Eötvös Loránd nehézségi
észlelési jegyzetei

auch die Kraft bestimmen können, welche ein Strom auf einen Magneten ausübt. –

Was nun die Erklärung magnetischer Erscheinungen betrifft, so geschieht dies auf ähnliche weise wie die der electrischen. – Auch hier werden zwei Flüssigkeiten entgegengesetzter Natur, die positive oder nördliche und die negative oder südl. magnetische Flüssigkeit angenommen. – Diese Flüssigk. sind in jedem Leiter gleichmässig vermengt, der Act des Magnetisirens, wie ~~früher~~ das des Electrisirens besteht in einer Trennung derselben. – Flüssigk. gleicher Art stossen sich ab, entgegengesetzter Art ziehen sich an, mit einer Kraft welche dem Producte ihrer Mengen direct, und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. – Betrachtet man demnach als Einheit der Menge diejenige Menge magnet. Fl. welche in der Einheit der Entfernung auf die ~~Einheit~~ ihr gleiche Menge magn. Fl. wirkend die Einheit der Kraft hervorbringt, und betrachtet ferner eine Menge negativer Flüss. als eine negative Menge positiver Flüssigk., so ist der Ausdruck für die Kraft welche die um r entfernten Mengen μ und μ' gegenseitig ausüben

$$K = \frac{\mu\mu'}{r^2}$$

Als positiv ist da die Abstossungskraft gewählt. – Der einzige Unterschied zwischen magn. und electr. Flüssigkeiten ist der dass während letztere frei beweglich sind, erstere immer an denselben Molecülen gebunden sind. – Die Wirkung eines Magneten auf einen electrischen Strom ist gleich der Resultante der Wirkung sämmtlicher Elemente, d. i. sämmtlicher Magnetpole dieses Magneten. –

Ebenso kann man sich auch einen electrischen Strom in Elemente zerlegt denken, die Wirkung des ~~endlichen~~ Gesammtstromes wird dann die Resultante der einzelnen Wirkungen all dieser Elemente sein. –

Wir denken uns den Strom wirklich in Elemente, und den Magneten wirklich in Magnetpole zerlegt, und untersuchen vor allem die Wirkung eines Magnetpols auf ein Stromelement. –

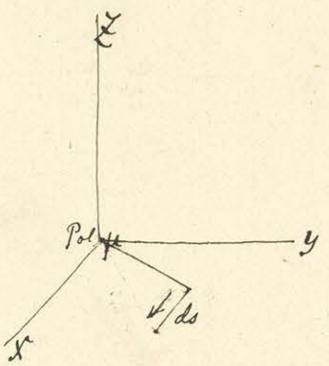
Es soll in dem Pole die Menge μ positiver magn. Flüssigkeit versammelt sein, um r von diesem entfernt sei ein Stromelement, dessen Länge ds ~~ist~~ und Intensität i ist, und in welchem die Richtung der positiven Electricität die des Pfeiles ist. – Der Pol sucht dann das Stromelement senkrecht auf die Ebene der Zeichnung sich selbst parallel ~~zu~~ verschieben – die Zweideutigkeit welche hier in Bezug auf die Richtung der Kraft noch stehen bleibt, kann durch die Ampère-sche Regel gehoben werden. – Was die Grösse dieser Kraft anbelangt, so ist sie proportional mit:

$$: \frac{\mu i ds}{r^2} \sin(r, ds)$$

Ist nun über die Einheiten der Kraft, Länge, der magn. Flüssigk. schon verfügt, so können wir die Einheit der Stromintensität noch immer so wählen dass

$$K = \frac{\mu i ds}{r^2} \sin(r, ds) \quad \ldots\ldots \quad (1,$$

sei; hierdurch haben wir ~~E~~ eine Einheit festgestellt, welche die electromagnetische Einheit der Stromstärke heisst. – Wir wollen jetzt diese Kraft auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem beziehen, und namentlich seine Componenten aufsuchen; hiebei bietet die richtige Wahl der Vorzeichen einige Schwierigkeit. – Diese umgehen wir dadurch, dass wir die gewählten Comp. früher auf ein ganz spezielles Coord. System beziehen, und nur von diesem zu einem allgemeineren übergehen. –



Die X Axe legen wir parallel ds und zwar soll die positive X Axe vom Anfangspunkte μ in derselben Richtung gehen, in welcher der positive Strom das Element durchfliesst. – Die XY Ebene sei die durch r und ds gelegte Ebene, die Z Axe steht dann auf diese senkrecht, und zwar so; dass wenn sich eine menschliche Figur in der positiven X Axe aufrecht stellt und nach der + Y Axe sieht, dann die + Z Axe zu seiner Linken liegt. – Bezeichnen wir die Coordinaten des Anfangspunktes des Stromelementes mit x', y', z' und die Componenten der Kraft welche der Pol μ auf dasselbe ausübt mit $X'\ Y'\ Z'$ so ist:

$$z' = 0$$

und auch $X' = 0$ und $Y' = 0$

Die ganze wirksame Kr. wird demnach $= Z'$ sein; diese ist aber nach (1), da

$$\sin(r, ds) = \frac{y'}{r}$$

$$Z' = \mu i ds \frac{y'}{r^3} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Wir übergehen jetzt zu einem beliebigen rechtwinkeligen Coordinatensysteme — in diesem seien die Coordinaten des Poles, also die Coord. des Anfangspunktes des ersten Systems a, b, c ; und die Coordinaten des Stromelementes $x'\ y'\ z'$.— Die Cosinuse der Winkel, welche die Axen des neuen Systems mit den Axen des alten Systems bilden sind tabellarisch zusammengestellt :

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Die analytische Geometrie giebt folgende Formeln der Transformation:-

$$x' = \alpha_1(x-a) + \beta_1(y-b) + \gamma_1(z-c)$$
$$y' = \alpha_2(x-a) + \beta_2(y-b) + \gamma_2(z-c)$$
$$z' = \alpha_3(x-a) + \beta_3(y-b) + \gamma_3(z-c)$$

und die Formeln:

$$X = \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z'$$
$$Y = \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z'$$

$$Z = \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z'$$

oder da $X' = 0$ und $Y' = 0$ wird:

$$X = \alpha_3 Z', \quad Y = \beta_3 Z' \quad Z = \gamma_3 Z'$$

Mit Berücksichtigung des Ausdruckes 2, und der Transformationsformel für y' ergiebt sich

$$X = \frac{\mu i ds}{r^3}\left\{\alpha_2\alpha_3(x-a) + \beta_2\alpha_3(y-b) + \gamma_2\alpha_3(z-c)\right\}$$

ähnliche Ausdrücke ergeben sich so auch für Y und Z. – Da $z' = 0$ ist, so kann man zu X die Grösse $-\alpha_2 z'$ addiren ohne seinen Werth zu verändern; ebenso kann man zu Y ~~+~~ $-\beta_2 z'$ und zu Z, $(-\gamma_2 z')$ addiren. – Setzt man dann für z' seinen Werth aus den Transformationsgleichungen so ergeben sich:

$$X = \frac{\mu i ds}{r^3}\left\{(y-b)(\beta_2\alpha_3 - \alpha_2\beta_3) + (z-c)(\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)\right\}$$

und noch zwei ähnlich gestaltete Ausdrücke für Y und für Z. – Diese Ausdrücke gestalten wir um mit Hülfe von folgender durch die analytische Geometrie gelieferten Relationen:

$$\pm\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3, \quad \pm\beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3, \quad \pm\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3$$

Es sind da die oberen positiven Zeichen zu nehmen wenn die zwei Coordinatensysteme der Art sind, dass je zwei entsprechende derselben ~~ihre~~ Axen durch Drehung des einen Systemes in parallele Lagen gebracht dieselbe positive Richtung gewinnen. – Wir werden das positive Zeichen brauchen, und beschränken ~~setzen~~ dadurch einigermassen die bis jetzt ganz willkürliche Lage des neuen Coordinatensystems. – Mit Hülfe dieser Relationen erhalten nun der Ausdruck für X, und auch die ähnlich zu bildenden Ausdrücke für Y und Z folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\mu i ds}{r^2}\left\{\beta_1(z-c) - \gamma_1(y-b)\right\} \\ Y &= \frac{\mu i ds}{r^2}\left\{\gamma_1(x-a) - \alpha_1(z-c)\right\} \\ Z &= \frac{\mu i ds}{r^2}\left\{\alpha_1(y-b) - \beta_1(x-a)\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen statt den Winkeln α, β, γ die Projectionen des Stromelementes auf die Coordinatenaxen in die Rechnung einführen; diese sind:

$$dx = ds\,\alpha, \qquad dy = ds\,\beta, \qquad dz = ds\,\gamma.$$

Dadurch werden die Ausdrücke (3)

$$(4) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\mu i}{r^3}\left\{(z-c)\,dy-(y-b)\,dz\right\} \\ Y &= \frac{\mu i}{r^3}\left\{(x-a)\,dz-(z-c)\,dx\right\} \\ Z &= \frac{\mu i}{r^3}\left\{(y-b)\,dx-(x-a)\,dy\right\} \end{aligned} \right.$$

2. Wirkung die das Stromelement auf den Magnetpol ausübt. –

Dass eine solche Kraft wirkend sein muss schliessen wir aus dem Principe der Wirkung und Gegenwirkung; in Folge dieses Principes wissen wir auch dass diese Kraft der Art ist, dass wenn man Pol und Strom fest verbindet sie sich das Gleichgewicht halten. – Demnach ist diese Kraft vollständig durch die 6 Gleichgewichtsbedingungen bestimmt, welche für den Strom und den Magneten gelten müssen, angenommen dass diese fest verbunden ~~wären~~ sind. – Drei dieser Gleichgewichtsbedingungen sagen aus, dass die Summen der Componenten sämmtlicher Kräfte in jeder der 3 Coordinatenrichtungen gleich 0 sind. – ~~Nennt~~ Bezeichnet man demnach die Componenten der

Kraft, mit welcher das Stromelement den Pol zu verschieben sucht mit A, B, C und mit X, Y, Z wie früher die Componenten der Kraft mit welcher der Pol auf das Stromelement einwirkt; so sind diese 3 Bedingungsgleichungen:

$$A + X = 0$$
$$B + Y = 0$$
$$C + Z = 0$$

Da also X, Y, Z schon in (4) bestimmt wurde so ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} A &= -X \\ B &= -Y \\ C &= -Z \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Resultante dieser Kräfte ist gleich, aber entgegengesetzt wie die der Kräfte X, Y, Z – sie sucht den Magnetpol zu verschieben. – Die Richtung dieser Verschiebung ist dadurch bestimmt dass man sich in dem Strome eine menschliche Figur denkt, welche in der Richtung von den Füssen zum Kopfe durchflossen wird, und nach dem Pole sieht, der Strom sucht dann den Pol ~~zu~~ nach seiner Linken abzuwenden. –

Die drei andern Gleichgewichtsbedingungen sprechen aus, dass beim Gleichgewichte, die Drehungsmomente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf drei den Coordinatenaxen parallelen Drehungsaxen gleich 0 sein müssen. Wir legen die Drehungsaxen durch den Pol also durch den Punkt a, b, c parallel den Coordinatenaxen, und bezeichnen die Drehungsmomente, welche von dem Stromelemente also von den Kräften X, Y, Z herrühren mit

$M_x \quad M_y \quad M_z$

Hiezu kommen noch die Drehungsmomente, welche von den Kräften A, B, C herrühren – ~~B. wird~~ sind eigentlich dahin gewiesen diese gleich 0 zu betrachten; da sie sich ja auf einen Punkt beziehen der in der Drehungsaxe liegt. – Da aber M_x etc. nicht $=0$ sind, und beim Gleichgewichte die Summe der Drehungsmomente doch $=0$ sein muss, so werden wir gezwungen anzunehmen, dass die Kräfte A B C den Pol um seine Axe zu drehen suchen. – Nennen wir dann die Drehungsmomente M_a, M_b und M_c so sind die 3 Bedingungen:

$$M_x + M_a = 0$$

(6) . . . . . $$M_y + M_b = 0$$

$$M_z + M_c = 0$$

Wenn dann M_x, M_y, M_z bekannt sind so ergiebt sich heraus M_a etc. – Die von 0 verschiedenen Werthe von M_a M_b M_c bleiben so lange unerklärlich bis man magn. Flüssigkeiten und namentlich annimmt, dass diese Flüssigkeit in einem Magnetpole als in einem Punkte concentrirt ist. – Die Ampère-sche Theorie definirt den Magnetpol nicht als einen Punkt sondern als einen Körper an dem verschiedene Theile als auch eine Axe unterscheidbar sind. – Ohne näher in die Betrachtung über die Möglichkeit des Daseins von M_a, M_b, M_c einzugehen, wollen wir ihre Werthe dadurch bestimmen dass wir die Ausdrücke für M_x M_y und M_z aufsuchen. – Das Drehungsmoment werden wir als positiv rechnen, wenn die Drehung nach der Linken Hand eines in der positiven Coord. Axe stehenden Menschen gerichtet – der mit ~~seinen~~ den Füssen auf dem Coord. Anfangspunkte ruht. – Dann ist:

$$M_x = (y-b)Z - (z-c)Y$$

$$M_y = (z-c)X - (x-a)Z$$

$$M_z = (x-a)Y - (y-b)X$$

Setzt man da die Werthe von X, Y, Z aus (1) ein, so folgt:

$$M_x = \frac{\mu i}{r^3}\left\{\left((y-b)^2+(z-c)^2\right)dx - (x-a)\left((y-b)dy+(z-c)dz\right)\right\}$$

Durch cyclische Vertauschung der Buchstaben erhält man in ähnlicher Form auch M_y und M_z. – Addirt man ~~unter~~ zu dem Ausdrucke unter der Parenthese $(x-a)^2 dx$ und subtrahirt dieselbe Grösse, so wird:

$$M_x = \frac{\mu i}{r^3}\left\{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)dx - (x-a)\left((x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz\right)\right\}$$

da aber

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

und folglich:

$$r\,dr = (x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz$$

ist, so folgt:

$$M_x = \mu i\,\frac{r\,dx-(x-a)dr}{r^2}$$

Es ist aber

$$\frac{r\,dx-(x-a)dr}{r} = d.\frac{x-a}{r}$$

wo $\frac{x-a}{r}$ den Cosinus des Winkels bedeutet den die Verbindungslinie r mit der X-Axe bildet; in Folge dessen ~~nimmt~~ nehmen der Ausdruck für M_x und die in gleicher Art ableitbaren Ausdrücke für M_y und M_z folgende ~~Gestalt~~ Formen an:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \mu i . d\cos(r,x) \\ M_y &= \mu i . d\cos(r,y) \\ M_z &= \mu i . d\cos(r,z) \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

in Folge der Gleichungen (6) ergeben sich dann auch:

$$\left.\begin{aligned} M_a &= -\mu i . d\cos(r,x) \\ M_b &= -\mu i . d\cos(r,y) \\ M_c &= -\mu i . d\cos(r,z) \end{aligned}\right\} \cdots (8)$$

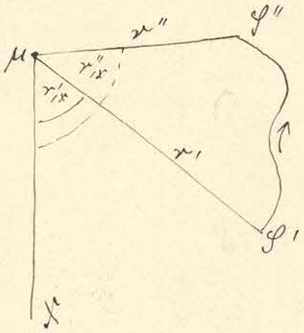
3. Wirkung eines endlichen Stromes auf einen Magnetpol. –

Um die Kraft vollständig zu bestimmen werden wir auch hier seine Componenten, und seine Drehungsmomente in in Bezug auf drei durch den Magnetpol den Coordinaten Axen parallel gelegten Axen zu bestimmen suchen. – Die Kraftcomponenten bezeichnen wir wie früher mit A, B, C und die Drehungsmomente mit $M_a\ M_b\ M_c$. – Für die Wirkung eines Stromelementes erhielten wir die Ausdrücke (8) – um die Wirkung des endlichen Stromes zu erhalten, müssen wir diese Ausdrücke über den endlichen Strom integriren, es ist dann:

$$M_a = -\mu i \int d.\cos(r,x)$$

$$M_b = -\mu i \int d.\cos(r,y)$$

$$M_c = -\mu i \int d.\cos(r,z)$$



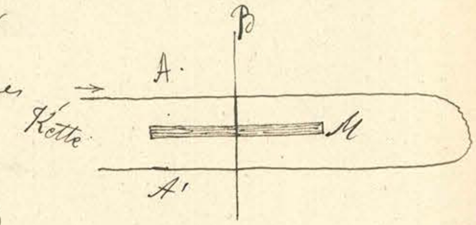
Die Integration ist über den Winkel auszudehnen den die zwei zu den Endpunkten des Stromes gezogenen Leitstrahle mit einander bilden. – Ist also der Strom ein ungeschlossener und bezeichnen wir diese Leitstrahle mit r' und r'' so giebt die Integr.

$$(9) \ldots \left\{ \begin{aligned} M_a &= -\mu i\,(\cos(r',x) - \cos(r'',x)) \\ M_b &= -\mu i\,(\cos(r',y) - \cos(r'',y)) \\ M_c &= -\mu i\,(\cos(r',z) - \cos(r'',z)) \end{aligned} \right.$$

Ist der Strom ein geschlossener, dann ist ~~für~~ r' identisch mit r'' und es ist dann für jede Gestalt des Stromes

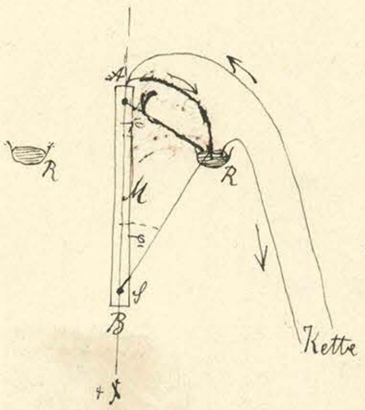
$M_a = 0 \qquad M_b = 0 \qquad M_c = 0$

Dass M_a M_b und M_c im Falle eines ungeschlossenen Stromes von 0 verschiedene Werthe haben – kann experimentell nachgewiesen werden. – Es ist unmöglich nicht geschlossene Ströme herzustellen. Um ihre Einwirkung auf die Drehung eines Magnetes doch zeigen zu können befestigt man den Magneten M an einem leitenden Drahte B, welcher an den Leitungsdrähten eines geschlossenen Stromes etwa wie auf Schienen verschiebbar ist. – Durch den Draht B wird der Strom verschlossen – und auf den Magneten wirkt dann der ganze geschlossene Strom – Wir zerlegen ihn in die Theile AA' und B. – Schiebt man nun den Draht B auf dieser Schiene vorwärts so halten sich die Kräfte MB und BM nach dem Principe der Wirkung und Gegenwirkung, da ja M und B fest verbunden sind. – Nicht so ist es mit den Kräften welche von den Stromtheilen A und A' herrühren – diese können in Bezug auf die Drehung des Magneten als ungeschlossen angesehen werden – und in der That rotirt der Magnet um seine Axe in Folge ihrer Einwirkung.



Um diese Rotation wirklich herstellen zu können stellt man einen Magneten (AB) der Art auf, dass er leicht um seine Axe rotiren kann. – An A befestigt man die Enden zweier Leitungsdrähte deren eines mit dem Pole einer galvanischen Kette verbunden ist, und das Andere mit seinem zweiten

Ende in eine mit Quecksilber gefüllte kreisförmige Rinne (R, taucht, welche senkrecht auf die Magnetaxe um diese herum ~~lau~~ kreist. – In dieselbe Quecksilberrinne taucht auch das eine Ende des Drahtes, welcher mit dem zweiten Pole der Kette communicirt. – Schliesst man dann den Strom, und ~~beweg~~ giebt dem Magneten einen mässigen Tangentialstoss – so setzt sich dieser in rasche, bald gleichförmig werdende Rotation. –



(lásd Jamin III 241)

Substituiren wir statt den Magneten zwei Magnetpole N und S, das erstere mit der Magn. Flüssigkeit μ das andere mit $-\mu$, so lässt sich das wirksame Drehungsmoment berechnen. –

Ist nämlich die Intensität des Stromes i, und ~~die~~ ihre Richtung die der Pfeile, so ist das auf den Nordpol wirksame Drehungsmoment:

$$\mu i(-1-\cos\varphi)$$

und das auf den Südpol wirksame

$$-\mu i(-1+\cos\varphi')$$

Also das ganze wirksame Drehungsmoment:

$$-\mu i(\cos\varphi+\cos\varphi')$$

Hierbei ist eine bestimmte Richtung für die positive x Axe festgesetzt. –

Da beim geschlossenen Strome die Drehungsmomente $=0$ sind, so sind die einzigen auf den Pol wirkenden Kräfte diejenigen welche diesen ~~sich~~ zu verschieben streben — diese bezeichnen wir mit A, B, C und wollen jetzt ihre Werthe näher untersuchen. — Diese erhalten wir in Folge von (5) durch Integration der (4):

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu i \int \frac{dy(c-z) - dz(b-y)}{r^3} \\ B &= \mu i \int \frac{dz(a-x) - dx(c-z)}{r^3} \\ C &= \mu i \int \frac{dx(b-y) - dy(a-x)}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

Die Integration ist auszudehnen über eine in sich zurückkehrende Stromcurve. — Wir werden zuerst diese Untersuchung für den Fall durchführen daß die Stromescurve eine unendlich kleine ist. — Wir wählen ferner ein Coordinatensystem dessen Anfangspunkt unendlich nahe zur Stromescurve liegt — in welchem also die Grössen x, y, z unendlich klein sind — während a, b, c endlich sein können. — Da:

$$\frac{c-z}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\ , \quad \frac{b-y}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \quad \frac{a-x}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}$$

so werden die Ausdrücke (10):

$$(11) \qquad A = -\mu i \int\left(dy \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} - dz \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\right)$$

wo $\quad r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$

Wir werden $\frac{1}{r}$ nach der Taylor-schen Reihe entwickeln, führen aber dabei eine Grösse ϱ ein welche durch die Gleichung

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

definirt ist; also den Werth von r für den Fall angiebt dass $x, y, z = 0$. –

Die Entwickelung nach der Taylor-schen Reihe giebt wenn wir die mit x^2, y^2, z^2 behafteten als unendlich kleine 2^ter^ Ordnung schon vernachlässigen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a} x - \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial b} y - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} z$$

Die Diff. Quot. $\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a}$ etc. sind immerhin noch Functionen von a, b, c, – der Ausdruck für $\frac{1}{r}$ in (11) gesetzt giebt:

$$A = -\mu i \int\left\{dy\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial c} - x\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial a \partial c} - y\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial b \partial c} - z\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial c^2}\right) - \right.$$

$$\left. - dz\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial b} - x\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial a \partial b} - y\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial b^2} - z\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial b \partial c}\right)\right\}$$

Die Integration ist in Bezug auf x, y, z auszu-zu führen, dabei können also die nach a, b, c genommenen Diff. Quot. als Constant vor den Integralzeichen genommen werden. – Zerlegt man nun diesen Ausdruck in die Summe von 8 Integralen, so verschwinden von diesen alle die sich unbestimmt ausführen lassen, denn da diese über eine geschlossene Curve zu nehmen sind, so ~~sich~~ sind die beiden Grenzwerthe identisch. Es sind demnach:

$$\int dy = 0 \qquad \int dz = 0$$

$$\int y\,dy = 0 \qquad \int z\,dz = 0$$

Auch die vier noch übrig bleibenden Integrale im Ausdrucke von A lassen sich durch die Bemerkung vereinfachen, dass zwei derselben gleich aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind. – Es ist nämlich

$$\int dyz = \int y\,dz + \int z\,dy$$

Da sich das Integral links unbestimmt ausführen lässt, so verschwindet es f. bei der Integration über die geschlossene Stromescurve. – Es ergiebt sich also:

$$\int y\,dz = -\int z\,dy$$

So umgeformt wird:

$$(12)\ldots \quad A = \mu i \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a\, \partial c} \int x\,dy - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial c^2} \right) \int y\,dz + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a\, \partial b} \int \overset{x\,dz}{\cancel{z\,dx}} \right\}$$

Diese Gleichung lässt sich noch weiter umformen, wenn wir in Betracht ziehen, dass:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial c^2} = 0$$

dann wird nämlich:

$$(13)\ldots \quad A = \mu i \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a^2} \int y\,dz + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a\, \partial b} \int z\,dx + \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial a\, \partial c} \int x\,dy \right\}$$

Durch cyclische Vertauschung der Argumente x, y, z und a, b, c erhält man die entsprechenden Werthe von B und C. –

Setzt man dann

$$(14) \quad q = -\mu i \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a} \int y\,dz + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial b} \int z\,dx + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial c} \int x\,dy \right\}$$

so werden:

$$(15) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{\partial q}{\partial a} \\ B &= -\frac{\partial q}{\partial b} \\ C &= -\frac{\partial q}{\partial c} \end{aligned}$$

Die Componenten der Kraft mit welcher der unendl. kleine geschlossene Strom auf den Magnetpol einwirkt sind also die negativen partiellen Differentialquotienten einer Function g. – Wir werden demnach diese Function g das Potential des unendlich kleinen geschlossenen Stromes in Beziehung auf den Magnetpol nennen können. – Wir werden jetzt zeigen, dass das Potential eines gewissen ganz bestimmten magnetischen Molecüls d. h. einer Vereinigung unendlich vieler Magnetpole mit g identisch ist; dass also der Strom in seiner Wirkung auf den Pol μ, die durch die Diff. Quot. von g bestimmt wird, durch dies Molecül ersetzt werden kann. –
Betrachten wir ein magnetischen Molecül, und in diesem einen Pol mit der Magn. Flüssigk. m. – ~~Er sein~~ Wir beziehen denselben auf ein Coordinatensystem dessen Anfangspunkt unendlich nahe zu ihm, also in dem magnetischen Molecül liegt, und bezeichnen seine Coordinaten mit x, y, z, während die Coordinaten des anderen Poles μ a, b, c sind. – x, y, z sind dann unendl. klein, a, b, c aber können auch endlich sein. –

$\cdot^{xyz}$ $\quad \cdot^{abc}_{\mu}$

Die ~~Kraft~~ Componenten der Kraft mit welcher der Pol m auf den Pol μ einwirkt, sind dann:

$$-\frac{\partial \frac{\mu m}{r}}{\partial a}\ ,\quad -\frac{\partial \frac{\mu m}{r}}{\partial b}\ ,\quad -\frac{\partial \frac{\mu m}{r}}{\partial c}$$

Also die Componenten der Kräfte ~~mit~~ welchen das ganze Molecül auf μ ausübt:

$$-\frac{\partial \sum \frac{\mu m}{r}}{\partial a}\ ,\quad -\frac{\partial \sum \frac{m\mu}{r}}{\partial b}\ ,\quad -\frac{\partial \sum \frac{\mu m}{r}}{\partial c}$$

Das Potential des Molecüls in Bezug auf μ ist demnach:

$$\sum \frac{\mu m}{r}$$

benütze ich hier die schon früher abgeleitete Entwickelung von $\frac{1}{r}$ nach der Taylor-schen Reihe:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a}x - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial b}y - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial c}z$$

so wird:

(16) ..... $$\sum \frac{\mu m}{r} = \mu \left\{ \frac{1}{\rho}\sum m - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a}\sum mx - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial b}\sum my - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial c}\sum mz \right\}$$

Sieht man negative Magn. Flüssigk. als negative Mengen positiven Flüssigkeiten an, so muss da man sich in jedem Molecül gleich viel von beiden Flüssigkeiten denkt:

$$\sum m = 0$$

sein. So folgt:

$$\sum\frac{m\mu}{r} = -\mu\left\{\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial a}\sum mx + \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial b}\sum my + \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial c}\sum mz\right\} \quad \dots (17)$$

Das Potential $\sum\frac{m\mu}{r}$ wird mit q identisch wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} i\int y\,dz &= \sum mx \\ i\int z\,dx &= \sum my \\ i\int x\,dy &= \sum mz \end{aligned}\right\} \quad \dots (18)$$

Die Summen $\sum mx$, $\sum my$, $\sum mz$ nennt man die Magnetischen Momente des Molecüls in Beziehung auf die Coordinatenaxen. – Wir haben hiemit gezeigt dass ein Magnetisches Molecül dessen Momente den Gleichungen (18) genügen einen unendl. kleinen geschlossenen Strom in seiner Wirkung auf einen Magnetpol ersetzen kann. –

Sind diese Magn. Momente in Beziehung auf 3 Axen gegeben so lassen sie sich berechnen für alle andern sich in einem Punkte rechtwinkelig schneidenden Axen. – Diese magn. Momente sind von dem Anfangspunkte dieser Axen unabhängig; +) sie hängen nur von den Richtungen derselben ab. –

+) denn wenn $x = \xi - a$ so wird $\sum mx = \sum m\xi - \sum ma = \sum m\xi - a\sum m$
$= \sum m\xi$ da $\sum m = 0$

Legen wir durch den Anfangspunkt unseres schon festgestellten Coordinatensystems x, y, z noch einen zweiten in welchem die Coordinaten ~~mit~~ desselben Punktes ξ, η, ζ bezeichnet werden sollen, so ist nach bekannten Formeln der Analytischen Geometrie:

$$\xi = x.\cos(\xi, x) + y.\cos(\xi, y) + z.\cos(\xi, z)$$

$$\eta =$$

$$\zeta =$$

Also folgt:

$$\sum m\xi = \cos(x, \xi)\sum xm + \cos(\xi, y)\sum my + \cos(\xi, z)\sum mz$$

(19) .... $$\sum m\eta =$$

$$\sum m\zeta =$$

wo $\sum m\xi$, $\sum m\eta$, $\sum m\zeta$ die magn. momente in Beziehung auf die neu eingeführten Axen sind. – Setzen wir nun:

(20) .... $$\sqrt{(\sum mx)^2 + (\sum my)^2 + (\sum mz)^2} = k$$

und nehmen eine Richtung α so an, dass:

$$\cos(\alpha, x) = \frac{\sum mx}{k}$$

$$\cos(\alpha, y) = \frac{\sum my}{k}$$

$$\cos(\alpha, z) = \frac{\sum mz}{k}$$

so folgt aus (19)

$$\sum m\xi = k\left\{\cos(x,\xi)\cos(x,\alpha) + \cos(y,\xi)\cos(y,\alpha) + \cos(z,\xi)\cos(z,\alpha)\right\}$$

der Ausdruck in der Parenthese ist aber $\cos(\xi,\alpha)$ also ist:

$$\sum m\xi = k\cos(\xi,\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Hieraus sehen wir schon das Gesetz nach welcher das magnetische Moment bei Veränderung der Axenrichtung variirt – es bleibt nämlich immer proportional dem Cosinuse des Winkels welchen die Momentaxe mit der Richtung α bildet. – Diese Richtung α, ist die Richtung in welcher das Magnetische Moment ein Maximum d. i. $= k$ wird, man nennt sie die magnetische Axe des Moleciils. – In Bezug auf Axen, die senkrecht zur magnetischen Axe sind ist das Magnetische Moment ein Minimum d. i. $= 0$. – Das Magnetische Moment ~~in die~~ bezogen auf Richtung der Magn. Axe, also das Maximum desselben nennt man Magnetische Intensität, schlechthin auch Magn. Moment ohne Angabe der Axenrichtung. – Es müssen nun die magnetische Axe und die magnetische Intensität des Moleküls gefunden werden, welches nach obigen Betrachtungen für die unendlich kleine Stromcurve, bezüglich seiner Wirkung auf den Pol μ substituirt werden kann. – Wir wollen diese Bestimmung für den Fall ausführen, dass die unendl. kl. Stromescurve eine Ebene Curve sei; wir wählen dann diese Ebene der Curve zur yz Ebene des Coordinatensystems, und nehmen die x Axe desselben senkrecht zu dieser Ebene an; so dass für alle Punkte der Stromcurve $x = 0$ ist. – In Folge dessen wird auch $dx = 0$, und diese Werthe in 18 gesetzt auch:

$$\cancel{\Sigma mx = 0}$$

$$\Sigma my = 0 \qquad , \quad \Sigma mz = 0$$

Da wir aber sahen; dass die magnetischen Momente nur für solche Axen $= 0$ werden können, welche senkrecht zur magn. Axe stehen; so folgt dass die Axen y und z zu derselben senkrecht stehen, die x Axe aber mit ihr zusammenfällt ~~mit der~~. – Die magnetische ~~Axen~~ Axe des Moleküls, welches an Stelle eines unendl. kleinen ebenen geschlossenen Stromes substituirt werden kann ~~ist~~ steht also senkrecht zur Ebene dieses Stromes. — Die magnetische Intensität dieses Molecüls ergiebt sich:

$$k = i\int y\,dz$$

Oder da $\int y\,dz$ die Fläche ist, welche die Stromcurve einschliesst und welche wir mit λ bezeichnen wollen so ist sie

$$k = i\lambda$$

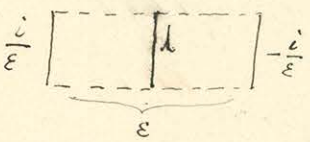
Wie können wir uns aber ein solches Molecül vorstellen? Wir können es ansehen als die Vereinigung zweier Magnetpole deren eis die Magn. Fl. Menge $+\mu$ die andere die Menge $-\mu$ enthält und deren Verbindungslinie senkrecht steht zur Ebene des Stromes. — Für diese zwei Pole muss

$$\sum mx = \mu\varepsilon$$

sein, und sie werden wirklich ein Molecül von der beschriebenen Wirkungsart bilden, wenn nur ε und μ der Gleichung

$$i\lambda = \mu\varepsilon$$

genügen. — Eine zweite Art wie wir uns dieses Molecül vorstellen können ist die dass wir es als bestehend aus zwei der Stromebene parallele der Stromescurve gleiche um ε von einander abstehende Flächen betrachten, welche



mit magnetischer Flüssigkeit von gewisser Dichtigkeit bedeckt sind. – Diese Dichtigkeit ist für die eine der Flächen $= +\frac{i}{\varepsilon}$ für die andere aber $= -\frac{i}{\varepsilon}$; das Moment dieses Systems ist dann in der Richtung der Magn. Axe ~~ist~~ offenbar auch $= i\lambda$. –

Wir untersuchen jetzt die geometrische Bedeutung des Potentials des unendl. kleinen geschlossenen Stromes, oder was dasselbe ist des statt diesem substituirbaren Magn. Moleküls in Bezug auf ~~einen~~ den Pol μ im Punkte a, b, c. –

Der Ausdruck dieses Potentials, den wir in der Gleichung (14) dargestellt haben reduzirt sich unter der Annahme dass die Stromcurve eine ebene Curve ist und dass sie in der YZ Ebene liegt, zu folgendem:

$$q = -\mu i \lambda \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a}$$

da

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

so ist

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial a} = -\frac{a}{\rho^3}$$

also:

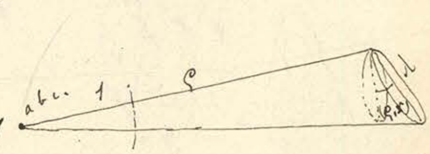
$$(22) \quad \ldots\ldots \quad q = \frac{\mu i a \lambda}{\rho^3}$$

da $\frac{a}{\rho} = \cos(r, x)$ so ~~kann~~ werde ich auch schreiben können:

$$q = \mu i \lambda \frac{\cos(\varrho, x)}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

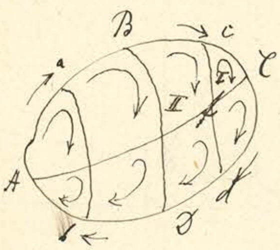
$\lambda \cos r, x$ ist die Projection der von dem unendl. kleinen Strome umkreisten Fläche auf eine Ebene, oder was gleichbedeutend ist auf eine Kugel dessen Radius unendlich gross gegen λ ist. — Da wir annehmen dass ~~die~~ Entfernung ϱ des Stromes vom Pole ~~sei~~ unendl. gross gegen die Stromescurve sei; so können wir mit diesem Radius eine Kugel beschreiben so dass $\lambda \cos(\varrho, x)$ die Projection von λ auf diese Kugel wird. —

$\frac{\lambda \cos(\varrho, x)}{\varrho^2}$ ist demnach die scheinbare Grösse der Stromescurve vom Pole aus gesehen — es ist nämlich das Flächenstück welches ~~der~~ ein Kegel aus ~~dem~~ einer mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel ausschneidet, dessen Spitze ~~mit~~ ~~dem~~ Kugelmittelpunkt also der Pol ist, und dessen Leitlinie die unendl. kleine Stromescurve ist. — Das Potential des unendlich kleinen ebenen geschl. Stromes ist also proportional mit seiner scheinbaren Grösse vom Pole aus gesehen. —



Nach diesen Betrachtungen wird es möglich sein die Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf den Magnetpol zu bestimmen —

Wir werden nämlich zeigen, wie man sich eine endli-
chen geschlossenen Strom vor~~gestellt~~stellen ~~werden~~ kann
als einen Complex unendlich vieler unendlich kleiner Strö-
me, und dass das Potential des ~~geschlossenen~~
endlichen Stromes gleich ist der Summe der Potentiale
dieser unendlich kleinen Ströme; und werden
dann schliesslich auch die Vertheilung der magneti-
schen Flüssigkeiten aufsuchen, welche den geschl.
endl. Strom in ~~dieser~~ seiner Wirkung auf den Magnet-
pol ersetzen können. –



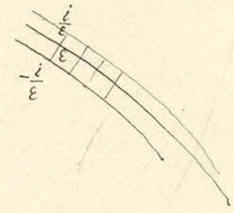
Es sei ABCD die geschlossene Stromescurve, gleichviel
ob eben oder doppelt gekrümmt, die in der Richtung
der Pfeile von einem Strom von der Intensität i
durchflossen wird. – Durch die Stromescurve denken
wir uns eine ganz beliebige Fläche gelegt und diese
dann durch Linien wie sie z. B. AC, BD, ab etc. dar-
stellen in beliebig viele Theile getheilt. – In den
Contouren eines jeden solchen Theiles möge sich
nun ~~ein~~ in der Richtung der ↻ ein Strom bewegen, ein
Strom dessen Intensität in allen Theilen dieselbe und
zwar = i ~~ist~~, also die Intensität des Stromes ABCD
ist. – ~~Jede im innern von ABCD gebildete Theillinie
bildet die Grenze zweier Theile der Fläche~~ Betrachtet

man nun einen solchen Stromtheil cf, so sieht man dass derselbe von zwei gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen wird — diese zwei Ströme die sich aufheben, heben sich natürlich auch in Bezug all' ihrer Wirkungen auf. – Dasselbe gilt für alle im Inneren der Stromcurve $ABCD$ gelegenen Stromtheile, welche die Grenze zwischen Stromcurven bilden — Da sich also all' diese Stromtheile aufheben; so sieht man ein dass die Wirkung dieses ganzen Systems von kleinen Strömen gleich ist der Wirkung des Stromes $ABCD$ in welchen sie inbeschrieben werden. – Auf diese Weise kann man also für jeden geschlossenen Strom ein System von kleinen geschlossenen Strömen substituiren. – Da wir die Anzahl dieser ~~klein~~ Ströme beliebig wählen können, so werden wir sie auch unendl. gross ~~an~~ ~~ihre~~ G. die Ströme selbst also unendlich klein annehmen können, und kommen so zu dem Schlusse, dass ein endlicher geschlossener Strom stets ersetzt werden kann durch unendlich viele unendlich kleine und eben deshalb als eben betrachtbare Ströme, welche die Elemente einer beliebigen Fläche umfliessen, die durch den ursprünglichen Strom gelegt ist. –

Das Potential des geschlossenen Stromes in Bezug auf einen Pol ist nun offenbar gleich der Summe der Potentiale aller jener unendlich kleinen geschlossenen Ströme, deren System für ihn substituirt werden kann. – Das Potential eines solchen Stroms ist aber proportional seiner scheinbaren Grösse vom Pole aus gesehen, und folglich ist die Summe aller dieser Potentiale, also ist das Potential des endlichen geschlossenen Stromes ~~gleich~~ proportional der Summe der scheinbaren Grösse aller unendl. kl. Ströme, also ~~gleich~~ proportional der scheinbaren Grösse des endlichen Stromes vom Pole aus gesehen. – Diese Betrachtung zeigt auch dass das Potential zweideutig ist, denn der Kegel dessen Spitze wir zur geometrischen Darstellung der scheinbaren Grösse im Pole zu denken haben und dessen Leitlinie die geschl. Stromescurve ist ~~schneidet aus der~~ theilt Kegelfläche in zwei Theile deren jeder als scheinbare Grösse des Stromes angesehen werden kann. – Nennen wir das eine Flächenstück K so wird demnach das andere $(4\pi - K)$, dieses letztere muss aber wenn wir die Zeichen streng berücksichtigen wollen, was wir bis jetzt nicht thaten negativ genommen werden, so wie es mit $K - 4\pi$ bezeichnen müssen.

Trotz der Zweideutigkeit des Potentials sind also die Componenten der Kraft, welche der geschlossene Strom auf den Pol ausübt doch eindeutig bestimmt.–

Wir werden jetzt auch zeigen können wie der endl. geschlossene Strom in seiner Wirkung auf einen Magnetpol durch Magnetische Flüssigkeiten ersetzt werden kann.– Ersetzen wir nämlich diesen Strom, wie wir es eben jetzt thaten durch ~~eine Elementenströme~~ das System unendl. kleiner Ströme, welche die Elemente einer durch ihn gelegten Fläche umfliessen – so werden wir für jede dieser Elementenströme ein magnetisches Molecül substituiren können.– ~~Für~~ Jedes dieser Magnetischen Molecüle werden wir uns so vorstellen können wie wir es auf Seite 120 thaten; wir werden uns nämlich im Abstande ε zwei unter sich und mit der Stromcurve s parallele Flächen zu denken haben, welche oberhalb resp. unterhalb s liegen, von gleicher Grösse als diese sind, und mit Magnetischer Flüssigkeit von der Dichtigkeit $\frac{i}{\varepsilon}$ resp. $-\frac{i}{\varepsilon}$ bedeckt sind.–



Die Summe all dieser so gedachten Molecüle ersetzt den Strom in seiner Wirkung auf den Pol.

Denken wir uns demnach durch die ganz beliebige Stromescurve eine vollkommen willkürliche Fläche gelegt, und denken uns oberhalb und unterhalb dieser Fläche zwei zu ihr parallele unendlich nahe Flächen mit magnetischer Flüssigkeit von der gleichmässigen Dichtigkeit $\frac{i}{\varepsilon}$ resp. $-\frac{i}{\varepsilon}$ bedeckt; so ist die Wirkung der auf diese Art verbreiteten magnetischen Flüssigkeiten auf einen Magnetpol gleich der Wirkung des endl. geschlossenen Stromes auf denselben.–
Dies ist der Ampère-sche Satz.–
Dieser Satz ~~schon~~ besteht nicht wenn der Pol in die erwähnte Fläche zu fallen kommt, denn die Ableitung desselben wurde unter der Voraussetzung gemacht dass die Entfernung des Pols vom unendl. klein Strom unendlich gross gegen die Dimensionen dieses Strom, also von der Ordnung des endlichen Stroms sei.– Diesem Übelstand ist sehr leicht durch passende Wahl der ganz von der Willkür abhängenden Fläche aus zu weichen.–

16/4

4. Wirkung eines Magnetpols auf einen endlichen Strom.–

Wir werden hierbei die Wirkung eines Magnetpols auf ein Stromelement in anderer Weise aussprechen– indem wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden; dabei müssen wir aber annehmen dass die Stromelemente nicht absolut fest mit einander verbunden sind, sondern Verschiebungen oder auch Verlängerungen und Verkürzungen erleiden können.–

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten spricht aus dass wenn ein System in Gleichgewicht sein soll die Summe der virtuellen Momente in Bezug auf eine den Bedingungen des Systems genügende Verrückung derselben gleich 0 sein muss.–

Unter dem virtuellen Momente einer Kraft versteht man das Product derselben mit der virtuellen Verschiebung, d. i. der Verschiebung des Angriffspunktes in der Richtung der Kraft.– Dieses Product ist positiv genommen die Arbeit welche geleistet wird bei der genannten Verrückung des Angriffspunktes, negativ genommen ist es die Arbeit welche erfordert wird, um diese Verschiebung hervorzubringen. – Demnach kann man dies Princip auch so aussprechen, dass beim Gleichgewichte eines Systems die bei einer dem Systeme entsprechenden Verschiebung geleistete Arbeit gleich sein muss der zu dieser Verschiebung erforderlichen Arbeit. –

Die Componenten der Kraft mit welcher ein Pol a, b, c. mit magn. Flüssigk. μ auf einen Stromelement wirkt:

$$(4) \ldots \left\{ \begin{aligned} X &= \mu i \frac{dy(z-c) - dz(y-b)}{r^3} \\ Y &= \mu i \frac{dz(x-a) - dx(z-c)}{r^3} \\ Z &= \mu i \frac{dx(y-b) - dy(x-a)}{r^3} \end{aligned} \right.$$

Denken wir uns nun das Stromelement unendlich wenig verschoben, und nennen die Componenten dieser Verschiebung, d. i. die virtuellen Verschiebungen in der Richtung der Kraftcomponenten δx, δy, δz; so ist nach dem genannten Princips, für den Fall des Gleichgewichts:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

Ich wähle nun das bis jetzt willkürliche Coordinatensystem so dass sein Anfangspunkt (x, y, z) und die Richtung seiner Y axe die Richtung des Stromelementes sei – dann ist:

$$x = 0 \qquad y = \varrho \qquad z = 0$$
$$dx = 0 \qquad dy = ds \qquad dz = 0$$

Wählen wir nun die x Axe so dass $\delta x = 0$ und δz = positiv wird, so folgt da auch $Y = 0$,

das Gesammt.moment $= Z\delta z$

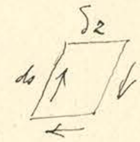
Also in Folge der Gleichungen (4):

$$Z\delta z = \frac{\mu i\, ds\, a}{r^3}\,\delta z$$

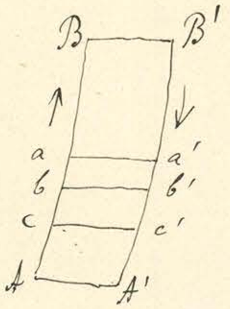
Da aber $ds\,\delta z$ ~~die Fläche ist~~ das unendl. kleine Rechteck ist welches das Stromelement bei seiner Verschiebung beschrieben hat, und wir dasselbe mit λ bezeichnen wollen so ist das Gesammtmoment:

$$Z\delta z = \mu i\,\frac{a}{r^3}\,\lambda \qquad \ldots\ldots \qquad (24)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit (22) dem Ausdrucke für das Potential eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes in Beziehung auf den Magnetpol. – Aus dieser Identität ist zu schliessen, dass das gesuchte Moment gleich ist dem Potentiale eines unendlich kleinen Stromes, welcher die vom Stromelemente bei der Verschiebung beschriebene Fläche mit der Intensität i umkreist. – Die Richtung des Stromes im verschobenen Elemente ist die entgegengesetzte

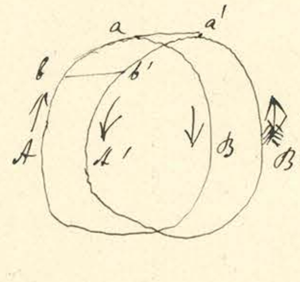


der Richtung desselben in dess ursprünglichen Lage. – Es hat nun keine Schwierigkeit von hier aus zu dem Ausdrucke des Momentes der Kräfte zu gelangen, welche von einem Magnetpol auf einen endlichen Strom ausgeübt werden, in Beziehung auf irgend eine virtuelle Verschiebung dieses Stroms. – Sei AB der Strom in seiner ursprünglichen Lage A'B' derselbe nach seiner Verschiebung. – Wir denken uns AB in Elemente getheilt, und berechnen das Moment für ein jedes solches Element z. B. für ab; ist seine Lage nach der Verrückung a'b', so ist das Moment gleich dem des Potentials eines Stroms ba a'b' der um die Fläche fliesst die jenes Element beschrieben hat. – Für das Element bc gilt das Gleiche. – In der zu bildenden Summe dieser Momente werden sich aber diejenigen Glieder aufheben, welche von Linien wie bb' herrühren, da eine solche Linie von zwei entgegengesetzten gleichen Strömen durchflossen wird. – Man kommt so zu dem Schlusse, dass das Moment der Kraft, mit welcher ein Pol auf einen endlichen Strom wirkt, gleich ist dem Potentiale des geschlossenen Stromes in Bezug auf den Pol, der mit gleicher Intensität



wie der ursprüngliche Strom, die Fläche umkreist, die der Strom bei seiner Verrückung beschrieben hat. –

Für einen endlichen geschlossenen Strom lassen sich diese Resultate in anderer Weise aussprechen. – Jeder Punkt eines solchen Stromes kann als Anfangs und zugleich als Endpunkt angesehen werden. – Ist nun ABA der geschlossene Strom vor der Verrückung A'B'A' derselbe nach der Verrückung, so werden wir das Gesammte Moment als die Summe der Momente der Elementarströme ansehen können – und gelangen so zu dem Resultate dass das Gesammte Moment gleich ist der Summe der Potentiale zweier Ströme, welche die ursprüngliche und die verschobene Stromcurve mit gleicher aber entgegengesetzter Intensität umfliessen. – Es heben sich ja alle Stromtheile von der Art wie z.B. (a, a') oder (b b') auf da sie von gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen werden. – Nennt man q das Potential von ABA q das von A'B'A' unter der Annahme dass die Stromesrichtung dieselbe, wie die in ABA wäre q', so ist das gesuchte Moment:



$$= q - q'$$

das heisst das Moment der von einem Pol auf einen geschlossenen Strom ausgeübten Kräfte in Bezug auf irgend eine Verschiebung des Stroms ist gleich der negativen Veränderung des Potentials des geschlossenen Stroms in Bezug auf den Pol, welche durch jene Verschiebung hervorgebracht wird. –

5. Bemerkung. –

Ein ganz ähnliches Gesetz lässt sich auch für die Kräfte ableiten, mit denen ein geschlossener Strom auf einen Pol wirkt – wir wissen dass diese Kräfte ein Potential haben; nennen wir dieses q, so sind die Componenten $A\,B\,C$ der vom geschlossenen Strome auf den Pol $a\,b\,c$ ausgeübten Kraft

$$A = -\frac{\partial q}{\partial a}$$

$$B = -\frac{\partial q}{\partial b}$$

$$C = -\frac{\partial q}{\partial c}$$

Das Gesammtmoment dieser Kräfte für eine Verrückung des Poles, dessen Projectionen auf die Richtungen der Kraftcomponenten $\delta a, \delta b, \delta c$ sind, ist dann:

$$A\delta a + B\delta b + C\delta c = -\left(\frac{\partial q}{\partial a}\delta a + \frac{\partial q}{\partial b}\delta b + \frac{\partial q}{\partial c}\delta c\right)$$
$$= -\delta q$$

Also das Gesamtmoment der Kräfte mit welchen ein geschl. Strom auf einen Magnetpol wirkt ist gleich der negativen Veränderung des Potentials dieses Stromes in Bezug auf den Pol, welcher es bei der ~~virtuellen~~ Verschiebung erleidet. – Es ist ein analoges Resultat als das im vorigen § bei der Untersuchung der Kraft die ein Magnetpol auf einen Strom ausübt erzielte. –

Wir haben gesehen dass ein unendlich kleiner geschlossener Strom ersetzt werden kann durch ein magnetisches Molecül, und dass somit auch ein endlicher geschlossener Strom ersetzt werden kann durch ein System von unendlich vielen magnetischen Molecülen, mit einem Worte durch einen Magneten. – Von dem Momente eines Magneten in Beziehung auf einen Pol wird somit ähnliches gelten. – Betrachten wir aber die Wirkung eines Magneten auf einen endlichen geschlossenen Strom und umgekehrt, so werden wir den Magneten ~~auf~~ in seine Pole zerlegen und betrachten diese Wirkungen als Summe der Wirkungen der einzelnen Pole. – Wir gelangen hierdurch zu dem Schlusse, dass das Moment der Kräfte mit welchen ein geschl. endl. Strom auf einen Magneten wirkt, in Bezug auf eine Verschiebung des Magneten gleich ist der negativen Veränderung, welche dadurch in dem Potential des Stroms in Bezug auf den Magneten statt gefunden hat – und dass das Moment der Kräfte mit welchen ein Magnet auf ~~einen~~ diesen Strom wirkt, in Bezug auf eine Verrückung des Stroms gleich ist der Veränderung des Potentials jener Kräfte in Folge der Verrückung des Stroms. –

IV

Electrodynamik

Wirkung eines electrischen Stromes auf einen anderen. –

1. ~~Erste~~ Ableitung des Ausdruckes für die Kraft. welche zwei Ströme auf einander ausüben. –

Dass solche Kräfte wirklich existiren wies Ampère experimentell nach – ohne auf diese Experimente Rücksicht zu nehmen wollen wir den genannten Ausdruck mit Hülfe der Hypothese ableiten; dass das Magnetische Molekül, welches wir statt einem unendl. kleinen geschlossenen Strom in Beziehung auf seine Wirkung auf einen Magnetpol setzen konnten, diesen Strom auch in all seinen anderen Wirkungen ersetze. – Es seien $x\,y\,z$ die Coordinaten des Anfangspunktes eines Stromelementes ds, welches mit der Intensität i durchflossen wird und a, b, c die Coordinaten eines Pols, welcher die magn. Flüssigkeitsmenge μ enthält – die Componenten der Kraft mit der der Pol auf das Stromelement wirkt sind dann:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= i\mu\,\frac{(z-c)\,dy - (y-b)\,dz}{r^3} \\ Y &= i\mu\,\frac{(x-a)\,dz - (z-c)\,dx}{r^3} \\ Z &= i\mu\,\frac{(y-b)\,dx - (x-a)\,dy}{r^3} \end{aligned}\right.$$

Ich kann und will nun statt dem Stromelement mir eine gewisse ~~Menge~~ magnetisches ~~Flüssigkeit~~ molecül gesetzt denken. – Und nenne $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der Kraft, welche der magnet pol μ auf die magnetische Flüssigkeitsmenge 1 in x, y, z ausübt – diese sind dann:

$$\mathfrak{X} = \mu\,\frac{(x-a)}{r^3}$$

$$\mathfrak{Y} = \mu\,\frac{y-b}{r^3}$$

$$\mathfrak{Z} = \mu\,\frac{z-c}{r^3}$$

dies in (1) substituirt:

$$(2)\ldots\quad \begin{aligned} X &= i\,(dy\,\mathfrak{Z} - dz\,\mathfrak{Y}) \\ Y &= i\,(dz\,\mathfrak{X} - dx\,\mathfrak{Z}) \\ Z &= i\,(dx\,\mathfrak{Y} - dy\,\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

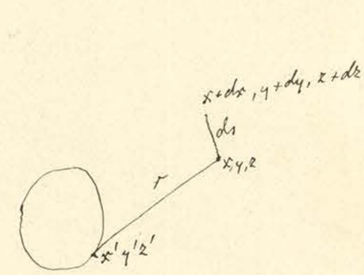
Statt des einen Magnetpols μ denke ich mir jetzt ein ganzes System derselben auf das Stromelement einwirkend – dann wird:

$$\Sigma X = i\,dy\,\Sigma\mathfrak{C} - i\,dz\,\Sigma\mathfrak{B}$$

$$\Sigma Y = i\,dz\,\Sigma\mathfrak{B} - i\,dx\,\Sigma\mathfrak{C}$$

$$\Sigma Z = i\,dx\,\Sigma\mathfrak{B} - i\,dy\,\Sigma\mathfrak{A}$$

ΣX, ΣY, ΣZ sind die Kräfte welche ~~ein~~ das System von magn. Flüssigkeiten auf das Stromelement ausübt, und $\Sigma\mathfrak{A}$, $\Sigma\mathfrak{B}$, $\Sigma\mathfrak{C}$ die Kräfte mit welchen das genannte System auf die magn. Flüssigk. menge 1 im Punkte x, y, z einwirkt. — Die Gleichungen (2) bestehen also auch, wenn wir unter X, Y, Z die Componenten der Kraft verstehen, welche eine ~~endliches Magnet~~ gewisse Menge magnetischer Flüssigkeiten auf das Stromelement ausübt, und ~~unter~~ mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Componenten der Kraft bezeichnen, welche dieselbe ~~Magnet~~ Flüssigkeitsmenge auf die magn. Flüssigkeitsmenge 1 im Punkte x, y, z ausübt. — Wir machen jetzt von der ~~gemacht~~ aufgestellten Hypothese Gebrauch indem wir uns ~~den Magneten~~ die erwähnte magn. Flüssigkeitsmenge für einen endlichen ~~ge~~ geschlossenen Strom gesetzt denken, und die Kraftcomponenten als von diesem Strom herrührend ansehen. — Nennen wir die Intensität dieses Stromes i', ~~einen Punkt~~ die Coordinaten eines Punktes desselben x', y', z', so ist wie wir bereits auf Seite 109 gezeigt haben:



$$\mathfrak{X} = i'\int \frac{dy'(z-z') - dz'(y-y')}{r^3}$$

$$\mathfrak{Y} = i'\int \frac{dz'(x-x') - dx'(z-z')}{r^3}$$

$$\mathfrak{Z} = i'\int \frac{dx'(y-y') - dy'(x-x')}{r^3}$$

wo die Integration über die ganze geschlossene Stromescurve so auszudehnen ist. – Diese Werthe zur Bildung von X, Y, Z benützt geben:

$$X = ii'\int \frac{dx'((y-y')dy + (z-z')dz) - (x-x')(dydy' + dzdz')}{r^3}$$

und noch zwei ähnliche Ausdrücke für Y und Z. – Wir bringen diese auf eine symmetrischere Form durch gleichzeitige Addition und Subtraction der Grösse $(x-x')dxdx'$ resp $(y-y')dydy'$ und $(z-z')dzdz'$ zu dem Zähler unter dem Integralzeichen:

$$X = ii'\int \frac{dx'((x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz) - (x-x')(dxdx' + dydy' + dzdz')}{r^3}$$

(3)
$$Y = ii'\int \frac{dy'(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (y-y')(\qquad\qquad\qquad)}{r^3}$$

$$Z = ii'\int \frac{dz'(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (z-z')(\qquad\qquad\qquad)}{r^3}$$

Diese Kraftcomponenten stellen sich als Integrale dar die über die ganze Stromescurve zu nehmen sind es liegt sehr nahe sie als die Summe der Kraftcomponenten zu betrachten, welche jedes einzelne ~~Strom~~ Element des geschlossenen Stromes auf das Stromelement ds ausübt. – Wir kommen so zur Aufgabe die Wirkung eines Stromelementes auf ein anderes zu untersuchen. Die Kraftcomponenten sind in diesem Falle:

$$X = \frac{ii'}{r^2}\left[dx'(\qquad\qquad) - (x-x')(\qquad\qquad)\right]$$

$$Y = \frac{ii'}{r^2}\left[dy'(\qquad\qquad) - (y-y')(\qquad\qquad)\right] \qquad (4)$$

$$Z = \frac{ii'}{r^2}\left[dz'(\qquad\qquad) - (z-z')(\qquad\qquad)\right]$$

Die Aufgabe der Bestimmung der Wirkung zweier Stromelemente ist scheinbar eine zweideutige ~~denn~~, den Gleichungen (3) genügend können wir nämlich ~~zu~~ dem Ausdrucke von X in (4) noch folgende Grösse addiren

$$\frac{\partial F}{\partial x'}dx' + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' + \frac{\partial F}{\partial z'}dz'$$

wo F eine ganz beliebige Function von $x'y'z'$ ist – In dieser Function F können und müssen sogar die Argumente x, y, z, dx, dy, dz vorkommen; ja damit diese hinzuzuaddirenden Glieder von der Ordnung der anderen Glieder seien muss sogar F eine homogene lineare Function von derselben sein. Auf diese Weise werden:

$$X = ii'\left[\frac{dx'(\quad)-(x-x')(\quad)}{r^3} + \frac{\partial F}{\partial x'}dx' + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' + \frac{\partial F}{\partial z'}dz'\right]$$

(5) ... $$Y = ii'\left[\frac{dy'(\quad)-(y-y')(\quad)}{r^3} + \frac{\partial G}{\partial x'}dx' + \frac{\partial G}{\partial y'}dy' + \frac{\partial G}{\partial z'}dz'\right]$$

$$Z = ii'\left[\frac{dz'(\quad)-(z-z')(\quad)}{r^3} + \frac{\partial H}{\partial x'}dx' + \frac{\partial H}{\partial y'}dy' + \frac{\partial H}{\partial z'}dz'\right]$$

Wo G und H auch ganz willkürliche Functionen von $x' y' z'$ und homogene lineare Functionen von $x\, y\, z$ und von $dx\, dy\, dz$ sind. –

Durch Integration dieser Ausdrücke so, als wie durch Integration der Ausdrücke (4, über die ganze <u>geschlossene</u> Stromescurve gelangen wir zu den Ausdrücken (3) der Componenten der Kraft, welche der endliche Strom auf das Stromelement ds ausübt. –

Diese Zweideutigkeit der Aufgabe heben wir durch eine neue Hypothese auf; wir nehmen nämlich an dass die Kraft mit welcher die zwei Stromelemente aufeinander wirken die Richtung der Verbindungslinie derselben hat. –

Dann ist:

$$X : Y : Z = x-x' : y-y' : z-z'$$

~~und~~ setzt man dann die Werthe (5, hier ein, so sieht man dass dieser Proportion nur durch eine Wahl von F, G, H genügt werden kann, wenn nämlich:

$$F = (x-x')\,\frac{(x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz}{r^2}$$

$$G = (y-y')\,\text{———————} \qquad\qquad (6)$$

$$H = (z-z')\,\text{———————}$$

Dies in (5) gesetzt ergiebt sich:

$$X = \frac{x-x'}{r}R$$

$$Y = \frac{y-y'}{r}R \qquad \ldots\ldots \qquad (7)$$

$$Z = \frac{z-z'}{r}R$$

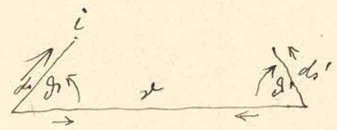
Die hierbei neu eingeführte Grösse R ist die Resultante der Componenten X, Y, Z; ~~also~~ oder auch die Kraft selbst, welche die zwei Stromelemente auf einander ausüben — diese ist durch den Ausdruck bestimmt:

$$R = ii'\left\{3\frac{\big((x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz\big)\big((x-x')dx' + (y-y')dy' + (z-z')dz'\big)}{r^4} - 2\,\frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r^2}\right\} \ldots\ (8)$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf die Coordinatenaxen und in Bezug auf die gestrichenen und den ungestrichenen Coordinaten, was ja auch sein muss da die Kraft mit der ein Stromelement den anderen abstosst gleich sein muss der Kraft mit welcher dieser letztere ersteren abstosst. – Der Ausdruck für R ist positiv wenn die Richtungen beider Ströme positiv sind – negativ wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind – R ist also die abstossende Kraft der Stromelemente. – Diesen langen Ausdruck für R vereinfachen wir durch Einführung der Längen ds und ds' der Stromelemente, und durch folgende Winkel

$$(ds, r) = \vartheta$$

$$(ds', r) = \vartheta'$$



Die mögliche Zweideutigkeit in der Definition dieser Winkel, wird durch die Figur aufgehoben, in welcher die Richtungen der Pfeile die Richtungen der positiv wachsenden Winkels bezeichnen. –

Wenn die beiden Stromelemente in derselben Ebene liegen so sind ihre Richtungen durch die Winkel ϑ und ϑ' vollständig bestimmt – ist dies aber nicht der Fall so ist noch der Winkel

$$(ds, ds') = \varepsilon$$

in die Rechnung einzuführen. –

Nach dem viel gebrauchten Satze der anal. Geom.:

$$\cos(a,b) = \cos(a,x)\cos(b,x) + \cos(a,y)\cos(b,y) + \cos(a,z)\cos(b,z)$$

ergeben sich dann:

$$\cos\vartheta = \frac{(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz}{r\,ds}$$

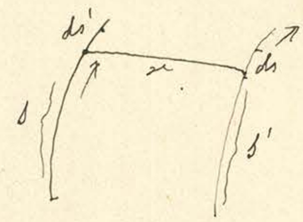
$$\cos\vartheta' = \frac{(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz'}{r\,ds'}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{ds\,ds'}$$

Diese Cosinuse in den Ausdruck für R eingeführt:

$$R = -ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(3\cos\vartheta\cos\vartheta' + 2\cos\varepsilon\right) \qquad \ldots\ldots (9)$$

Hierdurch wird die Abstossungskraft bestimmt ~~mit~~ welcher zwei Stromelemente aufeinander ausüben.– Diesen Ausdruck können wir auch noch auf eine andere Form bringen – denken wir uns nämlich die Stromelemente ds und ds' zweien endlichen Strömen angehörend, und nennen den Abstand der Anfangspunkte der Stromelemente also der Punkte x, y, z und $x'y'z'$ von je einem beliebigen Anfangspunkte in den endlichen Strome zu welchem sie angehören s und s'; so werden ds und ds' wirklich Differentials von s und s'.– Ein bestimmter Werth von s bestimmt dann die Coordinaten x, y, z, und ebenso sind durch



einen gegebenen Werth von s' auch x'; y'; z' bestimmt – mit einem Worte es sind x, y, z Functionen von s, $x' y' z'$ aber Functionen von s' – ist der Verlauf der ganzen Stromescurve gegeben so sind auch diese Functionen bekannt. – Nach der Definition

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

ist r eine Function von s und s', so dass:

$$r\frac{\partial r}{\partial s} = (x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dz}{ds}$$

$$r\frac{\partial r}{\partial s'} = (x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}$$

Also:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = -\cos\vartheta'$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nochmals partiell nach s', so ergiebt sich:

$$\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'}\right)$$

also:

$$\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\cos\varepsilon$$

Diese gefundenen Werthe für $\cos\varepsilon$, $\cos\vartheta$, $\cos\vartheta'$ in (1) eingesetzt.

$$R = \frac{i i' ds\, ds'}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

17/4

2. Ableitung des Ausdruckes für die Abstossungs-Kraft zweier Stromelemente nach Ampère-s Versuchen.-

Ampère ging von der Hypothese aus dass die Kraft welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben, die Richtung ihrer Verbindungslinie habe, und dass sie direct proportional mit den Längen und Intensitäten dieser Stromelemente, aber ~~direct~~ umgekehrt proportional sei mit einer Potenz n ihrer Entfernung ~~sei~~.- Diese Kraft wird ausserdem noch abhängig sein von den Richtungen der Stromelemente.- Bezeichnen ds und ds' die Längen; i und i' die Intensitäten der Stromelemente, r ihre Entfernung, ferner ϑ und ϑ' die Winkel, welche ds resp. ds' mit der Verbindungslinie r bilden, und schliesslich η den Winkel zwischen einer durch r und ds und einer durch r und ds' gelegten Ebene — so setzt Ampère voraus, dass die Abstossungskraft R beider Stromelemente bestimmt ist durch den Ausdruck:

$$(1) \ldots\ldots \quad R = \frac{i i' ds ds'}{r^2} f(\vartheta, \vartheta', \eta)$$

Durch 4 Versuche bestimmt nun Ampère die Grösse n und die $f(\vartheta, \vartheta', \eta)$

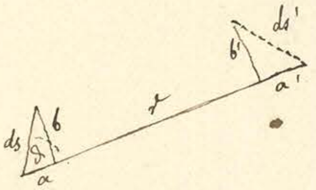
I Beim ersten Versuche wurde einem leicht beweglichen Drahte durch welchen ein Strom floss ein zweiter durch einen Strom durchflossener Leiter genähert, welcher ~~von~~ aus einem umgebogenen Drahte bestand, dessen beide Zweige sehr nah neben einander herliefen. – Es zeigte sich gar keine Bewegung des beweglichen Stromtheiles, was offenbar zeigt dass die Kräfte welche von den zwei Stromtheilen ac und cb herrühren sich aufheben. – Aus diesem Versuche ist zu schliessen, dass die Kraft welche ein in einem Sinne durchflossenes Stromelement auf ein anderes ausübt entgegengesetzt ist der Kraft mit welcher dasselbe in umgekehrter Richtung durchflossene Stromelement ~~ein~~ auf das andere einwirkt. –

II Beim zweiten Versuche wurde dem umgebogenen Theil des ~~ta~~ Drahtes eine andere Form gegeben, derselbe umwand nämlich den geraden Theil in vielen Windungen, möglichst eng sich an denselben anschmiegend. –

Auch wenn dieser in der Richtung der Pfeile von einem Strome durchflossene Draht dem beweglichen Stromtheil genähert wurde blieb dieser in Ruhe. Was offenbar zeigt dass der gerade Theil des Stromes die entgegengesetzte Kraft ausübt als der gekrümmte in ~~entg~~ umgekehrter Richtung durchflossene Theil. – Da nach dem ersten Versuche der vom umgekehrten Strome durchflossene gerade Theil die entgegengesetzte Kraft ausübt; so kommt man zu den Schlusse, dass ein gerader Stromtheil auf einen anderen dieselbe Kraft ausübt, als ein sich diesem Stromtheil eng anschliessender beliebig gekrümmter Strom, welcher in demselben Sinne zwischen denselben Ein und Austrittspunkt als der gerade Stromtheils fliesst. – Dieser Schluss bildet den Kern der Ampère-schen Ableitung, denn aus ihr folgt die Möglichkeit der Zerlegung eines Stromelementes in seine Componenten – ganz in der Art wie man eine Kraft in Folge des Satzes ~~der~~ vom Parallelogramm der Kräfte zerlegen kann. –

In Folge dieses Resultates zerlege ich die Stromelemente ds und ds' wirklich in ihre Componenten

Es sei die durch ds und r gelegte Ebene die Ebene der Zeichnung, und die punktirte Linie die Projection von ds' welches sich ausserhalb derselben annehme, auf die Zeichnungsebene.–

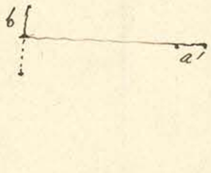


ds zerlege ich in zwei Componenten a und b, ds' in drei Componenten a', b', c', diese Componenten werden in derselben Richtung und mit derselben Intensität durchflossen als ihre Resultanten.–

Ich kann nun R als die Resultante d. i. die Summe der Kräfte betrachten welche diese Componenten aufeinander ausüben; so dass wenn ich ~~durch~~ unter dem Symbol (a,a') die abstossende Kraft verstehe, welche die Componente a auf die Componente a' ausübt, u.s.w. für R folgende Summe gesetzt werden kann:

$$R = (a,a') + (b,b') + (a,c') + (b,c') + (a,b') + (b,a')$$

Gewisse dieser Kraftcomponenten verschwinden.– Betrachten wir z.B. die Kraft welche a' auf b ausübt für sich allein.– Drehen wir das System a' b um die Axe r in welcher auch a' liegt um 180° so verändern wir an der Richtung und Grösse der Kraft (b,a') gar nichts; verschieben wir ~~dann~~



b um seine eigene Länge, d. i. um eine unendlich kleine Länge, so dass er wieder in ~~die~~ seine ursprüngliche Lage kommt; so verändern wir die Kraft (b, a') auch nur um eine Grösse, welche unendlich klein, also zu vernachlässigen ist. – Bei dieser Operation haben wir aber an Stelle des Stromelementes b ein Stromelement gesetzt in welchem die Stromesrichtung die entgegengesetzte des ersteren ist, und haben nichts desto weniger gezeigt dass dabei die Richtung der auf a' ausgeübten Kraft unverändert bleibt – also dem I^{ten} Versuche widersprochen.. Dieser Wiederspruch erfordert dass man setze:

$$(b, a') = 0$$

Aus ganz ähnlichem Grunde müssen auch

$$(a, b') = 0 \quad \text{und} \quad (a, c') = 0$$

gesetzt werden. –

Ampère sagt dass dieser Art der Schlussfolgerung sich auch auf (b, c') übertragen lässt, und setzt auch

$$(b, c') = 0$$

Es scheint mir aber diese Behauptung eine Lücke in der Theorie zu sein, und ich werde es als eine neue Hypothese ansehen dass eben $(b, c') = 0$ ist

Der Ausdruck für R reducirt sich also zu folgendem:

$$R = (a,a') + (b,b')$$

~~Für~~ Die Kräfte (a,a') und (b,b') lassen sich durch die Ampère-sche Voraussetzung ausdrücken als das Product von $\left(\frac{ii'}{r^n}aa'\right)$ resp. von $\left(\frac{ii'}{r^n}bb'\right)$ mit den constanten Werthen der Function $f(\vartheta,\vartheta',\eta)$, welche diese für die bei diesen Elementen bestimmten Werthe von $\vartheta, \vartheta', \eta$ annimmt.– Ich werde diese Constanten durch willkürliche Zeichen ausdrücken, ~~d.i.~~ und setzen:

$$(a,a') = -\frac{ii'}{r^n}aa'ck$$

$$(b,b') = -\frac{ii'}{r^n}bb'c$$

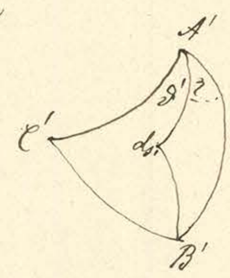
Worin die genannten Constanten $(-ck)$ und $(-c)$ sind.– a und a', b und b' bedeuten die Längen der entsprechenden Stromcomponenten, wir werden diese durch $\vartheta, \vartheta', \eta$ und ds, ds' darstellen.– Es sind

$$a = ds\cos\vartheta \qquad a' = ds'\cos\vartheta'$$

$$b = ds\sin\vartheta$$

um auch die ~~andern~~ Componenten (b') zu finden denken wir uns eine Construction auf der Kugelfläche ausgeführt.– Es sollen durch den Mittelpunkt der Kugel 3 Geraden parallel zu a' b' c' gezogen werden, deren Schnittpunkte mit der Kugeloberfläche A', B', C' sein mögen. – Denken wir uns durch den Mittelpunkt noch eine mit ds' parallele Gerade gelegt, und bezeichnen seinen Schnittpunkt mit der Kugelfläche ~~durch~~ mit $(ds'$, ; so ~~ist~~ entspricht der Bogen $A'ds'$ dem Winkel δ' und es ist $\sphericalangle B'A'ds' = \eta$

Aus dem Dreieck $A'B'ds'$, welches ein rechtwinkeliges ist folgt dann



$$\cos(B', ds') = \sin\delta' \cdot \cos\eta$$

Da aber:

$$b' = ds' \cos(B'ds')$$

ist, so ist:

$$b' = ds' \sin\delta' \cos\eta$$

Es werden dann:

$$(a,a') = -\frac{ii'}{r^n} \cdot ck\, ds\, ds' \cos\delta \cos\delta'$$

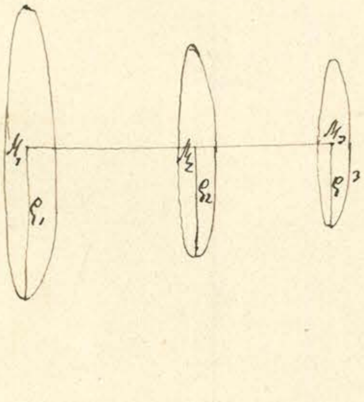
$$(b,b') = -\frac{ii'}{r^n}\, c \cdot ds\, ds' \sin\delta \sin\delta' \cos\eta$$

Die Summe dieser Componenten ist:

$$R = -\frac{ii' ds\, ds'}{r^n}\, c\left(\sin\delta \sin\delta' \cos\eta + k \cos\delta \cos\delta'\right) \quad \ldots\ldots (2)$$

Die weitere Aufgabe ist noch die Constanten n und k zu bestimmen, – c betrachten wir als von der Einheit der Stromstärke abhängend, und werden es zur Definition derselben benützen. –

III Der dritte Versuch ergiebt den Werth von n, durch den Beweis des Satzes dass die Kraft mit welcher sich zwei Stromelemente abstossen ungeändert bleibt, wenn diese in demselben Maasse an Grösse zunehmen als sie von einander entfernt werden. – Ampère stellte 3 kreisförmige Drähte in parallelen Ebenen so auf, dass ihre Mittelpunkte ($M_1 M_2 M_3$) in derselben Ebene lagen, und ihre Ebenen senkrecht auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte waren. – ~~Die äusse~~ Durch diese Kreise wurden Ströme von gleicher Intensität geleitet, und es wurden die zwei äusseren befestigt, während der mittlere auf der Axe $M_1 M_3$ leicht verschiebbar war. – Die Radien der Kreise waren so gewählt dass



$$\varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_2 : \varrho_3$$

sei. – Die äusseren Kreisströme übten Kräfte auf den mittleren aus, und dieser musste in Folge derselben eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage einnehmen. – Bei dieser Gleichgewichtslage fand sich:

$$M_1 M_2 : M_2 M_3 = \varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_2 : \varrho_3$$

Demnach ist das ~~durch~~ von dem Kreise 1 und 2 ~~gemachte~~ gebildete System, ähnlich dem von 2 und 3 gebildeten. – Wir kommen so zu dem in anderen Worten schon angedeuteten Satze, dass die Kraft mit welcher sich ~~die zu ähnlichen Systemen angehörenden~~ zwei Stromelemente abstossen, ~~welch~~ in allen ähnlichen Systemen (in welchen die Stromintensität gleich sein muss) dieselbe ist. – In Folge dieses Satzes muss also R ungeändert bleiben ~~in~~, während $ds\,ds'$ und r in gleichem Maasse zunehmen. – Da der Ausdruck diese Grössen nur in dem Factor $\frac{ds\,ds'}{r^n}$ enthält, so muss dieses unverändert bleiben beim gleichmässigen Wachsthum der erwähnten Argumente. – Dies ist aber nur unter einer Bedingung nämlich dann möglich, wenn

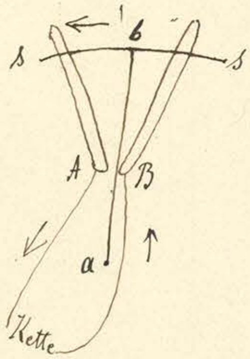
$$n = 2$$

Also wird:

$$R = -c\,\frac{i i'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta + k\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \quad \ldots\ldots (3)$$

IV. Die letzte Aufgabe ist noch k zu bestimmen. – Diese löst der vierte Versuch. – Auf einem Brette befinden sich zwei mit Quecksilber gefüllte

Idee!



Rinnen, so dass das Quecksilber convex über
die Fläche des Brettes hervorragt, dieselben sind
in einem spitzen Winkel gegeneinander geneigt, und
ihre Enden A und B die sehr nahe zusammentreffen sind
mit den Polen einer galvanischen Kette verbunden. –
I Ein kreisbogenförmiger Draht ss verbindet
beide Quecksilberrinnen, dieser Draht ist
um eine Axe, welche in dem Mittelpunkte des
Kreisbogens liegt leicht drehbar; ~~derselbe~~
~~ist aber mit der durch einen~~ durch ein
Scharnier bei b ist es aber ermöglicht dass diese
Drehungsaxe auch ausserhalb des Kreismit-
telpunktes zu fallen kommt. –
Wird nun durch dieses System ein Strom durchge-
leitet, so tritt bei allen Lagen von ss gegen ab
Bewegung ein, ausser wenn ss vertical auf
ab ~~liegt~~ steht. – Da A sehr nahe zu B ist so können
wir KABK als einen geschlossenen Strom betrach-
ten, und können die beschriebene ~~Wir~~ Erscheinung
als die Wirkung dieses geschlossenen Stromes auf
das Stromelement ss ansehen. – Das Experiment
führt demnach zum Schluss, dass die Kraft mit
welcher ein geschlossener Strom auf das Stromele-

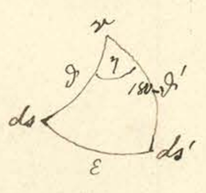
ment wirkt keine Componente hat in der Richtung des Stromelementes also auf dasselbe senkrecht steht. – Diesen Satz werden wir jetzt in Form einer Gleichung ausdrücken. – Die Componente der Kraft mit welcher das Stromelement ds' das andere Stromelement ds in der Richtung dieses letzteren ist $= R\cos\vartheta$; betrachte ich aber ds' als Element eines geschlossenen Stromes, so ist die Componente der Kraft, welche dieser geschlossene Strom auf ds ausübt in derselben Richtung:

$$= \int R\cos\vartheta$$

welches Integral über die ganze geschlossene Stromescurve auszudehnen ist. – In Folge des eben abgeleiteten Satzes muss dieses Integral $=0$ sein, d.i. wenn wir für R seinen in (3, ausgedrückten Werth setzen, so muss:

$$\int \frac{(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta + k\cos\vartheta\cos\vartheta')\cos\vartheta\, ds'}{r^2} = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

Wo wir beide Seiten der Gleichung mit dem in Bezug auf die Integration constanten Factor $-c\,i\,i'\,ds$ dividirten. – Wir werden sehen dass dieser Gleichung nur gewisse Zahlenwerthe von k genügen können – wir führen vor allem in dieselbe statt des Winkels η den schon früher gebrauchten Winkel ε d.i. den Winkel ein, welchen die Richtungen beider Stromelemente mit einander bilden. – Diese Transformation lässt sich besten durch eine Projection auf die Kugeloberfläche ausführen – durch den Mittelpunkt einer Kugel legen wir drei ~~da~~ zu ds, ds' und r parallele Geraden – die Punkte in welchen die positiven Richtungen derselben die Kugeloberfläche schneiden bezeichnen wir mit den entsprechenden Buchstaben. – Die positiven Richtungen von ds und ds' sind die Richtungen in welchen sie vom electrischen Strome durchflossen werden – die positive Richtung von r ist die von ds nach ds' gehende. –



In dem sphärischen Dreieck $r\,ds\,ds'$ ist nach trig. Formeln:

$$\cos\varepsilon = -\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta$$

Den hieraus folgenden Werth von $\cos\eta$ in (4) gesetzt wird diese Gleichung:

$$0 = \int \frac{ds'(\cos\varepsilon + (1+k)\cos\vartheta\cos\vartheta')\cos\vartheta}{r^2}$$

Wir benützen die auf Seite 144 angegebenen Gleichungen:

$$\cos\vartheta = -\frac{\partial r}{\partial s}$$

$$\cos\vartheta' = -\frac{\partial r}{\partial s'}$$

$$\cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}$$

Demnach ist:

$$0 = \int\frac{ds'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - k\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)\frac{\partial r}{\partial s} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Es ist wenn wir $r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}$ partiel nach s' differentiiren:

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left(r^{-k}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\right) = -k\,r^{-(k+1)}\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'} + r^{-k}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

$$= \frac{1}{r^{k+1}}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - k\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)$$

Also wird (5):

$$0 = \int\frac{ds'}{r^2}\cdot r^{k+1}\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial s'}\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

$$0 = \int ds'\,r^{k-1}\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial s'}\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

$$0 = \int ds'\,r^{2k-1}\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial s'}\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

Mit Benützung der Formel $d\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,du$ wird:

$$0 = \int ds'\,r^{2k-1}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right)$$

Gebrauchen wir die Formel:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

und setzen:

$$u = r^{2k-1} \quad \text{also} \quad du = r^{2k-2}\,dr\,(2k-1)$$

und $$v = \left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$$

so ist:

$$0 = \left[r^{2k-1}\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] - \int\left(r^{-k}\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2(2k-1)\,r^{2k-2}\,dr$$

Die beiden Grenzen der Integration sind dieselben, da ja diese über eine geschlossene Stromescurve auszudehnen ist – es ist demnach der in Klammern stehende Ausdruck $= 0$, und es ~~wird~~ muss sein:

$$(6) \ldots\ldots \quad 0 = (2k-1)\int \frac{dr}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$$

Diese Gleichung gilt für jede geschlossene Curve, für gewisse Curven kann aber das Integral nicht verschwinden. – So z. B. für eine Stromescurve, welche aus einer beliebigen Curve und ~~dersen~~ deren Sehne gebildet ist – wenn diese letztere ~~senkrecht~~ vertical zu dem Stromelemente ds steht. –

Man kann sich in diesem Falle das Integral zusammengesetzt denken aus zwei Integralen deren eines ~~die~~ den Krummen, deren anderes den Geradeinigen Theil des Stromes in sich schliesst. – Das erste dieser Integrale wird einen bestimmten Werth haben das zweite muss $= 0$ sein, da innerhalb der Grenzen desselben $\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\vartheta = 0$ ist – die Summe beider ist also auch von 0 verschieden. – Da nun nachgewiesen ist ~~dass~~ das Integral im Ausdrucke 6 für gewisse Stromescurven nicht $= 0$ ist, und ~~das~~ die Gleichung doch für alle solche Curven bestehen muss, so folgt dass die Constante

$$2k - 1 = 0$$

also dass

$$\underline{k = \frac{1}{2}}$$

sein muss. –

Demnach wird der Ausdruck (3):

$$R = -c\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)$$

führen wir dann statt η den Winkel ε ein, so wird:

$$R = -c\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon + \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \quad \ldots\ldots \ (7)$$

c ist eine von der Einheit der Stromstärke abhängige ~~Grösse~~ Constante, Ampère setzt sie $= 1$ und definirt dadurch eine Einheit für die Stromintensität, welche ~~er die~~ man die electrodynamische nennt, um sie von der schon früher definirten electromagnetischen Einheit zu unterscheiden.–

Die electrodynamische Einheit der Stromstärke ($c=1$) verhält sich zu der electromagnetischen ($c=2$) wie $1 : \sqrt{2}$.–

Es ist üblicher die electromagnetische Einheit zu benutzen, setzen wir also $c=2$ so gelangen wir zu dem auf anderem Wege schon abgeleiteten Ausdrucke (10) auf Seite 145.–

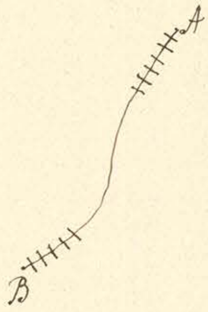
Ampère: Théorie des phénomènes electro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience. 1826.–

18/4

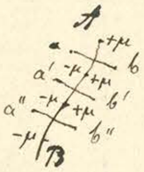
3. Die Ampère-sche Theorie des Magnetismus.–

Ampère erklärt alle magnetischen und electromagnetischen Erscheinungen aus der gegenseitigen Wirkung unendlich kleiner geschlossener Ströme, welche er an Stelle der magnetischen Molecüle substituirt.– Er verwirft also die Existenz magnetischer Flüssigkeiten und nimmt an, dass die Molecüle eines jeden Körpers, welcher magnetisch ist, oder wenigstens fähig ist magnetisch zu werden fortwährend von einem unendl. kleinen geschlossenen Strom durchflossen sind. Diese Molecularströme haben keinen Widerstand zu überwinden, verbrauchen demnach auch keine lebende Kraft – ihre Wirkungen heben sich beim natürlichen Zustande des Körpers gegenseitig auf. – Beim Magnetisiren des Körpers wird diesen Molecularströmen eine bestimmte Richtung gegeben – ihre Ebenen werden möglichst parallel gemacht. – Ein vollkommen magnetisirter Körper wäre der, in dem die Ebenen aller Molecularströme vollständig parallel gemacht wären. –

Der Hauptbeweggrund zur Annahme der Ampère-schen Theorie könnte der sein, dass wir uns nicht vorstellen können wie ein Strom einen Pol um die Axe zu drehen sucht, wenn wir den Pol nach der alten Theorie, also als einen Punkt definiren in welchem eine gewisse Menge magnetischer Flüssigkeit concentrirt ist. – Die Ampère-sche Theorie dagegen erklärt die Möglichkeit einer solchen Drehung. – Denken wir uns eine beliebige endliche Linie AB in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch jede dieser Theilungspunkte vertical zur Linie gleiche unendl. kleine Ebenen gelegt, welche alle von electrischen Strömen gleicher Intensität in demselben Sinne umflossen werden; so haben wir ~~den gebildet~~ ein System von unendl. kleinen Strömen gebildet (~~einen~~ welches Ampère ein Solenoid nennt.- (von σoλενoειδης = kanalförmig)



Die Wirkung eines solchen endlichen Solenoids ist gleich der zweier entgegengesetzter Magnetpole d. i. eines Magneten, denn für jeden unendl. kleinen Strom des Solenoids ~~können~~ lässt sich, ~~wie~~ wie früher sahen, ein magnetisches Molecül substituiren, welches von einem unterhalb ~~und~~ einem Oberhalb der Stromebene gelegenen Pole gebildet ist ~~– Enthält~~, der obere Pol enthält die Flüssigk. menge μ; ~~es ist enthält~~ der untere die Menge $-\mu$,- bei dieser Substitution fallen aber alle ~~Pole~~ positiven Pole mit gleichen negativen zusammen, wie derselben ausgenommen, welche ;.- Die Wirkungen aller dieser substituirten Pole heben sich aber auf, den letzten ~~ne~~ positiven Pol bei A, und den letzten negativen bei B ausgenommen — die Wirkung des ganzen endlichen Solenoids AB ist also gleich der Wirkung zweier Pole $+\mu$ und $-\mu$, welche unendl. nahe zu seinen Endpunkten A, B liegen.-



Liegt der Endpunkt B des Solenoids in der

Unendlichkeit, so verschwindet die Wirkung des in B liegenden negativen Poles, – man kann also einen Magnetpol betrachten als ein unendlich langes Solenoid, gleich viel welche Gestalt dasselbe hat. – Definirten man den Pol auf diese Weise so hat die Vorstellung einer Drehung desselben ~~g~~ nicht die geringste Schwierigkeit. –

4. Kräfte, welche zwei ~~L~~ geschlossene endliche Ströme auf einander ausüben. –

In Folge unserer bisherigen Betrachtungen lassen sich die Componenten der Kraft, mit welcher ein Magnet auf einen geschlossenen Strom wirkt, als partielle Differentialquotienten eines Potentials darstellen; da wir aber an Stelle dieses Magneten einen geschlossenen Strom substituiren dürfen, so werden wir dasselbe auch von den Kräften behaupten können, welche zwei endliche geschlossene Ströme auf einander ausüben. – Wir stellen uns denn nach die Aufgabe dass Potential dieser Kräfte aufzusuchen. – Ein Weg den wir dabei einschlagen könnten liegt auf der Hand; substituiren wir nämlich an Stelle des einen ~~Str~~ Stromes einen Magneten; so ist ja das Potential der Kräfte welche dieser auf den anderen Strom ausübt, das gesuchte Potential – da aber dieser Weg zu einer 4fachen Integration führt, so werden wir um dies zu vermeiden lieber einen anderen verfolgen. –

Wir ~~neh~~ betrachten zwei geschlossene Ströme 1 und 2, in welchen die variabeln ~~Längen~~ Entfernungen von einem beliebigen Anfangspunkte mit s resp. mit s' bezeichnet sein sollen – und suchen das Potential Q der Kräfte, mit welchen 2 (s') auf 1 (s) wirkt. – Dieses Potential können wir als die Summe der Potentiale der Kräfte ansehen, mit welchen jedes Stromelement ds' auf die Summe der Stromelemente ds, also auf den ganzen geschlossenen Strom 1 wirkt. –

Denken wir uns nun dass der Strom 1 in Folge der Einwirkung von 2 eine unendlich kleine Verrückung erlitten hat, ~~und~~ so ist, wenn wir mit R wie früher die Kraft bezeichnen, mit welcher sich zwei Stromelemente ds und ds' von einander zu entfernen streben, und r die Entfernung dieser Stromelemente vor der Verrückung nennen, das Moment der Kraft R in Bezug auf die virtuelle Verschiebung δr der Stromelemente:

$$R\delta r$$

R sowohl als r sind, wie wir bereits sahen Functionen von s und s', integriren wir demnach $R\delta r$ ~~über~~ in Bezug auf s ~~und~~ über die ganze geschlossene Stromescurve 1, so gelangen wir zu dem Ausdrucke des Momentes ~~mit~~ der Kraft mit welcher ds' auf die ganze Stromescurve 1 ~~aus~~ einwirkt.

Das Integral dieses Ausdruckes in Bezug auf s' über die Stromescurve 2 ist dann das Gesammtmoment der Kräfte mit welchen der geschlossene Strom 1 den geschlossenen Strom 2 abzustossen strebt, dasselbe ist also:

$$\iint R\delta r$$

Nach vorher abgeleiteten Sätzen ist aber das virtuelle Moment der Kraft mit welcher ein Stromelement auf ein anderes einwirkt, gleich der bei dieser virtuellen Verschiebung eingetretenen ~~der~~ negativen Veränderung des Potentials dieser Kraft — dasselbe gilt auch für das Moment ~~der~~ Kraft mit welcher ein geschlossener Strom ~~ein~~ Strom-

Kräfte in Folge der virtuellen Verschiebung δr.

In Folge einer ~~der~~ Bemerkung in III, 5 kann man sagen, dass das Moment der Kräfte mit welchen der Strom 1) auf den Strom 2) einwirkt gleich ist der negativen Veränderung des Potentials dieser

Die Berechtigung dieser Aussage wird evident, wenn wir uns statt dem Strome 2 Magn. Flüssigkeiten gesetzt denken. —

168

dement abstösst, und schliesslich auch für das Moment der Kraft, welche ein geschl. Strom auf einen anderen ausübt; so dass:

$$(1) \ldots\ldots \qquad -\delta Q = \iint R\,\delta r$$

Nach Substitution des Werthes von R aus dem im 15 dieses Abschnittes mit (10) bezeichneten Gleichung, wird:

$$(2) \ldots\ldots \qquad \delta Q = -ii' \iint \frac{ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)\cdot\delta r$$

Worin die Voraussetzung gemacht ist dass r wirklich als Function von s und s' dargestellt ist. — Denken wir uns nun, dass der Strom 1 aufeinander folgend unendlich viele virtuelle Verschiebungen erleidet, und dass er so allmählig in die Unendlichkeit rückt, und bilden für jeden dieser Verrückungen einzeln die Veränderung des Potentials, — so gelangen wir zu dem merkwürdigen Schlusse dass die Summe all dieser Veränderungen gleich ist dem Potentiale Q, also dem Potentiale im Anfangszustand des Stromes 1. — Denn wenn diese Veränderungen mit

δQ, δQ_1, δQ_2 .... δQ_n .... bezeichnet werden, so sind sie $\delta Q = Q - Q_1^*$, $\delta Q_1 = Q_1 - Q_2$, ... etc.
bildet man die Summe dieser Veränderungen so heben sich alle Q-s fort bis auf das erste und letzte, das erste ist aber Q in der ursprünglichen Lage, das zweite ~~aber~~ dagegen sein Werth bei unendlicher Entfernung des Stromes 1 vom Strome 2 also $= 0$. – In Bezug auf diesen Schluss ist es vollkommen gleichgültig, welcher Art die Verschiebungen sind, durch welche 1 in die Unendlichkeit gerückt wird wir dürfen also den einfachsten Fall annehmen, nämlich den, dass der Strom ohne seine Gestalt zu ändern sich selbst parallel fortrückt, so also dass die Länge, um welche die einzelnen Theile des Stromes in einem bestimmten Zeitraume weiter rücken, für alle Theile dieselbe ist. – Nennt man diese Länge σ, so muss r nicht allein eine Function von s und s' sondern auch von σ abhängig sein. – Es bezeichnete δr die Änderung welche r erfährt, indem der Strom 1 unendlich wenig verrückt wurde; wir können es jetzt bestimmter als den ~~Änderung~~ Zuwachs von r definiren, welche r erfährt indem bei constant bleibenden Werthen von s und s', σ um

$\delta\sigma$ wächst. – Es ist demnach

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial \sigma}\delta\sigma$$

Oder wenn wir die beliebig kleine Grösse $\delta\sigma = ds$ setzen:

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial \sigma} ds$$

Also ist:

$$\delta Q = -ii' \iint \frac{ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)\frac{\partial r}{\partial \sigma}d\sigma$$

Die Summe aller Veränderungen ~~bild~~ des Potentials Q also Q selbst erhalten wir durch Integration des rechts stehenden Ausdruckes nach σ zwischen den Grenzen 0 und ∞. – Es wird also, da indem σ wächst Q abnimmt, und somit ~~also~~ das Integral negativ genommen werden muss:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad Q = ii' \iiint_0^\infty \frac{d\sigma\,ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)\frac{\partial r}{\partial \sigma}$$

Dieser Ausdruck, welcher die aufgestellte Aufgabe löst, hat schon den Vorzug vor dem auf dem angedeuteten Wege ableitbaren, dass er nur ein dreifaches Integral enthält – ja wir werden es auf ein 2faches Integral zurückführen können ohne deshalb eine spezielle Annahme über die Art der Stromescurven zu machen. – ~~Die~~ (3) können wir auf die Form bringen:

$$Q = ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma} - ii' \iiint \frac{d\sigma\, ds\, ds'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\mathrm{I} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{II}$$

I transformire ich nach der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

wobei ich

$$dv = ds' \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}, \text{ also } v = \frac{\partial r}{\partial s}$$

und $\quad u = \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma}$

~~zu~~ setzen ~~ihn~~ will, und nach s' integrire, wobei dann $d\sigma$ und ds als Constanten zu betrachten sind. – Da ferner die Integration über die ganze geschlossene Stromescurve auszudehnen ist, so verschwindet das Glied uv, und es ist:

$$\mathrm{I} = -ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right)$$

$$\mathrm{I} = -ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \frac{2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma}$$

Dies in (4) eingesetzt:

$$(5) \ldots\ldots \quad Q = -ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial s'} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right)$$

Wie es der Ausdruck (4) zeigt ist Q symmetrisch in Bezug auf s und s' – dass es (5) nicht mehr ist, begründet sich darauf, dass wir bei der partiellen ~~Differents~~ Integration dem s' den Vorzug gaben, denn hätten wir diese nach s ausgeführt ~~haben~~, so wären wir zum Ausdrucke gelangt:

$$(6) \ldots\ldots \quad Q = -ii' \iiint d\sigma\, ds\, ds' \left(\frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial s} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right)$$

Das Arithmetische Mittel aus (5) und (6) führt denn wieder zu einem symmetrischen Ausdruck:

$$(7) \ldots\ldots \quad Q = -ii' \iiint ds\, ds'\, d\sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right\}$$

Der ganze Ausdruck in der Parenthese ist der ~~nach σ genommene~~ partielle Differential Quotient nach σ, des Ausdruckes:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \right)$$

Da also die Integration nach σ unbestimmt ausführbar ist, so ist nach Einführung der passenden Grenzen:

$$Q = \left[- ii' \iint ds\,ds' \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}$$

Für $\sigma=\infty$ verschwindet dieser Ausdruck, da ja in diesem Falle $r=\infty$ wird; so dass, wenn ich unter r die Entfernung der Stromelemente ds und ds', für $\sigma=0$, also in ihrer Anfangslage verstehe, so wird:

$$Q = ii' \iint ds\,ds' \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \qquad \ldots\ldots \quad (8)$$

Da ferner

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\vartheta \qquad \frac{\partial r}{\partial s'} = -\cos\vartheta'$$

so ist:

$$Q = ii' \iint ds\,ds' \frac{1}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta' \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

Diesen Ausdruck des Potentials können wir noch auf eine andere in manchen Fällen nützliche Form bringen. Addiren wir nämlich ~~das~~ die über jede geschlossene Curve ~~auszu~~ integrirt, ~~dehntendes~~ ~~Integral~~ identisch erfüllte Gleichung:

$$0 = ii' \iint ds\,ds' \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

zu der Gleichung (8), so ergiebt sich:

$$Q = ii' \iint \frac{ds\,ds'}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)$$

Und durch Benutzung der auf Seite 144 angegebenen Formel:

$$\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\cos\varepsilon$$

wird

$$(11) \ldots\ldots \quad Q = -ii' \iint \frac{ds\,ds'}{r}\cos\varepsilon$$

Zur Kentniss der Kraft mit, welcher sich die zwei geschlossenen Ströme abstossen, gelangt man nun am besten indem man das Moment derselben in Bezug auf eine mögliche Verschiebung des Stromes bestimmt. – Dieses Moment ist gleich der negativen Veränderung des Potentials in Folge derselben Verschiebung. – Auch die ~~Wirkung~~ Kraft, welche ein geschlossener Strom auf einen ungeschlossenen ausübt, ~~wird~~ kann durch ein Potential bestimmt werden, da ja das Moment dieser Kraft in Bezug auf irgend eine Verschiebung des ungeschlossenen Stroms, gleich ist dem Potentiale des geschlossenen Strom in Beziehung auf einen zweiten, welcher die Verrückungsfläche mit derselben Intensität, wie der ursprüngliche Strom umfliesst. Diese Behauptung, welche nur für einen Magneten nachgewiesen wurde, bewährt sich offenbar auch bei einem geschlossenen Strom, welcher ~~den~~ diesen in seinen Wirkungen ersetzt. –

1914

V.

Inductionsströme.

Wird ein System bestehend aus einem electrischen Strome und einem geschlossenen Leiter dadurch verändert, dass ~~entwe~~ der Leiter relative zum Strome bewegt wird, oder dadurch dass der Strom seine Lage zum Leiter verändert, oder endlich durch Änderung der Stromintensität indem Leiter und Strom ihre gegenseitige Lage fest halten; so wird während der Zeit dieser Änderung der geschlossene Leiter von einem Strome durchflossen. – Diese merkwürdige Erscheinung beobachtete vor Andern Faraday und bezeichnete es mit dem Namen der electrischen Induction und nannte dabei den Leiter in welchem dieser Strom erzeugt wird den inducirten Leiter, den

den erzeugenden Strom dagegen den inducirenden Strom. – Ganz dieselben sind die Erscheinungen der Induction durch Magnete; es kann nämlich in einem geschlossenen Leiter, welcher sich in der Nähe eines Magneten befindet, ein inducirter Strom entstehen 1) indem der geschl. Leiter seine Lage ändert und der Magnet fest steht 2) indem der Magnet sich relative zum Leiter bewegt, und 3) wenn sich der magnetische Zustand des Magneten ändert. – Die Induction durch Magnete bedarf, als ein specieller Fall der Induction durch Ströme keiner ~~spec~~ besonderen Behandlung. – Das Gesetz der Intensität inducirter Ströme stellten Neumann und Weber fast gleichzeitig, von einander unabhängig auf. –

Neumann. – Allgemeine Gesetze der inducirten electrischen Ströme – Abhandl. der Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1846

—— Mathematische Theorie inducirter Ströme. Daselbst. 1847

Weber. Electrodynamische Maasbestimmungen 1846. Dieses Gesetz lässt sich auch mit Hülfe eines Potentials des geschlossenen Stromes auf einen anderen ausdrücken. –

Denkt man sich ~~räumlich~~ einen Strom der den inducirten Leiter mit der Intensität 1 in der Richtung durchfliesst, in welcher der inducirte Strom als positiv zu betrachten ist, – so bezeichnen wir das Potential des inducirenden Stromes in Bezug auf diesen Strom mit U. – Wir wissen zunächst, dass damit eine Induction stattfinde U eine Function der Zeit t sein muss. –

Bezeichnen wir mit i die Intensität des inducirten Stromes, mit w den Widerstand des inducirten Leiters, so bestimmt das Gesetz für die Intensität dieses Stromes, dass iw proportional ist mit $\frac{dU}{dt}$. –

Das Product iw ist für alle durch galvanische Ketten erzeugte Ströme, die electromotorische Kraft der Kette, analog werden wir auch bei inducirten Strömen $iw = E$ electromotorische Kraft nennen können. – Es ist also:

$$iw = E = \varepsilon \frac{dU}{dt}$$

wo ε eine nur von den Einheiten abhängige Constante ist. – Sind die Einheiten der Länge und Intensität festgestellt, so wird man die Einheit von E noch immer ganz will kürlich wählen können, dieselbe wird aber vollkommen definirt, wenn wir $\varepsilon = 1$ setzen. – Durch die Gleichung

$$\mathcal{E} = \frac{dU}{dt}$$

ist also eine Einheit für die electromotorische Kraft festgesetzt, welche von Weber vorgeschlagen wurde, und jetzt in allen Fällen benützt wird, wo es sich nicht nur um den Vergleich, sondern um die absolute Bestimmung electromotorischer Kräfte handelt. –

Zugleicher Zeit ist in Folge des Ohmschen Gesetzes $i = \frac{\mathcal{E}}{w}$ auch eine Einheit des Widerstandes eingeführt – dieselbe ist gleich dem Widerstande eines Leiters, in welchem die Einheit der electromotorische Kraft, die Einheit der Stromintensität hervorruft. –

VI.

Weber's electrodynamisches Gesetz.

§. Das electrodynamische Grundgesetz. —

Wir behandelten bis jetzt die Erscheinungen der Electrostatik, dann die Vertheilung stationärer Ströme mit zu Grunde legung des Coulomb-schen Gesetzes; dann verliessen wir dies Gebiet um die electromagnetischen und electrodynamischen Erscheinungen zu untersuchen, und gelangten dabei zu dem Ampère-schen Gesetze der Wirkung zweier Stromelemente auf einander, und wandten schliesslich unsere Aufmerksamkeit auf die Inductionsströme. — Diese drei Gruppen von Betrachtungen sind aber unabhängig von einander; es gelang erst Weber in 1846 ein Gesetz auf zu finden, durch welches die erwähnten Erscheinungen in ihrer Abhängigkeit dargestellt werden können; ~~und~~ aus welchem also das Coulomb-sche, ~~so wie~~ und das Ampère-sche Gesetz, so wie auch das Gesetz der Intensität inducirter Ströme sich ableiten lassen. –

Weber erweitert das Coulomb-sche Gesetz indem er die gegenseitig einwirkenden Electricitätsmassen nicht nur in relativer Ruhe, sondern auch im Zustande gegenseitiger Bewegung betrachtet, und fest stellt dass die ~~von ihr~~ Kraft mit welcher diese sich abstossen nicht allein proportional ist mit dem Producte ihrer Massen, und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung; sondern auch noch von der relativen Geschwindigkeit und relativen Beschleunigung dieser Massen abhängig ist. – Sind e und e' zwei Electricitätsmengen, und ist ihre Entfernung r, so sagt das Weber-sche Gesetz aus dass die Kraft mit welcher sich diese abstossen:

$$(1) \ldots\ldots \qquad K = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

ist. – Um uns die Bedeutung der Constante c klar zu machen, denken wir uns die Massen e und e' mit constanter Geschwindigkeit bewegt; wir denken also dass $\frac{dr}{dt} =$ const. und somit $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ sei. – Unter dieser Bedingung ist dann die Abstostungskraft:

$$= \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)$$

Soll diese Kraft = 0 sein, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c$$

Es ist also c die Geschwindigkeit mit welcher sich die Electricitätstheilchen e und e' von einander oder ~~zu~~ gegen einander bewegen würden; wenn sie gar keine Kräfte aufeinander ausübten.

Weber und Kohlrausch bestimmten diese Geschwindigkeit durch Versuche, welche wir noch zu besprechen haben — und fanden:

c = 59 320 Meilen in der Secunde

oder c = 439,000,000 Meter " " ....

Es ist dies eine Zahl welche sehr nahe $\sqrt{2}$-mal die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume (40,000 Meilen in der Sec.) ist. –

Eine sehr interessante Eigenschaft der durch (1, dargestellten Abstossungskraft, ist die dass sie der ~~partie~~ negative Differential Quotient einer Function ~~ist~~ nach der Variabeln Verbindungslinie ist:

$$K = -\frac{d}{dr}\left(\frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

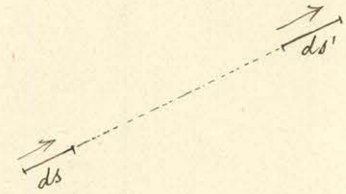
Wie bei dem Coulomb-schen Gesetze können wir also auch hier von dem Potentiale dieser Kraft sprechen. –

Für die ganze Gruppe von Betrachtungen, bei welchen die relative Lage der Electricitätsmengen unverändert bleibt, also bei allen Fragen der Electrostatik übergeht das Webersche Gesetz in das Coulomb-sche. – Dasselbe gilt in Bezug auf die Betrachtungen über die Vertheilung stationärer Ströme ~~in~~; und auf das Ohm-sche Gesetz, denn in dem Ausdrucke für die Kraft dessen Potential nur bei ~~[illegible]~~ diesen Aufgaben in die Rechnung gezogen wird, verschwindet offenbar das mit $\frac{1}{c^2}$ multiplizierte ~~Grössen~~ Glied, in Folge des ~~grossen Werth~~ gegen $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ so sehr grossen Werthes von c. – Die durch das Weber-sche Gesetz zum Ausdrucke der Kraft hinzugefügten Grössen, werden überhaupt nur dann zur Geltung kommen wenn die dem Coulomb-schen Gesetze unterworfenen Glieder sich aufheben.

Mit Hülfe dieser Zusatzglieder ist es nun möglich das Ampère-sche Gesetz – und das ~~der~~ Gesetz der Intensität eines Inductionsstromes abzuleiten

§ 2. Behandlung eines speciellen Falles der gegenseitigen Einwirkung von Stromelementen mit Hülfe des Weber-schen Gesetzes. –

Um zu zeigen wie das Webersche Gesetz zur Erklärung der Wirkung von Stromelementen aufeinander dienen kann, betrachten wir den ganz einfachen Fall dass die beiden Stromelemente ds und ds', die Richtung ihrer Verbindungslinie haben, und im Sinne der Pfeile von positiver Electricität durchflossen werden. – Wir nehmen ferner an dass die Stromelemente ds und ds', stationär seien, und dass die Leiter in welchen sie fliessen in der ganzen Länge von ds resp. ds' denselben Querschnitt haben. Es sind dann auch die Geschwindigkeiten der Electricitätstheilchen, in allen Punkten des einen so wie auch in allen Punkten des anderen Stromelementes dieselben. – Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der positiven Electricität in ds mit u, die Geschw. der negativen Electr. daselbst mit $-u$; analog sollen u' und $-u'$ die Geschw. der positiven resp. der negativen Electr. Theilchen in ds' bedeuten. –



Da aber die ganze Electricitätsmenge auf die Oberfläche des Leiters beschränkt sein muss, und unter den gemachten Annahmen gleichmässig auf derselben verbreitet ist; so ~~wir~~ ist die Menge der Electr. Flüssigk. welche jeder der zwei ~~Leiter~~ Stromelemente enthält proportional ihrer Länge. Bezeichnet man ~~nämlich~~ demnach mit e die Menge positiver also mit $-e$ die Menge negativer Electricität welche in der Einheit der Länge des Stromelementes ds enthalten ~~ist~~ sind; und mit e' und $-e'$ die ~~entsprechenden~~ Mengen in der Längeneinheit des Stromelementes ds'; so ist:

die in ds enthaltene positive Electric. Menge $= e\,ds$

" " negative " " $= -e\,ds$

die in ds' " positive " " $= e'ds'$

" " negative " " $= -e'ds'$

Nach dem Weber-schen Gesetze sollen jetzt die Kräfte aufgesucht werden, mit welcher je zwei dieser Electricitätsmengen einander abstossen. – Dabei ist die Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ zu setzen, man gelangt so zu dem Resultat:

Die Electr. Mengen:	Mit der relativ. Geschwindigkeit:	stossen sich mit der Kraft ab:
$eds \ldots e'ds'$	$\frac{dr}{dt} = u' - u$	$\frac{eds\, e'ds'}{r^2}\left(1 - \frac{(u'-u)^2}{c^2}\right)$
$-eds \ldots e'ds'$	$\frac{dr}{dt} = u' + u$	$-\frac{eds\, e'ds'}{r^2}\left(1 - \frac{(u'+u)^2}{c^2}\right)$
$eds \ldots -e'ds'$	$\frac{dr}{dt} = -u' - u$	$-\frac{eds\, e'ds'}{r^2}\left(1 - \frac{(u'+u)^2}{c^2}\right)$
$-eds \ldots -e'ds'$	$\frac{dr}{dt} = -u' + u$	$\frac{eds\, e'ds'}{r^2}\left(1 - \frac{(u'-u)^2}{c^2}\right)$

Hieraus ergiebt sich die Kraft mit welcher die Gesammtmenge Electricität (also die positive und negative zusammengenommen) in ds auf die positive Electricität in ds' abstossend wirkt — diese ist:

$$= \frac{eds\, e'ds'}{r^2} \cdot \frac{4uu'}{c^2}$$

Es ist dies ein Fall in welchem die nach dem Coulomb-schen Gesetze wirkenden Kräfte sich in ihrer Wirkung zerstören, also die Weberschen Zusatzglieder wirklich zur Geltung kommen. In derselben Weise finden wir die ~~Kraft mit~~ Abstossungskraft, welche die Gesammtelectricität in ds auf die negative Electricität in ds'

ausübt:

$$= \frac{e ds\, e' ds'}{r^2} \cdot \frac{4uu'}{c^2}$$

Die Kraft, welche ds auf die pos. Elect. Theilchen von ds' ausübt, und die Kraft welche ds auf die negativen Theilchen desselben Stromelementes ausübt, sind also gleich und gleich gerichtet. – Nach der Hypothese, dass die ~~Summe in~~ während einer bestimmten Zeitdauer durch denselben Querschnitt ~~fliessenden~~ in entgegengesetzten Richtungen fliessenden ~~Electricitätsmengen~~ positiven und negativen Electricitätsmengen gleich sein müssen, folgt, dass diese abstossenden Kräfte ~~nicht~~ auf die Bewegung der electrischen Flüssigkeiten in dem Leiter von keinem Einfluss sein können; dieselben werden also auf die wägbaren Molecüle der Leiter übertragen.

Die ganze Kraft mit welcher das Stromelement ds das Stromelement ds' abstösst ist also:

$$K = \frac{8uu'}{c^2} \cdot \frac{e ds\, e' ds'}{r^2}$$

Führen wir nun das Zeichen J für diejenige ~~Menge~~ Electricitätsmenge ein, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Elementes ds fliesst; also für die

Stromintensität im mechanischen Maasse gemessen; so ist nach dieser Definition:

$$J = eu$$

und analog: $J' = e'u'$

Der Ausdruck für die Abstossungskraft wird demnach:

$$K = \frac{8}{c^2} \cdot \frac{JJ' ds ds'}{r^2}$$

Das Ampère Gesetz der electrodynamischen Wirkung zweier Stromelemente giebt für diesen Fall, dieselbe Kraft:

$$K = \frac{ii' ds ds'}{r^2}$$

Wo i und i' die Stromintensitäten in dem electromagnetischen Maasse gemessen bedeuten. – Das Verhältniss der mechanischen und der electromagnetischen Einheit der Stromstärke ergiebt sich hieraus:

$$\frac{J}{i} = \frac{J'}{i'} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hierdurch ist eine Methode angegeben nach welcher die Constante c sich berechnen lässt; ist es nämlich möglich die Intensität desselben Stromes einmal ~~nach~~ mit dem mechanischen, und dann zweitens ~~nach~~ mit dem electromagnetischen Maasse zu messen, so ist diese Constante leicht zu berechnen. –

Kohlrausch und Weber führten diese Messungen ~~wirklich aus~~ an dem Entladungsstrome einer Leydener Flasche wirklich aus. – Sei die Intensität dieses Stromes zur Zeit t ~~nach~~ mit electromagnetischer Einheit gemessen i, so ist der Ausschlag den die Nadel einer in dem Strome eingeschalteten Tangentenboussole macht abhängig von $\int_0^\infty i\,dt$. – Wir nahmen hiebei die Grenzen der Integration 0 und ∞ ganz willkürlich, dies ist aber erlaubt, da dabei das Integral seinen Werth zwischen den sehr engen der Wirklichkeit entsprechenden Grenzen behält. – Nennt man J wieder die Intensität des Stromes nach dem mechanischen ~~Einheit~~ Maasse gemessen, so ist $\int_0^\infty J\,dt$ die ganze Electricitätsmenge, welche während der ~~Zeit~~ Dauer des Stromes durch einen Querschnitt des Leiters floss. – ~~dieser ist aber mit Hülfe einer Coulomb-schen Drehwage messbar~~ ~~sind~~ Bezeichnen wir mit E die Mengen positiver und so auch die Mengen negativer Electricität die auf den beiden Belegungen der Leydener Flasche vor der Entladung getrennt sind. – Es sei vor der Entladung der Flasche auf seiner inneren Belegung die positive Electricitätsmenge E, und auf seiner äusseren Belegung die negative Menge E versammelt;

so geht bei der Entladung die positive Menge $\frac{E}{2}$ von innen nach aussen, und ebensoviel negative überströmt von aussen nach innen.- Es ist also:

$$\int_0^\infty J\,dt = \frac{E}{2}$$

Diese Menge $\frac{E}{2}$ lässt sich nun mit Hülfe einer Coulomb-schen Drehwaage leicht bestimmen, und da durch den Ausschlag des eingeschalteten Magneten auch $\int_0^\infty i\,dt$ gemessen ist – so ist:

$$\frac{\int_0^\infty J\,dt}{\int_0^\infty i\,dt} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

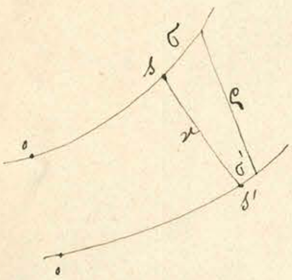
Auf diesem Wege werden die schon angegebenen Zahlenwerthe von c gefunden.-

×20/4

3.- Wirkung zweier Stromelemente aufeinander aus dem Weber-schen Gesetze abgeleitet.-

Wir denken uns zwei lineare Leiter durchflossen von Strömen variabler Intensität, so dass die ~~selben~~ Intensitäten ~~ein~~ ganz ± beliebige Functionen der Zeit sein können.-

Die Ströme sollen sich außerdem relativ bewegen, ja sie sollen auch ihre Gestalt ganz willkürlich verändern können. –



Wir bezeichnen mit s die Entfernung eines variablen Punktes in dem einen Stromleiter von einem beliebigen Anfangspunkte in demselben, – ganz dieselbe Bedeutung soll s' in dem anderen Stromleiter haben. – Die Entfernung der Punkte s und s' zur Zeit t nenne ich r – dann ist

$$r = \text{eine Function von } t, s, s'$$

oder wenn r auch das Zeichen für diese Function sein soll, so ist:

$$r = r(s, s', t)$$

Vor allem wollen wir die Abstossungskraft aufsuchen, welche zwei der Einheit gleiche Mengen positiver Electricität auf den Endpunkten von r concentrirt auf einander ausüben. – In einer kleinen von t gerechneten Zeit τ verändern diese Punkte ihre Lage, sie entfernen sich von s und s' um die Längen σ resp. σ', und auch ihre Entfernung bleibt nicht ungeändert – es ~~ist~~ wird also aus r die Entf. ρ. –

Fassen wir dann diesen Zeitpunkt $t+\tau$ in's Auge so sehen wir, dass ϱ dieselbe Function von $s+\sigma$, $s'+\sigma'$, $t+\tau$ sein muss als welche r von s, s' und t war, dass also:

$$\varrho = r(s+\sigma, s'+\sigma', t+\tau)$$

Die Grössen σ, σ' sind von τ abhängig, sie ~~werden~~ sind unendlich klein wenn τ unendlich klein ist, und sie werden $=0$ wenn $\tau=0$ ist. —

Nach dem Weber-schen Gesetze ist die Abstossungskraft, mit welcher zwei der Einheit gleiche pos. Electricitätsmengen auf einander ausüben, welche an den Endpunkten von ϱ concentrirt sind:

$$=\frac{1}{\varrho^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2+\frac{2\varrho}{c^2}\frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Setzen wir hierin $\tau=0$, also für ϱ wieder r, so erhalten wir die gesuchte Abstossungskraft, ~~vor~~ in der Lage der betrachteten Theilchen zur Zeit t. — Dies kann man aber nur nach ausgeführter Differentiation thun. — Es ist:

$$\frac{d\varrho}{d\tau}=\frac{\partial\varrho}{\partial s}\cdot\frac{d\sigma}{d\tau}+\frac{\partial\varrho}{\partial s'}\frac{d\sigma'}{d\tau}+\frac{\partial\varrho}{\partial\tau}$$

für $\tau = 0$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{d\sigma'}{d\tau} + \frac{\partial r}{\partial t}$$

Ebenso findet man:

für $\tau = 0$

$$\frac{d^2\varrho}{d\tau^2} = \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{d^2\sigma'}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} \cdot \frac{d\sigma'}{d\tau} + \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \left(\frac{d\sigma'}{d\tau}\right)^2$$
$$+ \cancel{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} + \cancel{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} \cdot \frac{d\sigma'}{d\tau}$$

Diese Werthe, und $\varrho = r$ in (5) gesetzt, giebt die Kraft mit welcher sich zwei der Einheit gleiche positive Electricitätsmassen, welche in den Punkten s und s' concentrirt gedacht sind, einander abstossen:

(6)
$$= \frac{1}{r^2}$$
$$+ \frac{2}{c^2 r} \Bigg\{ \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$+ \frac{d\sigma}{d\tau}\left(2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{d\sigma'}{d\tau}\left(2 \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)'^2 \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2\right) + \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right) + 2 \frac{d\sigma}{d\tau} \cdot \frac{d\sigma'}{d\tau}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} - \frac{1}{2r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}\right)$$
$$+ \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{d^2\sigma'}{d\tau^2} \frac{\partial r}{\partial s'} \Bigg\}$$

in welchem Ausdruck $\tau = 0$ zu setzen ist. –
Wir bezeichnen jetzt mit u die Geschwindigkeit ~~ein~~ des Electricitätstheilchens im Punkte s zur Zeit t – ebenso bedeutet u' die Geschwindigkeit ~~ein~~ in dem anderen Leiter im Punkte s' zur selben Zeit. Dann ist u offenbar eine Function von s und t, ebenso ist es u' von s' und t' – benützen wir ~~also~~ u und u' auch als Zeichen für diese Functionen so sind:

$$u = u(s,t)$$

$$u' = u'(s',t)$$

Die Geschwindigkeit des Theilchens zur Zeit $t+\tau$, im dem Punkte $s+\sigma$ ist:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = u(s+\sigma, t+\tau)$$

und die Geschwindigkeit des Theilchens im anderen Leiter $s'+\sigma'$ zur selben Zeit:

$$\frac{d\sigma'}{d\tau} = u'(s'+\sigma', t+\tau)$$

Es ist also für $\tau = 0$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = u \qquad \text{und} \qquad \frac{d\sigma'}{d\tau} = u'$$

ferner erhalten wir durch Differentiation heraus:

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{d^2\sigma'}{d\tau^2} = \frac{\partial u'}{\partial s'} \cdot \frac{d\sigma'}{d\tau} + \frac{\partial u'}{\partial \tau}$$

für $\tau = 0$

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{d^2\sigma'}{d\tau^2} = \frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}$$

Diese Werthe in (6) gesetzt, ergiebt sich dieselbe

Kraft $= \frac{1}{r^2}$

$$(7) \ldots\ldots \quad + \frac{2}{c^2 r}\Bigg\{ \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + u\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right) + u'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t}\right)$$
$$+ u'^2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2\right) + u^2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right) + 2uu'\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} - \frac{1}{2r}\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial s} + \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\right)\frac{\partial r}{\partial s'}\Bigg\}$$

Ich denke mir jetzt ~~in den~~ die Punkte s und s' als Anfangspunkte zweier Stromelemente ds und ds' – und suche die Kraft mit welcher die positive und negative Electr. in ds' die Gesammtmenge pos. und neg. Electricität in ds abstößt.

(7) giebt die Kraft mit welcher die Einheit +Electr. in s' auf die 1heit +Electr. in s wirkt;

ich werde die Kraft erhalten mit welcher die 1^{heit} − Electr. in s' auf die 1^{heit} + Electr. in s einwirkt, indem ich in $\mathfrak{F}$ statt u' setze $-u'$, dann aber dem ganzen Ausdrucke das negative Vorzeichen gebe. – Dieser umgeformte Ausdruck zu $\mathfrak{F}$ addirt giebt:

Die Kraft, mit welcher die Einheit positiver Electricität + der Einheit negativer Electricität im Punkte s' ~~auf~~ die Einheit positiver Electricität im Punkte s abstossen =

$$= \frac{4}{c^2 r}\left\{u'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right) + uu'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right) + u\frac{\partial u'}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right\} \quad \ldots (8)$$

Nennen wir e' die Electricitätsmenge welche (zur Zeit t) in der Längeneinheit des Stromelementes ds' enthalten ist, so werden wir um die Kraft zu erhalten welche von der Gesammtelectricität in ds' herrührt, die Gleichung (8) mit $e'ds'$ zu multiplizieren haben. – Führen wir hier wieder die Intensität des Stromes nach mechanischem Maasse in die Rechnung ein, also:

$$e'u' = J'$$

so ergiebt sich:

Die Abstossungskraft mit welcher die in ds' enthaltene Gesammtmenge pos. sowohl als neg. Electricität, auf die Einheit pos. Electricität in s wirkt:

$$= \frac{4ds'}{c^2 r}\left\{ J'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right) + u\, J'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial s} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right) + \frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right\} \tag{9}$$

Um die Kraft zu erhalten, welche die Gesamtelek. in ds' auf die neg. Einheit in s ausübt, müssen wir in (9) statt u setzen $-u$ und dann dem ganzen Ausdrucke das negative Vorzeichen geben. — Dieser so gebildete Ausdruck zu (9) addirt bildet eine Summe, welche gleich ist der Kraft mit ~~welch~~ welcher ds' die Einheit neg. und pos. Electricität in s gleicher Zeit abstösst. — Diese Kraft wird also auf die wägbaren Molecüle des Leiters übertragen. — Multiplizirt man diesen schliesslich noch mit eds d.i. der Gesammtmenge pos. oder negativer Electricität im Elemente ds und berücksichtigt dabei dass

$$J = eu$$

so erhalten wir einen Ausdruck für die Gesammt-

Abstossungskraft der Elemente ds und ds'

$$K = \frac{8\,ds\,ds'}{c^2 r^2} \cdot J \cdot J' \left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Reducirt man hierin, die in mechanischem Maasse ausgedrückte Stromintensität auf die electromagnetische Einheit derselben, d. i. setzt man:

$$\frac{8JJ'}{c^2 r^2} = \frac{ii'}{r^2}$$

So bekommen wir einen mit dem Ampère-schen Gesetze identischen Ausdruck; welcher sich jedoch hier auf viel allgemeinere Fälle anwendbar erweist, als wir es bis jetzt anwenden konnten. – Es zeigte sich nämlich, dass die Kraft mit welcher sich zwei Stromelemente abstossen, unabhängig ~~und~~ ist von den Gestalts- Lagen und Intensitätsänderungen derselben, und allein abhängt von der relativen Lage, von der Gestalt und der Intensität derselben zur Zeit, in welcher diese Kraft bestimmt werden soll. –

§4. Erklärung der Induction nach dem Weber'schen Gesetze. –

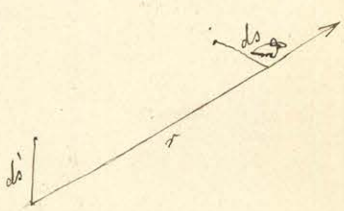
Kräfte welche auf ~~ein Strom~~ die positive und die negative Menge Electricität eines Stromelementes ~~Kra~~ in derselben Richtung wirken, werden ~~können~~ wie wir bereits erwähnt auf die wägbaren Moleküle der Stromleiter übertragen. – Nur Kräfte welche auf die positiven Electricitätmengen gleich aber entgegengesetzt wirken, können eine relative Bewegung, ~~oder ein Veränderung derselben~~ der Elect. Flüssigkeiten zu den Moleküle des Leiters, oder einer Veränderung in dieser Bewegung bewirken. – Eine solche Veränderung in der Bewegung erklärt die Erscheinungen der Induction, wir suchen den Ausdruck der Kraft deren Folge sie ist. –

Setzt man in (9) statt u, $-u$ und giebt dem ganzen Ausdruck das negative Vorzeichen, so hat man einen Ausdruck für die Kraft, mit welcher ds' in positiver Richtung von d auf die negative Electr. menge 1 in ds einwirkt; (9) dagegen giebt die von demselben Elemente auf die Einheit positive

Electricität in ds wirkende Kraft. – Der halbe Unterschied dieser beiden Kräfte ist die Kraft welche die Induction erklärt, nämlich die Kraft welche in positiver Richtung von r auf die positive; ~~od~~ in negativer Richtung von r dagegen auf die negative ~~Menge~~ Einheit Electrischer Flüssigkeiten in ds ein wirkt. – Diese Kraft ist:

$$=\frac{4ds'}{c^2 r}\left\{J'\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)+\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right\}$$

Die electrischen Flüssigkeiten können sich aber nur in der Richtung der linearen Leiter bewegen, in welchen ~~sie~~ wir sie uns vorstellten – wir haben demnach gar nicht diese ganze Kraft sondern nur seine Componente in der Richtung des Stromelementes ds zu berücksichtigen. –



Der Winkel den ds mit der pos. Richtung r einschliesst ist $-\vartheta$; wie wir schon sahen ist dann:

$$-\cos\vartheta=\frac{\partial r}{\partial s}$$

Also ist die Kraft mit welcher ds' auf die Einh. + Electr. in ds in der + Richtung von ds einwirkt – dann aber auch die Kraft mit welcher ds' auf die Einheit – Electr. in ds in der – Richtung von ds einwirkt:

$$= \frac{4ds'}{c^2}\left\{J'\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right\}\frac{\partial r}{\partial s}$$

Dieselbe von dem ganzen inducirenden Strome herrührende, auf die Einheit in ds wirksame Kraft ist:

$$(11)\ldots\quad K = \int\frac{4}{c^2}\left\{J'\left(\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\right\}ds'$$

wo die Integration über den ganzen inducirenden Strom auszudehnen ist. – In Folge der Bewegung der Electricität in ds, versammelt sich daselbst die freie Electricität – nennen wir ~~sein~~ ihr Potential in Bezug auf den Punkt s V, so übt auch diese auf die Einheit in s eine Kraft

$$-\frac{\partial V}{\partial s}$$

aus. –

Die ganze auf die erwähnte Einheit elect. Flüssigk. ausgeübte Kraft ist also:

$$= -\frac{\partial V}{\partial s} + K$$

Da die Menge positiver Electricität, welche in einer Richtung, und auch die Menge negativer Electricität welche in der entgegengesetzten Richtung in der

Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters fliesst proportional sein muss mit der Länge auf dem Querschnitte des Leiters, und ausserdem proportional mit der wirksamen electromotorischen Kraft, so ist:

$$J = \left(- \frac{\partial V}{\partial s} + \mathfrak{K} \right) \lambda q$$

Multipliziren wir ~~mit ds~~ den Ausdruck mit ds und integriren über dann nach s, so gelangen wir zu dem entsprechenden Ausdrucke für die ganze im inducirten Leiter enthaltene Electricitätsmenge. – Dabei machen wir ~~allerdings~~ die Annahme, dass in demselben Augenblicke in jedem Punkte des Leiters die Intensität dieselbe ist – was in der Wirklichkeit nie der Fall ist. – Da nun der Leiter ein geschlossener, homogener ist, so dass V nirgends sprungweise Änderungen erleidet, so ist:

$$\int \frac{\partial V}{\partial s} ds = 0$$

So ist wenn l die Länge des Leiters bedeutet:

$$\mathfrak{H} = \lambda q \int \mathfrak{K}\, ds$$

oder da $\frac{l}{\lambda q}$ der Widerstand des Leiters ist:

$$\int K ds = JW$$

Da ferner nach unseren früheren Definitionen $JW = \mathcal{E}$ die inducirte electromotorische Kraft ist – so ergiebt sich

$$\mathcal{E} = \int K ds$$

Dies in (11) gesetzt giebt:

$$\mathcal{E} = \iint \frac{4 ds ds'}{c^2} \left\{ J' \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) + \frac{1}{r} \frac{dJ'}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \right\} \frac{\partial r}{\partial s}$$

oder:

$$\mathcal{E} = \frac{4}{c^2} J' \iint ds ds' \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$+ \frac{4}{c^2} \frac{dJ'}{dt} \iint \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}$$

Das erste dieser beiden Integrale formen wir um, wie wir es auf Seite 172 mit (5) thaten – dabei gelangten wir zu dem Ausdrucke (8) – das nämliche in diesem Falle durchgeführt giebt:

$$\mathcal{E} = \frac{4}{c^2} J' \frac{d}{dt} \iint \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dJ'}{dt} \iint \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}$$

$$\mathcal{E} = \frac{4}{c^2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{ J' \iint \frac{ds\,ds'}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Da nun das Integral das Potential zweier Stromelemente ist die durch Ströme von der Intensität 1 durchflossen werden – so ist dies in der That ein mit dem schon angegebenen Gesetze der Induction übereinstimmendes Resultat. –

21/4.