Ms 5097/4. Eötvös Loránd mágnesességi
1-132. kísérleti jegyzetei

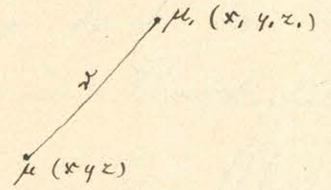
Theorie

der

Elektricität

I. Das Potential —

Die grosse Wichtigkeit des Potentials bei der Behandlung von Problemen der Electricitätslehre erfordert eine nähere Betrachtung derselben.—



Es sollen in den Punkten $x\,y\,z$ und $x_1\, y_1\, z_1$ die ~~Agentien~~ Mengen μ und μ' von sich gegenseitig abstossenden Agentien wirken — die ausgeübte Kraft soll umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung sein; bezeichnen wir diese mit r so ist die Abstossungskraft von μ ~~und~~ gegen μ_1

$$= \frac{\mu\mu_1}{r^2}$$

Die Componenten der Kraft welche μ_1 auf μ ausübt, (es ist diese identisch mit derjenigen Kraft mit welcher μ μ_1 abstosst) stellen sich nun dar:

$$X = \mu\mu_1 \frac{x-x'}{r^3} \qquad Y = \mu\mu_1 \frac{y-y'}{r^3} \qquad Z = \mu\mu_1 \frac{z-z'}{r^3}$$

oder da $\quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

$$X' = -\frac{\partial \frac{\mu\mu'}{r}}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial \frac{\mu\mu'}{r}}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial \frac{\mu\mu'}{r}}{\partial z}$$

Wenn nun statt ~~des~~ einer abstossenden Masse μ' auch noch die Massenpunkte μ_2 μ_3 etc. vorhanden sind deren Coord. mit $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ etc. bezeichnet werden können; dann ~~bilden~~ sind die Componenten der auf μ ausgeübten Kraft:

$$X = -\frac{\partial \mu \sum \frac{\mu'}{r}}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial \mu \sum \frac{\mu'}{r}}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial \mu \sum \frac{\mu'}{r}}{\partial z}$$

Setzen wir nun $\mu = 1$, dann weiter

$$\sum \frac{\mu'}{r} = V$$

so bezeichnet V das Potential all' der Massenpunkte μ' auf die Einheit des Agens bezogen. — Also:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Wenn die Massenpunkte μ_1 μ_2 μ_3 ... etc die wir bis jetzt einzeln stehend dachten in stetigem Zusammenhange kommen so verwandelt sich der Ausdruck $\sum \frac{\mu'}{r}$ zu einem Integral; und zwar wenn dieses abstossende Agens den Raum continuirlich erfüllt dann wird dieses Integral ein 3faches es wird ein 2faches wenn sich die Stetigkeit auf eine Fläche, ein einfaches wenn sie sich auf eine Linie beschränkt. — Dem gemäss werden wir auch Raumpotentiale, Flächenpotentiale und Linienpotentiale unterscheiden. —

1) Das Raumpotential.

Ist x', y', z' ein Punkt des mit dem Agens erfüllten Raumes, so ist das Potential desselben in Bezug auf einen Punkt x, y, z dessen Masse $= 1$ ist:

$$V = \iiint \frac{k' dx' dy' dz'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

worin r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'), also:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

ist; es bedeutet ferner k' die Dichtigkeit im Punkte $x' y' z'$, und es ist das Integral über den mit dem Agens erfüllten Raume auszudehnen. —
V bestimmt die Componenten der Kraft in den Richtungen der Coordinatenaxen, diese erhält man durch Differentiation nach x, y und z; wobei

zu bemerken ist, dass nur r von diesen Variabeln abhängt:

$$(2)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = \displaystyle\iiint k'\frac{x-x'}{r^3}dx'dy'dz' \\ Y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = \displaystyle\iiint k'\frac{y-y'}{r^3}dx'dy'dz' \\ Z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = \displaystyle\iiint k'\frac{z-z'}{r^3}dx'dy'dz' \end{cases}$$

Liegt der Punkt x, y, z ausserhalb des mit dem Agens erfüllten Raumes, so kann r nicht $=0$ werden und die Ausdrücke unter den Integralzeichen bleiben endlich; liegt aber derselbe Punkt innerhalb des Agens, so kann $r=0$ werden; und dann scheint der Ausdruck ein unendlicher zu sein. — Wir werden die Ausdrücke so transformiren, dass sie auch für diesen Fall ~~in~~ endliche Gestalt behalten. — Zu diesem Zwecke führen wir ein System von Polarcoordinaten ein, dessen 0 Punkt der Punkt x, y, z ist, den Radius vector bildet dann die Entfernung r, und die variabeln Winkel des Systemes seien ϑ und φ, so dass:

$$x' = x + r\cos\vartheta$$
$$y' = y + r\sin\vartheta\cdot\cos\omega$$

$$z' = z + r\sin\vartheta\sin\omega$$

Das Volumelement ist dann:

$$r^2 dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

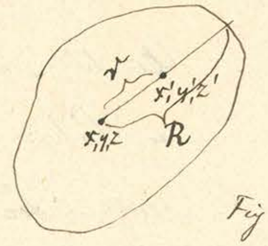


Fig 1.

das Massenelement:

$$k' r^2 dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

das Potentialelement:

$$k' r\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

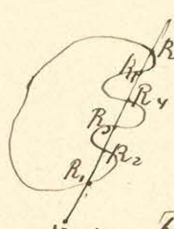
also das Potential:

$$V = \iiint k' r\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega \quad \ldots\ldots (3)$$

Wenn x y z innerhalb liegt so ist:
Das Integral ist in Bezug auf r zwischen den Grenzen 0 und R zu nehmen (siehe Fig 1.); tritt der complicirtere Fall ein, dass der Radius Vector die Grenzfläche des Raumes nicht nur einmal, sondern mehrmal, also wenn der Punkt x, y, z innerhalb liegt eine ungerade Anzahl von Malen schneidet, so ~~ist dann In~~ sind die Grenzen der Integration 0 und R_1, dann R_2 und R_3 etc. (Fig 2)

Fig 2

Liegt x, y, z ausserhalb so schneidet der Radius vector die Grenzfläche eine geradea Anzahl von Malen, dann sind die Integrationsgrenzen für r R_1 bis R_2 dann R_3 bis R_4 ... etc. (Fig 3)



x y z. Fig 3

Es sind ferner die Grenzen der Integration in Bezug auf $\vartheta = 0$ bis π; in Bezug auf $\omega = 0$ bis 2π. –

Auch die Componenten der Kraft X, Y, Z können in Polarcoordinaten ausgedrückt werden, indem man diese in die Gleichungen (2) einführt, es ergeben sich:

$$(4)\quad \begin{cases} X = -\iiint k' \cos\vartheta \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\omega \\ Y = -\iiint k' \sin^2\vartheta \cos\omega \, dr \, d\vartheta \, d\omega \\ Z = -\iiint k' \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin\omega \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\omega \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn auch der Punkt x, y, z innerhalb des Agens liegt, also $r = 0$ wird ~~die Integration~~ die Integration nicht auf ∞ führen kann. –

In Bezug auf die 2ten Diff. Quotienten des Potentials besteht ein wichtiger Satz, welcher durch die Gleichung ausgesprochen ist:

$$(5) \quad \ldots\ldots \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k$$

worin k die Dichtigk. des Agens im Punkte x, y, z bedeutet; Green bezeichnete diesen Ausdruck kurzweg, mit:

mit

$$\Delta V = -4\pi k$$

Man soll hierbei nicht vergessen dass die Masse in x,y,z der Einheit gleich ist, – dies ist immer zu erreichen wenn sie als Maass der auf sie wirkenden Masse betrachtet wird. –

Beim Beweise dieses Satzes unterscheiden wir zwei Fälle 1) den dass der Punkt x y z ausserhalb 2) den dass er innerhalb des Agens liegt. –

Bilden wir ΔV ~~mit Hilfe~~ durch zweimalige ~~Dif~~ partielle Differentiation des Potentials 1, nach den Variabeln x, y, z und addiren diese Gleichungen, so wird:

$$\Delta V = \iiint k'dx'dy'dz'\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)$$

k', x', y', z' sind von x, y, z unabhängig – mit Benutzung des Werthes von r auf Seite 5,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{3(x-x')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = \frac{3(y-y')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = \frac{3(z-z')^3}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

~~die Summe dieser Grössen ist = 0, also ist:~~

Wenn aus den Werthen von r, der Werth $r=0$ ausgeschlossen ist, wenn also der Punkt x, y, z ausserhalb des Agens liegt, so ist die Summe dieser Grössen $=0$, also:

(6) ...... $\underline{\underline{\Delta V = 0}}$

Diese Gleichung kann, als ein specieller Fall, der Gleichung (5) betrachtet werden, sie ist die Form des letzteren für $k=0$

Der zweite zu betrachtende Fall ist der dass der Punkt x, y, z innerhalb des Agens liegt, dann wird ~~der Ausdruck~~ in:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iiint k' dx' dy' dz' \left(\frac{3(x-x')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

und in den zwei andern entsprechenden Gleichungen, der Ausdruck unter dem Integralzeichen für $r=0$, unendlich. – ~~Um diesen Übelstand zu beseitigen,~~ Führt man wieder die auf Seite 6 bestimmten Polarcoordinaten ein, so ergiebt sich:

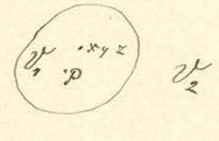
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iiint k' \cdot \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r} \cdot dr \sin\vartheta d\vartheta d\omega$$

Auch dieser Ausdruck enthält für $r=0$ eine Unendliche Grösse unter dem Integralzeichen; um also zum

Ziele gelangen zu können, müssen wir einen Umweg machen. –

Die Lage des Punktes P, auf welchen sich das Potential bezieht ist eine bestimmte, es ist also schwer zu begreifen wie die Differentiation ~~von~~ des Potentials nach den in diesem Falle constanten Grössen x, y, z möglich sei — wir erleichtern diesen Begriff wenn wir unter x, y, z vor Ausführung der Differentiation die Coordinaten eines in unendlich ~~nahe~~ kleiner Entfernung zu P liegenden Punktes verstehen, und nach ausgeführter Differentiation denselben mit P zusammenfallen lassen. –

Wir können uns um den Punkt x, y, z eine beliebige Fläche gelegt denken, welche einen sehr kleinen Raum der Agens einschliesst. Das Potential der Gesammtmasse auf den Punkt (x, y, z) ist dann aus den Potentialen der ausserhalb dieser begrenzten Fläche und der innerhalb derselben befindlichen Masse zusammengesetzt — also ist für ihn



$$\underline{V = V_1 + V_2}$$

demnach:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}$$

Wir verstehen unter V_2 das Potential der ausserhalb der Fläche gelegenen Masse; für diese ist xyz (und auch P) ein ausserhalb gelegener Punkt, also:

$$\Delta V_2 = \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = 0$$

folglich:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$$

Es sei V_0 das Potential einer Masse welche den inneren Raum mit der Constanten Dichtigkeit k erfüllt, welche sich im Punkte x, y, z (resp. P) befindet. Es ist dann:

$$V_0 = \iiint \frac{k'dx'dy'dz'}{r}$$

und da

$$V_1 = \iiint \frac{k'dx'dy'dz'}{r}$$

so folgt:

$$V_1 - V_0 = \iiint \frac{(k'-k)dx'dy'dz'}{r}$$

Die zweiten part. Differentialquotienten dieser Gleichung folgen nach Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} = \iiint (k'-k) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} dx'dy'dz'$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} &= \iiint (K'-K)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\,dx'dy'dz' \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} &= \iiint (K'-K)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\,dx'dy'dz'\end{aligned}\right\} (7)$$

Entwickelt man $(K'-K)$ nach der Taylor'schen Reihe so hat man:

$$K' = K + \frac{\partial K}{\partial x}(x'-x) + \frac{\partial K}{\partial y}(y'-y) + \frac{\partial K}{\partial z}(z'-z) + \dots$$

Ändert sich die Dichtigkeit im Raume stetig, so convergirt die Reihe, – diese Bedingung kann immer erfüllt werden wenn man den Raum passend klein wählt. – Es ist:

$$x'-x = r\cos\vartheta$$

$$y'-y = r\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$z'-z = r\sin\vartheta\cos\omega$$

Sämmtliche Ausdrücke (7) enthalten demnach r als Factor, wenn also r ~~zu~~ unendlich klein wird, was ~~immer~~ von unserer Wahl abhängt, so verschwinden diese gegen endliche Grössen, und die Addition der Gleichungen (7) giebt:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}$$

Also auch das gesuchte:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_0^2}$$

Die Summe der zweiten Differential Quotienten des Potentials einer Masse auf einen innerhalb gelegenen Punkt ist einzig und allein bedingt von der Dichtigkeit welche die Masse im ~~Punkte~~ diesem Punkte hat – sie ist unabhängig von der ganzen Masse und den Änderungen der Dichtigkeit. – Wir haben also unsere Aufgabe gelöst wenn wir das Potential einer Masse auf einen innerhalb gelegenen Punkt aufsuchen, welche eine beliebige Gestalt mit constanter Dichtigkeit erfüllt. –

Als einfachste Gestalt wählen wir eine Kugelförmige Masse, mit dem Radius R und der Constanten Dichtigkeit K – bezeichnen wir dann mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel, mit R den Radius derselben, so ergiebt sich das Potential, in Bezug auf den Punkt (x, y, z,

$$V = 2\pi K R^2 - \frac{2\pi}{3} K \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right)$$

und dann

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi K$$

Hiermit ist die Gültigkeit der Gleichung (5) ganz allgemein bewiesen. –

2. Das Flächenpotential. –

Ist dO' ein Element der Oberfläche an welcher das Agens continuirlich verbreitet ist, und x', y', z' die Coordinaten eines Punktes desselben, in welchem wir die Dichtigkeit mit k' bezeichnen; so stellt sich das Potential des Flä. Agens auf einen Punkt $x y z$ in der Form dar:

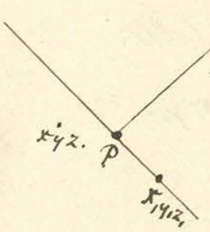
$$V = \iint \frac{k' dO'}{r} \qquad \ldots\ldots (8)$$

wo r die Entfernung von x', y', z' von $x y z$ ist, und das Integral über den ganzen mit dem Agens bedeckten Flächenraum zu nehmen ist. –

Um aus dem Potential die Kraftcomponenten zu entwickeln, müssen gebildet werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \iint k' dO' \frac{x'-x}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \iint k' dO' \frac{y'-y}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \iint k' dO' \frac{z'-z}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Es ist fraglich ob diese Integrale (8) und (9) angebbare Werthe haben, wenn der Punkt $x\,y\,z$ unendlich nahe zur Fläche liegt also wenn r unendlich klein ist. – Wir werden also erstens untersuchen ob das Potential, und dann ob die in (9) entwickelten Differentialquotienten sich stetig oder unstetig ändern wenn der Punkt x, y, z in die Fläche zu fallen kommt.



Bei dieser Untersuchung brauchen nur diejenigen Flächen in Betracht gezogen zu werden die dem Punkte x, y, z unendlich nahe liegen, Punkte in endlicher Entfernung würden ja eine Abstossungskraft auf x, y, z ausüben, die relative zur Anziehung unendl. naher Punkte verschwindend ist. –

Wir führen ein neues Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt P in der Fläche selbst liegt; der Punkt $x\,y\,z$ ist unendlich nahe zu P, ~~also ist auch die Entfernung aller zum Potential beitragenden Elemente unendlich klein~~, ~~und demnach~~ wir werden einen kleinen Theil der Fläche betrachten welcher ~~wir~~ ~~als~~ eine Ebene behandelbar ist. – Diese Ebene sei die YZ Ebene des Coordinatensystems, auf welche die X Axe senkrecht steht. –

Um den Punkt P beschreiben mit dem Radius R einen Kreis; derselbe muss klein genug gewählt werden um die einbeschriebene Fläche als eine ebene Kreisfläche betrachten zu können; wir suchen nun das Potential dieser Kreisfläche, welche mit dem Belegen von der constanten Dichtigkeit k (also der Dichtigkeit im Punkte P) bedeckt ist. – Dieses Potential bezeichnen wir mit V_1, und nehmen ferner an, dass der Punkt x, y, z in der x Axe des Systems liege; dann ist das Flächenelement:

$$d\theta' = dy' . dz'$$

Und da $y=0$, $z=0$, ferner $x'=0$, so ist die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'):

$$r = \sqrt{x^2 + y'^2 + z'^2}$$

führen wir die Polarcoordinaten

$$y' = \varrho \cos\omega$$

$$z' = \varrho \sin\omega$$

ein, so ist:

$$d\theta' = \varrho . d\varrho . d\omega$$

da $\qquad \varrho^2 = x'^2 + y'^2$

und somit: $\qquad r = \sqrt{x^2 + \varrho^2}$

so wird:

$$V_1 = k \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} \frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}}$$

$$V_1 = 2\pi k \Big(\sqrt{x^2+\varrho^2}\Big)_0^R = 2\pi k\Big(\sqrt{x^2+R^2}-\sqrt{x^2}\Big)$$

Mit Absicht schreiben wir in diesem Ausdruck $\sqrt{x^2}$ und nicht x, um daran zu erinnern dass wir da den absoluten positiven Werth von x vor uns haben. – ~~Es fragt sich~~ Diese Gleichung kann dazu dienen die Frage zu beantworten ob sich V_1 stetig ändert wenn (x, y, z) in die Fläche selbst hinein fällt. – Soll dies geschehen so muss x gegen R unendlich klein werden, und ~~die Gleichung~~ das Potential wird:

$$V_1 = 2\pi k R$$

Damit aber, wie wir es thaten die mit den Radius R umschriebene Kreisfläche eben sei, ~~und die Abstossungskraft der Nachbar theilchen vernachlässigbar sei~~, muss auch R als unendlich klein angenommen werden, und es wird daher

$$V_1 = 0$$

werden; ~~so dass~~ wir sehen also, dass wenn der Punkt x, y, z unendlich nahe zur Fläche liegt, dann tragen diejenigen Elemente welche zu demselben unendlich nahe liegen unendlich wenig zum Potentiale bei. – Das Potential nimmt also auch dann einen endlichen bestimmten Werth an; wenn der Punkt $P\,(x,y,z)$ in die Fläche fällt, und zwar denselben wenn der von der einen oder der andern Seite gerückt (Siehe die Grösse $\sqrt{x^2}$ im Ausdrucke) so dass die Änderung des Potentials beim Durchgange des Punktes durch die Fläche eine stetige ist. –

Dieselbe ~~Frage stellt~~ jetzt in Bezug auf das Potential der kleinen Fläche gelöste Frage stellten wir uns auch in Bezug seines ersten Differential Quotienten. –

Aus der Gleichung für V_1 (Seite 17) ergeben sich:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -Kx \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{(x^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = K \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \frac{\varrho^2\, d\varrho\, d\omega \cos\omega}{(x^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = K \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \frac{\varrho^2\, d\varrho\, d\omega \sin\omega}{(x^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Ausgeführter Integration

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = 2\pi K x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+\varrho^2}}\right]_0^R = 2\pi K\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)$$

In diesem Ausdruck steht wieder $\sqrt{x^2}$ statt x um diese Grösse als wesentlich positive zu charakterisiren, es wird also $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ immer positiv für positive und negativ für negative Werthe von x. –

Fällt nun der Punkt x in die Fläche ein, also wird x unendlich klein gegen R, so ist ~~die Ander~~ wenn $x > 0$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -2\pi k$$

und wenn $x < 0$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = +2\pi k$$

~~Zu dem Ausdrucke $\frac{\partial V}{\partial x}$ tragen demnach die Elemente unendlich nahe zum Punkte x,y,z unendlich viel~~ ~~diese endliches~~ ~~bei~~; ~~und war~~ der Werth von $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ ist verschieden je nachdem x sich auf der einen oder der anderen Seite befindet; es ändert sich also $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, wenn wir ~~a~~ den Punkt durch die Fläche führen um $(-4\pi k)$. –

Bei der Behandlung der aufgeworfenen Frage betrachteten wir bis jetzt nur das Potential des Theiles der Fläche deren Punkte unendlich nahe zu x,y,z liegen – ist aber V das Gesammtpotential der Fläche ~~auf einen unendl. nahe gele~~ und V_2 das Potential der ausserhalb der kleinen Kreisfläche Gelegenen Fläche, so ist:

$$V = V_1 + V_2$$

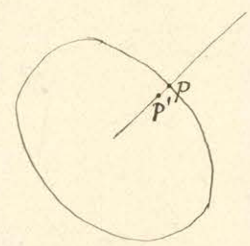
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z}$$

Führt man den Punkt x, y, z durch die Fläche so ändern sich V, $\frac{\partial V}{\partial y}$, und $\frac{\partial V}{\partial z}$ stetig; aber $\frac{\partial V}{\partial x}$ erleidet einen Sprung welcher gleich $-4\pi k$ ist. – Dass sich $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ beim Durchgange stetig ändern, zeigen die Ausdrücke für $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ auf Seite (19), welche für unendlich kleine Werthe von x unendlich klein werden. –

Dies Resultat kann man auch auf ~~etwas~~ andere weise aussprechen. –



Zieht man durch einen unendlich nahe zur Oberfläche gelegenen Punkt P' durch ~~den Punkt~~ P eine Normale zur Fläche, der Punkt wo diese die Fläche schneidet ist P. – Den inneren Theil der Normale bezeichnen wir mit N_i, den äusseren mit N_a; es fällt also N_i mit der positiven N_a mit der negativen x Axe des ~~Coord. systems zu~~ auf Seite 16 eingeführten Coordinatensystems zusammen – es ist demnach

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{wo } x \text{ positiv}$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{wo } x \text{ negativ}$$

und dann addirt :

$$(10) \;\ldots\ldots\; \frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} = -4\pi K$$

Dieser Satz hat Ähnlichkeit mit dem Satze für die zweiten Diff. Quot. des Raumpotentials. –

– Kirchhoff definirte den Diff. Quot. des Potentials nach der Normale durch :

$$\frac{V'-V}{PP'} = \frac{\partial V}{\partial N}$$

wo V' das Potential der Fläche in Bezug auf den Punkt P' und V dasselbe in Bezug auf den Punkt P bedeutet. –

3. Das Linienpotential. –

Es soll hier nur gezeigt werden, wie ein solches Potential unendlich wird wenn der Punkt xyz ~~unendli~~ in die Linie hineinfällt; wir können uns damit ~~be~~ genügen dies für den einfachen Fall einer Geraden zu beweisen – denn es ist einleuchtend wie ~~auf~~ diesen Fall ~~lässt~~ sich ~~für~~ eine jede Curve zurückführen lässt. – Fällt die Linie in welcher das Agens stetig angehäuft ist mit der x Axe zusammen, haben die beiden Endpunkte derselben die Coordinaten $x' = -l$ und

$x' = +l$, und ist die Constante Dichtigkeit in dieser Geraden K , so ist das Potential:

$$V = K\int_{-l}^{+l}\frac{dx'}{\sqrt{x'^2+\varrho^2}} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

wo der Punkt P in der yz Ebene angenommen ist, so dass $x=0$ und $\varrho^2 = y^2+z^2$, und folglich die Entfernung von P von dem Linien Elemente $r = \sqrt{x'^2+\varrho^2}$

$$V = K \log\left(x' + \sqrt{\varrho^2+x'^2}\right)_{-l}^{+l}$$

$$V = K \log\left(\frac{\sqrt{l^2+\varrho^2}+l}{\sqrt{l^2+\varrho^2}-l}\right)$$

Wenn ϱ unendlich klein wird:

$$\sqrt{l^2+\varrho^2}+l = 2l$$

$\sqrt{l^2+\varrho^2}-l$ lässt sich ~~sch~~ auf die Form bringen

$$l\sqrt{1+\frac{\varrho^2}{l^2}}-l = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{l}$$

Es ergiebt sich demnach

$$V = 2K \log\frac{2l}{\varrho}$$

ein Ausdruck welcher für $\varrho = 0$ logarithmisch unendlich wird. —

4. Der Green-sche Satz. –

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes in einem begrenzten Raume – seien ferner U und V zwei Functionen von x, y, z die innerhalb des ganzen Raumes endlich und eindeutig sind. –
Unsere Betrachtungen beziehen sich dann auf den Ausdruck:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

wo das Integral über den ganzen Raum auszudehnen ist. – Mit Hülfe der Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

und der zwei anderen ~~für die Differentiation~~ nach y und z entsprechenden Gleichungen, lässt sich dieser Ausdruck in folgenden umwandeln:

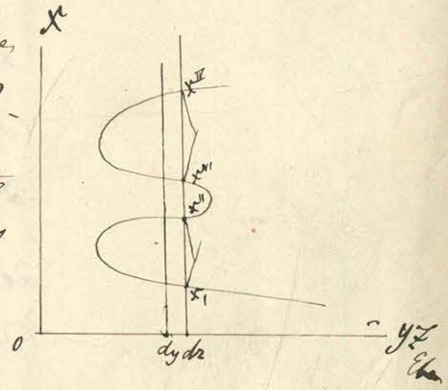
(12) $$= \overset{(I)}{\iiint dx\,dy\,dz \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right\}} -$$

$$- \overset{(II)}{\iiint dx\,dy\,dz\; U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)}$$

wobei die Grenzen der Integration des ursprüngli-
chen Ausdruckes beibehalten sind. –
Wir werden das Integral (I) auf ein zweifaches
reduziren; wobei wir vorläufig nur ein Glied
desselben

$$\iiint dx\,dy\,dz \,\frac{\partial}{\partial x}\left(U.\frac{\partial V}{\partial x}\right) \qquad (III)$$

betrachten wollen. – Die Integration dieses Aus-
druckes in Bezug auf x lässt sich ausführen –
es ~~ist~~ wird sodann das Integral ein zweifaches. –
Ich denke mir die Oberfläche des betrachteten Raumes
auf die YZ Ebene projicirt, ~~die~~ welche auf die Pa-
pierebene vertical stehen soll, und errichte
mit der Basis $dy\,dz$ einen zu x parallel
stehenden Cylinder. – Dieser unendl. dünne
Cylinder wird die Oberfläche des begrenzten Raumes
ein oder mehrmal schneiden, das Integral
~~von~~ nach x wird ~~für~~ auf alle Theile dieses Cylinder
auszudehnen sein, die innerhalb des begrenzten
Raumes liegen. – Man wird es also nehmen
müssen von x_1 bis x'' dann von x''' bis x^{IV} etc. –
Demnach wird der Ausdruck III wenn die



Integration in Bezug auf x ausgeführt ist, das doppelte Integral folgenden Ausdruckes sein:

$$dy\,dz\left\{-\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)'+\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)''-\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)'''+\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{IV}-\dots\right\}$$

wo $\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)'$ den Werth von $\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ bedeutet für $x=x'$; $\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)''$ den Werth derselben Grösse für $x=x''$ u. s. w.

Bezeichnen wir nun mit dO', dO'', dO''', dO^{IV}, etc. den Flächeninhalt derjenigen Flächenelemente, welche der unendl. dünne Cylinder von der Oberfläche des begrenzten Raumes bei x' dann bei x'' dann bei x''' u. s. w. ausschneidet, und mit (N',x), (N'',x), (N''',x) etc diejenigen Winkel welche die Normalen der Oberflächenelementes dO', dO'', dO''' etc mit der x Axe bilden. – Es ist hiebei zu bemerken dass immer diejenige Richtung der Normale als die positive zu betrachten ist, welche nach dem inneren Raume des begrenzt. Raumes gerichtet ist. – Da nun $dydz$ als Projection der Oberflächenelemente dO', dO'' dO''' etc. betrachtet werden kann, so ist:

$$dydz = dO'\cos(N',x) = -dO''\cos(N'',x) = dO'''\cos(N''',x) =$$
$$= -dO^{IV}\cos(N^{IV},x) = \text{etc.}$$

da $dydz$ wesentlich positiv, so ist es nöthig, diese verschiedenen Vorzeichen einzuführen, eben um dieser Bedingung zu genügen. –

Für $dydz$ diesen Werth gesetzt verwandelt sich der ~~Ausdruck~~ letzt erwähnte mit $dydz$ multiplicirte Ausdruck in

$$-\left\{dO'\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)'\cos(N',x) + dO''\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)''\cos(N'',x) + \ldots\ldots\right\}$$

Um III zu erhalten ist dieser Ausdruck noch ~~erst~~ in Bezug auf die ganze Oberfläche des begr. Raumes zu integriren. – Dieses Integral lässt sich dann auch schreiben:

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\iint dO\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(N,x)$$

Die 2 Anderen Glieder des Ausdruckes I, in (12) lassen sich ähnlich behandeln, und geben dann:

$$I = -\iint dO.U\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,z)\right\}$$

Bezeichne ich jetzt mit N ~~ein Stück der~~ die Länge der nach innen gewonnenen Normale, von einem Punkte der Oberfläche bis zu einem unbestimmten Punkte der Normale, und mit x, y, z und $x_0 y_0 z_0$ die Coordinaten dieser Punkte, so ist:

$$x-x_0 = N.\cos(N,x)$$

$$y-y_0 = N.\cos(N,y)$$

$$(z-z_0) = N \cos(N,z)$$

Nach N differentiirt, da x, y, z Functionen von N sind:

$$\frac{\partial x}{\partial N} = \cos(N x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial N} = \cos(N,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial N} = \cos(N,z)$$

Diese Werthe sollen in I gesetzt werden, dadurch wird der Ausdruck in der Parenthese:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial N}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial N}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial N}=\frac{\partial V}{\partial N}$$

und somit wird:

$$I = -\iint dO.\,U.\frac{\partial V}{\partial N}$$

In (12) gesetzt:

$$(13)\ldots\quad \iiint dx\,dy\,dz\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = -\iiint dx\,dy\,dz.\,U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) - \iint dO.\,U\frac{\partial V}{\partial N}$$

Da aber der linke Theil dieses Ausdruckes in Bezug auf U und V symmetrisch ist, und ihren Werth nicht verändert, wenn man diese Grössen mit einander vertauscht; so muss auch der rechte Theil desselben durch diese Vertauschung unverändert bleiben und es muss demnach:

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\iiint dx\,dy\,dz.\,V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)-$$

$$-\iint dO.\,V.\frac{\partial U}{\partial N} \quad \ldots (13)$$

Diese Doppelgleichung (13) spricht den Greenschen Satz aus. –

5. Folgerungen aus dem Green-schen Satze. –

Es sei V das Potential von Massen die ausserhalb eines begrenzten Raumes liegen, – setzen wir in dem Greenschen Satze $U=V$ – so erhält sie die vereinfachte Form:

$$\iiint dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}=-\iint dO.\,V\frac{\partial V}{\partial N} \quad \ldots (14)$$

Wenn in jedem Punkte der Oberfläche dieses Raumes $\bar{V}=0$ so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, und damit dann auch die linke verschwinden kann, muss

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0$$

also:

$$V = Const.$$

Da V im ganzen Raume Constant ist, so muss ~~es~~ überall ~~das~~ den Werth an der Oberfläche haben also $=0$ sein. – Wenn also $\bar{V}$ den Werth von V an der Oberfläche bedeutet so ist für $\bar{V}=0$ auch ~~$V=0$~~ im ganzen Raume $V=0$. –

Es soll nun gezeigt werden, dass wenn $\bar{V}$ gegeben ist, V für alle Punkte des inneren eindeutig bestimmt ist. –

Nehmen wir an dass dies nicht so sei, und dem gegebenen Werthe von $\bar{V}$ zwei Werthe von V V_1 und V_2 genügen würden – dann müsste:

$$\bar{V}_1 = \bar{V} \quad \text{und} \quad \bar{V}_2 = \bar{V}$$

und somit

$$\bar{V}_1 - \bar{V}_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{V_1 - V_2} = 0 \qquad \text{sein}$$

~~Die~~ Also sind die zwei Werthe welchen $\bar{V}$ genügt dieselben, d. i. V durch $\bar{V}$ eindeutig bestimmt. – Ist

$$\bar{V} = \text{Const.}$$

gegeben, so wird V in allen Punkten gleich derselben Constante sein. –

~~Setze ich~~ Verstehe ich nun in einem der Greenschen Sätze unter V wie früher das Potential von äusseren Massen, unter U aber eine Constante ~~so ist~~; etwa $U = c$, so ist:

$$0 = -c \iint dO \frac{\partial V}{\partial N}$$

d. i.

$$\iint dO \frac{\partial V}{\partial N} = 0$$

Die Gleichung (14) wird, wenn $\bar{V} = \text{Const.}$ ist:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} = 0$$

hieraus folgt

$$V = \text{Const.}$$

u. zwar V constant im ganzen Raum also $V = \bar{V}$. –

Wenn an der Oberfläche:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial N} = 0$$

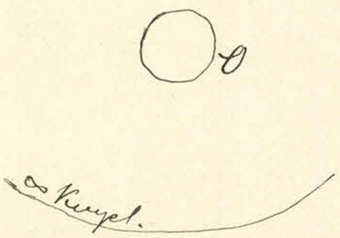
so ist in allen Punkten $V = \text{Const.}$

32

Worin die Constante unbestimmt bleibt. –

Bis jetzt betrachteten wir das Potential von Massen die ausserhalb gelegen sind – wir werden jetzt unter V das Potential von Massen verstehen ~~verstehen~~ die innerhalb des Raumes liegen, ~~in Bezug auf einen äusseren Punkt verstehen~~. –

Wenn in diesem Falle das Potential in jedem Punkte ~~an~~ der Oberfläche $\bar{V}=0$ ist, so ist das Potential V im ganzen ausserhalb der Oberfläche gelegenen unendlichen Raumes $=0$. – Wir gelangen hierzu indem wir die ~~Resultate de~~ beim vorher betrachteten Falle gewonnenen Resultate auf einen Raum anwenden welcher zwischen der Oberfläche und einer unendl. grossen Kugel liegt. –



An der unendl. grossen Kugelfläche ist $V=0$ da $r=\infty$; es ist ferner an der inneren Oberfläche ~~an~~ dieses Raumes auch $\bar{V}=0$, und somit folgt dass für alle Punkte zwischen O und der unendl. Kugelfläche $V=0$ ist. –

Ist $\bar{V}$ ~~positiv~~ gegeben dann ist ~~auch~~ V in allen Punkten des äusseren unendlich grossen Raumes eindeutig bestimmt. –

Wenn $\bar{V}$ einen von 0 verschiedenen Constanten

Werth hat, dann ist das Potential an verschiedenen Punkten des äusseren Raumes nicht mehr Constant. – Man sieht dies leicht ein,[+] wenn man bedenkt, dass für in der Fläche der Unendl. Kugel V immer $= 0$ sein muss, wodurch dann wenn wir von Punkten der Oberfläche O zu Punkten der unendl. Kugeloberfläche übergehen, ~~bitte~~ das Potential von einem Constanten Werthe in den Werth $= 0$ übergehen muss. –

Wenn in der Oberfläche O

$$\frac{dV}{\partial N} = 0 \quad \text{ist}$$

so ist das Potential im ganzen unendlichen Raume $= 0$. – Dann in diesem Falle muss das Potential im ganzen unendl. Raume $=$ Const also $= 0$ sein. –

[+] In folgenden Untersuchungen soll gezeigt werden wie V auch in diesem Falle eindeutig zu bestimmen ist. –

II Vertheilung der Electricität in einem kugelförmigen Leiter.

1.

Ich denke mir einen begrenzten Leiter, welches sich in einem mit Electricität in beliebigerweise gefüllten Raume befindet — der Leiter wird dann auch Electricität aufnehmen; — Bezeichnen wir mit V das Potential der ausserhalb des Leiters versammelten Electricität in Bezug auf einen Punkt x, y, z des Leiters, und mit U das Potential der Massen innerhalb des Leiters in Bezug auf denselben Punkt, so ist im Falle des Gleichgewichtes, das Gesammtpotential:

(1) $$U + V = \text{Const.} = C$$

denn diese Bedingung spricht aus dass die Wirksamen Kräfte $= 0$ sind. —

Durch zweimalige Diff. ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2(V+U)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(U+V)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(U+V)}{\partial z^2}=0$$

Da aber nach ~~dem~~ einem in I abgeleiteten Satze dieselbe Summe

$$=-4\pi k$$

ist, so folgt dass $k=0$; also ist die Dichtigkeit der Electricität im inneren des Leiters $=0$; dann ist die ganze Electricitätsmenge ist auf die Oberfläche des Leiters beschränkt. –

Wir stellen uns in diesem Abschnitte die Aufgabe U zu bestimmen wenn V und C gegeben sind. – Wir bezeichnen nämlich mit U das Potential von electrischen Massen die auf der Leiteroberfläche verbreitet sind auf einen beliebigen Punkt – mit V den Potential der äusseren electr. Massen auf denselben Punkt – und mit C den ~~[illegible]~~ Constanten Werth des Gesammtpotentials im inneren des Leiters. – Bei dieser Bestimmung unterscheiden wir zwei Fälle nämlich 1) dass der Punkt innerhalb dann 2) dass er ausserhalb des Leiters liegt – wir unterscheiden auch ~~diese~~ die zwei verschiedenen Bedeutungen von U in diesen Fällen durch die Bezeichnungen U_i und U_a. – Zu dieser Bestimmung ist die vollständige Kenntniss von V gar nicht nöthig – es genügt wenn ~~der Werth von~~

V auf der Leiteroberfläche, also $\bar{V}$ gegeben ist — dann ist

$$\bar{U} = C - \bar{V}$$

und in ~~wenigen~~ einigen Fällen gelingt es der Mathematik wenn $\bar{U}$ gegeben ist U_a und U_i zu berechnen — zu diesen Fällen gehört auch der eines kugelförmigen Leiters, dessen Untersuchung unsere Aufgabe ist. —
Wir werden die Vertheilung der Elect. in einem kugelförmigen Leiter auch für den Fall untersuchen; dass C, und der Werth des Potentials der äusseren in Bezug auf Punkte die innerhalb der Kugel gelegen sind V_i gegeben sind — dann ist

$$U_i = C - V_i$$

nicht so einfach ist die Best. von U_a. — Ist es uns aber gelungen mit ~~den~~ erwähnten Daten U_i und U_a zu berechnen dann sind

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial N_a} \quad \text{bekannt} —$$

und es giebt dann die Gleichung:

$$-4\pi k = \frac{\partial U}{\partial N_i} + \frac{\partial U}{\partial N_a}$$

die Dichtigkeit auf der Oberfläche des Leiters. —
~~Da zuerst~~ Wir haben ~~— zur Bestimmung von~~ eine Gleichung für U_a nämlich die Gleichung (6, der ersten Abschnitts — für den Fall der Kugel ~~scheint~~ ist es zweckmässig Polarcoordinaten einzuführen — und wir wollen auch, jetzt diese Gleichung (6, in Polarcoordinaten transformieren. —

2.

In diesem Abschnitte werden wir zeigen wie der Ausdruck

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0 \qquad \ldots (2)$$

in welchem Ω eine Function des Ortes ist, welche an der Oberfläche einen bestimmten Werth $\overline{\Omega}=\text{const.}$ annimmt, also der Bedingung:*

$$\overline{\Omega'}=0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

genügt, für Polarcoordinaten transformirt werden kann. –

Diese Transformation hat Jacobi auf einer höchst eleganten Art durchgeführt und in einer Abhandlung veröffentlicht welche sich im 36^{ten} Bande von Crelle's Journal befindet. –

Jacobi betrachtet den Ausdruck:

$$S=\iiint dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2\right) \qquad \ldots (4)$$

und zeigt dass (2) die ~~Ausdruck~~ Bedingung ist welcher das Maximum und Minimum desselben genügen muss. – Führt man daher die neu einzuführenden

Coordinaten in (4) ein, und sucht die Bedingung des Maximums derselben, so gelangt man ~~zur~~ ~~der~~ Gleichung (2) ausgedrückt in den neuen Coordinaten. — Diese Behandlung hat den Vorzug dass die Schwierigkeiten des Einführens der neuen Coordinaten in die 2ten Diff. Quot. durch sie beseitigt werden. —
Erhält die Function Ω in (4) einen unendl. kleinen Zuwachs also $\Omega + \varepsilon\Omega'$, wo ε unendl. kleine ist, so verwandelt sich S in $S + \varepsilon S'$; wenn dann die Function S für ein Maximum oder Minimum haben soll, so muss:

$$S' = 0$$

sein, denn wäre dies nicht, so würde S für $\Omega + \varepsilon\Omega'$ kleiner oder grösser werden als für Ω. —
bilden wir $S + \varepsilon S'$, indem wir in (4) setzen statt Ω $\Omega + \varepsilon\Omega'$, so wird das erste Glied unter dem Integralzeichen:

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\Omega'}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial x}$$

worin das letzte Glied aus dem Grunde weggelassen werde dass ε unendlich klein ist. —
Entwickelt man ähnlich die zwei andern Glieder

und zieht dann von dem so gebildeten Ausdrucke für $S+\varepsilon S'$ den Ausdruck für S, wie er in (4) entwickelt ist, ab – so ergiebt sich

$$\frac{S'}{2}=\iiint\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Nach dem Green'schen Satze entwickelt, ist:

$$\frac{S'}{2}=-\iint d\Theta\,\Omega'\frac{\partial\Theta}{\partial N}-\iiint dx\,dy\,dz\,\Omega'\left(\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)\right)$$

Da nach der Gl. (3) $\overline{\Omega'}=0$, so verschwindet das erste, und es ist die Bedingung des Maximums von S:

$$0=\iiint dx\,dy\,dz\,\Omega'\left(\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)\right)$$

Da aber diese Gleichung für alle Werthe von Ω' bestehen muss, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0$$

Nachdem es bewiesen ist, dass (2) wirklich die Bedingung des Maximum's von (4) ist, führen wir in (4) die neuen Coordinaten ein. – Um allgemeiner zu bleiben, ~~behandeln wir die Fä~~ machen wir diese Transformation für Orthogonale Coordinaten – ein specieller Fall derselben wird dann die Transformation für Polarcoordinaten sein. –

Diese Orthogonalen Coordinaten seien

$$u\ ,\ v\ ,\ w$$

diese Grössen sind gegebene Functionen von x, y, z so dass

$$u = \text{const.} \qquad v = \text{const.} \qquad w = \text{const.}$$

die Gleichungen von Oberflächen sind, die einander rechtwinkelig schneiden. – Je eine dieser Flächen kann sich in Form einer Function

$$\mathfrak{u}(x, y, z) = u$$

darstellen – wo $\mathfrak{u}$ an der linken Seite ein Functionszeichen ist, auf der rechten Seite einen bestimmten gegebenen Werth repräsentirt. –

Ich betrachte nun 6 solche Oberflächen – deren Gleichungen sind:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{u}(x,y,z) = u & & \mathfrak{u}(x,y,z) = u + du \\ \mathfrak{v}(x,y,z) = v & \text{und} & \mathfrak{v}(x,y,z) = v + dv \\ \mathfrak{w}(x,y,z) = w & & \mathfrak{w}(x,y,z) = w + dw. \end{array}$$

Die 3 ersten dieser Flächen schneiden sich im Punkte

x, y, z, die drei andern liegen den ersten unendl. nahe – so dass die 6 Flächen ein unendlich kleines Parallelepiped begrenzen, welches wir als Raumelement in die Rechnung einführen wollen. –

Vor allem müssen wir dann die Kanten des Parallelepipeds berechnen. –

Eine der Kanten, welche auf der Fläche $u(x,y,z)=u$ senkrecht steht bezeichne ich mit N_u. –

Die Orthogonalen Coordinaten des einen Endpunktes von N_u sind u, v, w und die des anderen Endpunktes $u+du, v, w$; die diesen Endpunkten entsprechenden rechtwinkeligen Coordinaten sind dann

$$x, y, z$$

und

$$x+\frac{\partial x}{\partial u}du \quad , y+\frac{\partial y}{\partial u}du \quad , z+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du$$

worin x, y, z als Functionen von u, v, w betrachtet sind. – Demnach ist:

$$N_u = du\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

oder wenn wir die Grösse einführen:

$$U=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \quad \ldots (5)$$

Da $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ als Projectionen von N_u auf die Coordinatenaxen betrachtet werden können, so ist, wenn (N_u, x), (N_u, y), (N_u, z) die Winkel zwischen N_u und den Coordinatenaxen bezeichnet:

$$(6)\ldots\begin{cases}\cos(N_u, x) = \frac{1}{U}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\\ \cos(N_u, y) = \frac{1}{U}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \cos(N_u, z) = \frac{1}{U}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\end{cases}$$

Durch analoge Betrachtungen und Bezeichnungen ergeben sich auch die zwei anderen in der Ecke x, y, z mit der ersten zusammenfallenden Kanten des Parallelepipeds:

$$N_v = V.dv$$

$$N_w = W.dw$$

worin

$$(7)\ \ldots\quad V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

und:

$$(8)\ \ldots\quad W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

Schliesslich können auch noch den (6) ähnliche Gleichungen für die Cosinuse des Winkel zwischen N_v und N_w und den Coordinatenaxen gebildet werden. — Durch Multiplication der drei Kanten erhalte ich das Volum des Parallelepipeds:

$$N_u . N_v . N_w = U . V . W . du\,dv\,dw \qquad \ldots\ldots (9)$$

Auch den Ausdruck unter der Parenthese der Gleichung (4) muss ich in Bezug auf die Orthogonalen Coordinaten transformiren. –

Es ist nämlich, wenn wir R als eine Function von u, v und w dargestellt denken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \ldots\ldots \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

Diese Ausdrücke quadrirt und addirt geben den Ausdruck unter der Parenthese. –

Es ist zu bemerken dass das Glied:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial R}{\partial v}$$

und alle ihm ähnlichen ~~Glieder~~ bei dieser Operation gewonnenen Glieder verschwinden. –

Dass dies wirklich so ist sehen wir ein, wenn wir die für Orthogonale Coordinaten richtigen Gleichungen bilden. –

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(N_u, x)\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(N_u, y)\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos(N_u, z)\sqrt{\ldots\ldots}$$

dann weiter:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos(N_v, x)\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos(N_v, y)\sqrt{\ldots\ldots}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \cos(N_v, z)\sqrt{\ldots\ldots}$$

ferner:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos(N_w, x)\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \cos(N_w, y)\sqrt{\ldots\ldots}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \cos(N_w, z)\sqrt{\ldots\ldots}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich dann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = \sqrt{\ldots\ldots}\sqrt{\ldots\ldots}\cdot\cos(N_u, N_v)$$

Da aber die zwei Flächen u, v und somit auch ihre Normalen N_u und N_v aufeinander senkrecht stehen so giebt ~~die~~ sich aus der Gleichung der linke Theil derselben $= 0$. — Auf demselben Wege ergeben sich noch 2 Gleichungen, welche auch durch symmetrische Vertauschung der Grössen u, v und w ~~mit v und w~~ abgeleitet werden können. –

Werden also die Gleichungen (10) einzeln auf's Quadrat erhoben, und dann addirt, so folgt:

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2+\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2+$$

$$+\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)^2 \quad \ldots\ldots (11)$$

Es müssen jetzt noch die Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. als Functionen von u, v, w ausgedrückt werden. –

Alle Grössen von der Form $\cos(N_u, x)$ haben wir zweimal, und zwar einmal in der Form der Gleichungen (6), und dann auf Seite 43 und 44 ausgedrückt – fassen wir diese zwei Systeme von Gleichungen zusammen so ergeben sich:

~~aus der~~

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=M\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=M\frac{\partial z}{\partial u}$$

wo

$$M=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}}$$

Durch ähnliche Gleichungen werden auch die an-

~~sechs~~ deren sechs Grössen ~~bestimmt~~ ausgedrückt, in welchen dann dem M entsprechend N und P vorkommen. –

Die Grössen M, N und P sind aber noch immer nicht als Functionen von u, v, w dargestellt; um auch dies zu erreichen betrachte man in

$$u = u(x, y, z)$$

x, y, z als Functionen von u, v, w dargestellt; man wird dann durch partielle Differentiation erhalten:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

da aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot M \qquad u.s.w.$$

so ist.

$$1 = M\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)$$

vergleichen wir dies mit (5, so folgt:

$$M = \frac{1}{U^2}$$

Auf ähnlichem Wege wird gefunden:

$$N = \frac{1}{V^2}$$

$$P = \frac{1}{W^2}$$

Es wird jetzt möglich (11, als Function von u, v, w auszudrücken – sie nimmt dadurch die Form an:

$$=\frac{1}{U^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)^2$$

Das Integral S ist durch Einführung dieses Ausdruckes – und des Ausdruckes (9) für das Raumelement auf die gewünschte Weise, nämlich als Function von u, v, w ausgedrückt. –
Es ist

$$S=\iiint du\,dv\,dw\left\{\frac{VW}{U}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2+\frac{WU}{V}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2+\frac{UV}{W}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)^2\right\}\dots(12)$$

Durch Einführung des neuen Raumelementes haben sich die Grenzen der Integration geändert – es ist aber das Integral über dasjenige Gebiet von u, v, w zu nehmen, welches dem Gebiete von x, y, z entspricht, über welches die Integration nach diesen Variabeln auszudehnen war. –

Wir suchen jetzt das Maximum von S, in welchem Ausdrucke Ω eine beliebige Function von u, v, w ist, welche nur der Bedingung genügt, dass sie an der Grenze einen bestimmten Werth annimmt und dass somit:

$$\overline{\Omega'}=0$$

wird aus Ω , $\Omega+\varepsilon\Omega'$ so wird aus S,

$S + \varepsilon S'$ wo ε unendl. klein. – Die Bedingung des Maximums oder Minimums ist dann:

$$S' = 0$$

Bildet man diesen Ausdruck:

$$\frac{1}{2} S' = \iiint du\,dv\,dw \left\{ \frac{VW}{U} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \frac{WU}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega'}{\partial y} + \right.$$

(13) ....

$$\left. + \frac{UV}{W} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Omega'}{\partial z} \right\}$$

~~[illegible]~~ Dieses Integral kann in dreien zerlegt werden, das erste derselben ist:

$$\iiint du\,dv\,dw \frac{VW}{U} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \Omega'}{\partial x} = \iint dv\,dw \left[\Omega' \frac{VW}{U} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] -$$

$$- \iiint du\,dv\,dw\, \Omega' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{WV}{U} \frac{\partial \Omega}{\partial u} \right)$$

Das erste Glied der rechten Seite enthält einen Ausdruck in eckigen Klammern, was sich darauf bezieht dass die Grenzwerthe von u in ihm einzuführen sind, für diese Grenzwerthe wird aber Ω' zu $\overline{\Omega}' = 0$, und somit ist das ganze erste Glied $= 0$. –

Auf ähnliche Weise behandelt man auch die zwei anderen Integrale in welche (13) zerlegbar ist, und man wird so S' bilden können – und diese Grösse $= 0$ gesetzt führt zur Gleichung:

$$0=\iiint du\,dv\,dw\,\Omega'\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)\right\}$$

da diese Gleichung für alle Werthe von Ω' bestehen muss, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)=0 \quad \ldots\ldots (14)$$

Diese Gleichung ist die Bedingungsgleichung des Maximums von S – also die Gleichung (2, in orthogonalen Coordinaten ausgedrückt. – Nachdem wir die Aufgabe für den allgemeinen Fall der orthogonalen Coordinaten gelöst haben, ist es leicht ~~statt dieser Polo~~ Polarcoordinaten einzuführen. –

Die orthogonalen Coordinaten sind in diesem Falle ~~daher~~:

$$u=\varrho \qquad v=\vartheta \quad \text{und} \quad w=\omega$$

da:

$$x=\varrho\cos\vartheta$$

$$y=\varrho\sin\vartheta\cos\omega$$

$$z=\varrho\sin\vartheta\sin\omega$$

so ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\vartheta \qquad \text{entsprechend} \quad \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\vartheta\cos\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{"}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = \sin\vartheta\sin\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{"}$$

Diese Werthe in (5) gesetzt, geben:

$$\underline{U = 1}$$

ferner ist.

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\varrho\sin\vartheta \quad \text{entsprechend} \quad \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \varrho\cos\vartheta\cos\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \varrho\cos\vartheta\sin\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

also in (7) gesetzt:

$$\underline{V = \varrho}$$

und da ferner:

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = 0 \qquad \text{entsprechend} \quad \frac{\partial x}{\partial w}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\varrho\sin\vartheta\sin\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial y}{\partial w}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \varrho\sin\vartheta\cos\omega \qquad \text{"} \quad \frac{\partial z}{\partial w}$$

so ist aus (8)

$$\underline{W = \varrho\sin\vartheta}$$

Die gefundenen Werthe von U, V, W setzt man in (14) ein, und erhält dann:

$$0=\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\sin\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\right)$$

Die in Polarcoordinaten transformirte Gleichung (2) erhält man dann schliesslich:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\omega^2}\right)=0 \quad \ldots\ldots (15)$$

Wenn man aber setzt

$$\cos\vartheta=\mu$$

so wird

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}=-\sin\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial\omega^2}=0 \quad \ldots (16)$$

3.

In (1) dieses Abschnittes haben wir uns die Aufgabe gestellt die Vertheilung der Electricität in einer Kugel zu bestimmen, welche sich innerhalb eines mit Electricität gefüllten Raumes befindet.—

Wir haben da auch gezeigt dass die Lösung der Aufgabe die Bestimmung von U_a erfordert; und dass diese Bestimmung zu machen ist indem U an der Grenze einen ~~bestimmten~~ gegebenen Werth $\overline{U}$ annimmt. – Nehmen wir zur Vereinfachung den Radius der Kugel $\varrho = 1$ an so ist:

$$\overline{U} = U_{(\varrho=1)}$$

U_a ist eine Function von ϱ, μ, ω welche ~~für~~ $\varrho = 1$ den gegebenen Werth $\overline{U}$ annimmt, und für $\varrho = \infty$ verschwindet; ich kann sie also in einer Reihe entwickeln:

$$(17) \ldots \quad U_a = \frac{1}{\varrho} U_0 + \frac{1}{\varrho^2} U_1 + \frac{1}{\varrho^3} U_2 + \ldots\ldots$$

wo $U_0, U_1, \ldots$ etc. Functionen von nur μ und ω sind, wodurch der Bedingung für $\varrho = \infty$ $U_a = 0$ genügt wird. – Es ist dann auch:

$$(18) \ldots \quad \overline{U} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$$

U_a ist das Potential der Masse in der Kugel in Bezug ~~auf~~ einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt, es muss also U_a der Gleichung (2) und somit der Gleichung (16) genügen. – Wenn man daher für R, U_a und zwar ihre Reihenentwickelung (17) in (16) einsetzt so ergiebt sich:

$$\sum_{n=\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\varrho^{n+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\omega^2} + n.n+1.U_n\right.\right\} = 0$$

Diese Gleichung muss durch alle Werthe von ϱ erfüllt werden (es ist ϱ immer > 1); es ist dies aber nur möglich, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von ϱ ~~zu~~ gleich 0 sind, also wenn

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 U_n}{\partial u^2} + n.n+1.U_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

~~Können wir~~ Um nun die Aufgabe zu lösen werden wir $\bar{U}$ in einer Reihe von der Form (18) entwickeln, deren jedes einzelne Glied U_0, U_1 ... etc. der Bedingung (19) genügen muss.– Die so bestimmten Factoren U_0, ... etc. in (17) gesetzt geben U_a.–

Man könnte denken dass so viele Lösungen von (19) möglich sind, auch ebensoviele Reihenentwickelungen von $\bar{U}$ aufgestellt werden könnten –

~~Da~~ Es muss aber $\bar{U}$ endlich und eindeutig bestimmt werden – zu ihrer Entwickelung in Form der Reihe (18) werden nur solche Lösungen von (19) benützt werden können welche für jeden Punkt der Kugel endlich und eindeutig sind.–

Diese ~~endlichen~~ innerhalb der ganzen Kugel und eindeutigen Lösungen von (19) nennt man Kugelfunctionen. – U lässt sich immer in Kugelfunctionen – aber wie wir zunächst zeigen wollen immer nur auf eine Weise entwickeln. – Um diesen Beweis führen zu können bedarfen wir eines Satzes über Kugelfunctionen, welcher in Folgendem dargestellt werden soll. –

4.

Der zu beweisende Satz lautet: Wenn Y_n und Y_m zwei Kugelfunctionen ~~sind~~ von verschiedener Ordnung n und m sind, und dO ein Element der Kugeloberfläche bezeichnet, so ist:

(20) $$\int dO \cdot Y_n \cdot Y_m = 0$$

hauptsächlich ist in diesem Satze zu betonen, dass n und m verschieden sind. –

Wir bezeichnen

$$\int dO \cdot Y_n \cdot Y_m = Z$$

dann ist zu beweisen

$$Z = 0$$

Für dO kann ihr Werth sindddder also dpdw gesetzt werden – die Grenzen der Integration sind für ω, 0 und 2π, für ϑ 0 und π, und somit für μ -1 und $+1$, so dass:

$$Z = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\mu\, d\omega\, Y_n Y_m$$

Y_m und Y_n sind Lösungen von (19) – setzen wir in diese Gleichung statt U_n wirklich Y_n so erhalten wir einen Werth für Y_n, welcher sich den Ausdruck Z in folgenden verwandelt:

$$Z = -\frac{1}{n.n+1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\mu\, d\omega\, Y_m\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\omega^2}\right\} \quad \ldots (21)$$

Ich denke mir nun dieses Integral in zwei Integrale zerlegt, und integrire den ersten derselben partiell nach μ den zweiten partiel nach ω. – Auf diese Weise erhalte ich zwei Glieder deren jedes ein einfaches, und zwei andere Glieder deren jedes ein zweifaches Integral enthält, diese letzteren zusammengefasst, ergiebt sich:

$$-n.n+1.Z = \int_0^{2\pi} d\omega\left[Y_m(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu}\right]_{\mu=-1}^{\mu=+1} + \int_{-1}^{+1} d\mu\left[Y_m\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial Y_n}{\partial\omega}\right]_{\omega=0}^{\omega=2\pi} -$$

$$-\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\mu\, d\omega\left\{\frac{\partial Y_m}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu} + \frac{\partial Y_m}{\partial\omega}\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Y_n}{\partial\omega}\right\}$$

die zwei ersten Glieder dieses Ausdruckes verschwinden wenn Y_n und Y_m wirklich Kugelfunctionen, dann ist auf der ganzen Kugel endlich und eindeutig sind — für das erste Glied liegt dies auf der Hand — und auch für das zweite wird es klar wenn man bedenkt dass die Grenzwerthe $\omega = 0$ und $\omega = 2\pi$ sich auf denselben Punkt der Kugel beziehen. —

Es reducirt sich also der Ausdruck zu folgendem Ausdrucke:

$$n.\overline{n+1}.Z = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\omega \left\{ \frac{\partial Y_m}{\partial \mu}(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial \mu} + \frac{\partial Y_m}{\partial \omega}\cdot\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial Y_n}{\partial \omega} \right\}$$

Dieser Ausdruck ~~wird~~ bleibt unverändert wenn man in ihm n und m vertauscht — wir gelangen also zu demselben Resultate wenn wir in dem Ausdrucke ~~für~~ Z, für Y_m ihren entsprechenden Werth aus (19) einführen — dann ergiebt sich aber ~~dieser~~ derselbe Ausdruck $= m.\overline{m+1}.Z$; so dass ~~also~~:

(22) $$n.\overline{n+1}\,Z = m.\overline{m+1}.Z$$

Wenn aber n und m wie wir es vorausgesetzt haben, verschieden sind, so kann dieser Gleichung nur dadurch genügt werden, dass:

$$Z = 0$$

hierdurch ist nun der zu Beweisende des Satzes (20) geliefert. –

5.

Mit Hülfe dieses Satzes wird es leicht zu beweisen dass $\bar{U}$ wirklich nur auf eine Weise in Kugelfunctionen entwickelbar ist. – Denn gesetzt es wäre nicht so, und es wären zwei Entwickelungen möglich:

$$\bar{U} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots$$

und $$\bar{U} = U_0' + U_1' + U_2' + \cdots$$

so wäre:

$$0 = (U_0 - U_0') + (U_1 - U_1') + (U_2 - U_2') + \cdots$$

Aber die Summe oder Differenz zweier Kugelfunctionen ~~derselben~~ gleicher Ordnung ist wieder eine Kugelfunction derselben Ordnung – ich hätte also folgende Reihe in Kugelfunctionen

$$0 = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots$$

wo:

$$Y_0 = U_0 - U_0'$$

$$Y_1 = U_1 - U_1'$$

$$\cdots\cdots \quad \text{u. s. w.}$$

Jeder Glied dieser Reihe mit $Y_n dO$ multiplicirt, und dann integrirt verschwindet nach dem Satze (20) einzeln – und die Reihe giebt schliesslich die Gleichung:

$$0 = \int Y_n^2 dO$$

Da wir es aber mit reellen Grössen zu thun haben so kann diese Gleichung nur erfüllt werden, indem

$$Y_n = 0$$

dass ist:

$$U_n = U_n'$$

hiermit ist also gezeigt dass die beiden Reihenentwickelungen von U identisch sind, dass also U nur auf eine Weise in Kugelfunctionen entwickelbar ist. –

6.

Nachdem wir es bewiesen haben dass U nur in einer Weise in Kugelfunctionen entwickelbar ist; wollen wir zeigen wie ~~eine~~ man jede Function in Kugelfunctionen entwickeln kann. – Um diese Betrachtungen anschaulicher zu machen, ~~betrachten~~ kleiden wir sie in ein physikalisches Gewand, wir betrachten nämlich die zu entwickelnde Function y als die Dichtigkeit der Electricität ~~auf~~ in einem variabeln Punkte einer Kugeloberfläche deren Radius $= 1$ ist. – Die Dichtigkeit der Electricität auf dieser Kugeloberfläche wird

$$y = f(\mu, \omega)$$

sein –, wobei y eine ganz beliebige Function von μ und ω ~~ist~~ sein kann. – Entwickeln wir also y in Kugelfunctionen so lösen wir dadurch, abgesehen von den physikalischen Betrachtungen, die allgemeine Aufgabe der Entwickelung irgend einer Function in Kugelfunctionen. –

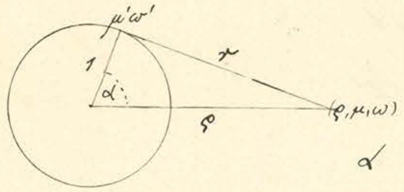
Das Potential der auf unserer Kugel verbreiteten elect. Flüssigkeit in Bezug auf einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt sei U_a – die Coordinaten dieses äusseren Punktes bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt seien ϱ, μ, ω wo $\varrho > 1$; jene die Coordinaten eines Punktes auf der Kugeloberfläche $\mu' \omega'$ ~~; seien endlich~~ sei die Entfernung der Punkte ~~ϱ~~ μ', ω' und ϱ, μ, ω ~~R~~ $= r$; so dass wenn

$$d\mu' d\omega'$$

ein Element der Kugeloberfläche ist, und y' die Dichtigk. der Elect. in diesem Elemente bedeutet wird, U_a durch folgenden Ausdruck bestimmt ~~ist~~:

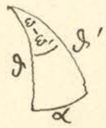
(23) .... $U_a = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{y'\,d\omega'\,d\mu'}{r}$

in diesem Ausdrucke ist:



$$r^2 = 1+\varrho^2 - 2\varrho\cos\alpha$$

α ergiebt sich aus dem sphärischen Dreiecke nach bekannten Formeln:



$$\alpha = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega-\omega')$$

oder wenn wir wie früher ~~cos~~ $\cos\vartheta$ mit μ $\cos\vartheta'$ mit μ' bezeichnen:

$$\alpha = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\cdot\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega')$$

Ich werde jetzt $\frac{1}{r}$ in dem Ausdrucke (23) in eine Reihe entwickeln – Da:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{2\alpha}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

so wird die Reihenentwickelung nach den Potenzreihe:

(24) .... $\frac{1}{r} = \frac{Q_0}{\varrho} + \frac{Q_1}{\varrho^2} + \frac{Q_2}{\varrho^3} + \dots\dots$ etc.

~~Ich kann~~ Ohne die Qs näher zu bestimmen – weiss ich dass sie ganze rationale Functionen von α sind; und zwar ist Q_n eine ganze rationale Funct. $n$ten Grades dieser Grösse. – Demnach ist aber Q_n auch eine ganze rationale Function $n$ten Grades der ~~5~~ Argumente:

$$\mu, \mu', \sqrt{1-\mu^2}, \sqrt{1-\mu'^2}, \cos(\omega-\omega')$$

Es ist ferner Q_n als Function von μ und ω ~~betrach~~ oder als Function von μ' und ω' betrachtet, in beiden Fällen eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung der Argumente μ, ω resp. μ', ω'. – Es folgt dies aus der Definition selbst der Kugelfunctionen. – Wir definirten sie nämlich als diejenigen Lösungen der Gleichung (19), welche in die Reihe (18) gesetzt U endlich und eindeutig bestimmen. – Der vorliegende Fall ist mit diesem analog; denn da für $\left(\frac{1}{r}\right)$ die Gleichung besteht

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0$$

so ist $\left(\frac{1}{r}\right)$ dasselbe was in (19) U_n ist – und auch die Reihenentwickelung (24) ist derselben Art wie die (18) — so dass wie dort, $Q_0, Q_1 \ldots$ etc. Kugelfunctionen sein müssen; und zwar so dass Q_n n-ter Ordnung sei. –

Die Reihe für $\frac{1}{r}$ setzen wir nun in (23) ein dadurch wird:

$$U_a = \frac{U_0}{\varrho} + \frac{U_1}{\varrho^2} + \frac{U_2}{\varrho^3} + \ldots \qquad \ldots \ (25)$$

wo ein jeder U ein Integral von der Form ist:

$$U_n = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \psi' Q_n \, d\mu' d\omega' \qquad \ldots\ldots \ (26)$$

Ähnlich wie U_a kann ich U_i durch die Gleichung ausdrücken:

$$(27) \ldots\ldots \quad U_i = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{y' d\mu' d\omega'}{r}$$

wo r durch dieselbe Gleichung gegeben ist, ~~die~~ wir ~~sie~~ für U_a aufstellten, der einzige Unterschied ist der, dass während dort $\varrho > 1$ war hier $\varrho < 1$ ist. –

Entwickeln wir auch hier $\frac{1}{r}$, ~~so ergiebt sich~~, da aber ~~ja $\frac{1}{\varrho}$ ein echt~~ in diesem Falle $\varrho > 1$ und somit ein echter Bruch ist – so muss diese Reihe nach ansteigenden Potenzen von ϱ geordnet werden. – Um dies zu erreichen bilde man mit Hülfe des Ausdruckes für r

$$\cancel{\frac{1}{r} = Q_0 + Q_1\varrho + Q_2\varrho^2 + \ldots}$$

$$\frac{1}{r} = (1 - 2\alpha\varrho + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und entwickele dann nach dem binomischen Lehrsatz, es ergiebt sich dann:

$$(28) \ldots \quad \frac{1}{r} = Q_0 + Q_1\varrho + Q_2\varrho^2 + \ldots$$

Worin die ~~Bedeutung von~~ Grössen $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ etc. ~~ganz~~ dieselben sind mit den gleich bezeichneten Coefficienten der Reihe (24). –

(28) in (27) gesetzt giebt:

$$U_i = U_0 + U_1 \varrho + U_2 \varrho^2 + \ldots\ldots \qquad (29)$$

Wo die Grössen U_0, U_1, U_2 .. etc. durch die Gleichung (26) bestimmt sind. –

Da wir jetzt U_i und U_a in Kugelfunctionen entwickelt, bilden wir

$$\frac{\partial U}{\partial N_a} = \frac{\partial U_a}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} = -\frac{\partial U_i}{\partial \varrho}$$

Wenn ~~R~~ ϱ den ~~Radius~~ Werth des Radius der Kugel, in diesem Falle $=1$ annimmt; so ist nach dem in der Gleichung (10) im I^ten Abschnitte ausgesprochenen Satze; für $\varrho = 1$

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} + \frac{\partial U}{\partial N_a} = -4\pi y$$

wo dann y die Dichtigkeit der Electricität auf der Kugeloberfläche, also dieselbe Grösse bedeutet deren Entwickelung in Kugelfunctionen unsere Aufgabe ist. –

~~Aus~~ Aus den Reihen (25) und (29) ergeben sich:

$$\frac{\partial U}{\partial N_a} = -U_0 - 2U_1 - 3U_2 - \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = -U_1 - 2U_2 - \ldots\ldots$$

Die Addition dieser Ausdrücke führt zur Reihe:

$$4\pi y = U_0 + 3U_1 + 5U_2 + 7U_3 + \ldots\ldots \qquad (30)$$

die einzelnen Glieder dieser Reihe sind durch die Gleichung (26) bestimmt, da all diese U-1 Kugelfunctionen sind, so haben wir unsere Aufgabe y in solchen zu entwickeln gelöst. –

Die allgemeine Entwickelung einer jeden Function in einer Reihe deren einzelne Glieder Kugelfunctionen sind, hat demnach die Form:

$$(31) \ldots \quad y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots$$

wo die einzelnen Glieder durch die Gleichung:

$$(32) \quad Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} y' Q_n \, d\mu' d\omega'$$

bestimmt sind. – Wie wir bereits gezeigt ist Q_n und somit auch Y_n eine Kugelfunction n-ter Ordnung. – Dass (31) wirklich eine convergente Reihe ist bewies Dirichlet in einer Abhandlung welche im 17ten Bande von Crelle's Journal veröffentlicht ist. –

7.

Es wird jetzt möglich sein die Form anzugeben, welche eine Kugelfunction n-ter Ordnung. – Diese erhalten wir indem wir Q_n vollständig ~~in Kugelfunctionen~~ andrücken, und dann ~~dran~~ seinen Werth in (32) einsetzen. – Den Ausdruck für Q_n werde ich nicht ableiten, ich will ihn nur vollständig hinschreiben. – Um dies zu können führe ich die Grösse ein:

$$(1-2\mu\varrho+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1\varrho + P_2\varrho^2 + \ldots\ldots$$

es ist dies der Ausdruck für α wenn darin $\mu'=1$ gesetzt wird. – All' die Factoren P sind ~~dies~~ gewisse Functionen von μ, ihren Werth können wir durch Entwickelung des linken Theiles dieser Reihe nach dem binomischen Lehrsatz ermitteln; wenn wir ~~nämlich~~ dann die Coefficienten gleicher Potenzen von ϱ auf beiden Seiten gleich setzen. – ~~Dan~~ Es zeigt sich so:

$$P_n = \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.\ldots n}\left\{\mu^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}\mu^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}\mu^{n-4} - \ldots\ldots etc.\right\}\ldots \quad (33)$$

Setzt man in der Reihe der P-s $\mu=1$ so übergeht ~~sie in~~ ihr linker Theil in $\frac{1}{1-\varrho}$; für diesen Bruch besteht aber die Reihe

$$\frac{1}{1-\varrho} = 1+\varrho+\varrho^2+\ldots\ldots etc.$$

Somit ist also für $\mu=1$

$$(P_n)_{\mu=1} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Bezeichne ich ~~jetzt~~ noch mit P'_n dieselbe Function von μ', als die welche P_n von μ ist, so ist der Ausdruck von Q_n:

$$
\begin{aligned}
Q_n = {} & P_n P'_n \\
& + \frac{2}{n.n+1} \frac{dP_n}{d\mu} \cdot \frac{dP'_n}{d\mu'} \sqrt{1-\mu^2} \cdot \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\omega-\omega') \\
(34) \ldots\ldots \quad & + \frac{2}{n-1.n.n+1.n+2} \frac{d^2P_n}{d\mu^2} \cdot \frac{d^2P'_n}{d\mu'^2} \left(\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\right)^2 \cos 2(\omega-\omega') \\
& + \frac{2}{n-2.n-1.n.n+1.n+2.n+3} \frac{d^3P_n}{d\mu^2} \cdot \frac{d^3P'_n}{d\mu'^2} \left(\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\right)^3 \cos 3(\omega-\omega') \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Q_n ist also wie wir schon bemerkt eine Function n-ten Grades der Argumente $\mu, \mu', \sqrt{1-\mu^2}, \sqrt{1-\mu'^2}$ und $\cos(\omega-\omega')$. Diesen Werth von Q_n in (32) gesetzt erhält man Y_n als eine Summe von Integralen – deren jedes in Bezug auf μ' und ω' zu integriren ist – ~~nimmt~~ zieht man also die von diesen Variabeln unabhängigen Grössen als constante Factoren aus, entwickelt um die Constanten von den Variabeln zu trennen auch $\cos(\omega-\omega')$, und integrirt; ~~dann~~ so erhält man Y_n in folgender Form:

$$
\begin{aligned}
Y_n = {} & A_0 P_n \\
& + (A_1 \cos\omega + B_1 \sin\omega)\sqrt{1-\mu^2}\, \frac{dP_n}{d\mu}
\end{aligned}
$$

$$+\left(A_2 \cos 2\omega + B_2 \sin 2\omega\right)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^2 \frac{d^2 P_n}{d\mu^2} \qquad \ldots\ldots (35)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega\right)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^n \frac{d^n P_n}{d\mu^n}$$

Die Function Y_n d. i. die allgemeine Kugelfunction enthält demnach $(2n+1)$ Constanten – die $(n+1)$ A-s und n B-s. –

In Folge der Definition von P_n in (32) ist:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \mu$$

also die Kugelfunction 0^{ter} Ordnung:

$$Y_0 = A_0 \qquad \ldots\ldots (36)$$

und die Kugelfunction 1^{ter} Ordnung:

$$Y_1 = A\mu + B\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + C\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega \qquad \ldots\ldots (37)$$

wo statt A_0, A_1, B_1 geschrieben wurde A, B, C. – Führen wir statt μ und ω die rechtwinkeligen Coordinaten desselben Punktes in den Ausdruck (37) ein, so erhält die Kugelfunction 1^{ter} Ordnung die Form:

$$Y_1 = Ax + By + Cz \qquad \ldots\ldots (38)$$

d. i. die Kugelf. 1^{ter} Ordnung ist eine homogene lineare Gleichung zwischen den Variabeln x, y, z. –

Ebenso ~~ergiebt~~ zeigt es sich ~~auch~~, dass auch Y_n eine homogene, aber eine homogene Function n-ten Grades der ~~Va~~ Coordinaten x, y, z ist; welche der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 Y}{dx^2} + \frac{\partial^2 Y}{dy^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 0$$

genügen.–

8.–

Wir kehren zur Aufgabe, welche uns veranlasste diese Betrachtungen an zu stellen zurück.– Diese Aufgabe war U_i und U_a zu bestimmen, wenn $\overline{V}$ und C gegeben sind.– Durch diese Grössen ist, in Folge der Gleichung:

$$\overline{U} = C - \overline{V}$$

$\overline{U}$ gegeben.– Wir können aber $\overline{U}$ in einer Reihe von Kugelfunctionen entwickeln:

$$\overline{U} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots$$

und die einzelnen Glieder dieser Reihe bestimmen.– Diese Glieder in die Reihen

$$U_a = \frac{U_0}{\varrho} + \frac{U_1}{\varrho^2} + \frac{U_2}{\varrho^3} + \ldots\ldots$$

und

$$U_i = U_0 + U_1\varrho + U_2\varrho^2 + \ldots\ldots$$

gesetzt, bestimmen U_i und U_a endlich und eindeutig. – Wir haben schon in 7 dieses Abschnittes gezeigt wie durch U_i und U_a die Dichtigkeit der Electricität auf der Kugeloberfläche zu bestimmen ist. –

9.

Den 2^ten^ Theil ~~der~~ der Aufgabe bildet die Bestimmung von U_a und U_i wenn V_i und C gegeben sind. – Auch in diesem Falle ist die Bestimmung dieser Grössen möglich, sie hat sogar vor der Bestimmung durch U den Vorzug, dass sie geschlossene Ausdrücke liefert. – Im Falle also dass V im ganzen Raume gegeben ist – wo uns also die Wahl der Bestimmungsart von U_a und U_i frei liegt – ist vielleicht diese letztere Art der ersteren vorzuziehen. –

Für alle Punkte des Innern der Kugel, ist:

$$U_i = C - V_i \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Angenommen nun dass V_i in einem geschlossenen Ausdruck gegeben ist, ist auch U_i durch einen solchen bestimmt.

Es soll jetzt auch für U_a ein geschlossener Ausdruck gefunden werden. – Mit derselben Bedeutung wie in diesem Falle stellten wir schon in den Gleichungen (23) und (27) die Ausdrücke für U_i und U_a fest. – Es sind U_a und U_i Functionen der Coordinaten ϱ, μ, ω, um sie noch mehr zu unterscheiden bezeichnen wir den auf U_a bezüglichen Werth von ϱ mit ϱ_a, den auf U_i bezüglichen mit ϱ_i; die Ausdrücke (23) und (27) stellen sich dann für r den Werth gesetzt, wie folgt, dar:

(40) ....
$$U_i(\varrho_i, \mu, \omega) = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{y' d\mu' d\omega'}{\sqrt{1 - 2\alpha\varrho_i + \varrho_i^2}}$$

$$U_a(\varrho_a, \mu, \omega) = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{y' d\mu' d\omega'}{\sqrt{1 - 2\alpha\varrho_a + \varrho_a^2}}$$

(41) ....
$$= \frac{1}{\varrho_a}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{y' d\mu' d\omega'}{\sqrt{1 - 2\alpha\frac{1}{\varrho_a} + \left(\frac{1}{\varrho_a}\right)^2}}$$

wo:

(42)
$$\alpha = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\cdot\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega - \omega')$$

hierdurch haben wir den Radius der Kugel als Einheit ~~zu~~ eingeführt. Das Integral (41) wird demnach mit dem Integral (40) identisch, wenn man setzt

$$\varrho_i = \frac{1}{\varrho_a}$$

dann wird:

$$U_a(\varrho_a,\mu,\omega) = \frac{1}{\varrho_a}\, U_i\left(\frac{1}{\varrho_a},\mu,\omega\right)$$

Da $\varrho_a > 1$ so ist, denn der Radius der Kugel ist ja $=1$, so ist $\frac{1}{\varrho_a}$ kleiner als 1, und bezieht sich daher wirklich auf einen inneren Punkt.–

Mit der Voraussetzung dass $\varrho > 1$ ist demnach:

$$U_a(\varrho,\mu,\omega) = \frac{1}{\varrho}\, U_i\left(\frac{1}{\varrho},\mu,\omega\right) \quad \ldots\ldots (43)$$

Diese Gleichung giebt U_a als einen geschlossenen Ausdruck – denn wenn U_i geschlossen ist – so wird es in Folge der Gl. (39) ~~aus~~ U_i und so auch U_a.–

Diese Gleichung führt die Aufgabe der Bestimmung des Potentialwerthes in jedem ~~jeden~~ äusseren Punkt, auf die Bestimmung derselben ~~in~~ je einem ~~inneren~~ Punkt zurück; sie zeigt nämlich dass jedem äusseren Punkte ein innerer Punkt correspondirt in welchem das Potential der auf der Kugel verbreiteten Electricitätsmassen, denselben Werth hat.–

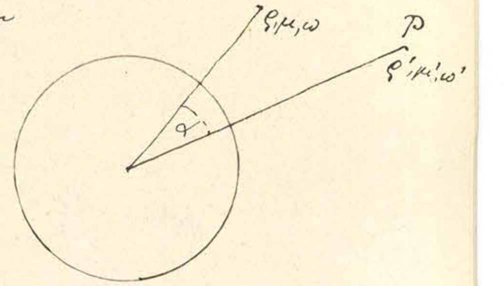
Dieser Punkt liegt auf der zwischen Mittelpunkt der Kugel und dem äusseren Punkt gezogenen Geraden, seine Entfernung vom Mittelpunkte ist die reciproke Entfernung des äusseren Punktes.– ~~und der Werth des Potentials~~ Der Werth des Potentials

in diesem inneren Punkte multiplicirt mit seiner Entfernung vom Mittelpunkte giebt den Werth desselben Potentials in dem äusseren Punkt. –
Diese Beziehungen leiteten wir unter der Voraussetzung ab, dass wir den Radius der Kugel = 1 annahmen. – wir werden sie auch auf Kugeln von beliebigem Radius anwenden können, wenn wir die Relation zwischen dem äusseren und inneren Punkte so ausdrücken, dass der Radius der Kugel die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Mittelpunktsentfernungen des äusseren und inneren Punkte sei. –
Durch Einführung des Werthes V_i in den Ausdruck für U_a wird dieser:

$$(44) \ldots\ldots \quad U_a = \frac{C}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} V_i\left(\frac{1}{\varrho}, \mu, \omega\right)$$

10.

Wir wollen diese Gleichung noch näher discutiren. Wir denken ~~gesetzt~~ V wäre das Potential herrührend von einem electrischen Pole ausserhalb der Kugel, dessen Coordinaten ϱ', μ', ω' sind und in welchem die Electricitätsmenge e versammelt ist. – Wir nehmen dann angenommen dass auch C gegeben ist den Werth von U_a in Bezug auf einen Punkt ρ, μ, ω. – Das Potential V_i hat dann in Bezug auf irgend einen inneren Punkt, dessen Entfernung von dem Kugelmittelpunkte ich mit r bezeichnen will den Werth:



$$V_i = \frac{e}{\sqrt{r^2 - 2r\rho'\alpha + \rho'^2}}$$

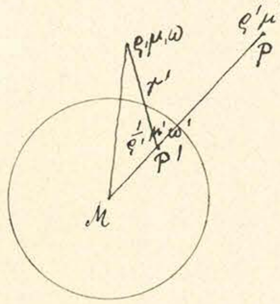
wo α den schon öften benützten Werth (42) hat. Der Gleichung (44) gemäss, mit Hilfe deren die U_a bestimmt werden soll, nehme ich das Potential V_i für den inneren Punkt $\frac{1}{\rho}, \mu, \omega$, und erhalte so:

$$\frac{V_i\left(\frac{1}{\rho}, \mu, \omega\right)}{\rho} = \frac{e}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{\rho'}{\rho}\alpha + \rho'^2}}$$

$$= \frac{e}{\sqrt{1 - 2\rho\rho'\alpha + \rho^2\rho'^2}}$$

$$= \frac{1}{\rho'} \frac{e}{\sqrt{\frac{1}{\rho'^2} - 2\frac{\rho}{\rho'}\alpha + \rho^2}}$$

Die Wurzelgrösse hat eine einfache geometrische Bedeutung, sie ist die Entfernung des Punktes ρ, μ, ω von einem Punkte des inneren der Kugel dessen Coordinaten $\frac{1}{\rho'}, \mu', \omega'$ sind. – Dieser Punkt P' liegt auf der vom Kugelmittelpunkte zum Pole P gezogenen Geraden – und zwar so dass der Radius der Kugel die mittlere geometrische Proportionale sei zwischen der Mittelpunktsentfernung von P und von P'. –



Der Ausdruck für U_a ist dann:

$$U_a = \frac{C}{\rho} - \frac{e}{\rho'} \cdot \frac{1}{r'}$$

Wo r' die Entfernung ~~von~~ P' von dem Punkte $\rho\mu\omega$ ist. –

Das Potential U_a in Bezug auf ~~einen ... diesen~~ den Punkt $\rho\mu\omega$ ist also zusammengesetzt aus den Potentialen zweier Pole in Beziehung auf diesen Punkt, – Die eine dieser Pole ist P' und enthält die Electricitätsmenge $\frac{e}{\rho'}$, die zweite der Mittelpunkt der Kugel enthaltend die entgegengesetzte Electricitätsmenge C. – Wenn $C=0$ wird, was durch Verbindung der Kugel mit der Erde verwirklicht werden kann, dann entspricht die Wirkung der Electricität in der Kugel der Wirkung eines Poles welches in ihrem Innern in P' liegt. – Dieser ~~Punkt~~ Pol P' heisst das Spiegelbild von P. –

Sind nun statt einem Pol mehrere in dem Raume ausserhalb der Kugel vorhanden – so kann die Wirkung der ~~auf der~~ Kugel~~fläche verbreiteten Electricität~~ in Beziehung auf einen äusseren Punkt, auf die Weise leicht gefunden werden, dass man die Spiegelbilder aller Pole aufsucht. – Die Wirkung dieser Spiegelbilder und die Wirkung der Electricitätsmenge C in dem Mittelp. der Kugel concentrirt ~~ist~~, kann man ~~immer~~ an Stelle der Wirkung der auf der Kugelfläche verbreiteten Electricitätsschicht setzen. – Dasselbe gilt auch wenn die Electricität ausserh. der Kugel nicht in einzelnen Polen concentrirt, sondern an Linien Flächen, oder Räumen continuirlich verbreitet ist. –

~~Um die Benennung Spiegelbild~~ Das Spiegelbild einer auf der Kugelfläche verbreiteten Electricitätsmenge ist ~~auch~~ eine Kugelfläche – selbstverständlich ist dann auch das Spiegelbild eines Kreises wieder ein Kreis. – Wir wollen dies beweisen und nennen zu diesem Zwecke x, y, z die Coordinaten des Poles P und ~~x~~ ξ, η, ζ die Coordinaten seines Spiegelbildes P' – Da P und P' auf derselben Gerade liegen, müssen zwischen ihren Coordinaten die Relationen bestehen:

$$x = \lambda\xi, \quad y = \lambda\eta, \quad z = \lambda\zeta$$

Da nun die Entfernungen von P und P' reciprok sind, so ist:

$$(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = 1$$

hieraus bestimmt sich dann:

$$\lambda = \frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

und:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$$y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$$z = \frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

Liegt nun P auf einer Kugelfläche, so genügen seine Coordinaten der Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0$$

für $x\,y\,z$ die in ξ, η, ζ ausgedrückten Werthe gesetzt erhält man eine Gleichung von derselben Form also eine Kugelgleichung zwischen den Variabeln ξ, η, ζ — hiemit ist es dann bewiesen dass das Spiegelbild des kugelförmig verbreiteten Elem. auch eine Kugel ist. —

§ 11. –

Bevor wir diese Betrachtungen über die Verbreitung der Electricität ~~verlassen~~, ~~auf~~ in einer Kugel verlassen; wollen wir noch zeigen wie sich U_a und U_i leicht bestimmen lassen, wenn sie in Bezug auf eine Axe symmetrisch sind, und ihre Werthe in dieser Axe gegeben sind. – Wählt man diese Symmetrie Axe zur festen Axe des Polarcoordinatensystems, so ist diese Aufgabe gleichbedeutend mit der, U_a und U_i zu bestimmen, wenn diese Functionen von ω unabhängig sind – und ihre Werthe für $\mu=1$ gegeben sind. –

Wir entwickelten U_i in der Reihe:

$$U_i = U_0 + \varrho U_1 + \varrho^2 U_2 + \ldots\ldots \qquad (29)$$

Wenn U_i unabhängig von ω sein soll, so müssen es auch $U_0, U_1, U_2 \ldots$ etc. sein. – Die allgemeine Entwickelung der Kugelfunctionen (35) muss dann für alle Werthe von ω denselben Werth der zu entwickelnden Function U_n geben, was offenbar nur dann möglich ist, wenn alle mit diese

Variable behafteten Glieder verschwinden; wenn also:

$$U_n = A_n P_n$$

Unter der Voraussetzung das U_i von ω unabhängig ist, muss also:

$$U_i = A_0 P_0 + \varrho A_1 P_1 + \varrho^2 A_2 P_2 + \ldots\ldots$$

Da ~~Im Falle also, dass $(U_i)_{\mu=1}$ gegeben ist, wird, da~~ nun:

$$(P_n)_{\mu=1} = 1$$ (Seite 67)

so ist:

$$(U_i)_{\mu=1} = A_0 + \varrho A_1 + \varrho^2 A_2 + \ldots\ldots$$

Wenn also $(U_i)_{\mu=1}$ gegeben ist, so ergiebt sich in diesem Falle U_i durch Multiplication der ~~ent~~ Glieder der Reihe $(U_i)_{\mu=1}$, mit den entsprechenden P-s.

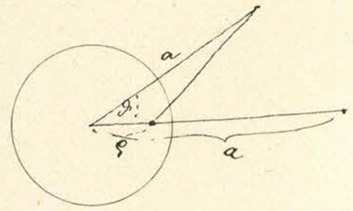
Ganz in derselben Art kann auch U_a in diesem Falle entwickelt werden.

Zur näheren Erläuterung diene ein Beispiel.

Gesetzt es wäre U_i für $\mu=1$ gegeben gleich dem reciproken Abstande des Punktes auf welchen es sich bezieht von einem festen Punkte, dann ist:

$$(U_i)_{\mu=1} = \frac{1}{a-\varrho}$$

so haben wir (angenommen dass der feste Punkt innerhalb der Kugel liegt, also $\varrho < 1$) $\frac{1}{a-\varrho}$ nach aufsteigenden Potenzen von ϱ zu entwickeln.



$$\frac{1}{a-\varrho} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varrho}{a}} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{\varrho}{a}+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^3+\dots\dots\right)$$

Es ist dann U_i für Werthe von μ welche von 1 verschieden sind:

$$U_i = \frac{1}{a}\left(P_0+\left(\frac{\varrho}{a}\right)P_1+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2P_2+\dots\dots\right)$$

Auf Seite 65 definirten wir die P-s durch die Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\varrho+\varrho^2}} = P_0+P_1\varrho+P_2\varrho^2+P_3\varrho^3+\dots\dots$$

Hierin ist ϱ vollkommen willkürlich, wir können also statt ϱ auch $\left(\frac{\varrho}{a}\right)$ schreiben, und erhalten so:

$$P_0+P_1\left(\frac{\varrho}{a}\right)+P_2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2+\dots\dots = \frac{1}{\sqrt{1-2\mu\left(\frac{\varrho}{a}\right)+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2}}$$

es ist also:

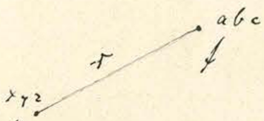
$$U_i = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\left(\frac{\varrho}{a}\right)+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-2\mu\varrho a+\varrho^2}}$$

Es ist also das Potential U_i für alle, auch ausser der Symmetrie Axe gelegenen Punkte gleich dem reciproken Abstande dieses Punktes von einem festen Punkte. —

III. Vertheilung magnetischer Flüssigkeiten in einem Körper von weichem Eisen, auf welchen magnetische Kräfte wirken.-

§1.-

Die Aufgabe ist der eben behandelten analog; wir werden sie mit Hülfe der Poisson-schen Voraussetzungen lösen; bevor wir aber diese Betrachtungen anstellen, müssen wir einiges über die Kräfte feststellen, welche magn. Flüssigkeiten auf einander ausüben.-



Denken wir uns zwei Magnetpole, deren eine die magn. Flüssigk. Menge μ enthält und die rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z hat; ~~und~~ die andere die magn. Flüssigk. Menge f enthält und in demselben Coord. System durch a, b, c bestimmt ist.-
Bedeutet dann r die Entfernung beider Pole, so sind die Componenten der Kräfte, welche

die beiden Pole auf einander ausüben die negativen part. Diff. Quot. des Potentials:

$$V = \frac{\mu f}{r}$$

und zwar sind die nach a.b.c gebildeten Diff. Quot. derselben die Componenten der Kraft welche der Pol x.y.z auf a.b.c ausübt — und die Diff. Quot nach x.y.z die Kraftcomponenten, welche von der Wirkung von a.b.c auf x.y.z herrühren. — Ist an Stelle des einen Poles μ eine grössere Anzahl derselben vorhanden, so ist das Potential:

$$Q = f \sum \frac{\mu}{r}$$

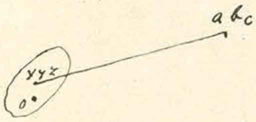
Denken wir uns nun dass diese Pole, deren magn. Flüssigk. wir mit μ, und deren Coordinaten wir mit x.y.z bezeichneten einem wirklichen Magneten angehören. — In diesem Falle muss dann:

$$\sum \mu = 0$$

sein. —

Vor andern wollen wir den Fall untersuchen, ~~dass~~ ~~in~~ wenn der Magnet unendlich klein ist gegen seine Entfernung r von dem Pole f auf welchen er einwirkt. — Es ist dies auf zwei Arten möglich 1) es können die Dimensionen des Magneten endlich sein, während die Entfernung r unendlich gross ist 2) können auch die Dimensionen des Magneten unendlich klein sein, wenn r eine endliche Grösse ist. –

Nehmen wir also den Coordinatenanfangspunkt in dem Magneten an, so werden x, y, z unendlich klein gegen a, b, c sein; so dass wenn wir $\frac{1}{r}$ nach der Taylor-schen Reihe entwickeln, alle Glieder vernachlässigbar sind welche höhere Potenzen von x, y, z enthalten. – Diese Entwickelung giebt demnach:



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\partial(\frac{1}{\varrho})}{\partial a}x - \frac{\partial(\frac{1}{\varrho})}{\partial b}y - \frac{\partial(\frac{1}{\varrho})}{\partial c}z$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ den Werth der Function $\frac{1}{r}$ für $x, y, z = 0$ bedeutet; also:

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ϱ ist die Entfernung des Punktes a, b, c vom Coord. Anfangspunkte. –

Setzt man nun diese entwickelte Function in den Ausdrucke des zu bildenden Potentials

$$Q = f\sum\frac{\mu}{r}$$

ein; so wird das erste Glied in Folge der Bedingung eines wirklichen Magneten $\sum\mu = 0$ gleich $= 0$, und demnach:

$$Q = -f\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\sum \mu x + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\sum \mu y + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\sum \mu z\right\}$$

die Grössen:

$$\left.\begin{aligned} \sum \mu x &= \alpha \\ \sum \mu y &= \beta \\ \sum \mu z &= \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nennt man die Magnetischen Momente des Magneten in Bezug auf die Coordinatenaxen x, y, z. – Diese Magn. Momente verändern sich durch Veränderung der Axenrichtungen – sie bleiben aber unverändert bei einer parallelen Verschiebung derselben. – Denn bezeichnen wir die Coordinaten eines variablen Punktes in einem neuen dem x, y, z parallelen Axensystem mit ξ, η, ζ; so werden die Magnetischen Momente:

$$\sum \mu \xi \qquad \sum \mu \eta \qquad \sum \mu \zeta$$

Da aber $\xi = x - a$, $\eta = y - b$, $\zeta = z - c$
wo a, b, c die Abstände des neuen Coord. Anfangspunktes von dem alten bedeuten, so werden die Momente

$$\sum \mu \xi = \sum \mu x - a \sum \mu \qquad \text{etc.}$$

und da $\sum \mu = 0$, so ist

$$\sum \mu \xi = \sum \mu x \quad \ldots \text{etc.}$$

Führt man die vereinfachende Bezeichnung (1) in den Ausdruck für Q ein, so wird dieser:

$$(2) \ldots\ldots \quad Q = -f\left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial c}\right)$$

Diese Gleichung gründet sich noch auf die Voraussetzung dass der Coordinatenanfangspunkt in dem Magneten liegt, – von dieser wollen wir uns unabhängig machen. – Das neue ausserhalb des Magneten gelegene Coordinatensystem nehmen wir zu dem ersteren parallel an – und bezeichnen darin die Coordinaten des Anfangspunktes des alten System's, also die Coordinaten irgend eines in dem Magneten gelegenen Punktes mit x, y, z. – Bezeichnen wir dann ferner die Entfernung dieses Punktes von dem ~~Punkte~~ Pole a, b, c mit r, so ist dieses r dieselbe Grösse welche in (2) mit ϱ bezeichnet wurde. – Da

$$\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \qquad \text{etc.}$$

und in Folge der Parallelen Lage der neuen Coord. Axen zu den alten α, β, γ ihre Bedeutung nicht verändern; so wird der Ausdruck des Potentials der Kräfte welche ein Magnet auf den Pol a, b, c ausübt, ~~in Bezu die~~ in Bezug auf ein beliebigen rechtwinkeligen Coordinatensystem:

$$Q = f\left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots (3)$$

Zur Vereinfachung führen wir ein:

$$-f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = A \quad , \quad -f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = B \quad , \quad -f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = C \quad \ldots (4)$$

Es sind dann A, B, C die Componenten der Kraft, welche der Pol a, b, c enthaltende die Flüssigk. menge f auf ~~den~~ einen Pol in x, y, z ausübt in welchem die magn. Flüss. menge 1 zu denken ist. – Hierdurch wird:

$$Q = -(\alpha A + \beta B + \gamma C) \quad \ldots\ldots (5)$$

Es bezeichne R die Resultante dieser Kräfte A, B, C, so dass:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Bezeichnen wir ferner mit m Grösse und Richtung der magnetischen Intensität, das ist das Maximum des magnetischen Momentes, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos(m,x) &= \frac{\alpha}{m} \\ \cos(m,y) &= \frac{\beta}{m} \\ \cos(m,z) &= \frac{\gamma}{m} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

also:

$$m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Setzt man nun in (5) für α die mit (6) bezeichneten Werthe und für A, B, C die Werthe ein:

$$A = R\cos(R,x) \quad , \quad B = R\cos(R,y) \quad , \quad C = R\cos(R,z)$$

so gelangt man zu einem Ausdruck, welcher folgende reducirte Form annehmen kann:

$$(7) \qquad Q = -mR\cos(m,R)$$

§. 2. –

Wir übergehen zur Betrachtung der Wirkung eines endlichen Magneten, auf einen von ihm endlich entfernten Pol. – Hiebei machen wir die unwesentliche Voraussetzung dass in a, b, c die magn. Flüssigk. 1 concentrirt sei. – Denkt man sich nun den endlichen Magneten in unendlich kleine Parallelepipeda $dx\,dy\,dz$ getheilt – so sind ~~ist~~ das magnetische Momente eines derselben:

$$\alpha\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \beta\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \gamma\,dx\,dy\,dz.$$

wo die Bedeutung der Zeichen α, β, γ dahin modificirt ist, dass sie die Magnetischen Momente der Volumeneinheit in dem Punkte x, y, z bezeichnen. — Das Potential der Kräfte, welche eines dieser Elemente $dx\,dy\,dz$, in dem Punkte x, y, z auf die Einheit magnetischer Flüssigkeit in a, b, c ausübt ist demnach:

$$= dx\,dy\,dz\left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

Das Potential des ganzen Magneten ergiebt sich durch 3fache Integration dieses Ausdrucks über das Volum desselben:

$$Q = \iiint dx\,dy\,dz\left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots (8)$$

Die magnetischen Momente des ganzen Magneten in Beziehung auf die Coordinatenaxen, stellen sich dann auch in Form folgender über dieselben Grenzen zu nehmenden Integrale dar:

$$\iiint \alpha\, dx\,dy\,dz \;,\quad \iiint \beta\, dx\,dy\,dz \;,\quad \iiint \gamma\, dx\,dy\,dz$$

Wir wenden unter der Annahme dass α, β, γ constant sind, dass also der Magnet gleichmä-

sig magnetisirt ist, den Ausdruck (8) wesentlich umformen können. –
Wir wenden den Green'schen Satz an (I Abschn. (13)) – es besteht dieser für die Functionen U und V, welche innerhalb ~~des ganzen~~ eines gewissen Raumes ~~auf welches~~ endlich und eindeutig sind; die Integrale in diesem Ausdrucke sind über diesen Raum resp. über die diesen Raum umgebende Fläche auszudehnen. – Ich kann nun setzen:

$$U = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$V = \frac{1}{r}$$

denn ~~dies~~ sind dann U und V wirklich Functionen von x, y, z welche ~~ist~~ innerhalb des ganzen vom Magneten eingeschlossenen Raumes endlich und eindeutig sind. – Wir schliessen hierdurch den Fall aus dass der Pol a, b, c innerhalb des Magneten liege; denn in diesem Falle wäre ja für gewisse innerhalb des Magneten gelegene Punkte $\frac{1}{r}$ unendlich. – Auf diese Werthe von U und V den Green-schen Satz angewendet – erhält man ~~rechter~~ linker Hand einen Ausdruck, welcher identisch mit (8) also = Q ist. – Rechter Hand verschwindet das dreifache Integral, da sie die zweifachen Diff. Coef. der linearen Function U enthält – es wird also:

$$Q = -\int d\Theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial N_i}$$

wo das Integral über die Oberfläche des Magneten auszudehnen ist. –

Da: $$U = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

so ist: $$\frac{\partial U}{\partial N_i} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dN_i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dN_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dN_i}$$

und demnach:

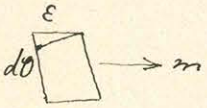
$$Q = -\int d\Theta \frac{1}{r} \left(\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)\right)$$

Statt α, β, γ können in Folge der Relationen (6) die magnetische Intensität, und die Cosinus der Winkels welche seine Richtung mit den Coordinatenaxen bildet in die Rechnung eingeführt werden – bezeichnet man nämlich diese mit m so ist:

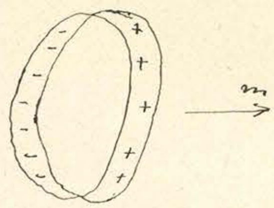
$$Q = -m \int \frac{d\Theta}{r} \cos(m, N_i) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Hierdurch ist das Raumpotential (8) auf ein Oberflächen Potential zurückgeführt, und es ist bewiesen dass die Wirkung eines Magneten auf einen äusseren Pol gleich ist der Wirkung einer Menge magnetischer Flüssigkeit, welche die Oberfläche des Magnetes mit der Dichtigkeit $-m\cos(m,N_i)$ bedeckt. –

Durch eine einfache geometrische Betrachtung kann diese Massenvertheilung in anschaulicher Weise dargestellt werden. – Man denke sich nämlich die ganze Oberfläche des Magneten in der Richtung der magnetischen Intensität m um die Länge ε verschoben. – Der senkrechte Abstand des Elementes dO in der neuen Lage, von seiner ~~al~~ ursprünglichen Lage ist dann $= \varepsilon\cos(m,N_i)$. – Denken wir uns ~~dann~~ den ganzen Zwischenraum zwischen den zwei Lagen der Oberfläche des Magnetes mit Masse von überall gleicher räumlicher Dichtigkeit erfüllt; dann haben wir eine Massenvertheilung, welche von der gesuchten Art ist. – Bei dieser Vertheilung wird ja die dem Elemente dO zufallende Masse proportional mit $dO\cos(m,N_i)$. – Die zwei Oberflächen schneiden aus dem Raume zwei ~~wenn auch~~ möglicher Weise unähnliche, aber immer gleich grosse begrenzte Theile aus. – Um der Proportionalität der Masse mit $dO\cos(m,N_i)$ für alle Oberflächen genügen



zu können, und auch um die Bedingung Σm erfüllen zu können; müssen wir annehmen dass der eine dieser Theile mit positiver der andere mit negativer magnetischer Flüssigkeit gefüllt ist. –



Ich will noch eine andere von den eben angestellten Betrachtungen unabhängige Transformation des Potentials (8) vornehmen; ich kann diesen auch in der Form schreiben:

$$Q = -\iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right)$$

Es sei V das Potential einer Masse, welche den Raum des Magneten mit constanter Dichtigkeit 1 erfüllt. – Das ist es sei:

$$V = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

Ich zerlege jetzt das Integral Q in die Summe von drei Integralen, und kann dann schreiben da α, β, γ ~~co~~ im ganzen Magneten constant sein sollen:

$$Q = -\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial a} + \beta \frac{\partial V}{\partial b} + \gamma \frac{\partial V}{\partial c} \right) \qquad \ldots\ldots (10)$$

§ 3. –

Zuletzt gelangten wir zu dem Ausdrucke des Potentials der Kräfte welche ein gleichförmig magnetisirten Magnet von beliebiger Gestalt auf einen ausserhalb derselben gelegenen Pol ausübt – wir wollen jetzt einen kugelförmigen Magnet betrachten. –

Es sei das Volum der Kugel = k ; die Entfernung des Poles a, b, c vom Kugelmittelpunkte = ρ ; dann ist das Potential der Massen welche diese Kugel mit der Dichtigkeit 1 erfüllen.

$$V = \frac{k}{\rho}$$

Also in (10) gesetzt das Potential der gleichmässig magnetisirten Kugel:

$$(11) \; \ldots\ldots \quad Q = -\left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a} \alpha k + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial b} \beta k + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial c} \gamma k \right)$$

Dies ist der Ausdruck des Potentials eines magnetischen Moleculs, welches sich im Mittelpunkte der Kugel befindet und dessen magn. Momente gleich sind den Gesammtmomenten der magn.

Kugel; nämlich $= \alpha k$, βk, γk. –
Demnach können wir den Schluss ziehen, dass eine gleichmässig magnetisirte Kugel so auf einen ausserhalb derselben gelegenen Pol einwirkt; wie ein magnetisches Molecül in seinem Mittelpunkte, dessen Momente die Gesammtmomente der Kugel sind. – (K. gebrauchte hier die Ausdrücke magnetisches Molecül und unendlich kleiner Magnet als gleich bedeutend). –
Zu demselben Schlusse gelangen wir auch bei der Betrachtung des Potentials einer gleichförmig magn. Hohlkugel in Bezug auf einen im äusseren Raume gelegenen Pol. – Nicht so ist es aber, wenn wir den Pol im inneren Hohlraume annehmen. – Auch in diesem Falle werden wir die Gleichung (10) anwenden können – allein es ist dann $V = Const.$ d. i. unabhängig von a, b, c; – ~~Es ist dann:~~ ~~auch~~ in Folge dessen ~~ist~~ sind:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial c} = 0$$

also auch:

$$Q = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial c}$$

Die gleichförmig magnetisirte Hohlkugel übt also auf Pole welche in ~~seiner~~ ihrer inneren Höhlung liegen gar keine Kräfte aus. –

Es ist physikalisch unmöglich den Pol a,b,c in den mit magn. Flüssigk erfüllten Raum selbst zu setzen – die Aufgabe der Bestimmung des Potentials einer gleichförmig magnetisirten Kugel in Bezug auf einen innerhalb gelegenen Pol entbehrt demnach jeder physikalischen Bedeutung. – Das merkwürdige theoretische Resultat zu welchem wir hiebei gelangen führt uns trotzdem zur Betrachtung dieses Falles. – Verlegen wir der Einfachheit halber den Coordinaten-Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel, so ist das Potential einer Masse welche sie mit gleichförmiger Dichtigkeit 1 erfüllt in Bezug auf einen inneren Punkt (a,b,c); nach Betrachtungen des I Abschnittes (Seite 14):

$$V = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

wo R den Radius der Kugel bedeutet. –

Bilden wir nun $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$, $\frac{\partial V}{\partial c}$ und setzen diese

Werthe in (10) ein; so ergiebt sich:

$$Q = \frac{4\pi}{3}(a\alpha + b\beta + c\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Also:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \frac{4\pi}{3}\beta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c} = \frac{4\pi}{3}\gamma$$

hieraus ziehen wir den merkwürdigen Schluss, dass die Kräfte, welche eine gleichf. magn. Kugel auf einen innerhalb gelegenen ~~Punkt~~ Pol ausübt, unabhängig sind von den Coord. dieses Pols und dem Radius der Kugel. –

Wir gelangten zu diesem Schluss mit der ~~Annahme~~ Beschränkung dass der Coord. Anfangspunkt mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfalle; wir gelangen aber zu demselben auch ~~bei~~ für einem vollkommen unbestimmten ~~unte~~ gelassenen Coordinaten System. –

§ 4.

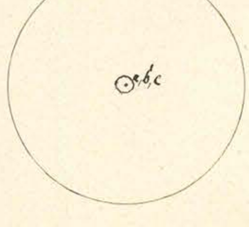
Wir gelangen jetzt zu den Voraussetzungen, welche der Poisson-schen Theorie des Magneti-

sirens von weichem Eisen zu Grunde liegen. – Wir setzen voraus 1) dass der magnetische Zustand eines Körpers von weichem Eisen ausschliesslich bedingt ist durch die Kräfte welche im betrachteten Zeitpunkte auf diesen eben einwirken. Hierdurch wird eine Hypothese aufgestellt, welche in der Natur nicht zur Verwirklichung kommt, da sie von der Einwirkung früher wirksam gewesener Kräfte absieht. Diese Theorie vernachlässigt derart die magnetische Coercitivkraft – wie die Theorie der Elasticität die Einflüsse der elastischen Nachwirkung ~~ausser Acht~~ unbeachtet lässt. –
2) Stellen wir uns eine Kugel von weichem Eisen vor die unter dem Einflusse einer Constanten magnetischen Kraft steht; so wird diese in Folge dieses Einflusses magnetisch –; Die Poisson-sche Theorie nimmt nun an dass die magnetische Axe dieses Kugelmagneten ~~zusammenfällt~~ mit der Richtung der magnetisirenden Kraft, und dass das magnetische Moment desselben proportional ist mit der Grösse dieser Kraft. – Wir verstehen unter einer Constanten magnetischen Kraft eine Kraft

welche ~~in jedem P~~ ähnlich der Erdmagnetischen Kraft in jedem Punkte des Körpers auf den sie einwirkt dieselbe Richtung und dieselbe Grösse hat. – Angenommen dass die Hyp. 1) richtig wäre, können wir uns keine andere Richtung der magnetischen Axe vorstellen, als die der wirksamen magn. Kraft.–

§ 5.

Diese Voraussetzungen genügen schon um die allgemeinen Gleichungen der Theorie ab zu leiten, welche den ~~Vertheilung~~ Magnetischen Zustand eines beliebig gestalteten Körpers aus weichem Eisen bestimmen, auf welchen magn. Kräfte einwirken. – In diesem Körper denken wir uns zwei unendlich kleine Concentrische Kugelflächen, deren kleinere auch gegen die andere unendlich klein ist. – Die durch die kleinere Kugelfläche eingeschlossene Masse befindet sich wie wir es sehen werden in einem Zustande, den die 2te Voraussetzung der Theorie verlangt; sie steht nämlich unter dem Einflusse einer constanten Magnetischen Kraft. – Auf



einen Punkt a, b, c der inneren kleinen Kugel wirken mehrere Kräfte ein; diese Kräfte sind: 1^tens^ die Kräfte, welche auf den ganzen Eisenkörper von aussen einwirken d. i. die eigentlichen magnetisirenden Kräfte; bezeichnen wir das Potential derselben mit V, so sind die von ihnen herrührenden auf a, b, c wirksamen Kraftcomponenten

$$-\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}, \frac{\partial V}{\partial c}$$

Diese sind im innern der kleinen Kugel constant da die Coordinaten a, b, c ~~deren~~ von welchen sie abhängig sind, innerhalb dieser Kugel nur um unendlich kleine Grössen variiren können. –

2^tens^ wirkt auf diesen Punkt die ausserhalb der grösseren Kugel gelegene magnetisch gewordene Eisenmasse. – Das Potential der von dieser herrührenden Kräfte bezeichnen wir mit Q'; und somit die Kraftcomponenten mit:

$$-\frac{\partial Q'}{\partial a}, -\frac{\partial Q'}{\partial b}, -\frac{\partial Q'}{\partial c}$$

Auch diese Kräfte können als constant betrachtet werden, da sie ja von Theilchen herrühren die ~~alle~~ relative den Dimensionen der kleineren Kugel, alle in unendlich grosser Entfernung liegen. –

3ens könnten wir noch eine Kraftquelle erwähnen; nähmlich die zwischen den zwei Kugelflächen gelegene magnetisch gewordene Kugelschale – für diese ist aber a, b, c ein in ihrer inneren Höhlung gelegener Punkt auf welchen sie in Folge vorangeschickter Betrachtungen keine Kraft ausübt. –
Die Componenten der ganzen auf a, b, c wirksamen Kraft, sind demnach die innerhalb der kleineren Kugel constanten ~~Ausdrücke~~ Diff. Quot.:

$$-\frac{\partial(V+Q')}{\partial a}\ ,\quad -\frac{\partial(V+Q')}{\partial b}\ ,\quad -\frac{\partial(V+Q')}{\partial c}$$

Da also in der kleinen Kugel alle Bedingungen der Voraussetzungen erfüllt sind; so hat ihre magnetische Axe die Richtung der Resultante dieser Kräfte; und es werden in derselben die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente die Werthe haben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -p\,\frac{\partial(V+Q')}{\partial a} \\ \beta &= -p\,\frac{\partial(V+Q')}{\partial b} \\ \gamma &= -p\,\frac{\partial(V+Q')}{\partial c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

worin p eine von der Natur des Eisens abhängige Constante bedeutet. –

Die Aufgabe ist die magnetischen Momente α, β, γ zu finden, wenn die äusseren wirksamen Kräfte bekannt sind, also ihr Potential V gegeben ist. –

Q' ist wie wir schon erwähnt haben das Potential der ganzen magnetisch gewordenen Eisenmasse mit Ausschluss der grösseren Kugel. –

Wir finden Q' für ~~irgend einen äusseren~~ den Punkt ~~x,y,z~~ a,b,c nach der Gleichung (8) dieses Abschnittes:

$$Q' = \iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

worin aber α, β, γ nicht wie in (13) auf den Punkt a, b, c sondern auf x, y, z bezogen sind; – und r die Entfernung ~~von~~ des Punktes a, b, c von dem variabeln Punkte x, y, z bedeutet. –

Ich will jetzt das Potential der ganzen magnetisch gewordenen Eisenmasse in Rechnung einführen, und bezeichne dieses mit Q. –

Q ist dann das Potential dieser Massen in Bezug auf einen inneren Punkt, und dieses Potential ist:

$$(14) \ldots \qquad Q = \iiint dx\,dy\,dz \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

wo die Integration über die ganze Eisenmasse auszudehnen ist. – Wir ~~Bezeichnen wir schliesslich~~ nach mit q das Potential derjenigen Eisenmassen welche die Grössere der Concentrischen Kugeln erfüllt; so dass:

$$Q' = Q - q$$

sei. – Diesen Werth ~~in (13) eingesetzt~~ werden wir in (13) einsetzen, und dann nach a, b, c differenziren; da q das Potential ~~der~~ einer gleichmässig magnetisirten Kugel ist, so sind, wie wir auf Seite (95) angegeben haben:

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \frac{4\pi}{3}\alpha \quad , \frac{\partial q}{\partial b} = \frac{4\pi}{3}\beta \quad , \frac{\partial q}{\partial c} = \frac{4\pi}{3}\gamma$$

demnach:

$$\alpha = -p\left(\frac{\partial(Q+V)}{\partial a} - \frac{4\pi}{3}\alpha\right)$$

$$\beta = -p\left(\frac{\partial(Q+V)}{\partial b} - \frac{4\pi}{3}\beta\right)$$

$$\gamma = -p\left(\frac{\partial(Q+V)}{\partial c} - \frac{4\pi}{3}\gamma\right)$$

Wir führen statt p eine andere ebenfalls von der Natur des Eisens abhängige Constante k durch die Gleichung ein:

$$k = \frac{p}{1 - \frac{4\pi}{3}p}$$

dadurch werden:

$$\alpha = -k\frac{\partial(V+Q)}{\partial a}, \quad \beta = -k\frac{\partial(V+Q)}{\partial b}, \quad \gamma = -k\frac{\partial(V+Q)}{\partial c}$$

α, β, γ sind demnach die neg. part. Diff. Quot der Function $k(V+Q)$; für diese führe ich ein vereinfachendes Zeichen durch die Gleichung ein:

$$\text{(I)} \quad (15) \qquad \underline{V + Q + \varphi = 0}$$

die magn. Momente nehmen dann die Form an:

$$\text{(II)} \quad (16) \qquad \underline{\alpha = k\frac{\partial\varphi}{\partial a}, \quad \beta = k\frac{\partial\varphi}{\partial b}, \quad \gamma = k\frac{\partial\varphi}{\partial c}}$$

Zur Bestimmung von α, β, γ ~~φ~~ ist also die Kentniss von φ erforderlich; diese wird durch die Gleichungen (14) und (15) gegeben. – In (14) kommen die Magn. Momente in dem Punkte $x\,y\,z$ durch die ~~Zeichen~~ Buchstaben α, β, γ bezeichnet ~~in die Rechnung geführt~~ vor; da x, y, z ähnlich wie a, b, c ein innerer Punkt ist, so sind auch für diese magn. Momente die Gl. (16) geltend; so dass (14) die Form annehmen kann:

$$(17) \qquad Q = k\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

Die Gleichungen (15), (16) und (17) sind die Grundgleichungen unserer Theorie. – Sie können nicht nur dazu benützt werden, die Werthe des Magn. Momente für alle Punkte im inneren des Eisenkörpers, das ist den ganzen Magnetischen Zustand desselben zu bestimmen; sondern sie können auch dazu dienen die Einwirkung der Magnetisch gewordenen Eisenmassen ~~in Bezug~~ auf einen beliebigen äusseren Punkt zu berechnen. – Diese letztere Aufgabe erfordert nur die Gleichungen (15) und (17); und diese bestehen in der That auch wenn a, b, c ein äusserer Punkt ist. –

§ 6. –

Mit Hilfe des Green-schen Satzes kann das Integral (17), welches über den ganzen von Eisen eingenommenen Raum auszudehnen ist auf ein Integral über die Oberfläche desselben Raumes transformirt werden. – In dem Green-schen Satze wie es in Gleichung (13) des I Abschnittes dargestellt ist, setzen wir

$$U = k\varphi \qquad \text{und} \qquad V = \frac{1}{r}$$

Der Green-sche Satz setzt voraus dass U und V innerhalb des ganzen begrenzten Raumes endlich und eindeutig sind — demnach können wir für diese Werthe von U und V den Satz nicht unbedingt einführen; denn wenn auch $U = k\varphi$ im ganzen Eisenkörper endlich und eindeutig ist; so wird $V = \frac{1}{r}$ für gewisse Punkte in demselben unendlich. — ~~Um den Green~~ Diese Punkte liegen zu a, b, c unendlich nahe; wir werden daher den Greenschen Satz anwenden können, wenn wir aus dem Magn. Körper eine unendlich kleine um a, b, c als Mittelpunkte gebildete Kugel ausschliessen. — Thun wir das, so ergiebt sich:

$$(18) \ldots\ldots \quad Q = -k\int\frac{dO}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_i} - k\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

Wo aber Q das Potential der Eisenmassen mit Ausschluss der unendl. kleinen Kugel bedeutet; das Oberflächen Integral über die äussere Fläche des Magnetes und diese unendl. kleine Kugelfläche; und das Raum integral über die Masse zu nehmen ist, welche sich zwischen diesen beiden Flächen befindet. — Aus Betrachtungen die wir in §3 anstellten können wir schliessen dass die unendl.

kleine Kugel zum Potentiale Q unendl. wenig beiträgt; dass also Q auch hier als das Potential herrührend von der ganzen Eisenmasse betrachtet werden kann.+) – Durch Einführen von Polarcoordinaten können wir uns leicht auch davon überzeugen dass die Glieder welche in Folge der Ausschliessung der unendlich kleinen Kugel, zu dem Ausdrucke auf rechter Seite in der Gleichung (18) hinzugefügt werden müssen, ~~unendlich wenig beitragen~~ nur unendlich kleine Grössen zu demselben beitragen. – Es kann demnach die Gleichung (18) auch für ~~den Fall als~~ die ganze Eisenmasse als geltend betrachtet werden. –

Das Gesammtpotential ist demnach zusammengesetzt aus den Potentialen einer Masse, welche mit der Dichtigkeit $-k\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$ auf der Oberfläche verbreitet ist, und eine Masse welche mit

---

+) Hievon kann man sich direct so überzeugen, dass man in (17) Polarcoordinaten einführt, und den Werth untersucht den Q für die untere Grenze, also für unendlich kleine Werthe von r annimmt. –

der Dichtigkeit

$$-k\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}=-k\,\Delta_{xyz}\varphi$$

den Körper selbst erfüllt. –

Führen wir auch für die Summe der 2^{ten} Diff. Quot von Q nach $a, b,$ und c ein ähnliches Zeichen $\Delta_{abc} Q$ ein; so folgt nach dem Satze im I Abschnitte: $\Delta Q_{abc} = 4\pi k \Delta_{xyz}\varphi$

da $-k\Delta_{xyz}\varphi$ die Dichtigkeiten der Massen von welchen φ herrührt im Punkte a, b, c ist, so ist $\Delta_{abc}\varphi = 4\pi k \Delta_{xyz}\varphi$

also: $$\Delta_{abc} Q = \Delta_{abc}\varphi$$

Durch Diff. von (15) ergiebt sich aber:

$$\Delta_{abc} Q = -\Delta_{abc}\varphi$$

Diesen zwei Bedingungen kann aber nur genügt werden, wenn:

$$\Delta_{abc} Q = 0$$

und

$$\Delta_{abc}\varphi = 0$$

Dies will sagen dass wir Q sowohl als φ als Potentiale von Massen ansehen können die Ausserhalb der Punkte ~~liegen~~, also auch ausserhalb des magn. Eisens liegen. – Diesen Werth in (18) gesetzt, ergiebt sich an Stelle der Grundgleichung (17):

$$Q = -k\int \frac{dO}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_i} \quad \ldots\ldots \quad (19) \quad (\underline{III})$$

§7.

Eine weitere in vielen Fällen nützliche Transformation dieser Grundgleichungen (15), (16) und (19) geschieht mit Hülfe zweier Sätze die ich hier angeben will. – Dieselben lauten:

1) Wenn O die Oberfläche irgend eines begrenzten Raumes ist, und wenn ausserhalb derselben irgend welche Massen liegen, so lässt sich immer eine Vertheilung ähnlicher Massen auf der Oberfläche O finden, deren Potential bezüglich auf einen im inneren des begrenzten Raumes gelegenen Punkt, gleich ist dem Potentiale der äusseren Massen auf denselben Punkt. –

2) Ebenso lässt sich, wenn die Massen innerhalb des begrenzten Raumes liegen eine Vertheilung von Massen auf der Oberfläche O finden, deren Potential in Bezug auf einen äusseren Punkt dieselbe ist, als die der ~~ersteren~~ im inneren gelegenen Massen. –

Gauss gab einen mathematischen Beweis dieser Sätze – dieselben lassen sich auch durch folgende physikalische Betrachtung feststellen. –

1) ~~Innerhalb~~ Ausserhalb des durch die Oberfläche O begrenzten Raumes sollen sich electrische Massen befinden – welche Art auch ihre Vertheilung sein mag so viel wissen wir, dass sie einen Gleichgewichtszustand annehmen können müssen – denn wäre dies nicht, so hätten wir in ihnen eine Quelle um Arbeit aus nichts zu erzeugen. – Das Potential der äusseren Massen V, und das Potential der in Folge der Einwirkung dieser Massen electrisch gewordenen inneren Massen U auf denselben inneren Punkt, müssen demnach der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung electrischer Flüssigkeiten genügen, d.i. die Gleichung erfüllen

$$U + V = C$$

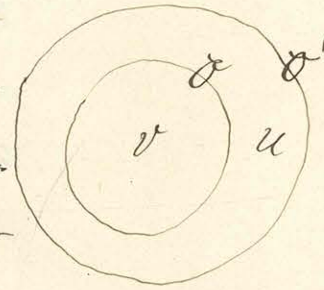
wo C, das ist das Gesammtpotential, eine Constante sein muss. – Wir wissen ausserdem dass die Massen von welchen U herrührt auf die Oberfläche des begrenzten Raumes O beschränkt sein müssen, und somit wird, da C von unse-

-rer Willkühr abhängt und auch $=0$ gemacht werden kann

$$U+V=0$$

also $$U=-V$$

Wir haben hierdurch eine Massenvertheilung auf der Oberfläche gefunden dessen Potential (U) auf einen inneren Punkt, gleich und entgegengesetzt ist dem Potentiale V der von aussen einwirkenden Massen. –



2) Die electrischen Flüssigkeiten sollen jetzt im inneren der durch die Fläche O begrenzten Raumes liegen – und das Potential derselben für einen äusseren Punkt sei V. – Ich betrachte der Anschaulichkeit halber den äusseren Raum als einen Leiter, und will ihn auch noch von der andern Seite als durch die Oberfläche O' begrenzt ansehen. – Im Falle des Gleichgewichtes der electrischen Flüssigkeiten, welches auch hier möglich sein muss ist in allen Punkten des Leiters

$$U+V=\text{Const.}$$

Oder da diese Constante, welche nichts anderes ist als das Gesammtpotential von unserer

Willkühr abhängt:

$$U+V=0$$

U ist hierin das Potential der electrischen Flüssigkeiten, welche sich in dem hohlen Leiter, in Folge der Einwirkung der Massen deren Potential V ist, in auf gewisse weise vertheilt haben. – Im Gleichgewichtsfalle sind alldiese Flüssigkeiten von welchen das Potential U herrührt auf die Oberflächen des Leiters O und O' beschränkt. – Ich will aber zeigen dass sie einzig auf der inneren Oberfläche O verbreitet sind; differentiirt man nämlich die Gleichung $U+V=0$ partiel nach N_i und dann partiel nach N_a, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial U}{\partial N_i}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_a}+\frac{\partial U}{\partial N_a}=0$$

Diese Gleichungen, welche für alle Punkte des Leiters, ja für alle Punkte des unendlichen Raumes gelten, müssen auch gültig sein für Punkte der Oberfläche O', also wenn N_i und N_a die Normalen der äusseren Fläche bedeuten. –

Addire ich sie so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial N_i}+\frac{\partial U}{\partial N_a}+\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}=0$$

Oder da in Folge eines im I Abschnitte behandelten Satzes

$$\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}=0$$

(denn von den Massen welche das Potential V haben liegt auf der Oberfläche O' gar nichts) so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial N_i}+\frac{\partial U}{\partial N_a}=0$$

~~Woraus~~ Wodurch sich dann die Behauptung recht fertigt dass die Massen, welche zum Potentiale U beitragen ausschliesslich auf der inneren Oberfläche O verbreitet sind. –

Ich erwähnte schon dass $U+V=0$ für alle Punkte des unendlichen Raumes gültig ist – diese Behauptung gründet sich auf einen am Schlusse des I^ten Abschnittes dargelegten Satz, nach welchem wenn das Potential in der äusseren Fläche des Leiters $=0$ ist, dann dasselbe im ganzen unendlichen Raum $=0$ sein muss. – Durch die Gleichung

$$U=-V$$

sind wir also gerechtfertigt, statt der im innern von O befindlichen Massen, Massen zu setzen welche auf der Oberfläche O verbreitet sind, ohne dadurch die Grösse des Potentials zu verändern. – Dem Übelstande der veränderten Zeichen kann leicht dadurch abgeholfen werden dass elektr. oder magn. Flüssigkeiten entgegengesetzter Natur substituirt. –

§ 8.

Wir nannten in unseren bisherigen Betrachtungen V das Potential von magnetischen Flüssigkeiten, welche ausserhalb des zu magnetisirenden Körpers aus weichem Eisen liegen, bezogen auf einen Punkt dieses Körpers. – Nach den eben angeführten Sätzen können wir statt dieser äusseren Massen, auch Massen ~~derart~~ ~~substituiren~~, welche auf der Fläche des Eisenkörpers ~~haben~~ verbreitet sind derart substituiren dass das Potential V in Bezug auf einen inneren Punkt ungeändert bleibt. – Demnach soll jetzt V das Potential der auf diese Weise substi–

iten auf der Oberfläche verbreiteten magnetischen Flüssigkeiten bedeuten. – Die Massen von welchen das Potential Q herrührt, sind auch auf derselben Oberfläche verbreitet, und somit kann auch die durch die Gleichung

$$V+Q+\varphi=0 \quad \ldots\ldots (20)$$

definirte Grösse φ als das Potential von Massen betrachtet werden, welche diese Oberfläche bedecken. – Bis jetzt behandelten wir nur den Fall dass der Punkt ein innerer sei, es besteht aber die Gleichung (20) ebenso für den Fall, wenn ~~dass~~ sich die Potentiale V, Q und φ auf einen äusseren ~~inneren~~ Punkt beziehen. – Sieht man nämlich die Summe von Potentialen $V+Q+\varphi$ als ein Potential an, welches im ganzen inneren des Körpers $=0$ sein muss; so wird dasselbe da es in Folge dessen auch auf der Oberfläche $=0$ ist, in dem ganzen unendlichen Raume also für jeden äusseren Punkt den Werth $=0$ haben. –

Differenziiren wir die Gleichung (20) einmal partiel nach N_i, und einmal desgleichen nach N_a;

$$0 = \frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial Q}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial N_a} + \frac{\partial Q}{\partial N_a} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a}$$

Da aber in Folge der Gleichung (19)

$$\frac{\partial Q}{\partial N_i} + \frac{\partial Q}{\partial N_a} = 4\pi k \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$$

sein muss, so ergiebt sich durch Addition obiger Gleichungen:

(21) .... $$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = 0$$

Aus dieser Gleichung in welcher V gegeben ist kann man φ bestimmen; benützen wir neben dieser, noch die Gleichung

(22) $$Q_a = -(V_a + \varphi_a)$$

so haben wir ~~die~~ zwei der schon angegebenen Grundgleichungen durch zwei andere ersetzt, welche ebenfalls zur Kentniss von Q. führen. –

Die magnetischen Momente in jedem Punkte des Eisenkörpers ergeben sich aus der Gleichung .–

§9.

Durch den bisher abgeleiteten Gleichungen ist der magnetische Zustand irgend eines unter dem Einflusse äusserer magnetisirender Kräfte stehenden Eisenkörpers vollständig bekannt. – Die magnetischen Momente in jedem Punkte der Körpers ergeben sich aus:

$$\alpha = \kappa\frac{\partial\varphi}{\partial a} \quad , \beta = \kappa\frac{\partial\varphi}{\partial b} \quad , \gamma = \kappa\frac{\partial\varphi}{\partial c} \quad \ldots\ldots (16)$$

Wo φ eine von der Gestalt der Körper und den äusseren magnetisirenden Kräften abhängige Function ist, welche man als das Potential äusseres Massen ansehen kann. – Nennen wir dann V das Potential ~~von~~ derjenigen auf der Oberfläche verbreiteten Massen, welche die äusseren Magn. Massen in ihrer Wirkung sowohl auf äussere als auf innere Punkte vollständig ersetzen, so ergiebt sich φ aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} + (1+4\pi\kappa)\frac{\partial\varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_a} = 0 \quad \ldots\ldots (21)$$

Da V bei der Aufgabe gegeben ist so ~~ist~~ sind hierdurch α, β, γ bestimmt. – Wollen wir aber die Wirkung d. i. das Potential dieser magnetisch gewordenen Eisenmasse auf einen äusseren Punkt kennen, so benützen wir nebst (21) noch die Gleichung:

$$(22) \qquad Q_a = -(V_a + \varphi_a)$$

Diese Resultate wenden wir nun auf eine Eisenkugel an. – Die Bestimmung der Functionen φ und Q geschieht in diesem Falle mit Hülfe ~~einer~~ einer Entwickelung nach Kugelfunctionen. – Ist nämlich V an der Kugeloberfläche, also $\overline{V}$ gegeben – so lässt ~~sie~~ es sich, in einer Reihe von Kugelfunctionen:

$$(23) \ldots\ldots \quad \overline{V} = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots$$

Entwickeln, in welcher Entwickelung V_n eine Kugelfunction n-ter Ordnung ist. – Nehmen wir dann den Radius der Kugel zur Einheit an, und bezeichnen mit ϱ die Entfernung des Punktes von dem Kugelmittelpunkte, auf welchen V bezogen sein soll, so ist:

$$(24) \ldots\ldots \quad V_i = V_0 + \varrho V_1 + \varrho^2 V_2 + \ldots\ldots$$

$$V_a = \frac{1}{\varrho} V_0 + \frac{1}{\varrho^2} V_1 + \frac{1}{\varrho^3} V_2 + \ldots\ldots \qquad (25)$$

Die Ausdrücke $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ und $\frac{\partial V}{\partial N_a}$ sind die Componenten der Kraft in der ~~nach~~ Richtung der dem innern resp. nach dem äussern gerichteten Normale mit welcher die Massen von welchen V herrührt auf einen inneren resp. äusseren Punkt wirken. – Die positive Richtung von N_a ist die positive Richtung von ϱ, die von N_i ist dieser entgegengesetzt. – Da V nach den ~~früh~~ schon abgeleiteten Sätzen als das Potential ~~von~~ auf der Oberfläche verbreiteten Massen angesehen werden kann, so ist demnach:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\overline{\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = \overline{\frac{\partial V_a}{\varrho}}$$

wo $\overline{\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}}$ und $\overline{\frac{\partial V_a}{\partial \varrho}}$ die Werthe von $\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial V_a}{\partial \varrho}$ für die Kugeloberfläche also für $\varrho = 1$ bedeuten. – Die Entwickelungen (24) und (25) herauf angewendet, geben:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -V_1 - 2V_2 - 3V_3 - \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = -V_0 - 2V_1 - 3V_2 - \ldots\ldots$$

Also ist:

$$(26)\ldots\quad \frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}=-V_0-3V_1-5V_2-\ldots\ldots(2n+1)V_n-\ldots$$

Da φ die ähnliche Bedeutung als V hat, nämlich auch als Potential von Massen angesehen werden kann, welche auf der Kugelfläche verbreitet sind, so wird ~~die~~ eine ähnliche Entwickelung auf sie anwendbar sein. Wenn man also setzt:

$$(27)\quad \overline{\varphi}=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots$$

so ergeben sich

$$(28)\ldots\quad \varphi_a=\frac{1}{\varrho}\varphi_0+\frac{1}{\varrho^2}\varphi_1+\frac{1}{\varrho^3}\varphi_2+\ldots$$

$$(29)\ldots\quad \varphi_i=\varphi_0+\varrho\varphi_1+\varrho^2\varphi_2+\ldots$$

und dann:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}=-\varphi_1-2\varphi_2-3\varphi_3-\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N_a}=-\varphi_0-2\varphi_1-3\varphi_2-\ldots$$

Diese letzten Resultate und (26) in (21) gesetzt:

$$(30)\ldots\quad \varphi_0+(3+4\pi k)\varphi_1+(5+8\pi k)\varphi_2+\ldots\ldots(2n+1+4n\pi k)\varphi_n+\ldots=$$

$$=-\left(V_0+3V_1+5V_2+\ldots\ldots(2n+1)V_n+\ldots\right)$$

Da die Entwickelung einer Function nach Kugelfuncti-onen eine eindeutige ist, so können zwei nach solchen entwickelte Reihen nur unter der Bedingung gleich gesetzt werden, dass ihre einzelnen Glieder gleich seien. – Also in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= -V_0 \\ \varphi_1 &= -\frac{3V_1}{3+4\pi k} \\ \varphi_2 &= -\frac{5V_2}{5+8\pi k} \\ &\ldots\ldots \\ \varphi_n &= -\frac{(2n+1)V_n}{2n+1+4n\pi k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31)$$

Diese Gleichungen, welche uns φ vollständig bestimmen können dazu dienen, den ersten Theil unserer Aufgabe zu lösen, nämlich mit Hilfe von (16) die magnetischen Momente in jedem Punkte der Eisenkugel auf zu suchen ~~bestimmen~~. –

Das Potential, also die Wirkungen der magnetisch gewordenen Eisenkugel auf einen äusseren Punkt giebt wenn V und φ bekannt sind die Gleichung (22). – Wäre $\overline{Q}$ gegeben, dann kann sich Q nach Kugelfunctionen entwickeln:

$$\overline{Q} = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (32)$$

folglich ist:

$$Q_a = \frac{1}{\varrho} Q_0 + \frac{1}{\varrho^2} Q_1 + \dots \tag{33}$$

Setzen wir jetzt (25), (28) und (33) in die Gleichung (22) ein, so erhalten wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ~~eine~~ nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihen, welche selbst ~~nur~~ dann gleich sein können, wenn all' ihre Glieder gleicher Ordnung für sich genommen gleich sind. – Berücksichtigen wir bei dieser ~~Be~~ Betrachtung die durch (31) gegebenen Werthe von φ_0, φ_1, etc. so ergeben sich die ~~Gleichungen~~ Werthe:

$$(34) \dots \left\{ \begin{aligned} Q_0 &= 0 \\ Q_1 &= -\frac{4\pi k}{3 + 4\pi k} V_1 \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= -\frac{4n\pi k}{2n+1+4n\pi k} V_n \end{aligned} \right.$$

~~Dan~~ Auf ganz ähnliche Weise wie es uns bis jetzt gelang die magnetische Vertheilung in einer Eisenkugel vollständig zu bestimmen, können wir diese Aufgabe auch für eine concentrische Hohlkugel lösen. – Die einzige Schwierigkeit welche dabei vorkommt ist die das wir drei Räume, u. zw. den inneren Hohlraum, die Kugelschale selbst,

und den äusseren Raum zu betrachten haben. –
Bei dieser Aufgabe sind Q, V und φ für Punkte der äusseren leeren Raum nach absteigenden, für Punkte des inneren Hohlraums nach aufsteigenden Potenzen von ϱ zu entwickeln. – Liegt dagegen der Punkt auf welchen diese Potentiale bezogen werden sollen in der Kugelschale selbst, so sind beide Entwickelungen zu machen. –

§ 10.

Die soeben für eine Eisenkugel im allgemeinen gewonnenen Resultate, ~~wen~~ können leicht auf den Fall angewendet werden, dass die Kugel unter dem Einflusse einer Constanten d. i. einer solchen magnetisirenden Kraft stehe, welche von unendlich weit entfernten magnetischen Massen herrührt. – Ein Beispiel einer Constanten magn. Kraft bietet die Erdmagnetische Kraft. –
In diesem Falle muss V eine lineare Function der Variabeln a, b, c sein, und zwar muss:

$$V = D - Xa - Yb + Zc \qquad \ldots\ldots (35)$$

sein. – Die neg. part. Diff. Quotienten dieses Ausdruckes nach a, b und c sind (wenn wir D, X, Y, und Z als Constanten betrachten) X, Y, Z d.i. die constanten Componenten der magnetisirenden Kraft.

Bei unseren weiteren Operationen, da wir nach Kugelfunctionen zu entwickeln haben werden, wird es von Nutzen sein Polarcoordinaten ein zu führen – wir thun das durch die Gleichungen:

$$a = \varrho\mu \qquad (\text{wo } \mu = \cos\vartheta)$$
$$b = \varrho\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$$
$$c = \varrho\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$$

Also:

$$V = D - \varrho\left(X\mu + Y\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + Z\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right)$$

Gesetzt $\varrho = 1$, ergiebt sich $\overline{V}$

$$\overline{V} = D - \left(X\mu + Y\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + Z\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right)$$

$\overline{V}$ ist also schon nach Kugelfunctionen entwickelt, denn wie wir es bei der allgemeinen Entwickelung nach Kugelfunctionen sahen ist die Kugelf. 0ter Ordnung eine Constante, und die Kugelf. 1ter Ordnung ein Ausdruck von der

Form des eingeklammerten Ausdruckes. – Es ist also:

$$V_0 = \mathcal{D}$$

$$V_1 = -\left(X\mu + Y\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + Z\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right)$$

In Folge der Gleichung (22) sind also $\bar{\varphi}$ und $\bar{Q}$ auch durch zwei Glieder bestimmt:

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 + \varphi_1$$

$$\bar{Q} = Q_0 + Q_1$$

mit Berücksichtigung von (31)

$$\varphi_0 = -V_0 = -\mathcal{D}$$

$$\varphi_1 = -\frac{3V_1}{3+4\pi k} = +\frac{1}{1+\frac{4\pi}{3}k}\left(X\mu + Y\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + Z\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right)$$

In Folge von (34):

$$Q_0 = 0$$

$$Q_1 = -\frac{4\pi k}{3+4\pi k} = +\frac{\frac{4\pi}{3}k}{1+\frac{4\pi}{3}k}\left(X\mu + Y\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + Z\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right)$$

Da nun

$$\varphi_i = \varphi_0 + \varrho\varphi_1$$

ist, so:

$$\varphi_i = -\mathcal{D} + \frac{1}{1+\frac{4\pi}{3}k}\left(Xa + Yb + Zc\right)$$

Diese Gleichung erklärt den magnetischen Zustand der Eisenkugel, aus ihr ergeben sich die magnetischen Momente:

$$\alpha = \frac{k}{1+\frac{4\pi}{3}k} X$$

$$\beta = \frac{k}{1+\frac{4\pi}{3}k} Y$$

$$\gamma = \frac{k}{1+\frac{4\pi}{3}k} Z$$

Hieraus gelangen wir zum wichtigen Schlusse dass die Kugel in Folge constanter magnetischer Kräfte gleichmässig magnetisirt wird. – Die magnetischen Momente sind in diesem Falle proportional mit den Komponenten der magnetisirenden Kraft, demnach ist die Richtung der magnetischen Axe die Richtung der magnetisirenden Kraft. Dieser letzte Schluss bildete übrigens eine unserer Annahmen. –

§ 11.

Die Richtigkeit der gefundenen Resultate will ich noch auf einem andern Wege a posteriore nachweisen – ich will nämlich zeigen dass

unter der Voraussetzung, dass eine Constante magnetisirende Kraft eine Eisenkugel gleichmässig magnetisirt, die Grundgleichungen unserer Theorie erfüllt werden. –
Ich nehme also erstens an, dass die Magnetisirende Kraft eine Constante ist, dass also V eine lineare Function von a, b, c ist:

$$V = \mathfrak{D} - \mathfrak{X}a - \mathfrak{Y}b - \mathfrak{Z}c \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Soll aber die Kugel gleichmässig magnetisirt sein, so muss auch φ eine lineare Function von a, b, c sein, also:

$$k\varphi = \delta + \alpha a + \beta b + \gamma c \quad \ldots \quad (37)$$

Bei einer anderen Gelegenheit in § 3 dieses Abschnittes, haben wir schon das Potential einer gleichmässig magnetisirten Eisenkugel ~~in Bezieh auf~~ in Beziehung auf einen Punkt $a\,b\,c$ angegeben – es war dasselbe:

$$Q = -\left(\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial c}\right) \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

wo α, β, γ Constanten sind, und Ω das Potential einer magn. Masse bedeutet, welche mit der gleichmässigen Dichtigkeit 1 den ganzen Kugelraum erfüllt. – Wenn nämlich der Kugelmittelpunkt zum Coordinatenanfangspunkt gewählt wird, und wenn R der Kugelradius ist, so ist Ω definirt durch die Gleichung:

$$(39) \ldots\ldots \quad \Omega = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

Ich behaupte nun dass durch die Gleichungen (36 – 39), den Gleichungen:

$$(15) \ldots \quad 0 = V + Q + \varphi$$

$$(19) \ldots \quad \text{und} \quad Q = -k\int \frac{d\Theta}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}$$

genügt werden kann. –

Bilden wir zuerst die Summe $V + Q + \varphi$; diese ist

$$0 = k\mathcal{D} + \delta + a\left(-Xk + \left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)\alpha\right)$$
$$+ b\left(-Yk + \left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)\beta\right)$$
$$+ c\left(-Zk + \left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)\gamma\right)$$

Durch passende Wahl der Constanten kann aber diese Gleichung, und ~~dadurch~~ in Folge dessen auch (15) identisch erfüllt werden. –

Man setzt zu diesem Zwecke $\delta = -k\mathcal{D}$, und für α, β, γ die Seite 124 angegebenen Constantenwerthe ein. –

Es lässt sich ferner auch nachweisen, dass der aus (38) und (39) sich ergebende Werth von Q auch der Gleichung (19) genügt. –

Dieser eben geführte Beweis liefert kein neues Resultat in Bezug auf die gleichmässig magnetisirte Kugel. — Da aber (38) für einen gleichmässig magnetisirten Körper von ganz beliebiger Gestalt gültig ist, wenn nur R eine Function 2ten Grades der Coordinaten a, b, c ist; so schliessen wir, dass wenn es noch eine zweite Gestalt giebt, für welche R diese Eigenschaft besitzt ~~Dann~~ für welche daher (38) erfüllt wird, dann ~~sind~~ erfüllt ~~dieser Körper~~ ein auf diese weise gestalteter Körper ~~auch~~ auch + die Bedingungen welche in den Grundgleichungen (15) und (19) ~~erfüllt~~ ausgesprochen sind. – Existirt eine solche Gestalt, so werden wir alle Schlüsse die wir in Bezug auf die gleichmässig magnetisirte Kugel gezogen haben – auch auf einen durch diese begrenzten Körper ausdehnen können. –

§ 12.

Eine solche Gestalt, wie wir sie eben erwähnten existirt in der That – sie ist das Ellypsoid. –

~~Um dies nach zu weisen, muss vor allem gezeigt~~

Wir haben hiermit die Aufgabe nach zu weisen

~~werden~~, dass das Potential einer [illegible] Masse, welche ein beliebiges Ellypsoid, mit der ~~Dicht~~ constanten Dichtigkeit 1 erfüllt, für einen innerhalb desselben gelegenen Punkt eine Function 2 Grades der Coordinaten dieses Punktes ist. –

Die auf seine Hauptaxen als Coordinatenaxen bezogene Gleichung, der Oberfläche eines dreiaxigen Ellypsoides ist:

$$(40) \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

wo A, B, C die Halbaxen desselben bedeuten. –

Nehmen wir an dass diese Ellypsoid mit Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt wäre, – so ist das Potential Ω desselben, bezogen auf einen inneren Punkt a, b, c, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte also gleichfalls von dem Coord. Anfangspunkte r sei, durch den Ausdruck bestimmt:

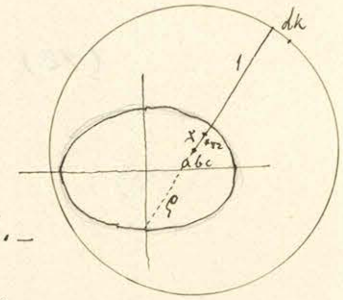
$$(41) \ldots\ldots \quad \Omega = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

wo die Integration über den ganzen ~~in~~ Raum des Ellypsoides auszudehnen ist. –

Leichter als Ω lassen sich seine Differential Quotienten berechnen, es ist nämlich:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \iiint \frac{x-a}{r^3}\,dx\,dy\,dz$$

Ich führe jetzt Polarcoordinaten ein, deren Anfangspunkt a, b, c sei — den von diesem Punkte zu einem variabeln Punkte gezogenen Leitstrahl bezeichne ich mit r und die Cosinuse der ~~Richtungen~~ Winkel welche ~~dieses~~ die Richtung Leitstrahls mit den ~~Coord~~ Hauptaxen des Ellypsoides bildet mit ξ, η, ζ. — Beschreiben wir dann um diesen Mittelpunkt mit dem Radius 1 eine Kugel, und nennen das Element der Oberfläche derselben dk; so ist das in diesem Coordinatensysteme ausgedrückte Volumelement $= r^2 dk\,dr$. — Berücksichtigt man dann noch dass:



$$\xi = \frac{x-a}{r}, \quad \eta = \frac{y-b}{r}, \quad \zeta = \frac{z-c}{r}$$

So ergiebt sich:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \iiint \xi\,dk\,dr$$

~~Es~~ Da dk und ξ von r unabhängig sind, so lässt sich die Integration nach dieser Variable ausführen. — Die Grenzen der Integration sind $r=0$

und $r =$ ~~dem~~ seinem grössten Werthe innerhalb des Ellypsoides in einer gewissen, durch ξ, η, ζ bestimmten Richtung. – Diesen Werth von r, also die Entfernung des Schnittpunktes des Leitstrahles mit der Ellypsoidfläche von dem Anfangspunkte bezeichnen wir mit ϱ — dadurch wird:

$$(42) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial a} = \iint \xi \varrho \, dk$$

ϱ ist eine Function von ξ, η, ζ die wir nun zu bestimmen haben, wir thun dies indem wir für sie eine Quadratische Gleichung bilden – die positive Wurzel derselben ist dann der gesuchte Werth, da ϱ eine positive Grösse ist. –

Wir haben dann:

$$\frac{x-a}{r} = \xi \quad , \quad \frac{y-b}{r} = \eta \qquad \frac{z-c}{r} = \zeta$$

also:

$$x = a + r\xi \quad , \quad y = b + r\eta \qquad z = c + r\zeta$$

Setzen wir hier statt r, ϱ so übergehen wir zu Punkten der Ellypsoidfläche:

$$x = a + \varrho\xi \quad , \quad y = b + \varrho\eta \quad , \quad z = c + \varrho\zeta$$

sind also Coordinaten der Ellypsoidfläche, welche der Gleichung (40) genügen müssen. Also:

$$\frac{(a+\xi\varrho)^2}{A^2}+\frac{(b+\eta\varrho)^2}{B^2}+\frac{(c+\zeta\varrho)^2}{C^2}=0$$

Führen wir durch folgende Gleichungen die ~~neuen~~ Grössen P, Q und R ein;

$$\left.\begin{aligned}
P &= 1-\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-\frac{c^2}{C^2}\\
Q &= \frac{a\xi}{A^2}+\frac{b\eta}{B^2}+\frac{c\zeta}{C^2}\\
R &= \frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(43)$$

so ist ~~in~~ diese Gleichung ~~für~~ zur Bestimmung von ϱ:

$$R\varrho^2+2Q\varrho=P$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\varrho=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2+PR}}{R}$$

P, Q, R sind reelle Grössen, P und R sind ausserdem wesentlich positiv, falls der Punkt a, b, c im inneren des Ellypsoids liegt; die ~~...~~ Summe unter dem Wurzelzeichen ist also positiv und grösser als Q; woraus folgt, dass die gesuchte positive Wurzel der quadratischen Gleichung die folgende ist:

$$(44) \ldots \quad \varrho = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + PR}}{R}$$

Diesen Werth von ϱ haben wir in (42) zu setzen, und für Q, P, R die mit (41) bezeichneten Ausdrücke einzuführen – dabei gelangen wir zu einem langen complicirten Ausdruck, welcher sich aber durch die Bemerkung wesentlich vereinfachen läsßt. – Betrachten wir nämlich das über ~~die~~ das ganze Volum einer ~~[illegible]~~ Kugel~~fläche~~ auszudehnende Integral:

$$\iint F dk$$

worin F eine Function der Variabeln ξ, η, ζ und dk das Oberflächenelement einer mit dem Radius 1 gebildeten Kugel bedeuten. –

Gesetzt ξ_0, η_0, ζ_0 wären drei bestimmte Werthe von ξ, η, ζ, welche auf der Kugelfläche vorkommen – dann müssen auf derselben auch noch die Punkte möglich sein, für welche die Variabeln die Werthe haben:

$$-\xi_0, +\eta_0, +\zeta_0$$

$$+\xi_0, -\eta_0, +\zeta_0$$

$$+\xi_0 \; +\eta_0 \; -\zeta_0$$

Wenn nun die Function F die Eigenschaft hat