Ms 5097/7-9. Eötvös Loránd [illegible]
egyetemi jegyzetei

3 kötet

4. Methode aus einer Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ eine zweite abzuleiten.

§1. Hat man eine Lösung der Gleichung:

$$\Delta V = 0$$

gefunden, und ist diese auf die Form gebracht:

$$V(x, y, z)$$

so ergeben sich andere Lösungen derselben Form indem man zu den Argumenten beliebige Constanten addirt. Wenn diese addirten Constanten reelle Grössen sind so bleibt die Form der Lösung dieselbe; wenn sie aber imaginär sind, dann ist die Lösung zusammengesetzt aus einem ~~im~~ reellen und einem imaginären Theil, und in diesem Falle muss sowohl der reelle als der imaginäre Theil für sich eine Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ sein. –

Dieses Princip mit Hülfe dessen aus einer Lösung der Gleichung ΔV noch zwei andere Lösungen derselben abzuleiten sind wollen wir auf einen einfachen Fall anwenden. Eine Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ ist z.:

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Setze ich statt x, $x+ia$ so wird dieselbe:

$$= \frac{1}{\sqrt{(x+ia)^2+y^2+z^2}}$$

Wir haben nun den reellen und den ~~...~~ mit i behafteten Theil dieses Ausdruckes aufzusuchen. – ~~Es~~ Ich setze:

$$\sqrt{(x+ia)^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2+2iax} = \sigma + i\mu$$

wo σ und μ nothwendig reelle Grössen sind, zu deren Bestimmung wir die Gleichungen haben:

(1) $$x^2+y^2+z^2-a^2 = \sigma^2-\mu^2$$

(2) $$ax = \sigma\mu$$

Dividirt man (2) mit σ, quadrirt dann diese Gleichung und addirt sie zu (1) so folgt:

(3) $$\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2+\sigma^2} = 1$$

Dividirt man dagegen (2) mit μ, quadrirt dann und zieht sie ab von (1), so ergibt sich

(4) . . . . . $$-\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2-\mu^2} = 1$$

6.

Mathematische Vorbereitung.–

~~Die Flä~~ Wir wollen uns hier mit einer Classe von Aufgaben beschäftigen, welche sich auf die Anordnung der Electricität auf Cylinderflächen beziehen, welche sich parallel der Z Achse bis in die Unendlichkeit erstrecken.– Das Potential so verbreiteter Massen wird auch der Gleichung

$$\Delta V = 0$$

genügen müssen, und wird innerhalb des ganzen unendlichen Raumes eindeutig und stätig sein müssen – aber da in ~~Bezug~~ V unabhängig von z sein muss, so wird es in diesem Falle genügen die Betrachtung in einer auf die Achse des Cylinders verticalen Ebene durchzuführen.–

Für solche Fälle gestaltet sich die Gl. $\Delta V = 0$ wie folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist:

$$w = F(x+iy)$$

ebenso wird auch der reelle und auch der imaginäre Theil dieses ~~Function~~ Ausdruckes der in Frage stehenden Gleichung genügen. – Wir werden uns mit Aufgaben beschäftigen, in welchen der reelle Theil als Lösung zu betrachten ist — damit nun dieser reelle Theil als Potential von ~~der~~ Electricität angesehen werden könne die auf der Cylinderfläche resp. der Grenzlinie im Gleichgewichte ist, muss dieser Theil des Ausdruckes innerhalb eines begrenzten Raumes resp. einem begrenzten Theile der XY Ebene ~~endlich~~ eindeutig und stätig sein. – Wir können setzen

$$w = u + iv$$

Wenn w innerhalb eines begrenzten Gebietes eindeutig und stätig ist so ist innerhalb desselben offenbar auch u eindeutig und stätig, es ist aber leicht ein zu sehen dass ~~wenn~~ unter Umständen u auch dann eindeutig sein kann wenn w es nicht ist. –

Die allgemeinen Lösungen w der Gleichung ΔV welche zu physikalischen Problemen führen können, sind in meisten Fällen vieldeutig, um dieselben eindeutig und stätig zu machen, muss man passende Grenzen feststellen, d. i. das Gebiet beschränken innerhalb dessen w ~~als Potential an~~ und somit auch u als Potential von Massen auf der Grenzlinie angesehen werden kann. –

Wie solche Grenzen fest zu stellen sind lehren die folgenden Betrachtungen. –

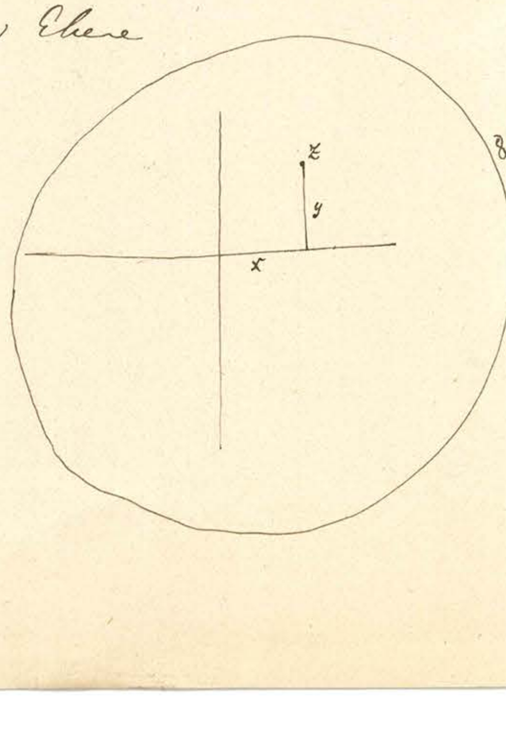
Ich bezeichne das Complexe Argument

$$x + iy = z$$

so dass

$$w = F(z)$$

sei; und betrachte x und y als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes in der Ebene, so dass jeder Werth des Argumentes z durch einen Punkt der Ebene repräsentirt ist. –



Unsere Betrachtungen sollen sich ~~über~~ auf ein unbegrenztes Gebiet der Ebene beziehen, welches wir aber als ~~einen~~ durch einen Kreis mit ∞ Radius begrenzt vorstellen ~~to~~ dürfen; innerhalb dieses Gebietes sei die Function w

vieldeutig

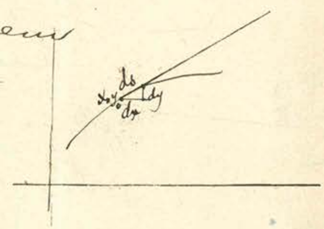
Krümmung der Curven u. Flächen.

Geometrie I.

Tangente, Normale und Krümmungshalbmesser ebener Curven. –

Die Gleichung einer Geraden welche durch den Punkt x_0, y_0 hindurchgeht und mit der X Achse des Coordinatensystems den Winkel α einschliesst, ist:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = tg\alpha$$



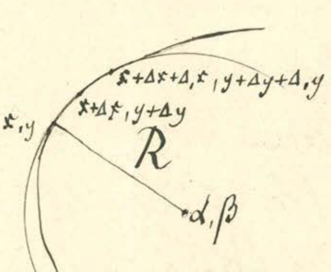
Die Tangente einer Curve $f(x) = y$ in einem Punkte x_0, y_0 fällt mit dem Bogenelemente ds zusammen, d.i. sie bildet denselben Winkel mit der X Achse wie dieses Element. – Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist aber $= \frac{dy}{dx} = f'(x)$. – Setzt man diesen Werth für $tg\alpha$ in die Gleichung der Gerade ein, so ergiebt sich die Gleichung der Tangente:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \quad \text{oder} \quad y - y_0 - f'(x)(x-x_0) = 0$$

Hieraus folgt auch die Gleichung der Normale:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{1}{f'(x)} \quad \text{od.} \quad f'(x)(y-y_0) + x - x_0 = 0$$

Legen wir durch drei Punkte einer ebenen Curve einen Kreis, so wird der Bogen dieses Kreises ~~um so~~ zwischen diesen Punkten dem Bogen der Curve zwischen denselben um so näher treten, je kleiner die Entfernungen der Punkte sind. — Wenn wir diese Punkte so wählen dass ihre Entfernungen unendlich kleine Längen seien, so wird der durch sie gelegte Kreis ein streng definirter sein. Dieser Kreis ist der Krümmungskreis, sein Radius ist der Krümmungsradius der Curve in dem betreffenden Punkte. —



Es seien x,y ; $x+\Delta x, y+\Delta y$; $x+\Delta x+\Delta_1 x, y+\Delta y+\Delta_1 y$ die Coordinaten dreier Punkte einer ebenen Curve $y=f(x)$. — Sei ferner R der Radius eines durch diese Punkte gelegten Kreises und α, β die Coordinaten seines Mittelpunktes. — Wählt man dann $\Delta x, \Delta y$ etc. unendlich klein, so wird R der Krümmungsradius der Curve in dem Punkte x,y werden. — Diesen wollen wir berechnen: —

Die Coordinaten der drei genannten Punkte müssen alle derselben Kreisgleichung genügen; somit bestehen die Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$(x+\Delta x-\alpha)^2+(y+\Delta y-\beta)^2=R^2$$

$$(x+\Delta x+\Delta_1 x-\alpha)^2+(y+\Delta y+\Delta_1 y-\beta)^2=R^2$$

Entwickelt die 2te dieser Gleichungen und zieht von ihr die erste ab, so folgt:

$$\Delta x(x-\alpha)+\Delta y(y-\beta)+\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{\Delta y^2}{2}=0$$

Lassen wir nun die Entfernungen der drei Punkte unendlich klein werden. ~~So~~ wird der Kreis der Krümmungskreis, und R der Krümmungsradius werden. – Wird somit Δx unendlich klein so dient der Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Definition des Differentialquotienten $f'(x)$. – Dividirt man nun die letzte Gleichung durch Δx so wird:

$$(x-\alpha)+f'(x)(y-\beta)+\frac{1+f'(x)^2}{2}\Delta x=0$$

da aber Δx = unendl. klein:

$$(x-\alpha)+f'(x)(y-\beta)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Durch Entwickelung der 3ten obigen 3 Gleichungen, und Abzug der ersten derselben, ergiebt sich:

$$(\Delta x+\Delta_1 x)(x-\alpha) + (\Delta y+\Delta_1 y)(y-\beta) + \frac{(\Delta x+\Delta_1 x)^2}{2} + \frac{(\Delta y+\Delta_1 y)^2}{2} = 0$$

nach der Taylor-schen Reihe ist aber:

$$\Delta y + \Delta_1 y = (\Delta x+\Delta_1 x)\, f'(x) + \frac{(\Delta x+\Delta_1 x)^2}{2} f''(x) + \text{etc.}$$

Da $\Delta x+\Delta_1 x = \partial x$ unendlich klein sein sollen, so sind die ferneren Glieder der Entwickelung zu vernachlässigen. –

Mit Benützung dieser Entwickelung übergeht obige Gleichung in folgende:

$$\partial x(x-\alpha) + (y-\beta)\left\{f'(x)\,\partial x + \frac{f''(x)}{2}\,\partial x^2\right\} + \frac{\partial x^2}{2} + \frac{1}{2}\left\{f'(x)\,\partial x + \frac{f''(x)}{2}\,\partial x^2\right\}^2 = 0$$

Berücksichtigt man die Gleichung 2) so folgt

$$(y-\beta)\, f''(x) + 1 + f'(x)^2 = 0$$

d. i.

(3) . . . . . $y-\beta = -\dfrac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$

Die Gleichungen 1) 2) und 3) bestimmen Lage und Radius des Krümmungskreises.

Aus (3) könnte man β berechnen, aus (3) und (2) ergiebt sich zur Berechnung von α

$$(x-\alpha) = f'(x)\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Endlich folgt aus 2), 4) und 1):

$$R^2 = \frac{(1+f'(x)^2)^2 + f'(x)^2(1+f'(x)^2)^2}{f''(x)^2} = \frac{(1+f'(x)^2)^3}{f''(x)^2}$$

also:

$$R = \frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Berührung, Osculation zweier ebener Curven.

Haben zwei Curven $y=f(x)$ und $u=\varphi(x)$ zwei gemeinschaftliche in unendlich kleiner Entfernung liegende Punkte, deren Abscissen x und $x+\Delta x$ sein mögen so ist:

$$f(x) - \varphi(x) = 0$$

und

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = 0$$

Die Entwickelung nach der Taylor-schen Reihe giebt:

$$\Delta x\left(f'(x) - \varphi'(x)\right) + \frac{\Delta x^2}{1.2}\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) + \text{etc.} = 0$$

oder:

$$0 = f'(x) - \varphi'(x) + \frac{\Delta x}{1.2}\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) + \ldots \text{etc.}$$

Wenn nun Δx unendlich klein wird, so folgt dass:

$$f'(x) = \varphi'(x)$$

Beide Curven haben demnach in dem Punkte x, y eine gemeinsame Tangente. – Man sagt in diesem Falle, die Curven berühren sich ~~im~~ in der ersten Ordnung.

Haben nun ~~aber~~ die beiden Curven nicht zwei sondern drei ~~[illegible]~~ gemeinschaftliche Punkte deren Abscissen x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$ sein mögen, so bestehen folgende Gleichungen:

$$f(x) - \varphi(x) = 0$$
$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = 0$$
$$f(x+2\Delta x) - \varphi(x+2\Delta x) = 0$$

Aus der ersten u. 2ten Gleichung folgt dann dass:

$$f'(x) - \varphi'(x) = 0$$

Und entwickelt man die Glieder der dritten dieser Gleichungen nach der Taylor-schen

Reihe so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$(f'(x)-\varphi'(x))\,2\Delta x + \frac{4\Delta x^2}{1.2}(f''(x)-\varphi''(x)) + \text{etc} = 0$$

d. i.

$$f''(x)-\varphi''(x) + \frac{2\Delta x}{3}(f'''(x)-\varphi'''(x)) + \text{etc} = 0$$

Da nun Δx unendlich klein werden soll, so muss:

$$f''(x)-\varphi''(x)=0$$

sein. –

Die Curven haben also in ihrer gemeinsamen Stelle nicht nur eine gemeinschaftliche Tangente, sondern auch einen gemeinschaftlichen Krümmungskreis. – Man sagt in diesem Falle dass die Curven sich in der zweiten Ordnung berühren oder dass sie <u>Osculiren</u>. –

Eine Curve und ihr Krümmungskreis sind in Osculation. –

Hätten ~~zwei~~ Curven 4 gemeinschaftliche Punkte, so würde man ähnlich nachweisen können dass auch

$$f'''(x)-\varphi'''(x)=0$$

wird, und man müsste dann sagen dass die Curven sich in der dritten Ordnung berühren. –

Im allgemeinen findet eine Berührung n^{ter} Ordnung zwischen 2 ebenen Curven dann statt wenn sie $(n+1)$ gemeinschaftliche Punkte haben, und wenn an der Stelle der Berührung alle Diff. Quot. bis zu der n-ten für beide Curven gleich werden. –

Haben aber 2 Curven nur einen gemeinschaftlichen Punkt so kann man von ihnen ~~gar~~ nicht sagen dass sie sich berühren, sie schneiden sich in diesem Falle. – Sie haben dann weder gemeinschaftliche Tangente, noch gemeinschaftlichen Krümmungskreis; es ist nämlich dann

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{und}$$

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = \Delta x(f'(x) - \varphi'(x)) + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2}(f''(x) - \varphi''(x)) + \text{etc}$$

so dass $f'(x) - \varphi'(x)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. –

Evolute und Evolvente.

Die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \\ (y-\beta)f'(x)+x-\alpha &= 0 \\ \text{und}\quad (y-\beta)f''(x)+1+f'(x)^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

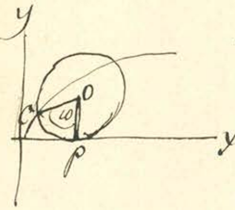
bestimmen Lage und Krümmungsradius ~~mittel~~ des Krümmungskreises der Curve $y=f(x)$ in dem Punkte x. — Jedem Werthe von x entsprechen ein Paar Werthe für α und β, und der geometrische Ort all dieser Krümmungsmittelpunkte ist die Evolute.

Man wird die Gleichung der Evolute einer gegebenen Curve finden, wenn man aus obigen Gleichungen α und β berechnet:

$$\alpha = x - \frac{f'(x)\left(1+f'(x)^2\right)}{f''(x)}, \quad \beta = y + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

und aus diesen Gleichungen x eliminirt. —

Als Beispiel diene die Evolute der Cycloide.



Bezeichnet man mit R den Radius des beschreibenden Kreises, mit ω den Winkel poc so sind die Gleichungen der Cycloide:

$$x = R(\omega - \sin\omega) \qquad y = R(1-\cos\omega)$$

oder auch:

$$x = R \arccos\frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry-y^2}$$

Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$dy = R\sin\omega\, d\omega \quad \text{und}$$
$$dx = R(1-\cos\omega)\, d\omega$$

Also ist:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y}-1}$$

daher ist auch:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{2R}{y^2}\right) f'(x)}{\sqrt{\frac{2R}{y}-1}} = -\frac{R}{y^2}$$

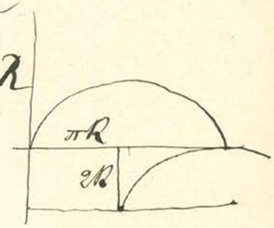
Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für α und β so erhält man:

$$\alpha = x + 2\sqrt{2Ry-y^2} \qquad \beta = -y$$

und wenn man in den Ausdruck für α den Werth von x aus der Gleichung der Cycloide einsetzt, und dann $\beta = -y$ setzt so erhält man die Gleichung der Evolute:

$$\alpha = R \arccos \frac{R-(-\beta)}{R} + \sqrt{2R(-\beta) - (-\beta)^2}$$

Es ist dies wieder die Gleichung einer Cycloide, die R zum Radius des beschreibenden Kreises hat, deren Anfangspunkt aber in dem Coordinatensysteme xy die Coordinaten $x = \pi R$ und $y = -2R$ hat.–



Diese Behauptung wird gerechtfertigt sein, wenn die Gleichung der Evolute für ein Coordinatensystem transformirt dessen Anfangspunkt dieser letzt genannte Punkt ist und dessen x Achse die entgegengesetzte Richtung hat, zu der Gleichung der Cycloide in der angegebenen Form führt.–

Nennen wir die Coordinaten der Evolute in diesem neuen Coordinatensystem α' und β' so ist:

$$\alpha = \pi R - \alpha' \qquad \beta = \beta' - 2R$$

also:

$$-\alpha' = R\left(-\pi + \arccos -\left(\frac{R-\beta'}{R}\right)\right) + \sqrt{2R\beta' - \beta'^2}$$

also:

$$\alpha' = R \arccos \frac{R-\beta'}{R} - \sqrt{2R\beta' - \beta'^2}$$

Hierdurch ist nachgewiesen dass die Cycloide als Evolute ebenfalls eine Cycloide hat. –

Contingenzwinkel.

Ist α der Winkel welchen die geometrische Tangente einer Curve im Punkte x, y mit der x Achse einschliesst, so ist

$$f'(x) = tg\,\alpha$$

Man versteht nun unter Contingenzwinkel den Winkel, welchen zwei an den Endpunkten eines Bogenelements ds einer ~~der~~ Curve errichtete Tangenten mit einander bilden. – Es ist dieser Winkel offenbar der Zuwachs den α erleidet indem s um ds d.i. x um dx wächst, er ist also $= d\alpha$, und man pflegt ihn mit ε zu bezeichnen. Nun folgt aus ~~obiger~~ der Gleichung:

$$f'(x) = tg\,\alpha$$

$$f''(x)\,dx = d\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

oder da $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

$$f''(x)\,dx = d\alpha\,(1+f'(x)^2)$$

$$f''(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx = d\alpha\,(1+f'x^2)^{\frac{3}{2}}$$

da ferner $ds^2 = dx^2 + dy^2$ also:

$$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx.$$

so folgt

$$d\alpha = \varepsilon = ds\cdot\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Also wenn R den Krümmungsradius im Punkte x, y bedeutet:

$$\varepsilon = \frac{ds}{R} \quad \text{und} \quad ds = \varepsilon R$$

Über die Krümmung der Flächen.

Wichtige Formeln.

1) Wenn: $\cos(r,x) = \alpha \quad \cos(r,y) = \beta \quad \cos(r,z) = \gamma$

und $\cos(r_1,x) = \alpha_1 \quad \cos(r_1,y) = \beta_1 \quad \cos(r_1,z) = \gamma_1$

so bestehen folgende Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1$$

$$\cos(r,r_1) = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$$

Beweis. s. Hesse. An. Ge. d. R. I Vorlesung.

2) Sind X, Y, Z drei aufeinander senkrechte Richtungen, und x, y, z drei andere aufeinander senkrechte Richtungen, und bezeichnet man:

$$x = aX + a'Y + a''Z$$
$$y = bX + b'Y + b''Z$$
$$z = cX + c'Y + c''Z$$

$$a = \cos(X,x) \qquad b = \cos(X,y) \qquad c = \cos(X,z)$$
$$a' = \cos(Y,x) \qquad b' = \cos(Y,y) \qquad c' = \cos(Y,z)$$
$$a'' = \cos(Z,x) \qquad b'' = \cos(Z,y) \qquad c'' = \cos(Z,z)$$

dann bestehen folgende Relationen:

$$a = b'c'' - b''c' \qquad b = c'a'' - c''a' \qquad c = a'b'' - a''b'$$
$$a' = b''c - bc'' \qquad b' = c''a - ca'' \qquad c' = a''b - ab''$$
$$a'' = bc' - b'c \qquad b'' = ca' - c'a \qquad c'' = ab' - a'b$$

Näheres siehe. Hesse. 19.te Vorl. lineare Coordinaten Transformation.

3) Die Gleichung der Tangentialebene einer krummen Fläche $F(x,y,z)=0$ in dem Punkte x,y,z ist folgende:

$$X(x-\xi) + Y(y-\eta) + Z(z-\zeta) = 0$$

worin

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

gerichtet wurde. –
Die Cosinuse der Winkel, welche die Normale jener Fläche mit den Coordinatenaxen bildet, sind:

$$\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,, \quad \mu = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

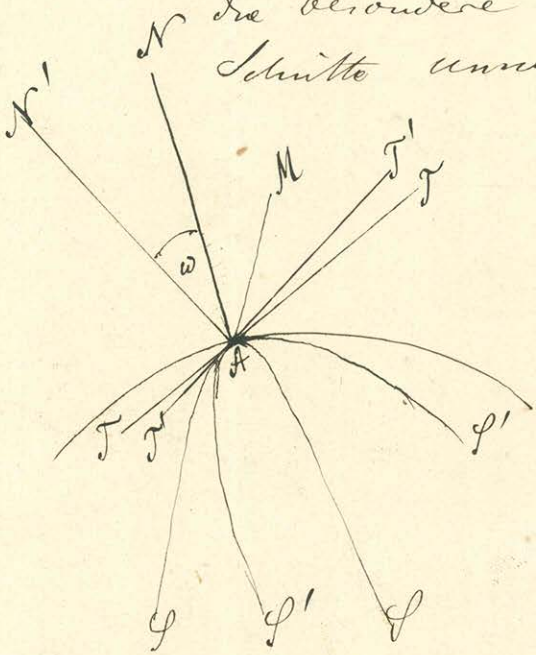
$$\nu = \frac{Z}{\sqrt{}}$$

Siehe: Schlömilch. Höhere Analysis § 27.

Der Satz von Meusnier. –

Die Krümmung einer Fläche ist durch die Krümmungshalbmesser ihrer ebenen Schnittcurven characterisirt. –
Unter all den Ebenen welche durch einen Punkt der Fläche gelegt werden können, heben wir ~~…~~ jene besonders hervor, welche durch die Normale der Fläche in dem betreffenden Punkte gelegt sind. Die Schnitte der Fläche in diesen Ebenen nennen wir Normalschnitte, während der Name

<u>Schiefer Schnitte</u> sich auf die Schnitte sämmtlicher anderer Ebenen bezieht.– ~~Es~~ Zwischen den schiefen- und den Normalschnitten besteht eine einfache Relation, so dass die schiefen Schnitte durch die Normalschnitte ausgedrückt werden können.– Die Kenntniss dieser Relation macht dann die besondere Betrachtung der schiefen Schnitte unnöthig.–



Es habe auf einer krummen Fläche:

$$F(x,y,z)=0$$

der Punkt A die Coordinaten x,y,z.– Durch diesen Punkt lege man eine ~~schiefen Schnitt~~ von der Normale in A abweichende Ebene, man erhält so einen schiefen Schnitt $S'AS'$.–

Es sei TT die Tangente dieses schiefen Schnittes im Punkte A, AN' die nach innen gerichtete Normale, und AM eine auf die Schnittebene senkrechte Gerade.–

AT', AN' und AM sind dann 3 aufeinander senkrechte Geraden. – Wir bezeichnen die Cosinusse der Winkel die AT' mit den Coord. Axen bildet mit α, β, γ

" " AN' " " " " " λ', μ', ν'

" " AM " " " " " a, b, c

— ~~Wir~~ Man lege nun durch die Normale der Oberfläche im Punkte A, die mit AN bezeichnet ist eine Ebene, so erhält man einen Normalschnitt (SS). – Dieser Normalschnitt sei hier so gewählt dass er in A mit dem schiefen Schnitte $S'S'$ eine gemeinschaftliche Tangente habe. –

Die Cosinusse der Winkel, welche AN mit den Coord. Axen bildet seien λ, μ, ν, der Winkel zwischen AN und AN' sei ω. –

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes aufstellen. – Wir benützen die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{ds}$$

wo ε den Contingenzwinkel bedeutet. –

~~Und~~ Die Cosinusse des Winkels den die Tangente $T'T'$ mit den Coord. Axen bildet, Welche einen Punkt tangirt der um ds auf dem schiefen Schnitte von A entfernt liegt, sind folgende:

$$\alpha + d\alpha \qquad \beta + d\beta \qquad \gamma + d\gamma$$

Daher ist:

$$\cos \varepsilon = \alpha(\alpha + d\alpha) + \beta(\beta + d\beta) + \gamma(\gamma + d\gamma)$$

$$= 1 + \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma$$

Da nun:

$$(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 + (\gamma + d\gamma)^2 = 1$$

Also:

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = -\tfrac{1}{2}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$$

(wo die Glieder $d\alpha^4 + d\beta^4$ etc. als unendl. kleine höherer Ordnung vernachlässigt worden sind.)

So folgt:

$$\cos \varepsilon = 1 - \tfrac{1}{2}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$$

$$1 - \sin^2 \varepsilon = \left\{1 - \tfrac{1}{2}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)\right\}^2$$

$$\sin^2 \varepsilon = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 - \tfrac{1}{4}(d\alpha^4 + \quad + \quad)$$

Da nun $(d\alpha^4 + \quad)$ als unendl. kl. höherer Ordnung vernachlässigt werden kann, und statt dem Sinus eines unendlich kleinen Winkels der Winkel selbst gesetzt werden kann; so folgt:

1) $$\underline{\varepsilon^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

Es ist nun die Gleichung der Oberfläche:

$$F(x,y,z) = 0$$

~~So wird~~ Differentiiren wir sie nach der Richtung der Tangente, so ist:

$$\frac{dF}{ds} = 0$$

Also wenn zur Abkürzung $\frac{\partial F}{\partial x} = X$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = Z$ gesetzt wird, so ist:

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0$$

Es ist aber $\frac{dx}{ds}$ der Cosinus des Winkels den ds, also die Tangente ~~TT~~ mit der X Achse einschliesst d. i.

$\frac{dx}{ds} = \alpha$ ebenso ist: $\frac{dy}{ds} = \beta$ und $\frac{dz}{ds} = \gamma$

Also:

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0 \qquad 2)$$

Dazu kommt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad 3)$$

und

$$\cos(AM, AT) = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

und auch:

$$\cos(AM, AT') = a(\alpha + d\alpha) + b(\beta + d\beta) + c(\gamma + d\gamma) = 0$$

also

$$a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma = 0 \qquad (4)$$

Bildet man nun die vollständigen Differentiale der Ausdrücke 2) und 3), und nimmt die Gleichung 4) hinzu, so erhält man zur Bestimmung der drei Unbekannten ~~$\alpha\beta\gamma$~~ $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ folgendes System von drei Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} X d\alpha + Y d\beta + Z d\gamma = W \\ \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0 \\ a d\alpha + b d\beta + c d\gamma = 0 \end{cases}$$

wo

$$(6) \ldots \quad W = -(\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ)$$

gesetzt wurde.

Die Regel nach welcher die Auflösung der Gleichungen (5) vorgenommen wird ist folgende. Hat man ein System ~~homogener~~ homogener linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= W \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= W_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= W_2 \end{aligned}$$

und ist Δ die Determinante der 9 Coefficienten a, b, c etc. d. i.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\,, & b\,, & c \\ a_1\,, & b_1\,, & c_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a(b_1c_2 - b_2c_1) - b(a_1c_2 - a_2c_1) + c(a_1b_2 - a_2b_1)$$

so ergeben sich x, y, z aus folgenden Gleichungen:

$$\Delta . x = W\frac{\partial\Delta}{\partial a} + W_1\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} + W_2\frac{\partial\Delta}{\partial a_2}$$

$$\Delta . y = W\frac{\partial\Delta}{\partial b} + W_1\frac{\partial\Delta}{\partial b_1} + W_2\frac{\partial\Delta}{\partial b^2}$$

$$\Delta . z = W\frac{\partial\Delta}{\partial c} + W_1\frac{\partial\Delta}{\partial c_1} + W_2\frac{\partial\Delta}{\partial c^2}$$

Zu dem Systeme 5) ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X\,, & Y\,, & Z \\ \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ a\,, & b\,, & c \end{vmatrix}$$

ferner $W = W\,,\quad W_1 = 0\,,\quad W_2 = 0$

Die unbekannten $d\alpha, d\beta, d\gamma$ ergeben sich also aus:

$$\Delta\, d\alpha = W\frac{\partial\Delta}{\partial X} = W(b\gamma - \beta c)$$

$$\Delta\, d\beta = W\frac{\partial\Delta}{\partial Y} = W(c\alpha - \gamma a)$$

$$\Delta\, d\gamma = W\frac{\partial\Delta}{\partial Z} = W(a\beta - \alpha b)$$

Da aber die Richtungen deren Cosinuse α, β, γ

a, b, c und λ_1, μ_1, ν_1 sind aufeinander senkrecht stehen, so folgt dass:

$$b\gamma - \beta c = \lambda_1 \;,\quad c\alpha - a\gamma = \mu_1 \;,\quad a\beta - \alpha b = \nu_1$$

also ist:

7) $$\Delta . d\alpha = w\lambda_1 \;,\quad \Delta . d\beta = w\mu_1 \;,\quad \Delta . d\gamma = w\nu_1$$

und

8) . . . $$\Delta = X\lambda_1 + Y\mu_1 + Z\nu_1$$

Erhebt man die Gleichungen 7) auf's Quadrat und addirt sie, so folgt:

$$\Delta^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) = w^2(\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2) = w^2$$

berücksichtigt man 1) so folgt:

$$\varepsilon = \frac{w}{\Delta}$$

Ich erwähnte schon dass λ, μ, ν die Cosinuse der Winkel bezeichnet, welche die Normale an die Oberfläche mit den Coordinatenaxen bildet, diese Cosinuse sind:

$$\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \;,\quad \mu = \frac{Y}{\sqrt{}} \;,\quad \nu = \frac{Z}{\sqrt{}}$$

Setzt man daher in 8) $X = \lambda V$ etc. so ergiebt sich:

$$\Delta = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\left\{\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1\right\}$$

Es ist aber:

$$\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1 = \cos\omega$$

Also:

$$\Delta = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,.\cos\omega$$

und:

$$\varepsilon = \frac{W}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cos\omega}$$

endlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{W}{ds.\cos\omega\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Der Krümmungshalbmesser R_1 irgend eines anderen schiefen Schnittes, welcher durch den Punkt (x,y,z) so gelegt ist, dass er dieselbe Tangente als der zuerst betrachtete hat, ~~ist~~ ergiebt sich aus:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{W}{ds.\cos\omega_1\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Die beiden Schnitte haben eine gemeinschaftliche Tangente d. i. ein gemeinschaftliches Element, und daher werden auch die Differential Quot. ihrer Gleichungen in dem Punkte x, y, z gleiche Werthe haben. – In Folge dessen hat auch die

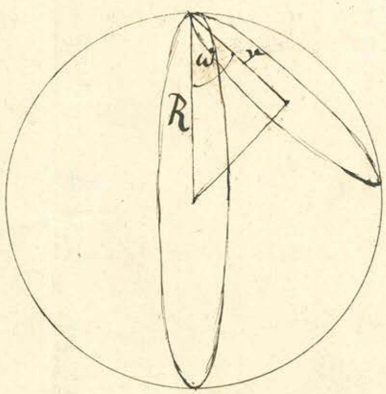
Grösse w für beide Schnitte denselben Werth, so dass:

$$\frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\cos w} : \frac{1}{\cos w_1}$$

Für einen Normalschnitt ist $w = 0$; bezeichnet man also mit $\mathbf{R}$ den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, welcher eine gemeinschaftliche Tangente mit dem schiefen Schnitte hat, dessen Krümmungshalbmesser R ist, so besteht die Gleichung:

$$R = \mathbf{R} \cdot \cos w .$$

Welche den Meunier-schen Satz ausspricht.



Klar tritt die Richtigkeit dieses Satzes bei der Kugelfläche hervor, bei welcher:

$$r = \mathbf{R} \cos w$$

ist. —

Ferner siehe: Hesse 28te Vorl.

Der Euler-sche Satz.

Durch den Meunier-schen Satz werden schiefe Schnitte auf Normalschnitte, durch den Euler-schen Normalschnitte auf Hauptschnitte zurückgeführt. –

Für den Krümmungsradius R eines Normalschnittes besteht die Gleichung (s. S. 23):

$$\frac{ds}{R} = \frac{\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Zur weiteren Behandlung ist uns die unsymmetrische ~~aber einfachere~~ Form dieser Gleichung bequemer, welche sich auf die Gleichung $z = f(x, y)$ bezieht. –

Ist die Gleichung einer Fläche, oder überhaupt eine Beziehung zwischen 3 Variabeln in dieser Form gegeben so bezeichnet man nach Cauchy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

Benützt man diese Bezeichnungen, so ist:

$$X + pZ = 0$$

$$Y + qZ = 0$$

In Folge dessen:

$$dX = -dpZ - pdZ$$

$$dY = -dqZ - qdZ$$

also:

$$\frac{ds}{R} = \frac{-\alpha(dpZ + pdZ) - \beta(dqZ + qdZ) + \gamma dZ}{Z\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Mit dieser Gleichung machen wir folgende Umformungen:

1) Es ist:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}$$

oder da:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha \qquad \frac{dy}{ds} = \beta \qquad \frac{dz}{ds} = \gamma$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\gamma - \alpha p - \beta q = 0$$

was in die Gleichung gesetzt sie wesentlich vereinfacht.

2) Erhalten wir:

$$dp = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy$$

D. i.:

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

ebenso folgt:

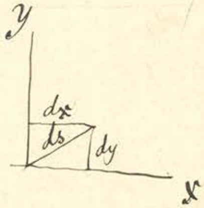
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

Welche Werthe in die auf die angegebene Art vereinfachte Gleichung eingesetzt, dieser folgende Form geben:

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Der Krümmungshalbmesser R hat ~~max~~ besondere Werthe u. zwar wie wir sehen werden einen Maximal und einen Minimalwerth; diese aufzusuchen ist jetzt unsere Aufgabe. — Wählen wir zur Vereinfachung die Normale der Oberfläche in dem fraglichen Punkte zur Z Achse des Coordinatensystems, so wird $p=0$ und $q=0$, also:

$$\frac{1}{R} = \alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t$$



Es ~~und~~ sind nun in diesem Coordinatensysteme α und β die Cosinuse der Winkel welche das Element ds mit der X resp. mit der Y Achse bildet. – Und es ist:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Aus der Gleichung für $\frac{1}{R}$ folgt dass für das Maximum oder das Minimum dieser Grösse

$$r\alpha\, d\alpha + s(\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha) + t\beta\, d\beta = 0$$

sein muss. –

Da aber $\quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$

also $\quad \alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta = 0$

und $\quad d\beta = -\frac{\alpha}{\beta}\, d\alpha$

so folgt:

$$\beta(\alpha r + \beta s) - \alpha(\alpha s + \beta t) = 0$$

und durch $\alpha\beta$ dividirt:

$$r + s\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) - t = 0$$

oder:

$$\cancel{r + s\left(\frac{\beta}{\alpha}\right.}$$

$$(r - t) + s\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = 0$$

Es ist dies eine in Bezug auf y' quadratische Gleichung, aus welcher diejenigen Werthe dieser Grösse sich ergeben, welche ~~einem~~ den Maximis resp. Minimis von $\frac{1}{R}$ entsprechen. –

Die Gleichung ist geordnet:

$$y'^2 + y'\frac{r-t}{s} - 1 = 0$$

Euler-'s Satz.

$$\cancel{-\frac{ds}{d\varrho} = \frac{W}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}}$$

$$\cancel{W = \sum \alpha \frac{\partial X}{\partial x}\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}\beta + \partial X}$$

Für einen Normalschnitt besteht:

$$\frac{ds}{R} = \frac{\alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Umwandlung dieser Gleichung:

$$X + pZ = 0$$

$$Y + qZ = 0$$

$$dX = -dp\,Z - p\,dZ$$

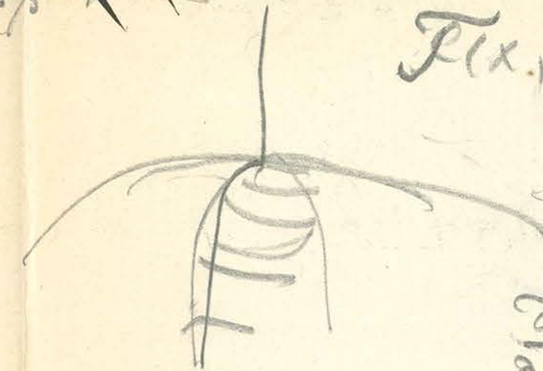
$$dp = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy$$

$$= r\,dx + s\,dy$$

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

$$\frac{ds}{R} = \frac{-\alpha(dp\,Z + p\,dZ) - \beta(dq\,Z + q\,dZ) + \gamma\, dZ}{Z\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$



$$F(x,y,z) = 0$$

$$z = f(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = p \\ \frac{\partial z}{\partial y} = q \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$dZ(\gamma - \alpha p - \beta q) = 0$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds},\ \alpha = \frac{dx}{ds},\ \beta = \frac{dy}{ds}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{1}{R} = \alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t$$

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta = 0$$

$$\gamma - \alpha p - \beta q = 0$$

$$\alpha p + \beta q = 0$$

$$\gamma^2 = (\alpha p + \beta q)^2$$

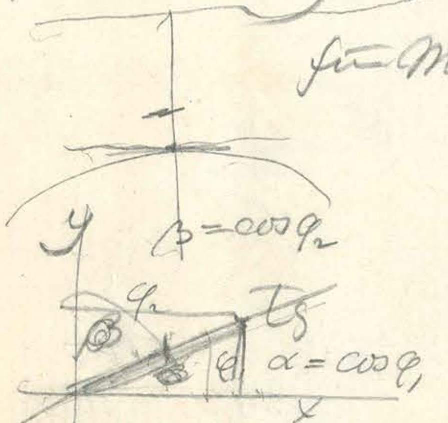
$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + 2\alpha\beta pq$$

$$\boxed{1 = \alpha^2(p^2+1) + \beta^2(q^2+1) + 2\alpha\beta pq}$$

für Max von $\frac{1}{R}$: $\alpha r\, d\alpha + s(\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha) + t\beta\, d\beta = 0$

$$\beta(\alpha r + \beta s) - \alpha(\alpha s + \beta t) = 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} r + s\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) - t = 0$$



$$\frac{\beta}{\alpha} = y'$$

$$(r - t) + s\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = 0$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\beta = \frac{dy}{ds}$$

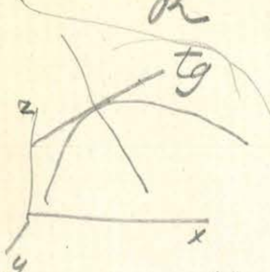
$$y'(r-t) + s(y'^2 - 1) = 0$$

$$y'^2 + y'\frac{r-t}{s} - 1 = 0$$

I

$z = f(x,y)$

$$\frac{1}{R}\sqrt{1+p^2+q^2} = \alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t \quad 1)$$



$$1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

$$\gamma = \alpha p + \beta q$$

geliminiert folgt

$$\alpha^2(1+p^2) + 2pq\alpha\beta + (1+q^2)\beta^2 = 1 \quad 2)$$

$\alpha = \cos(tg, x)$

$$0 = d\alpha\, Z + d\beta\, Z_1 \qquad \frac{Z}{N} = \frac{Z_1}{N_1} \quad 3)$$

$$0 = d\alpha\, N + d\beta\, N_1 \qquad Z N_1 - Z_1 N = 0$$

$$U = \frac{1}{R}\sqrt{1+p^2+q^2} = \alpha Z + \beta Z_1 \qquad \begin{vmatrix} N & N_1 \\ Z & Z_1 \end{vmatrix}$$

$$1 = \alpha N + \beta N_1$$

$$U = \frac{\alpha Z + \beta Z_1}{\alpha N + \beta N_1} = \frac{Z}{N} = \frac{Z_1}{N_1}$$

$Z = NU$

$Z_1 = N_1 U$

$Z = \alpha r + \beta s$

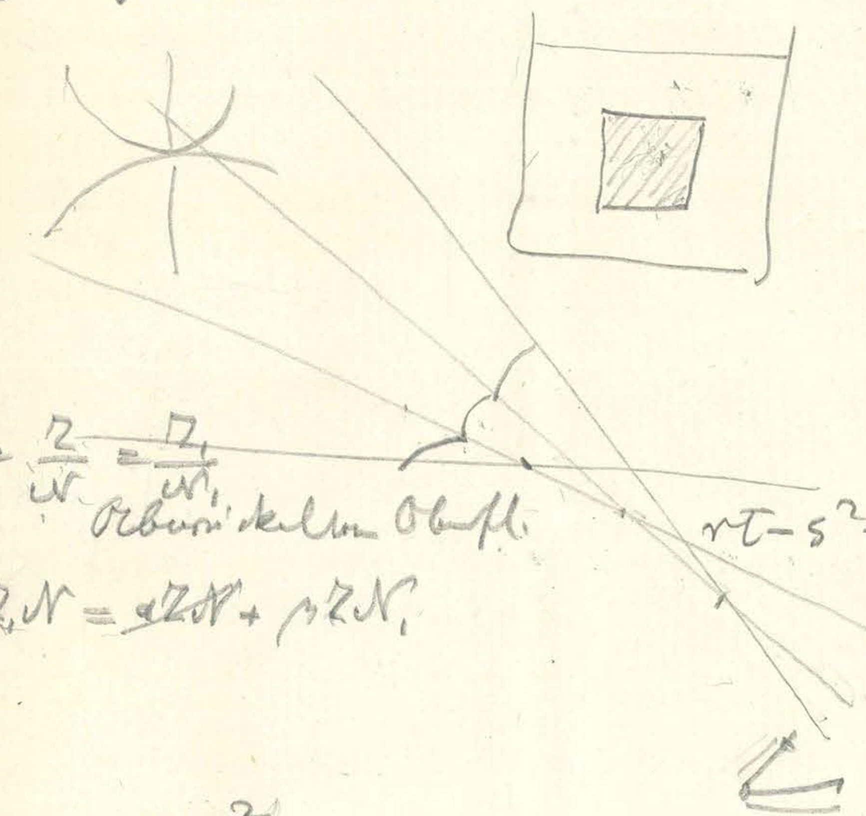
$Z_1 = \alpha s + \beta t$

$N = \alpha(1+p^2) + \beta pq$

$N_1 = \alpha pq + \beta(1+q^2)$

Einsetzen $\frac{\beta}{\alpha}$ dividiert eliminieren

Die Gleichung gerade - von Krümmungslinien entspricht einer Elim. von α, β aus 1) 2) 3)



Abwickelbare Oberfl. $rt - s^2 = 0$

$$\cancel{\alpha Z_1 N} + \beta Z_1 N = \cancel{\alpha Z N_1} + \beta Z N_1$$

$$R^2(rt-s^2) - R\{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\}(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

$$\frac{1}{R^2} - A\frac{1}{R} + B = 0 \qquad R_1, R_2$$

$$A = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$ Krümmungsmass von Gauss

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ Minim. Obfl.

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = c$ Plateau'sche Obfl.

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = c + c_1 z$ Cap. Obfl.

[illegible]: y_1', y_2'

$y_1' y_2' = -1$

$y_1' = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $y_2' = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$

$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$

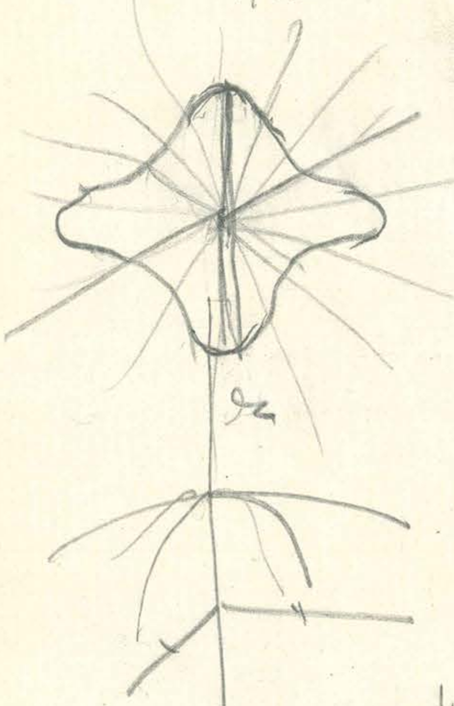
$$y' = -\frac{1}{2}\frac{r-t}{s} \pm \sqrt{1 + \frac{(r-t)^2}{4s^2}}$$

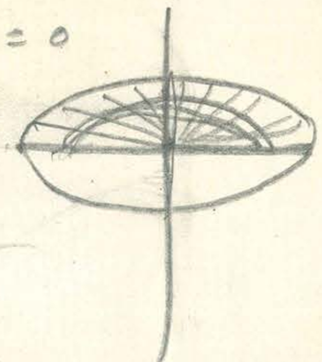
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dx\,dy(r-t) + s(dy^2 - dx^2) = 0$$

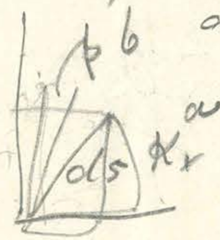
[illegible] dx [illegible] $dy = 0$

$s = 0$

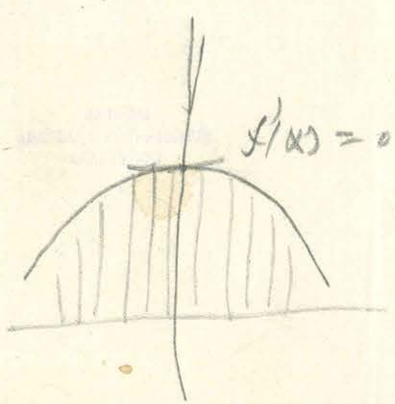




dx, dy [illegible] ds



$$\frac{1}{R} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$



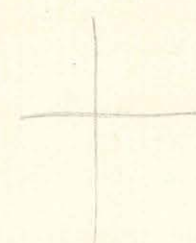
$$\frac{1}{R} = \alpha^2 r + \beta^2 t$$

$$\frac{1}{R} = \cos^2 a\, r + \cos^2 b\, t$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \cos^2 a \frac{1}{R_1} + \cos^2 b \frac{1}{R_2}}$$

Eulersche Satz.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha$$



α^{α}

$\alpha r\, d\alpha$

$$d\alpha = -\frac{\beta}{\alpha}\,d\beta. \quad d\alpha(\alpha r + \beta s) + d\beta(\alpha s + \beta t)$$

Conv. und Div. unendl. Reihen.

1) Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen convergirt wenn seine Glieder abnehmen.

2) Convergirt eine Reihe

$$a_1 + a_2 + \dots \; a_n + a_{n+1} +$$

so convergirt eine andere Reihe

$$b_1 + b_2 + \dots \; b_n + b_{n+1} +$$

im Falle dass $b_n < a_n$

3) Convergirt die Reihe der a-s, so convergirt auch die Reihe der b-s wenn

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

4) Convergirt die Reihe

1) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

so convergirt auch die Reihe

2) $a_1 + x a_x + x^2 a_{x^2} + \dots \; x^n a_{x^n} + \text{etc.}$

Divergirt die Reihe 1) so divergirt auch 2)

und umgekehrt

5) Normalreihen.

Die Reihen

$\sum \frac{1}{(1+k)^n}$, $\cancel{\sum \frac{1}{n^{1+k}}}$

$\sum \frac{1}{(1+k)^n}$, $\sum \frac{1}{n^{1+k}}$, $\sum \frac{1}{n(ln)^{1+k}}$, $\sum \frac{1}{n\,ln(lln)^{1+k}}$ etc.

convergiren, wenn $k > 0$ sie divergiren wenn $k \leqq 0$

Die Vergleichung mit diesen Reihen giebt die Sätze bezüglich der Convergenz und Divergenz der Reihen, und zwar:

‖6‖ Die Catalan'sche Regel. Ergiebt sich durch Vergleichung direkt den Normalreihen, auf die in 2) angegebene Weise. —

Wenn für ~~sehr grosse~~ unendlich grosse n — :

$n b_n n^k \ngtr \infty$ so convergirt die Reihe

~~wenn für~~ $n b_n > 0$ so divergirt die Reihe

bleibt die Frage unentschieden so hat man nach folgende Criterien: —

$n\,l n\, b_n (l n)^k \ngtr \infty$, $n\, l n\, l l n\, b_n (l l n)^k < \infty$ etc. convergirt

$n\, l n\, b_n > 0$, $n\, l_n\, l l_n\, b_n > 0$ etc. divergirt.

‖7‖ Vergleichung mit den Normalreihen nach der Methode (3). —

Es bezeichne für eine Reihe $u_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$

~~Wenn für sehr grosse~~

Die Criterien sind für sehr grosse Werthe von n

$(u_n - 1) = \alpha \,{>0 \atop <0}$, $(n\alpha - 1) = \beta \,{>0 \atop <0}$, $(l n \beta - 1) = \gamma \,{>0 \atop <0}$ convergirt divergirt

$(l l n \gamma - 1) = \delta \,{>0 \atop <0}$, $(l l l n \delta - 1) \,{>0 \atop <0}$ convergirt divergirt.

Taylor'sche Reihe.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\vartheta h)$$

$\underbrace{0 < \vartheta < 1}$ Lagrange's Restglied

Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(\vartheta x)$$

binomischer Satz:

$$(a+b)^n = a^n + nba^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^2 a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} b^3 a^{n-3} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + b^n$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ etc.}$$

$$\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ etc}\right) \text{ Convergenz}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \text{ etc} \quad \text{conv.}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

Taylor'sche Reihe für 2 Variabeln

$$f(x+h, y+k) = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3 f(x+\vartheta h, y+\vartheta k)}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}$$

$f(x\,y) = z$

$$+ \frac{dz}{dy}k + \frac{d^2z}{\partial x \partial y}hk + \frac{d^3 f}{dx^2\,dy}\frac{h^2k}{2}$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{k^2}{2} + \frac{d^3 f}{dx\,dy^2}\frac{hk^2}{2}$$

$$+ \frac{d^3 f}{dy^3}\frac{k^3}{1\,2\,3}$$

Geometrische Reihe.

$$a + ab + ab^2 + \ldots ab^n + \ldots = a\left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right)$$

arithmetische Reihe:

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots = \left(a + \frac{n-1}{2}d\right)n$$

Determinanten.

1) Determ. ein Aggregat von n Producten

$$R = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Das Vorzeichen des Gliedes ist das Vorzeichen des Productes.

$$\Pi = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\cdots(\alpha_n-\alpha_1)$$

2). Ein Glied der Det. welches aus einem anderen Gliede dadurch abgeleitet ist, dass eine ungerade Anzahl von Vertauschungen vorgenommen wurde hat das entgegengesetzte Zeichen, ein Glied welches durch eine gerade Anz. von Vertauschungen abgeleitet wird hat dasselbe Vorzeichen.

3) Cauchy's Regel.
Zwei Glieder der Determ. haben dasselbe Vorzeichen oder nicht, je nachdem $n-p$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. —
n die Zahl der Indices, p die Zahl der cycl. Vertauschungen.

4) Vertauscht man in allen Gliedern k mit l so wird $R' = -R$.
Ist $a_k = a_l$ so ist $R = 0$

„Die Det. wechselt das Zeichen, wenn im System der Elemente eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird. – Die Determ. wird = 0, wenn eine Reihe einer parallelen Reihe gleich wird." –

5). Entwickelung der Determ.

$$R = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots a_{nk}A_{nk} \quad (\mathrm{I})$$

A_{1k} etc. UnterDeterminanten.

$$0 = a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \ldots a_{ik}A_{ik} \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}) \quad R = \sum a_{mk}\frac{\partial R}{\partial a_{mk}}$$

$$\mathrm{II} \quad 0 = \sum a_{ml}\frac{\partial R}{\partial a_{mk}}$$

6) Auflösung linearer homogener Gleichungen

$$u_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots a_{1n}t_n$$

$$u_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 \qquad a_{2n}t_n$$

$$\cdot \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$u_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 \qquad + a_{nn}t_n,$$

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$t_1 = \frac{A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + \ldots A_{n1}u_n}{R}$$

$\ldots$

$$t_n = \frac{A_{1n}u_1 + A_{2n}u_2 \ldots A_{nn}u_n}{R}$$

$A_{11} \ldots$ etc. Unterdeterminanten.

Complexe Grössen. –

Darstellung. (Mod., Phase)

Multipl.

Phasen addirt, Moduln multiplicirt.

Division

Phasen divid. Moduln abgezogen.

Potenzerheben

Phasen multipl., Moduln Potenzirt.

Wurzelziehen Mehrdeutige Aufgabe.

$$\left(r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m\pi+\varphi}{n} + i \sin\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right)$$

n verschiedene Wurzeln. Darstellung.

Wurzeln der Einheit.

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2m\pi}{n} + i \sin\frac{2m\pi}{n}$$

Gleichung 3ten Grades.

$y^3 + ay^2 + by + c = 0$ ist die allg. Form.

~~Darstellung in der~~ Zerlegung in Product.

$\boxed{1}$ $(y-y')(y-y'')(y-y''') = 0$

$a = -(y'+y''+y''')$, $b = y'y''+y''y'''+y'''y'$ $c = -(y' \cdot y'' \cdot y''')$

Satz für ~~Glei Zerlegung~~ Umwandlung einer Gleichung n-ten Grades in ein Product.

Hat man die Gleichung n-ten Grades.

$$y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + cy^{n-3} + \cdots + p = 0$$

So ist.

$$(y-y_1)(y-y_2) \cdots (y-y_n) = 0$$

und

$$a = -(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_n)$$

$$b = \sum y_i y_k$$

$$c = -\sum y_i y_l y_k$$

$$\cdots$$

$$p = \pm y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$$

+ wenn n gerade, − wenn n ungerade.

$\boxed{2}$ Reducirte Form der Gleichung

$$y^3 + Py + Q = 0$$

Man löse die Gleichung indem man

$$y = u + v$$

setzt, und über diese Grössen so verfügt dass

$$3uv + P = 0$$ sei

Es zeigt sich dann dass u und v die 3ten Wurzeln aus den zwei Wurzeln einer Quadratischen Gleichung sind; und zwar

$$y = u + v = \sqrt[3]{w_1} + \sqrt[3]{w_2} = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}+\sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}-\sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}}}$$

Sind die Coefficienten reell dann sind die drei Wurzeln

$$\begin{array}{lll} u = U & v = V & y = U + V \\ u = \varepsilon U & v = \varepsilon^2 V & y = \varepsilon U + \varepsilon^2 V \\ u = \varepsilon^2 U & v = \varepsilon V & y = \varepsilon^2 U + \varepsilon V \end{array}$$

da ja $3uv = -P$ also = reell sein muss. —

$$y = U + V,\; y = \cos\frac{2\pi}{3}(U+V) + i \sin\frac{2\pi}{3}(U-V),\; y = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}(U-V)$$

3 reelle Wurzeln wenn $U - V = 0$ d. i. $\sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}} = 0$.
Wenn 3 reelle W. da ~~sind~~ sein sollen, und diese Bed. nicht erfüllt ist, dann müssen U und V complexe Grössen sein. — Bezeichnet ~~Wenn~~:

$$-\frac{Q}{2} = r \cos\varphi \qquad \sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}} = r i \cos\varphi$$

Erhält man:

$$y = u + v = 2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \cos\frac{1}{3}\varphi, \\ \cos\frac{1}{3}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \cos\frac{1}{3}\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Gleichung 4ten Grades

Allg. Form:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

reduzirte Gleichung:

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0$$

Auflösung. Man setzt

$$y = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$$

wo u, v, w die 3 Wurzeln einer Gleichung 3ten Grades sind. Diese Gleichung ist.

$$y^3 + \frac{A}{2} y^2 + \left(\frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}\right) y - \frac{B^2}{64} = 0$$

Wenn die Coefficienten reell, dann muss:

$$\sqrt{u} = \sqrt{uvw} = -\frac{B}{8} \text{ also reell sein.}$$

Je nachdem B pos. oder negativ ist sind die Wurzeln. –

$$B = + \quad y = \begin{cases} \sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w} \\ \sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w} \\ +\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} \\ -\sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w} \end{cases} \qquad B = - \quad y = \begin{cases} \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} \\ \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w} \\ -\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} \\ -\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w} \end{cases}$$

Satz. ~~Die~~ Jede Gleichung n-ten Grades hat n Wurzeln. – Beweis von Gauss.

Satz. Jede Gleichung n-ten Grades ist als das Produkt:

$$(\cancel{x} - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = 0$$

darstellbar.

Satz. ~~Die Wurzeln des~~ Gleichungen von höheren als 4ten Grade können algebraisch nicht dargestellt werden. – (Beweis von Wantzel.)

Ebene Curven 2ten Grades.

1). Die allgemeine Gleichung 2ten Grades

~~giebt~~

$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

giebt

$$y = -(ax+d) \pm \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$$

$$\alpha = a^2 - b \quad \beta = ab - c \quad \gamma = d^2 - e$$

1) Es sei $\alpha = -$

Dann wird der Ausdruck $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ nur ~~dann~~ in dem Fall pos. werden können wenn x einen Werth hat, der zwischen ~~diesen beiden~~ beiden Wurzeln der Gl. $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ liegt. – (Der Ausdruck ist natürlich sowohl für $x = +\infty$, als für $x = -\infty$ negativ; und da die Function continuirlich ist so muss sie etwa wie Fig verlaufen neg pos.)

Diese Gleichung hat imaginäre Wurzeln wenn $\alpha\gamma > \beta^2$, dann wird also auch y imaginär. –

Wenn $\alpha\gamma = \beta^2$ dann hat die Gleichung 2 gleiche Wurzeln, und es wird $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ sein für y folgt dann auch nur ein einziger Werth. Wir haben es nur mit einem Punkt. –

Wenn endlich $\alpha\gamma < \beta^2$, so erhalten wir eine Curve die nach den Abscissen

begrenzt ist. –
Werden wir nicht y sondern x bestimmt
haben, würden wir eine Begrenzung nach
y gefunden haben.
Unsere Curve ist eine Ellypse.

2). Es sei $\alpha = +$

Es wird y reell sein wenn x ausserhalb des Intervals der Wurzeln der Gleichung $\alpha x^2 \pm 2\beta x + \gamma = 0$ liegt. –
Wir erhalten einen durch zwei endlich entfernte Geraden begrenzten Raum, innerhalb welcher die Curve nicht liegt.
Sowohl für $\alpha\gamma > \beta^2$ als für $\alpha\gamma < \beta^2$ eine Hyperbel.

Wenn $\alpha\gamma = \beta^2$ dann folgt:

$$y = -ax + d \pm \sqrt{\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Es ist das die Gleichung 2er Geraden.

3) $\alpha = 0$ Parabel.

4) ~~Durchmesser~~.
Eine Curve 2ten Grades wird durch eine Gerade in 2 Punkten geschnitten.
Die Mittelpunkte der Sehnen Strahlen parallelen

~~Dur~~schnittslinien, die innerhalb der Curve liegen, liegen in einer Gerade. —

Conjugirte Durchmesser: —

2 conjugirte Durchmesser schneiden sich im Mittelpunkt, in denselben Punkte schneiden sich auch sämmtliche andern Durchmesser daher der Name. — Kommen für Ellypse u. Hyperbel.

5) Mittelpunktsgleichung der Ellypse u. Hyp.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

Durch Drehung der Coordinatenaxen

$$\frac{x^3}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$ oberes Zeichen Ellypse, Unteres zur Hyperbel.

6) Für die Parabel erhält man durch Drehung der Coord. Axen:

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey = 1$$

und durch Verschiebung des Anfangspunktes,

$$x^2 = 2py$$

7) Von jedem ~~einem~~ ausserhalb der Curve gelegenen Punkte können an dieselbe zwei Tangenten gezogen werden. —

8) Für die Ellypse

$$r + r' = 2a$$

für die Hyperbel

$$r - r' = 2a$$

9) Die Winkel die ~~die~~ beide Leitstrahlen mit der Tangente bilden sind gleich.

Krümmung in der Ebene.

Gl. der Tangente der Curve $f(xy) = 0$ im Punkte x, y.

$$\frac{x-\xi}{y-\eta} = f'(x)$$

G. der Normale

$$\frac{x-\xi}{y-\eta} = -\frac{1}{f'(x)}$$

Krümmungsmittelpunkt.

$$x-\alpha = (y-\beta) f'(x) = f'(x) \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

$$y-\beta = -\frac{1+f'x^2}{f''(x}$$

Krümmungsradius

$$R = \frac{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Curven die 2 gem. Punkte haben tangiren sich.

Curven die 1 gem P. schneiden sich

Curven die 3 gem. P. haben berühren sich in der 2ten Ordnung, sie osculiren.

Curven die n Punkte haben berühren sich in $(n-1)$ter Ordnung.

Evolute ergiebt durch Elimination aus

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ (x-\alpha) + (y-\beta) f'(x) &= 0 \\ (y-\beta) f''(x) + 1 + f'(x)^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Evolute der Cycloide abermals eine Cycloide. – Gleichungen der Cycloide:

$$\begin{cases} x = R(\omega - \sin\omega) \\ y = R(1 - \cos\omega) \end{cases}$$

Contingenzwinkel $\varepsilon = \frac{ds}{R}$

Meusnier's Satz.

Zurückführung der Krümmungshalbmesser der schiefen Schnitte auf solche von Normalschnitten, welche mit dem schiefen Schnitt eine gemeinschaftliche Tangente haben –

$$\frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\cos\omega} : \frac{1}{\cos\omega_1}$$

$$R = R_1 \cos\omega$$

Euler's Satz.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha. \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{unabhängig von } \alpha. \quad R' \perp R$$

$\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{R^2} - A\frac{1}{R} + B = 0 \quad A = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $\quad B = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$