = \iint \frac{ds\,ds'}{r}\cos(ds, ds')$$

Nenne ich φ den Winkel, den der nach ds (also nach B) gezogene Radius bildet, mit einer festen, durch AA gelegten Ebene und ebenso φ' den Winkel, den der nach ds' gezogene Radius R' mit derselben festen Ebene bildet, so kann ich setzen

$$ds = R\,d\varphi \qquad ds' = R'.\,d\varphi'.$$

So wird daher das zu berechnende Integral die Form erhalten

$$p = R.R'\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi.\,d\varphi'.\cos(\varphi-\varphi')}{\sqrt{Z^2+R^2+R'^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')}}$$

denn wenn ich mit Z den Abstand der Ebenen der beiden Kreise bezeichne so wird

$$r^2 = Z^2+R^2+R'^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')$$

Für $\varphi-\varphi'$ will ich nun ein neues Zeichen einführen $\varphi-\varphi' = \vartheta$ und dann φ' neben ϑ als zweite Variable brauchen. Denn lässt sich die

Integration nach φ' sofort ausführen, da nur $d\varphi'$ vorkommt, dies gibt 2π, und es wird

$$p = 2\pi \cdot R \cdot R' \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta \cdot \cos\vartheta}{\sqrt{z^2+R^2+R'^2-2R\cdot R'\cos\vartheta}}$$

Statt ϑ führe ich nun den halben Winkel als Argument ein, indem ich setze $\frac{\vartheta}{2} = \varphi$, welches natürlich nicht das frühere φ ist, so kommt

$$p = 4\pi R\cdot R' \int_0^{\pi} \frac{d\varphi\cdot(2\cos^2\varphi-1)}{\sqrt{z^2+(R+R')^2-4RR'\cos^2\varphi}}$$

Wenn ich nun das Integral in 2 Theile zerlege: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, so werden beide Integrale einander gleich, so daß ich schreiben kann

$$p = 8\pi R\cdot R' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\cdot(2\cos^2\varphi-1)}{\sqrt{z^2+(R+R')^2-4R\cdot R'\cos^2\varphi}}$$ (xx)

Führe ich nun eine Größe k ein, die definiert ist durch die Gleichung

$$k^2 = \frac{4R\cdot R'}{z^2+(R+R')^2}$$

so wird das Integral

$$p = \frac{8\pi\cdot R\cdot R'}{\sqrt{z^2+(R+R')^2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2\varphi-1)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und dieses läßt sich zerlegen in die Summe zweier elliptischer Integrale, eines erster und eines zweiter Gattung, beide mit dem Modul k, es ist nämlich

---

(xx)
(ist hinzuzufügen) und wenn ich hierin statt φ seinen Complementwinkel einführe, und diesen wieder mit φ bezeichne, so habe ich nur für cos zu schreiben sin, also:

$$p = 8\pi R\cdot R' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\cdot(2\sin^2\varphi-1)}{\sqrt{z^2+(R+R')^2-4RR'\sin^2\varphi}}$$)

$$2\sin^2\varphi - 1 = \frac{2}{k^2} - 1 - \frac{2}{k^2}(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

denken wir uns dies nun hier eingesetzt, so wird wenn man bezeichnet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = E$$

das gesuchte Integral

$$p = 4\pi\sqrt{R\cdot R'}\cdot k\left\{\left(\frac{2}{k^2}-1\right)K - \frac{2}{k^2}E\right\}$$

diesen Werth hat unser Potential p bei der gemachten Annahme. Wir brauchen nun diesen Werth nur für den Fall, dass R und R' sehr wenig von einander verschieden sind, Z sehr klein ist, dann ist

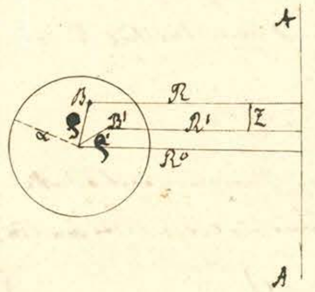
$$k_1^2 = 1 - k^2 = \frac{Z^2 + (R-R')^2}{Z^2 + (R+R')^2}$$

sehr klein und k^2 sehr wenig von 1 verschieden, sehr wenig kleiner als 1. Wir wollen k_1 als ∞ klein betrachten. dann wird E bis auf eine ~~kleine~~ ∞ kleine Grösse $=1$ und K bis auf eine ∞ kleine Grösse $= \lg\frac{4}{k_1}$, also ∞ gross. Setzen wir diese Werthe in p ein, worin wir für $k = 1$ schreiben und $R = R_1 = R_0$, so ist

$$p = 4\pi\cdot R_0\left\{\lg\frac{4}{k_1} - 2\right\}$$

worin der oben für k_1 gegebene Ausdruck zu benutzen ist.

Wir wollen nun B und B' auf Polarcoordinaten beziehen. Wir bezeichnen die Abstände von B und B' vom Mittelpunkt des Querschnitts mit ρ und ρ' ferner $\angle(\rho, R_0) = \psi$, $\angle(\rho', R_0) = \psi'$ so wird



$$R = R_0 - \rho\cos\psi$$
$$R' = R_0 - \rho'\cos\psi'$$
$$Z = \rho\sin\psi - \rho'\sin\psi'$$

[illegible]:

$$K_1^2 = \frac{(\rho \sin\psi - \rho' \sin\psi')^2 + (\rho\cos\psi - \rho'\cos\psi')^2}{4R_0^2}$$

wenn wir im Nenner die Größen von der Ordnung ρ gegen die endlichen Größen vernachlässigen. der Zähler läßt sich vereinfachen, man erhält

$$K_1^2 = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\psi - \psi')}{4R_0^2}$$

Dies will ich in den Ausdruck für P substituiren, vorher jedoch noch eine Änderung des Ausdruckes vornehmen. Wir wollen uns 2 Elemente des Querschnittes des Drahtes, in welchem Punkt B liegen, denken. Das eine Element habe die Größe $\rho . d\rho . d\psi$, das andere $\rho' . d\rho' . d\psi'$. Diesen Elementen entsprechend 2 dünne Ringe, welche Theile des ganzen Drahtes sind. Nehmen wir nun jetzt an, daß der ganze Draht, dessen Querschnitt $\alpha^2 . \pi$ ist, von einem Strom mit der Intensität 1 durchflossen werde, so kommt auch dem ersten dünnen Ring eine Stromstärke, die sich verhält zu 1, wie der Querschnitt dieses dünnen Ringes zum Querschnitt $\alpha^2\pi$ des ganzen Drahtes, also die Stromstärke $\frac{\rho . d\rho . d\psi}{\alpha^2\pi}$, und ebenso auch dem 2ten dünnen Ring die Stromstärke $\frac{\rho' . d\rho' . d\psi'}{\alpha^2\pi}$.

Berechnen wir jetzt das Potential der einen dieser dünnen Ringe auf den andern, so wird dies offenbar aus P erhalten werden, wenn wir P mit den Intensitäten der beiden Ströme multipliciren (denn in P hatten beide Ströme die Intensität 1). Thun wir dieses, so wird also

$$\frac{\rho . d\rho . d\psi . \rho' . d\rho' . d\psi'}{\alpha^4\pi^2} . 4\pi R_0 \left(\lg \frac{4}{K_1} - 2\right)$$

das Potential der beiden dünnen Kreisringe aufeinander darstellen, oder wenn wir den zuletzt gefundenen Ausdruck für K_1 substituiren:

$$\frac{\rho . d\rho . d\psi . \rho' . d\rho' . d\psi'}{\alpha^4\pi^2} \, 4\pi R_0 \left\{ \lg 8R_0 - 2 - \lg \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\psi - \psi')} \right\}$$

Hieraus erhalte ich das Potential aller Stromelemente aufeinander, also unser gesuchtes Potential P, indem ich noch ρ und ρ' von 0 bis α und noch ψ und ψ' von 0 bis 2π integrire, so daß ich endlich erhalte in 2 Integrale zerlegen):

$$P = \int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\psi\, \rho'\, d\rho'\, d\psi'}{\alpha^4 \pi^2}\, 4\pi R_0 \left(\lg 8R_0 - 2\right) - \int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\psi\, \rho'\, d\rho'\, d\psi'}{\alpha^4 \pi^2}\,.$$

$$4\pi R_0 \lg \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi - \psi')}$$

Das zweite dieser Integrale ist schwierig zu lösen, das erste sehr leicht, lösen wir dasselbe so ist

$$P = 4\pi R_0 \left\{ \lg 8R_0 - 2 - \frac{1}{\alpha^4 \pi^2} \int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\psi\, \rho'\, d\rho'\, d\psi' \cdot \lg \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi \mp \psi')} \right\}$$

Um die Berechnung dieses 4 fachen Integrals handelt es sich jetzt. Ich betrachte zuerst das Integral

$$U = \int_0^{2\pi} d\psi' \lg \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \mp 2\rho\rho' \cos(\psi \mp \psi')}$$

wenn ich setze

$$V = \lg \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi \mp \psi')}$$

so genügt nach einer früheren Rechnung V der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0$$

Für diese partielle Differentialgleichung (welche bei rechtwinkl. Coordin. identisch ist mit $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$) ist also eine particuläre Lösung der Logarithmus der Entfernung irgend zweier Punkte des Querschnitts, also auch eines Punktes vom Anfangspunkt. Da nun U erhalten wird, wenn man V mit $d\psi'$ multiplicirt und integrirt, so muss U derselben Differentialgleichung genügen. Denn sie ist linear und homogen, gibt also mit einer Constanten multiplicirt und die so erhaltenen Gleichungen addirt werden wieder eine partik. Lösung. Aber U muss von ψ unabhängig sein, denn wenn wir statt ψ' einführen $\psi - \psi'$ als Variable, so werden die Grenzen ψ und $\psi + 2\pi$. Da aber $\int_{\psi}^{2\pi+\psi} = \int_0^{2\pi}$ und der cos sich nicht verändert bleibt, so erhält man U zu frei von ψ, ist also davon unabhängig, d. h. es ist $\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0$ und es bleibt

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dU}{d\rho} = 0.$$

diese Differentialgleichung haben wir bereits gelöst und gefunden

$$U = A\lg\rho + B.$$

Um hieraus U selbst zu finden, haben wir nur die Werthe der beiden Constanten A und B zu ermitteln. Dies können wir, indem wir für einen bestimmten ρ den Werth von U finden können. Dabei müssen wir beachten, daß die Werthe der Constanten <u>ändern</u> werden können, wenn ρ durch den Werth ρ' hindurchgeht, denn es könnte U selbst oder sein Differentialquotient nach ρ in diesem Falle sprungweise ändern. Letzteres findet in der That statt, denn für $\rho=\rho'$ wird, wenn zugleich $\psi=\psi'$ ist, die Wurzel $=0$, also das Integral U unendlich groß.

Wir müssen daher die beiden Fälle $\rho<\rho'$ und $\rho>\rho'$ gesondert behandeln.

1.) Ist $\rho<\rho'$ so kann auch $\rho=0$ sein. Dann wird die Wurzel $=\sqrt{\rho'^2}=\rho'$, also

$$U = \int_0^{2\pi} d\psi' \lg\rho' = 2\pi\lg\rho'.$$

In denselben Werth muß U übergehen, wenn ρ ∞ klein wird, d. h. es muß

für $\rho<\rho'$ <u>immer</u> $A=0$ $\quad B=2\pi\lg\rho'$ sein

2. Ist $\rho>\rho'$, so können wir $\rho=\infty$ setzen und es wird dann, wenn wir ∞ klein dagegen vernachlässigen

$$U = \int_0^{2\pi} d\psi \lg\rho = 2\lg\rho$$

und da die hieraus resultirenden Werthe von A und B bestehen bleiben, so lange $\rho>\rho'$, so ist

für $\rho>\rho'$ <u>immer</u> $A=2\pi$ $\quad B=0$

Von den 4 Integrationen, welche auszuführen sind, ist somit die nach ψ' jetzt erledigt. Nehmen wir nun die nach ρ' vor, so haben wir zu betrachten

$$\int_0^\alpha \rho' d\rho' U = 2\pi \left\{ \int_0^\rho lg\rho \cdot \rho' d\rho' + \int_\rho^\alpha lg\rho' \cdot \rho' d\rho' \right\}$$

indem wir die verschiedenen Werthe berücksichtigen, die U annimmt, je nachdem ρ' grösser oder kleiner als ρ ist. Beide Integrationen sind leicht auszuführen. Man erhält

$$= \pi \left\{ \rho^2 lg\rho + \alpha^2 (lg\alpha - \tfrac{1}{2}) - \rho^2 (lg\rho - \tfrac{1}{2}) \right\}$$

$$= \pi \left\{ \alpha^2 (lg\alpha - \tfrac{1}{2}) + \frac{\rho^2}{2} \right\}$$

Die Integration nach ψ ist leicht auszuführen, da nur $d\psi$ vorkommt; es ist also der letzte Ausdruck nur mit 2π zu multipliciren, um die Integration als ausgeführt zu haben. Endlich ist dann noch mit $\rho d\rho$ zu multipliciren und noch von 0 bis α zu integriren. Es ergibt sich dann, wenn man den für das 4fache ~~gefundene~~ Integral gefundenen Ausdruck in den letzten Werth von P einsetzt.

$$P = 4\pi R_0 \left\{ lg \frac{8R_0}{\alpha} - \frac{7}{4} \right\}$$

Dies ist das Potential des Kreisstromes auf sich selbst, es wird unendlich wie $lg\alpha$, wenn $\alpha = 0$ wird. Wir können diesen Ausdruck noch auf eine andere Form bringen, wenn wir statt des Radius R_0 die Länge l des kreisförmigen Drahtes einführen. Da $l = 2\pi R_0$ ist, so kommt

$$P = 2l \left\{ lg \frac{l}{\alpha} - 1{,}508 \right\}$$

Wenn α gegen l so klein ist, so wird $lg \frac{l}{\alpha}$ ~~sehr~~ ∞ gross ~~bedeutend~~ und wenn wir endlich gegen ∞ grosses vernachlässigen, so wird kürzer

$$P = 2l \cdot lg \cdot \frac{l}{\alpha}.$$

Wenn wirklich α so klein ist, dass $\frac{l}{\alpha}$ als ∞ gross betrachtet werden kann, dann wird dieser Ausdruck auch gültig sein, wenn der Draht irgend eine andere Gestalt hat, wenn nur zwischen 2 Punkten des Drahtes, zwischen denen unendlich Verschlingung ist, auch eine unendliche Entfernung ist. In der That, wenn wir α kleiner und kleiner werden lassen, bei einer gewissen Gestalt der Mittellinie, so werden die Theile von P, die von der Einwirkung unendlich entfernter Theile des Drahtes herrühren, endlich bleiben. Für diese ist gerade zu $\alpha = 0$ zu setzen. Unendlich werden nur die Theile von P werden, die von der Einwirkung unmittelbar benachbarter Theile des Drahtes herrühren. Diese Wirkung wird aber von der Gestalt des Drahtes nicht abhängen.

Aber dieses wird nur gelten, wenn $\frac{l}{\alpha}$ als ∞ groß zu betrachten ist und da der Logarithmus sich sehr langsam der Unendlichkeit nähert, so wird dieser Ausdruck immer nur eine sehr ~~nahe~~ rohe Annäherung an den wahren Werth des Potentials sein. Einen genaueren kann man eher nicht finden, wenn der Draht eine Schraubenlinie ist, bei der die Höhe eines Schraubenganges klein gegen den Radius und groß gegen die Drahtdicke ist. Denn kann man für die Windungen Kreise substituiren, die alle eine gemeinsame Achse haben. Das Potential zweier solcher Kreisströme haben wir durch elliptische ~~elliptische~~ Integrale abgeleitet. Es wird das Potential in Bezug auf sich selbst sich zusammensetzen als Summe aus den Potentialen je zweier solcher Windungen in Bezug aufeinander und auf sich selbst.

Wenn freilich die Windungen sehr nahe an einander liegen, so ist die Berechnung des Potentials sehr schwierig. —

Wir haben das Anwachsen des Stromes bei der Schließung untersucht. 57.
Wenn die Schließung unterbrochen wird, so verschwindet der Strom, aber auch nicht augenblicklich, ebensowenig, wie beim Entstehen. Wenn nämlich der Contact der beiden Metalle unterbrochen wird, so bildet sich ein Funke, und dieser Funke unterhält den Strom noch kurze Zeit, aber bei sehr schnell wachsendem Widerstande, indem die Funkenstrecke wächst. Die Dauer des Funkens wird die Zeit sein, die der Strom zum Verschwinden braucht,

dieselbe hängt nur von der Art der Unterbrechung ab. Im Allgemeinen ist diese Zeit viel kürzer als die Zeit, welche der Strom braucht, um beim Schließen den stationären Zustand anzunehmen.

Wir wollen zunächst den folgenden Fall betrachten, der sich bei einer gewissen Classe von Inductionsapparaten verwirklicht findet. Es mögen sich nahe bei einander 2 isolierte Stromleiter, etwa 2 Drähte befinden. Der primäre soll von dem Strom einer Kette durchflossen werden, in dem andern soll Induction stattfinden. Wir wollen die Gleichungen aufstellen für die Intensität der Ströme, die in den beiden Leitern fließen, sobald der primäre Leiter geschlossen wird.

Es mögen i_1 und w_1 Intens. und Widerstand des primären Stromes zur Zeit t sein, i_2 und w_2 Intens. und Widerstand im inducirten Leiter zur Zeit t. Ferner sei P_{11} das Potential eines Stromes, der mit der Intensität 1 (nach electromagn. Maß) die primäre Leitung durchfließt, in Bezug auf sich selbst; P_{22} das Potential eines Stromes, der mit der Intensität 1 den zweiten Leiter durchfließt in Bezug auf sich selbst; P_{12} oder P_{21} das Potential zweier Ströme, die mit der Intensität 1 beide Leiter durchfließen; E_1 die elektro~~magnetische~~motorische Kraft der Kette, die durch den primären Leiter geschlossen wird. Es möge der Schluß der Leitung stattfinden zur Zeit $t=0$.

Dann haben wir für die elektromotorische Kraft zur Zeit t im ersten (primären) Leiter die Gleichung

$$i_1 w_1 = E_1 - P_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} - P_{12} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

1) und eine ähnliche Gleichung für die elektromotor. Kraft zur Zeit t im zweiten Leiter

$$i_2 w_2 = - P_{21} \frac{di_1}{dt} - P_{22} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Dies sind 2 lineare, homogene Differentialgleichungen erster Ordnung mit constanten Coefficienten, daher leicht zu integriren. Ihre 2 willkürlichen Constanten sind bestimmt durch die Werthe, die i_1 und i_2

zur Zeit $t = 0$ haben, nämlich

für $t = 0$ ist $i_1 = 0$ $\quad i_2 = 0$

Wir wollen setzen

$$\left.\begin{aligned} i_1 - \frac{E_1}{w_1} &= A_1 \cdot e^{-\lambda t} \\ i_2 &= A_2 \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}\right\} 2.$$

wo A und λ zu bestimmende Constanten sind, so lässt sich durch diese Annahmen den beiden Differentialgleichungen genügen, wenn gewisse Relationen zwischen den Constanten bestehen, nämlich die folgenden

$$3.) \quad \begin{cases} A_1 \left\{ P_{11} - \frac{w_1}{\lambda} \right\} + A_2 P_{12} = 0 \\ A_1 P_{21} + A_2 \left\{ P_{22} - \frac{w_2}{\lambda} \right\} = 0 \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen erfüllt werden durch Werthe von A_1 und A_2, die von Null verschieden sind, so müssen die Gleichungen nicht unabhängig von einander sein, die Determinante des Systems muss Null sein. Es bleibt also eine der A willkürlich und das Verhältniss der Constanten wird bestimmt. Die Determ. Gleichung ist

$$4.) \quad \left(P_{11} - \frac{w_1}{\lambda}\right)\left(P_{22} - \frac{w_2}{\lambda}\right) - P_{12}^2 = 0$$

Bildet man die beiden Wurzeln dieser Gleichung und setzt dieselben in die beiden Gleichungen 2. ein und addirt, so erhält man das allgemeine Integral jener Differentialgleichungen mit 2 willkürlichen Constanten, die sich dann so bestimmen lassen, daß für $t = 0$, $i_1 = 0$ und $i_2 = 0$ wird. Die beiden Wurzeln der Determinantengleichung sind reell und positiv. Setzt man nämlich $\lambda = 0$ oder ∞ klein, so wird, da w_1 und w_2 ihrer Natur nach positive Größen sind, die linke Seite von 4.) positiv ∞ groß. Setzt man dagegen

$$P_{11} - \frac{w_1}{\lambda} = 0 \quad \text{oder} \quad P_{22} - \frac{w_2}{\lambda} = 0$$

$$\text{für } t=0 \text{ ist } \quad i_2 = 0\,, \quad i_1 = \frac{E_1}{w_1^0} = i_1^0$$

indem wir mit i_1^0 die Intensität des stationären Stromes bezeichnen wollen. Wir wollen auch hier den inducirten Integralstrom $\int^\infty i_2 dt$ aufsuchen. Wir werden denselben wieder aus der zweiten Differentialgleichung ableiten können und finden, da auch hier $i_2 = 0$ ist, für $t=0$ und $t=\infty$, also das zweite Glied der rechten Seite verschwindet:

6) $$\int_0^\infty i_2 dt = \frac{P_{21}}{w_2}\, i_1^0 .$$

Wenn wir die Gleichungen 5) und 6) vergleichen, so sehen wir, daß der bei der Öffnung in~~tegrirte~~ducirte Integralstrom gleich ist dem bei Schließung stattfindenden, nur ist die Richtung beider Ströme die entgegengesetzte, wie das entgegengesetzte Vorzeichen lehrt.

Weiteres über den Verlauf von i_1 und i_2 können wir gar nicht finden, wenn wir nicht wissen, wie w_1 von w_1^0 bis ∞ wächst. Wir wollen annehmen, was im Allgemeinen erlaubt ist, daß die Dauer des Funkens T (d. h. die Zeit, in der w_1 von $w_1^0 \ldots \infty$ wächst) sehr klein ist gegen die sonst in Betracht kommenden Größen, also ∞ klein. Hiernach ist

$$\text{für } t \geqq T \qquad i_1 = 0$$

Für solche Werthe von t wird daher auch $\frac{di_1}{dt} = 0$ sein, dann enthält die zweite Differentialgleichung nur noch i_2 und lautet

$$i_2 w_2 = -P_{22} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

So daß also

7) $$i_2 = C \cdot e^{-\frac{w_2}{P_{22}} t}$$

wird. Es nimmt die Intensität i_2 also bei wachsender Zeit ab nach einem Gesetze, das von dem ersten Leiter ganz unabhängig ist. Aber die Constante C wird wesentlich abhängen von Größen, die sich auf die primäre Leitung bezeichnen. Wir wollen diese Constante mit i_2^0 bezeichnen und können i_2^0 in gewissem Sinne als Anfangswerth von i_2 betrachten, nämlich insofern als wir T als ∞ betrachten können. Strenge genommen hat i_2 den Anfangswerth 0, aber es ist i_2^0 der Werth, den i_2 für $t = T$ annimmt, also der Werth von i_2, von welchem ab erst die Gl. 7) anfängt richtig zu sein, denn für Werthe von $t < T$ gilt sie ja garnicht. Insofern ist also i_2^0 der Anfangswerth von i_2 (denn setzen wir in 7.) $t = T$ und betrachten T als klein, so ist $i_2^0 = C$, wenn wir $(i_2)_{t=T} = i_2^0$ bezeichnen) Folgt also Gl. 7) über in

$$8.)\qquad i_2 = i_2^0 \cdot e^{-\frac{w_2}{P_{22}}t}$$

Wir wollen den Werth von i_2^0 aufsuchen. Zu dem Zwecke wollen wir die zweite Differentialgleichung mit dt multipliciren und von 0 bis T integriren. Dann wird die linke Seite zu Null, da $T = \infty$ klein, $i_2 w_2$ endlich ist, und es kommt

$$0 = -P_{21}\left[i_1\right]_0^T - P_{22}\left[i_2\right]_0^T.$$

oder

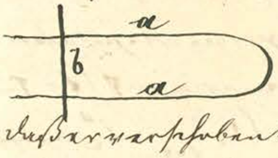
$$0 = P_{21} \cdot i_1^0 - P_{22} \cdot i_2^0$$

also

$$i_2^0 = i_1^0 \cdot \frac{P_{21}}{P_{22}}$$

Es ist bemerkenswerth, dass i_2^0 – der Anfangswerth von i_2 – nicht von dem Widerstande w_2 des inducirten Leiters abhängt, sondern nur abhängig ist von der anfänglichen Intensität des primären Stromes und von dem Verhältniss der beiden Potentiale P_{21} und P_{22}. Damit ist i_2 in Gl. 8) völlig bestimmt. Daraus können wir nun auch die Intensität des Integralstromes ableiten. Wir finden denselben Werth wie früher, wenn wir die Annahme $t \geqq T \ldots i_1 = 0$ berücksichtigen, welche wir jetzt gemacht haben.

Wir haben bisher allein die Induction in geschlossenen Leitern untersucht. 59
Wir wollen jetzt dazu übergehen auch die Induction in ungeschlossenen Leitern zu betrachten. Hierher kann man zunächst den Fall rechnen, daß in der Leitung des inducirten Stromes sogenannte Gleitstellen vorhanden sind. Denken wir uns nämlich einen Draht so gebogen, daß er



aus 2 parallelen Armen a besteht und einen anderen Draht quer über diese beiden Arme gelegt, so daß er verschoben werden kann, ohne daß die Verbindung unterbrochen wird, so haben wir das, was man eine Gleitstelle nennt. Wenn nun in der Nähe dieser Leitung ein elektrischer Strom oder ein Magnet sich befindet und die Brücke b wird verschoben, so fließt in dieser Leitung ein inducirter elektrischer Strom. Man kann in solchem Falle sagen, daß man es zu thun habe mit einer Induction in einem ungeschlossenen Leiter, weil nur ein Theil des ganzen Leiters relativ bewegt wird gegen den festen elektrischen Strom. Dieser Fall und alle ähnlichen lassen sich zurückführen auf die Theorie der Induction in geschlossenen Leitern. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß auch hier die inducirte elektromotorische Kraft gleich ist dem negativen Differentialquotienten nach t des Potentiales des inducirenden Stromes in Bezug auf den inducirten Strom, dessen Intensität = 1 ist (pag. 2..) — gerade so wie in dem Falle, in welchem die inducirte Leitung keine Gleitstelle hatte, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Gestalt des inducirten Stromes mit der Zeit veränderlich ist. Hierauf will ich jedoch nicht näher eingehen.

Aber etwas Neues ist in Betracht zu ziehen, wenn dem inducirten Strome 60
keine geschlossene Leitung geboten ist. Dann müssen an den Enden der Leitung freie Elektricitäten sich ansammeln und diese sind in der Rechnung zu berücksichtigen. Wir wollen dies ausführen. Um dabei die Arbeit möglichst zu erleichtern, will ich die elektromagnetischen

Einheiten für Intensitäten verlassen und zu den elektrostatischen Einheiten zurückkehren. Bei diesen gehen wir aus von der Einheit der Elektricitätsmenge, die wir als diejenige definirt hatten, welche in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt. Daraus ergibt sich die elektrostatische Einheit der Intensität als diejenige, bei welcher in der Einheit der Zeit die Einheit der Elektricität durch den Querschnitt der Leitung hindurchgeführt wird. Da wir ferner gesehen haben, daß die elektromotorische Kraft gleich ist der Summe der elektrischen Differenzen der heterogenen Bestandtheile der Leitung, welche wird, wenn die Differenzen zweier Potentialen sind, so folgt, daß auch für die elektromotorische Kraft hierdurch eine Einheit festgesetzt ist. Da nun aber infolge des Ohm'schen Gesetzes auch die Einheit des Widerstandes fest bestimmt.

Wenn in einem Leiter — einem geschlossenen oder ungeschlossenen — ein Strom inducirt wird, so müssen wir denselben betrachten als die Folge von Kräften, welche vom inducirenden Strom auf die Elektricitätstheilchen des Leiters ausgeübt werden. Sei ds ein Element des inducirten Leiters, so will ich die Kraft S nennen, die auf die Einheit der *positiven* Elektricität in ds in der Richtung von ds von dem inducirenden Strome ausgeübt wird. Da man auch annehmen dürfte, daß auf die *negative* Elektricität eine *gleiche* Kraft in *entgegengesetzter* Richtung wirkt, so müßte diese auch gleich S sein. Wollen wir diese Annahme *nicht* machen, daß in einem inducirten Strome auf die positiven und negativen Elektricitätstheilchen gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte ausgeübt werden, so dürfen wir nur S definiren als das arithmetische Mittel der Kräfte, welche auf *beide* Elektricitäten in entgegengesetzten Richtungen ausgeübt werden. Nach einer früheren Hypothese hängt gerade von diesem Mittel ab die Bewegung der

Elektricität in dem Leiter.

Durch den inducirenden Strom bewegt, so wird in dem Leiter freie Elektricität auftreten. Sei nun φ das Potential derselben in Bezug auf einen Punkt im Elemente ds, sei ferner i die Intensität des inducirten Stromes in ds, q der Querschnitt des Leiters, λ seine Leitungsfähigkeit, und endlich sei der Leiter als homogen vorausgesetzt. Die Kraft, welche die Bewegung der Elektricität nach der Richtung von ds bedingt, ist dann

$$S = -\frac{d\varphi}{ds}$$

Wenn wir annehmen, daß die wirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt sind, so ist die Kraft, die im Ganzen wirkt, auf die Einheit positiver Elektricität die einer und auch die Einheit negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung.

Diese Kraft haben wir in einer früher genannten Hypothese zu setzen

$$1.)\qquad S = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\lambda \cdot q}\cdot i.$$

Diese Gleichung muß stets gelten, einerlei ob der Leiter geschlossen ist oder nicht. Wir wollen dieselbe zuerst auf den Fall anwenden, daß der Leiter geschlossen ist, um dadurch über sein Urtheil zu gewinnen. Multipliciren wir mit ds und integriren über den ganzen inducirten Leiter, so ist

$$2.)\qquad \int_0^l S\,ds = \frac{l}{\lambda \cdot q}\cdot i$$

wo l die Länge des inducirten Leiters bedeutet, denn $\int d\varphi = 0$, da φ eine eindeutige Funktion ist und über einen geschlossenen Umfang integrirt wird. Anders geschrieben ist

$$\int_0^l S\,ds = w \cdot i = E$$

wo [illegible] E die inducirte elektromotorische Kraft bedeutet.

diese elektromotorische Kraft ist aber, da die Induction von einem geschlossenen Strome herrührt (nach ~~pag. 1~~ und 2 ..)

$$E = a^2 \frac{d}{dt} i' \iint \frac{ds\,ds'}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta'$$ die gestrichenen Buchstaben beziehen sich auf den primären Strom

wenn wir mit a^2 denjenigen Werth von E bezeichnen, den sie erhält, wenn ich man die elektrostatischen Maßsystem nehmen (für elektromag. wär $E = 1$). Wenn also beide Leiter geschlossen sind, so besteht die Gleichung

$$3)\qquad \int S\,ds = a^2 \frac{d}{dt} i' \iint \frac{ds\,ds'}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta'$$

Wir nehmen nun die Annahme, 1) dass diese Gleichung auch gilt, wenn der secundäre Leiter nicht geschlossen ist, dass also auch dann

$$4)\qquad S = a^2 \cdot \frac{d}{dt} i' \int \frac{ds'}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta'$$

und 2) dass der Theil von S, der von ds' herrührt, ist

$$5)\qquad a^2 \frac{d}{dt} i' \cdot \frac{ds'}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta'$$

Machen wir diese Annahme, so kommen wir zu einem ~~E~~ experimentell vollkommen bestätigten Resultate. Freilich ist die Annahme bis zu einem gewissen Grade willkürlich, denn wir haben schon gesehen, dass ein Potential sich sehr verschieden ausdrückt bei geschlossenen Leitern, während bei ungeschlossenen Leitern die Gleichungen nicht mehr bestanden. Wenn wir unter der Voraussetzung, dass die secundäre Leitung ungeschlossen ist die Gl. 1) mit ds multipliciren und integriren über die Länge des ungeschlossenen Leiters, so erhalten wir ein anderes Resultat als bei geschlossener Leitung, nämlich

$$\int S\,ds \pm \varphi_2 + \varphi_1 = w \cdot i$$

wo φ_2 und φ_1 die Werthe des Potentials der freien Electricität des secundären Leiters für den End- und Anfangspunkt bezeichnen. Wenn wir $\int X ds$ aus 3.) hier einsetzen, nachher aber, analog wie früher

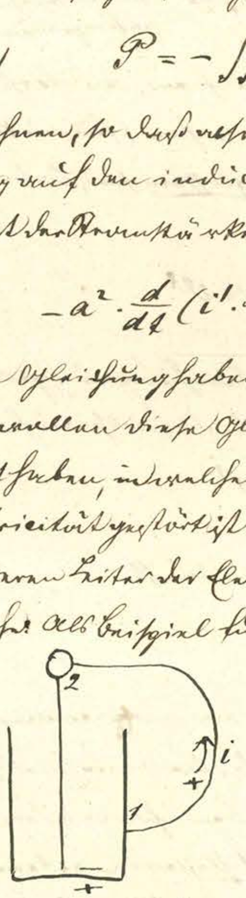
6.) $$P = -\iint \frac{ds\,ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'$$

bezeichnen, so dass also P das Potential des inducirenden Stromes in Bezug auf den inducirten, wenn beide von der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke durchflossen gedacht werden, so erhalten wir

7.) $$-a^2\cdot\frac{d}{dt}(i'\cdot P) - \varphi_2 + \varphi_1 = w\cdot i$$

Diese Gleichung haben wir jetzt zu discutiren.

61. Wir wollen diese Gleichung anwenden auf den Fall, dass wir nur einen Draht haben, in welchem durch irgend eine Ursache das Gleichgewicht der Electricität gestört ist. Die Enden desselben sollen verbunden sein mit 2 grossen Leitern der Electricität, z. B. mit den Belegungen einer Leydner Flasche. Als Beispiel für die elektrische Bewegung, welche wir hier verfolgen wollen, können wir betrachten den Entladungsstrom einer Leydener Flasche, wo wir aber nur, als wir die Strecke des Funkens als Theil des ganzen Schliessungsbogens betrachten können.



Ich will durch Q die Menge positiver Electricität bezeichnen, die sich zur Zeit t in der inneren Belegung befindet, und zugleich die Menge negativer Electricität, die sich in der äusseren befindet. Denn diese beiden Mengen müssen gleich und entgegengesetzt sein, wenn (wie wir annehmen wollen) das ganze System isolirt ist und keine weitere freie Electricität vorhanden ist und wenn wir ferner die Menge der freien Electricität auf dem Drahte vernachlässigen gegen die der Belegungen. Es dürfen wir also die

Belegungen der Flasche nicht zu klein seien.
Ist ferner i die Intensität des Stromes im Innendrahte zur Zeit t, so besteht zwischen Q und i folgende Beziehung: da i die Menge $+E$ ist, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Drahtes hindurchströmt und auch die Menge $-E$, die in entgegengesetzter Richtung durch denselben strömt, so folgt

1.) $$\frac{dQ}{dt} = 2i$$

Im Zeitelement dt wird nämlich der inneren Belegung durch den Draht zugeführt die pos. Elektricitätsmenge $i\,dt$, ebensoviel neg. Elektricität wird in entgegengesetzter Richtung der äußeren Belegung zugeführt, die Änderung des Ueberschusses freier Elektricität einer Belegung dQ beträgt also $2i\,dt$.
Bezeichnen wir mit φ_2 und φ_1 die Potentiale in der inneren und äußeren Belegung und führen für die Differenz derselben das Zeichen V ein, also

2.) $$\varphi_2 - \varphi_1 = V$$

so besteht zwischen V und Q die Beziehung, daß

3.) $$Q = cV \qquad \text{(pag. ..)}$$

Nach den Betrachtungen, welche wir in der Elektrostatik über den Condensator angestellt und die auch für eine Leydener Flasche gelten, wenn der Condensator nur sehr empfindlich ist. Hier ist c eine von der Leydener Flasche abhängige Constante, welche die Capacität der Flasche genannt wird. c ist diejenige Menge positiver Elektricität, die der inneren Belegung zugeführt werden muß, damit der Unterschied der Potentiale (V) beider Belegungen der Einheit gleich ist.
Kehren wir jetzt auf Gl. 7.) zurück, um sie auch unserem Fall anzupassen.

da wir hier blos einen Strom haben, der auf keine eigene Leitung inducirend wirkt, so ist P das Potential des Stromes in Bezug auf sich selbst. Nehmen wir an, der Schliessungsdraht werde nicht bewegt, so ist P auch constant, so dass wir es vor das Differentialzeichen setzen können.
Ferner ist $i' = i$ zu setzen, da wir blos einen Strom haben und es nimmt daher die Gl. 1) unter Berücksichtigung von 2) und 3) die Gestalt an

4) $$w \cdot i = -\frac{1}{c} \cdot Q - a^2 \cdot P \cdot \frac{di}{dt}$$ diese zusammen mit 1)

5) $$\frac{dQ}{dt} = 2i$$

sind zwei Gleichungen aus welchen Q und i zu bestimmen sind.
Bevor wir integriren, wollen wir aus diesen Gleichungen einige Schlüsse ziehen und an dieselben weitere Betrachtungen knüpfen.
Den Anfangspunkt der Zeit setzen wir so fest, dass für $t=0$ der Strom, d. h. die Entladung beginnt. Für diesen Augenblick müssen wir noch einige Zeichen festsetzen. Wir wissen, dass für $t=0$, $i=0$ ist. Die Werthe von Q und V, die für $t=0$ stattfinden seien Q_0 und V_0, resp.

für $t=0$ ist $i=0$ $\quad Q=Q_0$ $\quad V=V_0$

für $t=\infty$ ist $i=0$ $\quad Q=0$ $\quad V=0$

wo t bereits für einen verhältnissmässig kleinen Bruchtheil der Zeit als ∞ betrachtet werden kann. Wenn wir die Gl. 5) mit dt multipliciren und von 0 bis ∞ integriren, so wird

6) $$\int_0^\infty i\,dt = -\frac{1}{2} Q_0$$

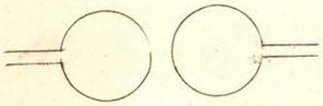
oder nach 3)

7) $$\int_0^\infty i\,dt = -\frac{1}{2} c V_0.$$

die Grösse rechts (in 6) oder 7)) lässt sich experimentell bestimmen, Q_0 die Menge der freien Elektricität einer Belegung vor dem Beginne der Entladung, lässt sich durch die Coulomb'sche Drehwaage messen, oder auch C lässt sich durch's Elektrometer bestimmen und V_0 vor der Entladung messen. Hierbei will ich vorhergeben, wie man C und V_0 sehr leicht schätzen kann. Wenn S bedeutet die Grösse der einen oder andern Belegung und δ den überall gleichen und kleinen Abstand beider Belegungen, so ist die Capacität c, wenn die Leiter durch Luft getrennt sind, nach wie früher beim Condensator gemachten Angaben

$$c = \frac{S}{4\pi\delta}$$

Das ist nun freilich nicht richtig, wenn statt der Luft ein fester Isolator die Belegungen trennt, da die Natur ~~dieses Isolators~~ auch den Werth von c beeinflusst hat. Nach Messungen von Siemens ist, wenn der Isolator aus Glas besteht, die Capacität ungefähr zwei mal so gross. Schärfere Messungen existiren nicht. Jedenfalls kann man aber die Capacität danach schätzen und ungefähr ebenso giebt es ein einfaches Mittel einen rohen Annäherungswerth für V_0 angeben zu können, und zwar aus der Länge des Funkens, der sich bei der Entladung der Flasche bildet. Es ist die Funkenlänge sehr nahe proportional



mit V_0, wenn die Dimensionen der Elektroden, zwischen denen der Funke überspringt, als ∞ betrachtet werden können gegen die Länge des Funkens selbst. Dies lässt sich aus der Hypothese ableiten, dass bei steigender Elektrisirung der Funke dann eintreten muss, wenn die Kraft der Elektricität in a eine gewisse Grösse erlangt hat. Wenn wir daher auch für jede Funkenlänge den Werth von V_0 bestimmen können, wenn man diesen Werth nur für eine Funkenlänge kennt.

William Thomson hat durch Versuche gefunden, dass bei 1 mm Funkenlänge

$$V_0 = 1400$$

ist, wenn als Einheiten 1^{mm}, 1^{mgr}, 1^{sec} benutzt werden, oder allgemein

$$V_0 = 1400 \frac{\sqrt{1^{mgr.}\, 1^{mm}}}{1^{sec}}$$

ist. Nach diesen Angaben würde man, was oft von Nutzen ist, in jedem Falle von vornherein c und V_0, also Q_0 schätzen können. Den genauen Werth muss man natürlich durch Messungen mit dem Elektrometer in jedem Falle feststellen.

Denken wir uns nun, der Entladungsstrom der Flasche gehe durch ein Galvanometer, so wird die Nadel desselben in Folge in Folge des Stosses einen Ausschlag ausführen. Aus der Grösse dieses Ausschlages und den Constanten des Galvanometers kann man in elektromagnetischem Maß die Electricitätsmenge finden, die in der ganzen Zeit durch einen Querschnitt gegangen ist, kann also finden

$$\int_0^\infty J\,dt$$

wenn J die Intensität des Stromes nach elektromagnetischem Maße bedeutet, dessen Intensität nach elektrostatischem Maße wir i genannt haben. Nun haben wir aber $\int_0^\infty i\,dt$ bereits gefunden und es zeigt sich, dass das Verhältniss der beiden Integrale

$$\frac{\int_0^\infty i\,dt}{\int_0^\infty J\,dt} = \frac{i}{J} = \mu$$

dasselbe ist, wie das Verhältniss der beiden Intensitäten und gleich ist dem umgekehrten Verhältniss der Einheiten der Stromstärke μ, also eine constante Grösse, welche definirt ist durch die Gleichung

$$\mu = \frac{\text{electromagnet. Einheit d. Stromstärke}}{\text{electrostatische Einheit d. Stromstärke}}.$$

Auf diese Weise kann also der Werth von μ experimentell bestimmt werden und ist wirklich durch derartige Versuche von W. Weber und Kohlrausch bestimmt worden (In neuerer Zeit hat Maxwell auf einem ganz anderen Wege einen nicht sehr abweichenden Werth desselben gefunden.) Sie fanden

$$\mu = \frac{20964 \text{ geogr. Meilen}}{1 \text{ sec}}$$

oder wenn man 1 mm als Einheit einführt

$$\mu = 1,5537 \cdot 10^{11} \frac{1^{\text{mm}}}{1 \text{ sec}}$$

dieser Zahlenwerth, der eine Geschwindigkeit ist, ist merkwürdiger Weise sehr nahe gleich der Hälfte der Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume, was wahrscheinlich eine wichtige innere Beziehung hat.

Wir wollen nun eine andere Folgerung aus unseren Differentialgleichungen ziehen, an die sich gleichfalls eine Bemerkung von allgemeiner Bedeutung knüpfen lässt, eine Folgerung, aus der w theoretisch zu bestimmen lässt.
Schreiben wir die erste Differentialgleichung 4.) in die Form

$$\frac{1}{c} Q = -wi - a^2 P \frac{di}{dt}$$

und multipliciren sie mit der zweiten 5.) die wir in der Form schreiben

$$dQ = 2i\,dt$$

so kommt

$$\frac{1}{c} Q\,dQ = -2wi^2\,dt - 2a^2 P i\,di$$

Integriren wir diese Differentialgleichung von $t=0$ bis $t=\infty$, so kommt, da das zweite Glied nach pag 2. für beide Grenzen verschwindet

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} Q_0^2 = 2w \int_0^\infty i^2\,dt$$

oder da nach 3.) $\frac{Q_0}{c} = V_0$ ist

8.) $$\frac{1}{2} Q_0 V_0 = 2w \int_0^\infty i^2 \, dt$$

An diese Gleichung nun lassen sich Betrachtungen, die zur Bestimmung von a führen. Allerdings ist dabei nothwendig einen Satz der mechanischen Wärmetheorie zu benutzen, den wir daher vorgreifend aussprechen wollen.

Denken wir uns einen materiellen Punkt (x, y, z) auf den in der Richtung der Coordinatenaxen die Kräfte X, Y, Z wirken, wir wollen uns vorstellen, daß der Punkt auf irgend einem Wege J bewegt würde. Damit dies möglich sei, müssen zu den gegebenen Kräften X, Y, Z wechselnde Kräfte hinzukommen, die zusammen den Punkt zwingen, diese Bahn zu beschreiben. Für diese Bahn betrachte ich den Ausdruck

$$-\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

wo das Integral über die Bahn zu erstrecken ist. Dieses Integral, das von den ersten Kräften X, Y, Z und der Bahn abhängt, nennt man die Arbeit, die bei der gedachten Bewegung gegen die Kräfte X, Y, Z geleistet wird. Hat man statt eines materiellen Punktes, viele materielle Punkte, so nennt man die Summe der Integrale die Arbeit, die geleistet wird, gegen alle auf die Punkte wirkenden Kräfte X, Y, Z.
Geht die Bewegung des Punktes allein unter dem Einfluß der Kräfte X, Y, Z vor sich, so folgt aus der Differentialgleichung, der die Bewegung dann genügt, daß – einerlei, ob das System frei oder durch Bedingungsgleichungen beschränkt ist, – daß die gegen die sämmtlichen Kräfte geleistete Arbeit plus der Vergrößerung der lebendigen Kraft = Null ist.
(Satz von der lebendigen Kraft)
Wir wollen uns nun sämmtliche Kräfte in 2 Gruppen getheilt denken, deren erste bestehen soll aus den Kräften, die die materiellen Punkte aufeinander

anüben, die zweite aus den Kräften, die von *außen* auf die Punkte ausgeübt werden.

Die Arbeit, die gegen die innern Kräfte bei einer gewissen Bewegung geleistet wird, will ich die innere Arbeit nennen, dagegen die Arbeit, die gegen die äußeren Kräfte bei dieser Bewegung geleistet wird, die äussere Arbeit.

Denken wir uns nun ein System aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand durch *äußere* Kräfte übergeführt, und zwar *einmal* durch gewisse Kräfte, dann durch *andere* Kräfte, aber in denselben Endzustand. Zur Charakterisirung des Zustandes gehören auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte, auch diese sollen im Anfangszustand und im Endzustande in *beiden* Fällen *dieselben* sein. Dann erfährt die lebendige Kraft eine constante Veränderung. Ist aber dieses der Fall, so folgt aus dem Satze von der lebendigen Kraft, daß auch die auf dem einen oder anderen Wege geleistete Arbeit dieselbe ist, oder anders ausgedrückt: die *Summe* der inneren und äußeren Arbeit, die bei der Überführung des Systems aus dem Anfangszustand in den Endzustand geleistet wird, ist *dieselbe* auf dem einen und auf dem andern Wege. Nach einem äußerst wichtigen Principe, das in den letzten Jahrzehnten ausgesprochen ist, sind nun *alle* Naturkräfte der Art, daß die *innere* Arbeit bei allen Wegen *dieselbe ist*, wenn nur das System aus dem Anfangszustand in *denselben* Endzustand übergeführt ist, indem nämlich die innere Arbeit *nur* von der Änderung des Zustandes abhängt. Nimmt man aber die beiden zuletzt ausgesprochenen Sätze zusammen, so folgt, daß auch die äußere Arbeit bei *beiden* Wegen dieselbe sein muß. Dieses Princip lautet etwas weniger streng ausgedrückt: es gibt kein Perpetuum mobile, d. h. keine Maschine, die Arbeit aus Nichts liefert.

Unser System sei nun ein Körper und die Zustandsänderung eine Erwärmung. In der That kann eine Erwärmung durch äußere Kräfte hervorgebracht werden, z. B. durch Vermittlung von Reibung. Die Versuche haben gezeigt, daß durch Aufwendung einer gewissen äußeren Arbeit eine Wärmemenge erzeugt wird, die – gemessen auf die übliche Art – der aufgewandten Arbeit proportional ist. Aus unserem Princip folgt dann, daß, wenn wir durch geeignete äußere Kräfte den Körper wieder abkühlen, eine dieser Wärmemenge proportionale äußere Arbeit geleistet werden muß, daß also eine Wärmemenge einer geleisteten Arbeit aequivalent ist.

Dieser Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit wird der erste Hauptsatz der mechanischen Waermetheorie genannt. Wir wollen denselben hierauf die Elektricitätslehre anwenden.

Denken wir uns einen Leiter, auf welchem die Elektricität im Gleichgewicht ist. Sehen wir zu, eine wie große äußere Arbeit wir erhalten können, wenn wir die Elektricität in den Erdboden übergehen lassen. Die Menge der Elektricität auf der Oberfläche des Leiters sei Q, φ der constante Werth des Potentials in allen Punkten des Leiters, also auch der Oberfläche, dann ist, wenn c die Capazität des Leiters bedeutet 63.

(xyz)

$$1.)\quad Q = c\cdot\varphi$$

Denke man sich nun von Q ein kleines Theilchen dQ fortgenommen, etwa mit Hilfe eines kleinen Kügelchens, das an einer isolierten Handhabe angebracht ist, mit welchem man den Leiter berührt und dieses Kügelchen dann fortgetragen bis in den entfernten Erdboden.

Die zurückgebliebene Elektricität wird dann auch die Elektricität im

Kügelchen Kräfte ausüben. Suchen wir die Arbeit, die gegen diese Kräfte durch die Entfernung des Kügelchens geleistet wird. Seien (x, y, z) die Coordinaten des Kügelchens, V das Potential der zurückgebliebenen Electricität in Bezug auf die Einheit der Electricität im Punkte (x, y, z), so sind die Componenten der Kraft, mit welcher die zurückgebliebene Electricität auf die Einheit der Electricität in (x, y, z) wirkt

$$-\frac{\partial v}{\partial x}, \quad -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial v}{\partial z}$$

daher die Componenten der Kraft der zurückgebliebenen Electricität auf die Electricitätsmenge $-dQ$ in (x, y, z):

$$dQ \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad dQ \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \qquad dQ \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

Wenn nun das Kügelchen so verschoben wird, daß die Coordinaten desselben um dx, dy, dz wachsen, so wird die Arbeit, die dabei gegen diese Kräfte geleistet wird, sein

$$-dQ \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot dz \right\}$$ (pag 2 .. unten)

und bei endlicher Verschiebung die Arbeit, die dabei gegen die, von der zurückgebliebenen Electricität herrührenden Kräfte geleistet wird

$$-dQ \left\{ V'' - V' \right\}$$

wenn V'' und V' die Potentialwerthe der zurückgebliebenen Electricität in Bezug auf die Einheit der Electricität in der End und Anfangslage des Kügelchens bedeuten. Nun soll aber das Kügelchen bis in die Unendlichkeit geführt werden, d. h. $V'' = 0$, und da die Bewegung beginnt, während das Kügelchen in der Oberfläche des Leiters liegt, so ist $V' = \varphi$. Demnach die Arbeit, die bei der Bewegung des Kügelchens in die Unendlichkeit gegen die von der zurückgebliebenen Electricität wirkenden Kräfte geleistet wird

$$\varphi . dQ .$$

Denken wir uns nun, dass durch äussere Kräfte jene Bewegung vorgenommen wird – aber mit einer Geschwindigkeit, die immer ∞ klein bleiben soll, damit keine lebendige Kraft erzeugt wird, – dann muss die gegen diese <u>äusseren</u> Kräfte geleistete Arbeit, also die äussere Arbeit gleich und entgegengesetzt sein der gegen die von der Elektricität herrührenden Kräfte geleisteten Arbeit, also gleich sein

$$- \varphi . dQ :$$

Wir wollen uns nun diese Operation mit dem Kügelchen ∞ oft vorgenommen denken, bis alle Elektricität vom Leiter auf den Erdboden übergeführt ist, so ist die gesammte <u>äussere Arbeit</u>, die wir dann erhalten, das Integral dieses Ausdrucks von $Q = Q_0$ bis $Q = 0$, wenn Q_0 den Anfangswerth von Q bezeichnet, also

$$= - \int_{Q_0}^{0} \varphi \, dQ = - \int_{Q_0}^{0} \frac{1}{C} Q \, dQ \qquad \text{(denn nach Gl. 1 ist } \varphi = \tfrac{1}{C} Q)$$

$$= \frac{1}{2C} \cdot Q_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \varphi \cdot Q \qquad \text{(wenn wir wieder einfach mit } Q \text{ die ursprüngliche Elektricitätsmenge des Leiters bezeichnen.)}$$

Das ist die äussere Arbeit, die wir erhalten, wenn wir den Leiter entladen. Wir müssen nun noch einige Zweifel beseitigen, welche während der gemachten Entwicklung vielleicht entstanden sind.

1.) Indem wir dem Leiter mit dem Kügelchen Elektricität entziehen, müssen die Theile der Elektricität, die zurückbleiben, eine Bewegung ausführen, um wieder ins Gleichgewicht zu kommen und es fragt sich, ob dabei nicht Arbeit geleistet wird. Dies ist nun <u>nicht</u> der Fall, denn da das Potential φ immer constant ist, so können sich die Elektricitätstheilchen ~~wenig~~

auf der Oberfläche irgendwie bewegen, ohne Arbeit zu leisten.

2) Wir sind hiernach von der Anschauung abgegangen, daß immer gleiche Mengen entgegengesetzter Elektricität sich austauschen, sondern haben angenommen, daß die positive Elektricität einfach auf unsere Kugel ohne übergeht. Wir können aber unsere Betrachtung leicht mit unserer früheren Anschauung vereinigen. Denn sagen wir, daß wir auf dem beschriebenen Wege dem Leiter eine pos. Elektricitätsmenge $-\frac{1}{2}dE$ entziehen und ihm folglich dabei eine gleiche Menge negativer Elektricität durch das Kügelchen zuführen, so wird durch das Entziehen der pos. Elektricität Arbeit gewonnen, aber durch das Zuführen der entgegengesetzten Elektricität auch ebensoviel gewonnen, im Ganzen also, doppelte Menge Arbeit gewonnen, wie früher.

64.) Zu denselben Resultaten kann man auch auf einem andern Wege kommen, wenn man sich hierauf eingehen will, um weitere Verallgemeinerungen daran zu knüpfen.

Wir wollen uns in 2 discreten Punkten 2 Elektricitätsmengen e_1 und e_2 denken. Die Coordinaten dieser Punkte seien (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) und ihre Entfernung r, so daß also

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

dann sind die Kräfte, mit denen e_2 auf e_1 wirkt

$$-\frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial x_1} ; \quad -\frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial y_1} ; \quad -\frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial z_1}$$

und die Kräfte, mit denen e_1 auf e_2 wirkt

$$-\frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial x_2} ; \quad -\frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial y_2} ; \quad \frac{\partial \frac{e_1 e_2}{r}}{\partial z_2}$$

Denken wir uns beide Punkte ∞ wenig verrückt, so ist offenbar die Arbeit, die gegen diese 6 Kräfte geleistet wird, $-\left\{-\frac{d\frac{e_1e_2}{r}}{dx_1}dx - \ldots \right.$

$$\left. \ldots \frac{d\frac{e_1e_2}{r}}{dz_2}dz_2\right\} = d\,\frac{e_1e_2}{r}$$

Diese Betrachtung lässt sich leicht verallgemeinern für den Fall, dass eine beliebige Menge von Elektricitätstheilchen in discreten Punkten vorhanden sind. Die ganze Arbeit, welche bei einer ∞ kleinen Verschiebung aller Theilchen in Bezug auf sämmtliche Kräfte, die sie gegeneinander ausüben, geleistet wird, wird sein

$$d\,\Sigma\,\frac{ee'}{r}$$

wo die Summe zu erstrecken ist in Bezug auf alle Combinationen der Elektricitätstheilchen zu je zweien. Jedes Glied dieser Summe ergibt dann die Arbeit gegen die Kräfte, die 2 der Elektricitätstheilchen aufeinander ausüben.

Wenn die Verrückung eine endliche ist, so ist dann auch die Arbeit gegen die auf die Elektricitätstheilchen herrschenden Kräfte gleich dem Zuwachs, den $\Sigma\,\frac{ee'}{r}$ durch diese Verrückung erleidet (denn sie ist $= \int_{\text{Anfangswerth}}^{\text{Endwerth}} d\,\Sigma\,\frac{ee'}{r} =$

$$\underset{\text{für d. Endwerth}}{\Sigma\,\frac{ee'}{r}} - \underset{\text{für d. Anfangswerth}}{\Sigma\,\frac{ee'}{r}}\Big)$$

Denken wir uns nun diese Verschiebung durch äussere Kräfte hervorgebracht, aber bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit, damit keine lebendige Kraft erzeugt wird — so muss die Arbeit gegen die äusseren Kräfte, also die äussere Arbeit gleich und entgegengesetzt sein der Arbeit, die gegen die elektrischen Kräfte geleistet wird. Die äussere Arbeit muss also gleich sein dem negativen Zuwachs, den $\Sigma\,\frac{ee'}{r}$ durch die Verrückung erleidet.

Wenn daher in der Endposition diese Summe $\Sigma\,\frac{ee'}{r} = 0$ ist,(x) so wird die

---

(x) Dies ist z. B. der Fall, wenn in der Endposition die Punkte ∞ weit voneinander entfernt sind.

Arbeit, die gegen die äusseren Kräfte geleistet wird, gleich dem Anfangswerthe von $\Sigma \frac{ee'}{r}$ sein, denn dieser Anfangswerth ist dem gleichen negativen Zuwachs, den der Ausdruck durch die gedachte Verrückung erleidet (s. meine Anmerkung oben θ) diesen Ausdruck

1.) $$\Sigma \frac{ee'}{r}$$

wollen wir jetzt transformiren. Beziehen wir auf die einzelnen Stellen die Indices 1, 2, 3 ... so haben wir nun die Summe zu bilden, $\frac{ee'}{r}$ für folgende Combinationen zu bilden:

$$A \quad \begin{array}{llll} (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\ & (2,3) & (2,4) & \ldots \\ & & (3,4) & \ldots \\ & & \ldots & \end{array}$$

damit sind alle Combinationen zu je zweien erschöpft. Wir wollen nun aber $\frac{ee'}{r}$ für folgende Combinationen bilden

$$B \quad \begin{array}{lllll} \alpha & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\ (2,1) & & (2,3) & (3,4) & \ldots \\ (3,1) & (3,2) & & (3,4) & \ldots \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & \beta & \ldots \end{array}$$

die Combinationen links vom Strich $(\alpha\beta)$ sind offenbar dieselben, wie die rechts und diese letzteren wieder sind nichts anders, als die Combinationen des Systems A. Wenn wir also alle Combinationen des Systems B bilden und die Summe nehmen, so ist der resultirende Ausdruck nichts als das Doppelte des Ausdrucks 1.)

Nennen wir nun $U_1, U_2, U_3 \ldots$ die Summen aus allen Combinationen resp. 1^te, 2^te, 3^te Horizontalreihe in B, so wird 1.) die Form erhalten

2.) $$\Sigma \frac{ee'}{r} = \frac{1}{2}\left\{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\right\}$$

Dabei lassen die einzelnen Glieder U sich einfach definiren. Es ist nämlich U_n das Potential in Bezug auf e_n der sämmtlichen übrigen Elektricitätsmenge.
Nun wollen wir uns vorstellen, daß die Elektricitätsmenge, welche wir betrachten, _stetig_ auf einer oder mehreren Flächen angeordnet sei. Dann haben wir eine ∞ große Zahl von ∞ kleinen Elektricitätsmengen. Dann ist U_1, welches sich auf eine dieser ∞ kleinen Elektricitätsmengen bezieht, das Potential aller übrigen ∞ kleinen Elektricitätsmengen in Bezug auf dieselbe, also ein Integral, welches auszudehnen ist über die ganze Fläche, auf der die Elektricität sich befindet, wobei jedoch auszuschließen ist der Term $\frac{e_1 e_1}{r}$. Statt dessen können wir jedoch auch ausschließen die ganze Elektricitätsmenge, die sich befindet auf einer ∞ kleinen Kreisfläche, welche ihren Mittelpunkt in e_1 hat. Denn es ist leicht zu zeigen, daß alle Elektricitätstheilchen, welche in diesem Kreise liegen, nur ∞ wenig zum Werthe von U_1 beitragen. Dies ist leicht zu beweisen, doch unterlassen wir es hier (man muß Polarcoord. einführen, deren Anfangspunkt in e_1 ist). Wir können aber auch sagen, daß wir gar nichts auszuschließen brauchen, denn der Term $\frac{e_1 e_1}{r}$ wird ja $= \infty$, $r = 0$ wird und dann hat $\int \frac{ee'}{r}$ keinen andern Sinn, als daß bei der Integration ein ∞ kleiner Flächentheil um e_1 herum ausgeschlossen wird. Wir können daher einfach sagen: U_1 ist das Potential der gesammten Elektricität in Bezug auf e_1.
Ist daher _die Summe aller U_ gleich dem Potential der gesammten auf der Fläche ausgebreiteten Elektricität in Bezug auf sich _selbst_. Nennen wir dieses Potential $\Sigma U = \Omega$, so ist 6

3) $$\sum \frac{ee'}{r} = \frac{1}{2} \Omega$$

Das ist also nach den Erörterungen auf pag. 2 .. die _äußere Arbeit_, welche geleistet wird, wenn wir durch äußere Kräfte die Elektricitätstheilchen in eine Anordnung übergehen lassen, bei der ihr Potential in Bezug auf sich selbst _Null_ ist. Diese äußere Arbeit ist also gleich der

Hälfte des Potentials der gesammten Elektricität in Bezug auf sich selbst bei der Anfangslage.
Ich wende dies auf den Fall an, daß wir 2 Leiter haben, wie z. B. bei einer geladenen Leydener Flasche. Die constanten Potentialwerthe der äußern und innern Belegung seien φ_1 und φ_2, die Elektricitätsmengen auf den Belegungen Q_1 und Q_2, dann beträgt sich ist das Potential der gesammten freien Elektricität beider Belegungen

$$4) \qquad \Omega = \varphi_1 \cdot Q_1 + \varphi_2 Q_2$$

Denn φ_1 ist das Potential der gesammten freien Elektricität in Bezug auf die Einheit der Elektricität irgendwo im Leiter 1. (resp. äußere Belegung), daher $\varphi_1 Q_1$ das Gesammtpotential der freien Elektricität in Bezug auf die ganze auf dem Leiter 1 befindliche freie Elektricität und ebenso $\varphi_2 Q_2$ das Potential der gesammten freien Elektricität auf die ganze auf Leiter 2 befindliche freie Elektricität, daher also $\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2$ das Gesammtpotential der ganzen freien Elektricität in Bezug auf sich selbst. Die Hälfte davon ist also gleich der äußern Arbeit, welche geleistet wird, wenn wir beiden Leitern ihre Elektricität entziehen.
Dies ist offenbar ein allgemeineres Resultat, als das pag 2.. gewonnene.

65. Wenden wir uns nun zu unserem speciellen Fall der Leydener Flasche zurück. Dort war angenommen, daß beide Belegungen gleich große Mengen entgegengesetzter Elektricität enthalten sollten und es war die Differenz der Potentiale beider Belegungen mit V_0 bezeichnet worden. Wollen wir also Gl. 4) auf diesen Fall anwenden, so ist zu setzen $-Q_1 = +Q_2 = Q_0$; $\varphi_2 - \varphi_1 = V_0$ $\cancel{\frac{\varphi}{2} = V_0}$ und es kommt

$$5) \qquad \Omega = V_0 \cdot Q_0$$

Es ist also die äußere Arbeit, welche geleistet wird, wenn man die freie

Elektricität der Flasche auf passende Weise (d. h. mit ∞ kleiner Geschwindigkeit) aus derselben entfernt.

6) $$\frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2} V_0 \cdot Q_0$$

66.) Wenn wir nun auf die gewöhnliche Weise die Ladung einer Flasche durch den Draht entladen, so wird zwar keine äußere Arbeit geleistet, aber es wird <u>Wärme</u> erzeugt. Da Wärme und Arbeit aequivalent sind, so muß eine Wärmemenge im Drahte erzeugt werden, die gerade <u>gleich</u> der äußern Arbeit ist, welche hätte geleistet werden können (wenn die Einheiten so gewählt sind, daß die Einheit der Wärme der Einheit der Arbeit aequivalent ist) also gerade $\frac{1}{2} V_0 Q_0$. Nun hatten wir aber aus den Differentialgleichungen für die Entladung die Gleichung abgeleitet (pag 2.)

$$\frac{1}{2} V_0 Q_0 = 2w \int_0^\infty i^2 dt$$

Da nun links der Ausdruck steht, der der erzeugten Wärmemenge gleich ist, so schließen wir aus dieser Gleichung, daß auch $2w\int_0^\infty i^2 dt$ die Wärmemenge darstellt, die der Entladungsstrom der Flasche im Drahte erzeugt. Dies stimmt genau überein mit der Wärmemenge, die ein continuirlicher Strom in einem Drahte erzeugt. Denn nach dem Joule'schen Gesetze ist die im Schließungsdrahte eines continuirlichen Stromes erzeugte Wärmemenge proportional mit w und i^2. Wenn wir von diesem experimentell gefundenen Gesetze ausgegangen wären, so hätten wir schließen können, daß $2w\int_0^\infty i^2 dt$ mit $\frac{1}{2} V_0 Q_0$ <u>proportional</u> ist; unsere Betrachtungen aber haben gezeigt, daß diese Ausdrücke wirklich einander <u>gleich</u> sind. (wenn die Einheit der Arbeit der Einheit der Wärme gleich ist) wobei w und i nach elektrostatischem Maßsystem gemessen. Hieraus können wir dann wieder umgekehrt einen Schluß machen auf die Wärmemenge, die in irgend einem galvanischen Strom in der Zeiteinheit erzeugt wird, nämlich daß dieselbe nicht nur mit i^2 und w proportional sein muß, sondern dass hier wirklich $= 2wi^2$ sein muss.

67. Hieraus ziehen wir aber noch weitere Schlüsse. Denken wir uns einen in sich zurückkehrenden Draht, der durch äussere Kräfte in der Nähe eines continuirlichen Stromes oder eines Magnetes bewegt wird, so wird in demselben ein Strom inducirt. Es sei i die Intens. des continuirlichen Stromes, i' die des inducirten zur Zeit t, beide nach elektrostatischem Maass gemessen. Dieselben Intensitäten nach elektromagnetischem Maass seien resp. J' und J. (Das Verhältniss beider Intens. haben wir pag. 2.. kennen gelernt.) Ferner sei P das Potential des einen Leiters in Bezug auf den andern, wenn beide von einem Strome von der Intensität 1 in elektromagnetischem Maass durchflossen werden, also

$$P = -\iint \frac{ds\,ds'}{r} \cos\theta \cos\theta'$$

Die äusseren Kräfte sollen derart abgemessen werden, dass die lebendige Kraft des inducirten Stromes nicht zunimmt, sondern gerade das Gleichgewicht halten den Kräften, die der inducirende Strom auf den inducirten ausübt. Dann ist die in einem Zeitelement geleistete äussere Arbeit

$$= -JJ'\,\frac{dP}{dt}\,dt$$

In diesen Ausdruck führen wir die Intensitäten i und i' ein — da $J = \frac{i}{\mu}$, $J' = \frac{i'}{\mu}$, wo μ den früher angegebenen Werth hat, so ergibt sich jene äussere Arbeit

$$= -\frac{ii'}{\mu^2}\,dP$$

Der inducirte Strom erzeugt in dem Leiter Wärme, und diese Wärme muss aequivalent sein der Arbeit, die in derselben Zeit verbraucht ist. Aber nach dem früheren ist die in dem Zeitelement dt erzeugte Wärmemenge (pag 2..)

$$= 2wi^2\,dt$$

diese beiden Ausdrücke müssen aber gleich sein, wir erhalten die Gleichung

$$-\frac{i i'}{\mu^2} dP = 2 w i^2 dt$$

oder

$$w \cdot i = -\frac{i'}{2\mu^2} \cdot \frac{dP}{dt}$$

Nun hatten wir aber früher gefunden (pag 2..)

$$w \cdot i = -a^2 \cdot i' \frac{dP}{dt}$$

wo a eine noch zu bestimmende Constante war. Vergleichen wir nun die beiden letzten Gleichungen, so sehen wir, dass dieselben identisch werden, wenn zwischen a und μ die Relation besteht

$$a^2 = \frac{1}{2\mu^2}$$

Diesen Werth muss die Constante a also haben, in dieser Weise hängt sie mit dem Verhältniss der Stromstärken in elektromagnetischem und elektrostatischem Maasse zusammen.
Diese Ableitung des Inductionsgesetzes, durch welche zugleich die Constante a bestimmt wird, rührt von Helmholtz her.

68. Ich will noch darauf aufmerksam machen, in welchem Verhältniss die Intensitäten, elektromotorischen Kräfte und Widerstände in den beiden Maasssystemen stehen. Wir bezeichnen dabei diese Grössen im elektromagnetischen Maasssystem mit grossen Buchstaben, im elektrostatischen mit kleinen. Dann ist

$$\frac{J}{i} = \frac{1}{\mu}$$

wo μ jene Geschwindigkeit bedeutet. Die inducirte elektromotorische Kraft ist nach elektromag. Maasssystem (wenn J die Intensität des inducirenden Stromes)

$$W.J. = -J'\,\frac{dP}{dt}$$

und nach elektrostat. Maß $\quad w.i = -\frac{i'}{2\mu^2}\cdot\frac{dP}{dt}$

somit also $\quad \frac{W.J}{w.i} = \frac{J'}{i'}\cdot 2\mu^2 = 2\mu$

und daher auch $\quad \frac{W}{w} = 2\mu^2$

Früher haben wir den Widerstand des Siemens'schen Widerstands-Etalon angegeben im elektromag. Maßsystem. Hieraus und aus μ ergibt sich dann, daß derselbe im elektrostatischen Maßsystem den Werth hat

$$B.A = \frac{1}{4,828\cdot 10^{n}}\cdot\frac{1^{sec}}{1^{mm}}$$

Wir sehen hieraus, daß der Widerstand, welcher nach elektromagnetischem Maßsystem eine Geschwindigkeit war, nach elektrostatischem das Reciproke einer Geschwindigkeit ist.
Endlich erwähnen wir noch, daß die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes nach elektrostatischem Maßsystem den Werth hat

$$D = \frac{1}{3,1074}\cdot\frac{\sqrt{1^{mgr}\cdot 1^{mm}}}{1^{sec}}$$

69. Gehen wir nun wieder zurück zu den beiden Differenzialgleichungen, welche wir pag. 2.. für den Entladungsstrom unserer Leydener Flasche aufgestellt haben, so waren dieselben, wenn wir den für a' gefundenen Werth benutzen

$$1)\quad \begin{cases} w.i = -\frac{1}{c}Q - \frac{i}{2\mu^2}P\frac{di}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} = 2i \end{cases}$$

Wir wollen nun das allgemeine Integral derselben herstellen, welches also 2 willkürliche Constanten enthalten muß, die so zu bestimmen sind, daß für $t=0$, $Q=Q_0$ und $\frac{dQ}{dt}=0$ (weil $=2i$) ist.

Eliminiren wir i aus der ersten Gleichung, indem wir den Werth von i aus der 2ten einsetzen, so kommt

$$2.)\quad \frac{P}{2\mu^2}\cdot\frac{d^2Q}{dt^2} + w\cdot\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{c}\cdot Q = 0$$

Eine particuläre Lösung erhalten wir durch die Substitution

$$3.)\quad Q = e^{-\lambda t}$$

denn setzen wir diesen Werth von Q, in welchem λ vorläufig ganz unbestimmt ist, in 2.) so kommt, wenn wir den gemeinsamen Faktor $e^{-\lambda t}$ fortlassen

$$4.)\quad \frac{P}{2\mu^2}\lambda^2 - w\lambda + \frac{2}{c} = 0$$

und 3.) wird eine Lösung, wenn λ als Wurzel dieser Gleichung bestimmt wird. Die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 dieser quadratischen Gleichung geben dann jede ein particuläres Integral $e^{-\lambda_1 t}$ und $e^{-\lambda_2 t}$; Jetzt erhält man daraus das allgemeine Integral, indem ich jedes der particulären Integrale mit einer willkürlichen Constante multiplicire und addire. Es ist also das allgemeine Integral der Differentialgleichung 2.) mit 2 willkürlichen Constanten

$$5.)\quad Q = A_1\cdot e^{-\lambda_1 t} + A_2\cdot e^{-\lambda_2 t}$$

Es kommt jetzt auf eine Untersuchung der beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 an. Die Gleichung 4.) kann entweder 2 reelle oder 2 complexe Wurzeln haben. Sind die Wurzeln *reell*, so sind sie *positiv*, da alle 3 Coefficienten $\frac{P}{4\mu^2}$, w, $\frac{2}{c}$ wesentlich positive Grössen sind. Es kann also für *kein* negatives λ die linke Seite von 4.) verschwinden.

Die Wurzeln werden offenbar *reell* und positiv sein wenn $w^2 > \frac{4P}{2\mu^2}\cdot\frac{2}{c}$

also

$$w^2 > 4\frac{P}{c\mu^2}$$

dagegen müssen sie complex sein, wenn

$$w^2 < 4\frac{P}{c\mu^2}$$

Zu letzterem Ausdrucke stellt sich der Ausdruck für Q in imaginärer Form dar. Derselbe kann man als Summe zweier imaginären Constanten, wenn man benützt, daß $e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$. Dann erhält man, wenn man für A_1 und A_2 zwei neue Constanten A und B einführt

$$b.) \qquad Q = e^{-h\cdot t}\left\{A\cdot\cos\frac{t}{T}\pi + B\cdot\sin\frac{t}{T}\pi\right\}$$

wo h und T von P, μ, w und c abhängig sind, nämlich so, daß

$$\begin{cases} h = \dfrac{\mu^2 \cdot w}{P} \\ T = \dfrac{\pi\sqrt{Pc}}{2\mu}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mu^2 w^2 c}{4P}}} \end{cases}$$

Die Lösung unserer Differentialgleichung hat also in dem einen Fall die Form (5.) in dem anderen die Form (6.) Wir sehen, daß die Entladung auf zwei wesentlich verschiedene Arten vor sich gehen kann, je nachdem nämlich $w^2 \gtrless \frac{4P}{c\mu^2}$ ist. Die beiden Constanten A und B sind in beiden Fällen zu bestimmen, doch hat dies hier kein Interesse für uns.

Es ist leicht zu sehen, daß in dem ersten Falle (reelle Wurzeln) Q und i immer dasselbe Vorzeichen haben, d. h. der Entladungsstrom hat immer dieselbe Richtung. (Denn dann besteht für Q die Form 5 und A_1 und A_2 reell sind, $e^{-A_1 t}$ und $e^{-A_2 t}$ also positiv, so kann also Q sein Zeichen nicht ändern. Ebenso auch i nicht wegen der zweiten Diff. gl. in 1.) Hingegen in dem zweiten Falle wechselt Q sowohl als i sein Vorzeichen (denn hier gilt für Q die Gl. 6.) womit wachsendem t wegen der trigonom. Funktionen das Zeichenwechsel von Q bedingen). Die Entladung ist also im ersten Falle eine continuierliche, im zweiten eine oscillatorische, bei welcher die Dauer einer Periode T beträgt.

Die entwickelten Gleichungen gelten nicht allein für den Fall einer

70./ Entladung, sondern überhaupt immer, wenn die beiden Belegungen verbunden sind durch einen Draht und wenn das Gleichgewicht der Electricität in dem Draht gestört wird. Und zwar werden die Gleichungen gelten von dem Augenblicke an, wo die Ursache der Störung aufgehört hat.

Es sei der Draht der secundäre Draht eines Inductionsapparates und seine beiden Enden verbunden mit den beiden Belegungen einer Leydener Flasche. Der primäre Draht leite den Strom einer galvanischen Kette. Wenn nun der Strom im primären Drahte unterbrochen wird, so tritt eine Störung des Gleichgewichts im secundären Drahte ein. Es ist näherungsweise anzunehmen, daß wenn der Funke im primären Draht aufgehört hat, die Electricität in demselben in Ruhe sich befindet. Es gelten daher unsere Gleichungen für den secundären Draht von dem Augenblicke an, wo der Funke im primären erloschen ist.

Weiter kann man mit einer gewissen Annäherung annehmen, daß die Dauer des Funkens so klein ist, gegen die andern in Betracht kommenden Zeiträume. Wenn man das thut, so ist es leicht den Anfangswerth der Intensität i im secundären Draht anzugeben. Wir finden in diesem Fall leicht folgende Gleichung

$$1.)\quad w\cdot i = -\frac{1}{c}e_0 - \frac{1}{2\mu^2}P\frac{di}{dt} - \frac{1}{2\mu^2}\cdot P'\frac{di'}{dt}$$

d. h. unsere frühere Differentialgleichung (pag 2.. Gl. 1.) wozu wir aber noch ein Glied hinzuzufügen haben, das so lange einen von Null verschiedenen Werth hat, als im primären Draht ein Strom fließt, und das die elektromotorische Kraft im secundären Draht angibt, welche durch die Stromstärke i' des primären erzeugt ist. Darin ist P' das Potential der beiden Drähte aufeinander, wenn in beiden ein Strom fließt, dessen Intensität nach elektromag. Maßsystem der Einheit gleich ist.

Multiplicieren wir diese Gleichung mit dt und integrieren sie über die Dauer des Funkens T, wo T so klein gegen die Zeit in Betracht kommende Zeitraum ist, so wird die linke Seite Null, da i endlich gross ist, ebenso verschwindet das erste Glied der rechten Seite und wir erhalten

2.) $$0 = \frac{-1}{2\mu^2} P \cdot i_0 + \frac{1}{2\mu^2} P' i'_0$$

die beiden letzten Glieder der rechten Seite werden nicht Null, da die Stromstärke in beiden Drähten sich sehr schnell ändert. (Es bedeutet darin

i_0 den Werth von i zur Zeit $t = T$ (für $t = 0$ ist $i = 0$)

i'_0 " " " i' " " $t = 0$ d.h. die Intensität des primären Stromes, so lange er noch stationär war. (für $t = T$ ist $i' = 0$)

Aus 2) folgt

3.) $$i_0 = i'_0 \cdot \frac{P'}{P}$$

Dies ist dieselbe Gleichung welche wir pag 2.. fanden in dem Falle, dass der secundäre Draht ein in sich geschlossener ist. Es ist also die Anfangsintensität i_0 von der Flasche vollkommen unabhängig und gerade so gross, als ob die Enden des Drahtes in Verbindung standen.

Unsere beiden Differentialgleichungen, welche wir für die Entladung discutirten, haben in ihrem allgemeinen Integral 2 willkürliche Constante. Dieselben bestimmen sich 1.) aus dem Werthe von i_0 in Gl. 3.) welche wir beim Integrale als den Werth ansehen können, welcher für $t = 0$ statt findet, und 2.) aus der Bedingung, dass für $t = 0$ $a = 0$ ist, da die Flasche ungeladen war.

4.) Anders allerdings verhält es sich beim Ruhmkorff'schen Inductionsapparate, bei dem die Enden des primären Drahtes nach der Unterbrechung in Verbindung sind mit den Belegungen eines Condensators, der den Zweck hat, die Funkenlänge im secundären Draht zu vergrössern. Die Bewegung der Elektricität im primären Draht erlischt dann nicht mit dem Funken, sie spielen also beide Drähte eine ganz ähnliche Rolle, indem die Enden jedes

Drahtes mit den Belegungen einer Flasche (oder eines Condensators) verbunden, sind die Differentialgleichungen für diesen Fall können wir leicht aufstellen. Dieselben sind hier für *beide* Drähte ganz analog ($w i = \ldots$ … und $w' i' = \ldots$). Auch die Integration derselben ist ganz leicht. Die Constanten der Integrale lassen sich bestimmen, wenn man annimmt, dass die Dauer des Funkens ∞ klein ist. Aber in Bezug auf gewisse Erscheinungen ist dies *nicht* erlaubt, da bestimmte Vorgänge im *Innern* wesentlich dadurch bedingt sind, was *während* der Funkendauer geschieht. Da uns aber die Kenntniss der Änderung des Widerstandes während der Funkendauer fehlt, so lässt sich die Theorie der Entladung nicht weiter verfolgen.

Wir setzten bisher voraus, dass an verschiedenen Stellen des Drahtes in demselben Augenblick die Stromstärke dieselbe sei. Dies kann strenggenommen nicht richtig sein, wenn die Intensität sich mit der Zeit ändert. Denn wenn der Draht von einem Strom durchflossen wird, so muss freie Elektricität in ihm vorhanden sein, umso mehr, je grösser die Intensität des Stromes ist. Diese freie Elektricität gerade – oder das Potential derselben – bewirkt, dass sehr *nahe* die Stromstärke in den verschiedenen Elementen dieselbe ist. Wenn nun die Stromstärke überall zunimmt, so muss überall freie Elektricität abgesetzt werden, was *nur* dann stattfinden kann, wenn die Intensität an verschiedenen Stellen *nicht* dieselbe ist. Von diesem Umstande – dass an verschiedenen Stellen des Drahtes in demselben Augenblicke nicht dieselbe Stromstärke herrscht – kann man in vielen Fällen absehen, (wie z. B. in Hydrodynamik man oft davon absehen kann, dass die Flüssigkeiten nicht absolut incompressibel sind.) Aber gewisse Erscheinungen werden wesentlich dadurch bedingt, dass die Stromstärke an verschiedenen Orten in demselben Augenblicke verschieden ist. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, darf man den Querschnitt des Drahtes nicht als ∞ klein voraussetzen, sondern muss von denjenigen 72.

Gleichungen angegeben, welche sich beziehen auf die Bewegung der Elektricität in Leitern, die nach allen Richtungen ausgedehnt sind. Ich will die Ableitung dieser Gleichungen, die auch sonst von Interesse sind, hier zeigen.

73. Wir gehen von einer Annahme aus, welche wir früher gemacht haben. Denken wir uns ds' als Element eines linearen Stroms, dessen Intensität zur Zeit t i' sei. Denken wir uns ferner ds als Element eines linearen Leiters, in welchem Induction stattfindet. Die beiden Elemente sehen wir als ruhend an, die Induction durch Änderung der Intensität i' hervorgebracht. Dann war angenommen (pag 2..), dass in Folge der Änderung der Intensität i' auf die <u>Einheit</u> positiver Elektricität in ds in der Richtung von ds eine Kraft ausgeübt wird (von ds')

$$= \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{di'}{dt}\cdot\frac{ds'}{r}\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta'$$

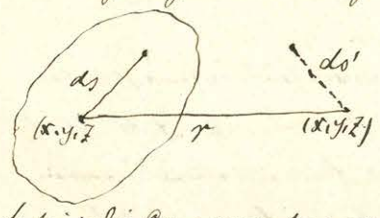
<u>und</u> auf die Einheit <u>negativer</u> Elektricität in ds eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung ausgeübt wird. Es hat dieser Ausdruck die Form der Componente nach ds einer Kraft, die von der Länge von ds unabhängig ist, da $\cos\vartheta$ allein vorkommt und nur abhängig ist von der <u>Richtung</u> von ds. Wir können also sagen, der Ausdruck hat die Form der Componente nach ds einer Kraft, die die Größe

$$A \qquad = \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{di'}{dt}\cdot\frac{ds'}{r}\cdot\cos\vartheta'$$

und welche die Richtung von r hat (denn $\cos\vartheta = \cos(ds, r)$). Wir können annehmen, dass auf die positive Elektricität an dem Orte von ds in der Richtung von r eine Kraft wirkt, welche diese Größe hat, und dass auf die negative Elektricität eine gleiche Kraft in entgegengesetzter Kraft wirkt.

Stellen wir uns nun vor, dass ds sich in einem Leiter befinde, der nach allen Dimensionen ausgedehnt ist. Es seien (x, y, z) die Coordinaten eines

Anfangspunktes. Dann wollen wir uns die Componenten nach den Axen der Kraft A bilden, welche auf die Einheit pos. Elektricität in ds von ds' in der Richtung von r ausgeübt wird. Dazu müssen wir die Kraft multi-plicieren, resp. mit $\cos(r,x)\cos(r,y)\cos(r,z)$



Da nun aber

$$\cos(r,x) = -\frac{\partial r}{\partial x};\ \cos(r,y) = -\frac{\partial r}{\partial y};\ \cos(r,z) = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

$\cos(x r) = \frac{x'-x}{r}$

$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+\ldots$

$r\frac{\partial r}{\partial x} = x-x'$

$-\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x'-x}{r}$

so sind die Componenten nach den Axen der Kraft A, welche ds' auf die Einheit pos. Elektricität in ds in der Richtung von r ausübt

$$1)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2\mu^2}\cdot\dfrac{di'}{dt}\cdot\dfrac{ds'}{r}\cos\vartheta'\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x} \\[2ex] -\dfrac{1}{2\mu^2}\cdot\dfrac{di'}{dt}\cdot\dfrac{ds'}{r}\cos\vartheta'\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{1}{2\mu^2}\cdot\dfrac{di'}{dt}\cdot\dfrac{ds'}{r}\cos\vartheta'\cdot\dfrac{\partial r}{\partial z} \end{cases}$$

Nun wollen wir uns vorstellen, dass durch ds' ein Element eines Stromes, welcher einen Leiter von endlichen Dimensionen durchfliesst. Die Coordinaten des Anfangspunktes von ds' seien (x',y',z'). Denn müssen wir dem Element ds' einen gewissen ∞ kleinen Querschnitt beilegen, den wir q' bezeichnen wollen. Bezeichnen wir dann die Componenten der Stromdichtigkeit in (x',y',z') mit u', v', w', so ist

$$2)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{i'}{q'}\cos(ds',x) \\[2ex] v' = \dfrac{i'}{q'}\cos(ds',y) \\[2ex] w' = \dfrac{i'}{q'}\cos(ds',z) \end{cases}$$

(Denn da i' ist die Elektricitätsmenge die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömt und die Stromdichtigkeit = die Elekt. Menge die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömt, so ist die Stromdichtigkeit = $\frac{i'}{q'}$.)

Den Faktor $\cos\vartheta'$ wollen wir in 1. mit i' unter dem Differentialzeichen zusammenfassen, was erlaubt ist, da ϑ' sich mit der Zeit nicht ändert. Dann kann ich nach der Bedeutung von $\cos\vartheta'$ schreiben

$$\frac{i'\cos\vartheta'}{q'} = \frac{i'}{q'}\left\{\cos(ds',x)\cdot\cos(r,x)+\cos(ds',y)\cdot\cos(r,y)+\cos(ds',z)\cdot\cos(r,z)\right)$$

daher nach 21)
$$-\frac{i'\cos\vartheta'}{q'} = u'\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}.$$

Wenn ich diesen Ausdruck hier einführe, so bekomme ich, da $q'ds'$ gerade ein Volumenelement ist, für das ich also auch schreiben kann $dx'dy'dz'$, weil später über einen gewissen Raum zu integriren ist – für die

$$X\text{-Componente}: \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\cdot\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\right\}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

$$Y\text{ Componente}: \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\right\}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

$$Z\text{ Componente}: \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\right\}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

das sind also die Componenten der Kraft, welche ein Element ds' in der Richtung von r ausübt auf die Einheit der Elektricität in (x,y,z). Wollen wir daher jetzt die Componenten der Kraftwirkung, die ausgeübt wird auf die Einheit der Elektric. von irgend einem endlichen Leiter, so haben wir über den Raum dieses Leiters (des inducirenden Kreises) zu integriren. Diese Componenten lassen sich einfach darstellen, wenn man die Zeichen einführt

$$U = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\cdot\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\frac{\partial r}{\partial x}.$$

$$V = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\cdot\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\frac{\partial r}{\partial y}.$$

$$W = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'}+v'\frac{\partial r}{\partial y'}+w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)\frac{\partial r}{\partial z}.$$

dann erhält man $\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}$; $\frac{1}{2\mu^2}\frac{\partial V}{\partial t}$; $\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial W}{\partial t}$

als die Componenten der Kraft, mit der der inducirende Strom auf die Einheit der Elektricität in (x, y, z) wirkt.
Zu diesen Kräften kommen noch die von der freien Elektricität herrührenden, die auch noch vorhanden sein müssen. Sei Φ das Potential derselben so sind

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\;;\quad -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\;;\quad -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

die Componenten derselben nach den Achsen. Es sind daher die Componenten der Gesamtkraft, welche auf die Einheit der Elektricität in (x, y, z.) ausgeübt wird

$$X \text{ Compon. } -\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$Y \text{ Comp. } -\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$Z \text{ Comp. } -\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial W}{\partial t}$$

Nennen wir die Componenten der Stromdichtigkeit in (x, y, z) u, v, w, und λ die Leistungsfähigkeit in diesem Punkte, so ist nach der Hypothese, auf der die Ableitung der Gesetze der stationären Ströme beruht pag. 1.

$$\frac{1}{\lambda}u = X\text{ Comp.}\qquad \frac{1}{\lambda}v = Y\text{ Comp.}\qquad \frac{1}{\lambda}w = Z\text{ Comp.}$$

daher nach dem zuletzt für diese Componenten gefundenen Ausdruck

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{1}{\lambda}v = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{1}{\lambda}w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\partial W}{\partial t} \end{cases}$$

drei Gleichungen, die sich auf die Bewegung der Elektricität in einem

endlichen begrenzten Leiters beziehen und in allen Punkten (x, y, z) des durchflossenen Leiters erfüllt sein müssen.
Zu diesen kommt noch eine Gleichung hinzu, die gleichfalls für alle Punkte des Leiters gültig ist. Nach einer in der Theorie der stationären Ströme ausführlich durchgeführten Untersuchung (pag i..) ist nämlich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

die Menge positiver Elektricität, die dem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ im Zeitelement dt entzogen wird. Ebensoviel negativer Elektricität wird dem Volumenelement im Zeitelement dt zugeführt. Bezeichnet daher e die Dichtigkeit der freien Elektricität im Element $dx\,dy\,dz$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}$$

(wo der Faktor $\frac{1}{2}$ eben auftritt, weil ebensoviel pos. Elekt. entzieht, als negat. Elekt. zugeführt wird)
Hierzu können wir noch hinzufügen eine Bedingung für die Oberfläche des Körpers, die überall mit Nichtleitern in Berührung sei. Bedeutet N die nach innen gerichtete Normale, tritt (pag i..)

$$u\cdot\cos(N,x)+v\cdot\cos(N,y)+w\cdot\cos(N,z)$$

gleich der Elektricitätsmenge, die in der Zeiteinheit der Flächeneinheit zugeführt wird. Auf der Oberfläche wird sich freie Elektricität befinden und nennen wir deren Dichtigkeit zur Zeit t e so ist

$$u\cdot\cos(N,x)+v\cdot\cos(N,y)+w\cdot\cos(N,z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Endlich können wir, wenn außerhalb des Leiters keine freie Elektricität vorhanden ist, noch eine Gleichung hinzufügen, denn da dann φ nur herrührt von der Elektricität des Leiters, deren Dichtigkeit im Innern ε verschieden von der der Oberfläche e sein sollte, so ist

$$\Phi = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\cdot \varepsilon' + \int \frac{dS'}{r}\cdot e$$

wo dS' ein Oberflächenelement bedeutet.

In dieser Form hat Kirchhoff die Bewegungsgleichungen in einer Abhandlung aufgestellt, die man Pogg. Ann. Bd. 102 findet und sie angewandt auf einen Leiter, der aus einem ∞ langen und ∞ dünnen Draht bestand. Doch ist dort in einem Punkte ein anderer Weg eingeschlagen. Hier bildete die Basis unserer Betrachtungen eine Hypothese in Bezug auf die Induction zweier linearen Stromelemente aufeinander, die bis zu einem gewissen Grade willkürlich war. Doch stützte K. sich auf ein Gesetz von W. Weber, zu welchem wir gleich übergehen werden, das gerade zu der Behauptung führt, die wir hier als Hypothese eingeführt haben

In neuester Zeit hat Helmholtz (Borchard's Journal 72) gegen das Weber'sche Gesetz ein Bedenken ausgesprochen und die Gleichungen allgemeiner abgeleitet, als es nach dem Weber'schen Gesetz möglich ist.