Eötvös Loránd németországi
egyetemi jegyzetei

Theorie der Elektricit

I
Electrostatik.-

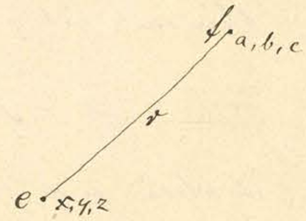
1. Grundlage der Theorie.-

Die Erklärung sämmtlicher Erscheinungen auf dem Gebiete der Electricität beruht auf die Annahme zweier electrischer Flüssigkeiten, welche entgegengesetzte Eigenschaften besitzen, also als positive und negative Grössen zu behandeln sind.- Jeder Körper wenn er nicht electrisch ist enthält diese beiden Flüssigkeiten gleichmässig ~~gemischt~~ vermengt, so dass sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben und nach aussen hin keine Wirkung möglich ist.- Beim Electrisiren wird diese Vertheilung zerstört, so z. B. beim Reiben, es wird die eine oder andre Art der Electr. Flüssigkeiten überwiegen d. i. es wird freie Electricität da sein.- Freie Electricität wirkt auch nach aussen hin ~~aus~~ ein, ihre

Wirkung äussert sich als Kraft. – Electrische Flüssigkeiten gleicher Art stossen sich ab, verschiedener Art (also + und –) ziehen sich an; und zwar mit einer Kraft welche proportional ist dem Producte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung.
Um möglichst vereinfachen zu können ist es üblich als Einheit der Menge Electr. Flüssigk. diejenige Menge electr. Flüssigk. zu betrachten welche in der Einheit der Entfernung auf die ihr gleiche Menge derselben Flüssigk. einwirkend die Einheit der Kraft hervorbringt. –
Die electr. Flüssigk können sich innerhalb eines Leiters bewegen, ja sie können von einem Leiter in einen Anderen übergehen; die Leichtigkeit mit der dies geschieht ist bei verschiedenen Körpern verschieden, – man unterscheidet danach gute und schlechte Leiter von Manchen auch vorzugsweise Leiter und Nicht Leiter genannt. – Letztere Benennung ist unrichtig; denn es giebt streng genommen kein absolut nicht leitendes Mittel. – Dieses verschiedene

Verhalten der Körper in Bezug auf Leitungs-
fähigkeit erklärt sich wenn man einen der
Reibung ähnlichen Widerstand annimmt, welcher
~~sich~~ der Bewegung der Electr. Flüssigk. entgegen ~~stellt~~ wirkt.–
Metalle sind gute, Seide, Glas, Harz etc. schlechte
Leiter. – Ist in einem Leiter freie Electricität
so kann sie nur bei gewisser Anordnung der
Theilchen im Gleichgewicht sein, und unsere
erste Aufgabe sei die hierbei zu erfüllenden
Bedingungen auf zu suchen.–

2. Grundbedingung des Gleichgewichts der Electricität in einem Leiter.–



Ist in dem Punkte x, y, z die Electr. Menge $\underline{e}$ in dem Punkte a, b, c die Electric. Menge f angehäuft, und bedeutet r die geradl. Entfernung beider Punkte, so ist die Kraft (K) welche sie auf einander ausüben, bei unserer Einheit:

$$K = \pm \frac{ef}{r^2}$$

das doppelte Vorzeichen rührt davon her, das

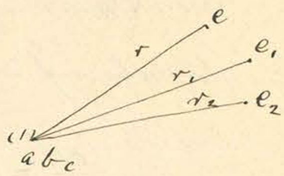
die Art beider Flüssigk. unbestimmt geblieben ist. – Im Folgenden nehmen wir an, dass die Kraft welche Flüssigk. derselben Art auf einander ausüben eine Abstossende; die welche Flüssigk. verschiedener Art aufeinander ausüben eine Anziehende ist. – Als positive Grösse führen wir die Abstossende, als negative die Anziehende Kraft ein. – Dies ergiebt sich auch aus der Gleichung für K, denn wir werden wenn e und f das gleiche Vorzeichen haben das Obere, im entgegengesetzten Falle das Untere Vorzeichen ~~brauchen müssen~~ der Kraft geben müssen. –
Auch ihrem Vorzeichen nach vollkommen bestimmt ist also die Kraft durch die Gleichung:

$$K = \frac{ef}{r^2}$$

wobei eine Menge negativer Electr. als eine negative Menge positiver Electricität betrachtet ist, was trotz des sinnlosen Begriffs einer negativen Menge Mathematisch erlaubt ist. –
Ausser dieser Zweideutigkeit des Vorzeichens der Kraft, ~~ist die Art~~ stellt sie sich ähnlich dar ~~wie~~ die Gravitationskraft. – Man wird also

Auch hier das Potential finden können dessen partielle Diff. Quot. die Componenten der Kraft sind. —

Haben wir mehrere Punkte in welchen die Electricitätsmengen e, e_1, e_2 concentrirt sind, deren Entfernungen von (a, b, c) r, r_1 und r_2 sind, und ist die Menge der Electr. im Punkte (a, b, c) gleich der Einheit — so stellt sich das Potential dar:



$$V = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_3} + \ldots\ldots$$

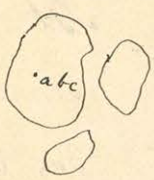
Bedeuten dann A, B, C die Componenten der Kraft in den Richtungen von a, b und c, so hat man:

$$A = -\frac{\partial V}{\partial a}$$

$$B = -\frac{\partial V}{\partial b}$$

$$C = -\frac{\partial V}{\partial c}$$

Ist $a.b.c$ ein Punkt deren Masse f ist, auf welchen mehrere electrische Massen einwirken, dann werden demnach die Componenten der Kraft:



$$-f.\frac{\partial V}{\partial a}\ ,\ -f.\frac{\partial V}{\partial b}\ ,\ -f.\frac{\partial V}{\partial c}$$

Im Falle des Gleichgewichtes müssen diese Kräfte $=0$ sein, denn ein von 0 verschiedener Werth derselben würde ja ein Grund der Bewegung sein; da aber f nicht $=0$ werden kann, so muss:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial b}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial c}=0$$

Also es muss im ganzen Systeme von Leitern.

$$\underline{\underline{V = Const.}}$$

Es ist dies die allgemeine Bedingung des Gleichgewichtes, es folgt aus ihr, dass im Falle desselben die freie Electricität auf die Oberfläche beschränkt ist. – Um den Beweis dieser Behauptung führen zu können soll ein Hülfssatz abgeleitet werden. –

3. Satz in Bezug auf die zweiten Differentialcoëfficienten des Potentials. –

Ist V das Potential einer Masse in Bezug auf einen Punkt a, b, c, in welchem die Dichtigkeit der Agens k ist; so wird:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=-4\pi k$$

diese Gleichung spricht den zu beweisenden Satz aus. –

Vor der allgemeinen Beweisführung betrachten wir zwei specielle Fälle 1) ~~betrachtet~~ werden wir das Potential einer beliebig gestalteten Masse auf einen ausserhalb gelegenen Punkt, und dann 2) das Potential einer im Raume kugelförmig verbreiteten Masse auf einen innerhalb gelegenen Punkte aufsuchen. –

1) Der Punkt a, b, c liegt ausserhalb der Masse. – Sei $d\tau$ ein Element des ~~Volumens~~ mit der Masse erfüllten Raumes, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten einer Ecke desselben, und k' die Dichtigkeit des Agens in dies so ist ein Element des Potentials:

$$\frac{k'd\tau}{r}$$

wo r die Entfernung der Punkte x, y, z und a, b, c also:

$$r = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$$

ist. – Das Potential wird demnach:

$$V = \iiint \frac{k'd\tau}{r} \quad \ldots\ldots (1)$$

wo die Integration über das ganze mit dem Agens erfüllte Volumen zu nehmen ist. – Dass dies Integral zwischen den Grenzen des Raumes nie ∞ werden kann liegt in der Annahme dass der Punkt ~~ausserhalb~~ a,b,c, ein äusserer als r nie = 0 ist. – Man wird demnach unter dem Integralzeichen beliebig oft differentiiren können ohne auf unendliche Ausdrücke zu stossen. – Es ist:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a} = \displaystyle\iiint k'd\tau \, \dfrac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial a} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial b} = \displaystyle\iiint k'd\tau \, \dfrac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial b} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial c} = \displaystyle\iiint k'd\tau \, \dfrac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial c} \end{cases}$$

ebenso:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \displaystyle\iiint k'd\tau \, \dfrac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial a^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \displaystyle\iiint k'd\tau \, \dfrac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial b^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \iiint k' d\tau \, \frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial c^2} \qquad (3)$$

Da die Grenzen all' dieser Integrale dieselben sind, so giebt ihre Addition:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \iiint k' d\tau \left(\frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial c^2} \right) \ldots\ldots (4)$$

Nach der Definition von r ist:

$$\frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial a} = -\frac{a-x}{r^3} \qquad \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial b} = -\frac{b-y}{r^3}$$

$$\frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial c} = -\frac{c-z}{r^3}$$

und:

$$\frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial a^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(a-x)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial b^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(b-y)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial c^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(c-z)^2}{r^5}$$

Addirt man diese Gleichungen so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 (\frac{1}{r})}{\partial c^2} = 0$$

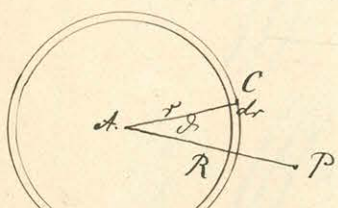
also:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0 \qquad \ldots\ldots (5)$$

Es ist dies ein specieller Fall des zu beweisenden

Satzes, die Form derselben für den ausserhalb des Agens gelegenen Punkt; also für $k = 0$.–

2) Der zweite zu betrachtende Fall ~~ist der~~ bezieht sich auf den, dass das Agens einen kugelförmigen Raum mit constanter Dichtigkeit ausfüllt und der Punkt a, b, c innerhalb desselben liegt.– Bei der Bestimmung dieses Potentials, werden wir das Potential einer Kugelschicht in Betracht ziehen; ~~die~~ und wir werden Sätze gebrauchen deren Beweis unsere erste Aufgabe ist.–



Denken wir uns eine unendl. dünne Kugelschicht mit dem Agens von der constanten Dichtigkeit k erfüllt, wir wollen das Potential derselben auf einen Punkt P ausserhalb derselben aufsuchen, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel $= R$ ist.– Das Element der Kugelschale bezogen auf ein Coord. System dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, ~~dessen~~ in welchem die ϑ von der Linie AP ~~gemessen werden~~ und deren ω von der Papierebene gemessen werden, stellt sich in der Form dar:

$$\varepsilon = r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega$$

Wenn die Entfernung des Variabeln Punktes C von P gleich ϱ gesetzt wird, so ist das Element des Potentials:

$$dv = \frac{r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr \,.\, k}{\varrho}$$

also das Potential

$$V = k r^2 dr \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega}{\varrho}$$

da

$$\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$$

so ist:

$$V = 2\pi k r^2 dr \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\varrho}$$

bildet man das Dreieck A,B,C so folgt aus diesem:

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta$$

$$-\cos\vartheta = \frac{\varrho^2 - R^2 - r^2}{2Rr}$$

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\varrho\, d\varrho}{Rr}$$

also:

$$\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\varrho} = \int \frac{d\varrho}{Rr}$$

wenn ϑ von 0 bis π Variirt, so geht ϱ von $R-r$ bis $R+r$ über, es ist also:

$$V = 2\pi . k . r^2 . dr \int_{\pm(R-r)}^{R+r} \frac{d\varrho}{r . R}$$

Wir unterscheiden ~~nun~~ die Fälle dass $R > r$ und dass $R < r$, das ist, dass der Punkt P ~~ausserhalb oder innerhalb der Kug~~ in dem äusseren oder inneren Hohlraume liegt, in dem ersten Falle ist in dem Ausdrucke $\pm(R-r)$ das obere, im zweiten Falle das untere Vorzeichen zu nehmen. –

Wenn also der Punkt aussen liegt:

$$\int_{R-r}^{R+r} \frac{d\varrho}{rR} = \frac{2}{R}$$

und wenn er innen liegt:

$$\int_{r-R}^{R+r} \frac{d\varrho}{Rr} = \frac{2}{r}$$

So dass das Potential einer unendl. dünnen Kugelschale, ~~durch~~ in den zwei betrachteten Fällen ist

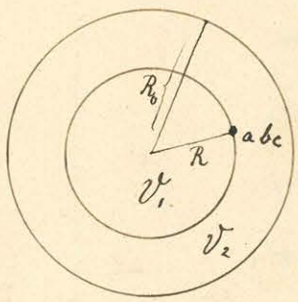
$$(6) \quad \begin{cases} V_a = 4\pi k r^2 dr . \frac{1}{R} \\ V_i = 4\pi k r^2 dr . \frac{1}{r} \end{cases}$$

Diese Gleichungen sprechen zwei Sätze aus, diese sind: das Potential einer concentrischen Kugelschale auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt ist gleich dem Potentiale ihrer ~~Masse~~ in dem Mittelpunkte der Kugel concentrirten Masse. – Und das Potential der Kugelschale auf einen innerhalb liegenden Punkt bezogen ist constant, nämlich gleich dem Potentiale derselben auf ihren Mittelpunkt bezogen. – Diese Sätze wurden nur für unendlich dünne Kugelschalen bewiesen, der Beweis derselben für solche endlicher Dicke bietet keine weiteren Schwierigkeiten. –

Wir können jetzt zur Aufgabe zurückkehren ~~und~~ das Potential einer Kugel mit dem Radius R_0 ~~auf e~~, in welcher die Dichtigk. der Agens constant $= k$ ist auf einen innerhalb gelegenen Punkt auf zu suchen. – ~~Ist~~ Sei R die Entfernung dieses Punktes (a, b, c) vom Mittelpunkte der Kugel, und ~~ziehen~~ beschreiben wir mit diesem Radius um den Mittelp. eine Kugelfläche, so theilt diese den ganzen Kugelraum in zwei Räume, deren jedes zum gesuchten Potentiale beiträgt. – Also:

$$V = V_1 + V_2$$

Wenn r der variable Radius vector ~~einer variabeln Elementes~~ der Kugelschale von der Dicke dr ist, so ist mit Benutzung des vorher abgeleiteten Satzes



$$V_1 = 4\pi k \int_0^R \frac{r^2 dr}{R}$$

$$V_2 = 4\pi k \int_R^{R_0} r\,dr$$

demnach ist:

$$V = 4\pi k \int_0^R \frac{r^2 dr}{R} + 4\pi k \int_R^{R_0} r.dr$$

$$= \frac{4\pi k}{R} \cdot \frac{R^3}{3} + 4\pi k \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)$$

$$(7) \ldots\ldots \quad V = 2\pi k \left\{ R_0^2 - \frac{1}{3} R^2 \right\}$$

Die einzige Variable Grösse dieses Ausdruckes ist R, sie hängt ab von der Lage des Punktes im inneren, also von a, b, c; und zwar ist, wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel bedeuten:

$$R^2=(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2$$

Dies eingesetzt in (7) wird:

$$V=2\pi k\left\{R_0^2-\frac{1}{3}\left((a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2\right)\right\}$$

Demnach:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=-\frac{4\pi k}{3}(a-x_0) \qquad u. s. w.$$

also:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}=-\frac{4\pi k}{3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}=-\frac{4\pi k}{3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=-\frac{4\pi k}{3}$$

Durch Addition ergiebt sich dann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=-4\pi k \qquad \ldots\ldots \quad (8)$$

Nachdem wir diese zwei speciellen Fälle behandelt, ~~hat~~ ist es keine besondere Schwierigkeit mehr da, die Richtigkeit des auf Seite 6 als zu beweisenden aufgestellten Satz allgemein ~~fest zu stellen~~ darzustellen. –

Es sei ~~Ist nämlich~~ a, b, c ein Punkt innerhalb eines Agens, welcher den Raum stetig erfüllt; es bleibt hierbei die Gestalt desselben und das

Gesetz ihrer Dichtigk. Änderung unbestimmt — dann wird man um einen zu a,b,c nahe gelegenen Punkt eine Kugel beschreiben können, in welche auch a,b,c eingeschlossen sein wird. — Diesen Mittelpunkt der Kugel und den Radius derselben, wird man so klein wählen können, dass die Dichtigk. in derselben als Constant betrachtet werden kann. — Das Potential der ganzen Masse lässt sich dann als die Summe der Potentiale der ~~[illegible]~~ Massen ausserhalb und innerhalb der kleinen Kugel ansehen. —

Sind also diese V_2 und V_1 so wird:

$$V = V_1 + V_2$$

und:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \left\{\frac{\partial^2 V_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial c^2}\right\} + \left\{\frac{\partial^2 V_2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial c^2}\right\}$$

Nach dem 1) betrachteten speziellen Fall ist die ~~Erste~~ zweite dieser Summen ~~[illegible]~~ worin V_2 das Potential der ausserhalb der Kugel befindlichen Massen in Bezug auf a,b,c bedeutet $= 0$ — und nachdem ~~[illegible]~~ 2) spez. Falle ist die erste der Summen $= -4\pi k$, so dass:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi k \qquad \ldots (9)$$

Diese Beweisführung hat die Lücke, dass es nicht bewiesen wurde, dass es erlaubt sei, die Dichtig. ~~innerhalb~~ des Agens innerhalb der Kugel ~~für~~ kleinen Dimensionen als Constant anzunehmen. — Einen ganz strengen Beweis gab Gauss in den „Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte". ~~1840~~. — Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1839.

4. Anwendung dieses Satzes auf das Gleichgewicht der Electricität in einem Leiter. —

Als Bedingung des Gleichgewichtes in einem Leiter fanden wir schon in §1. für alle Punkte desselben

$$V = Const.$$

Es ist demnach

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0 \;, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial c} = 0$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=0$$

also ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=0$$

Dieselbe Summe muss aber, wenn a, b, c Coordinaten von innerhalb des Leiters gelegenen Punkten sind $= -4\pi k$ sein ; also ist

$$-4\pi k = 0$$

und somit k das ist die Dichtigkeit in allen im Innern des Leiters gelegenen Punkten $= 0$. –
In einem Leiter ist, also die freie Electricität auf die Oberfläche beschränkt. –
Dies ist ein Satz welcher durch die Erfahrung vollkommen bestätigt ist ; auf ihm ist das Coulomb'sche Gesetz begründet – welches demnach als ein neuer Beweis desselben gelten kann. –
~~Die freie~~ Wir müssen also annehmen dass die freie Electricität an der Oberfläche des Leiters in einer unendlich dünnen Schicht versammelt ist. – Würden keine andern Kräfte auf dieses Electr. Fluidum einwirken, als eben nur die electr. Fluida des Leiters, so würden die vom

Leiter abgestossen werden. – Dass ein Leiter doch freie Electricität enthalten kann müssen wir dadurch zu erklären suchen; dass wir Kräfte annehmen, welche von den Molecülen des Leiters herrührend die Electr. Theilchen zurückhalten. – Es sind dies Kräfte von der Art der Moleculärkräfte, welche nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirksam und merkbar werden. – Man kann sich auch leicht vorstellen, dass sich diese Capillarenkräfte in endlicher Entfernung von der Oberfläche gegenseitig aufheben, und somit das Vorhandensein von freier Electricität unmöglich machen. –

Die Kugel ist eine vollkommen symmetrische Figur, die Dichtigkeit der Electricität wird an allen Punkten der ~~selben~~ Oberfläche derselben dieselbe sein. – Ich verstehe hier unter Dichtigkeit der Electricität diejenige Menge freier Electricität welche sich auf der Einheit der Oberfläche befindet. Das Potential in einem solchen Leiter in Bezug auf einen innerhalb gelegenen Punkt ist constant, und zwar, wenn R den Radius der Kugel, e die ganze Menge freie Electricität auf der Kugeloberfläche bezeichnet, so ist:

$$V = \frac{e}{R}$$

Wenn ε die Dichtigk. an der Oberfläche, so ist:

$$e = 4\pi\varepsilon R^2$$

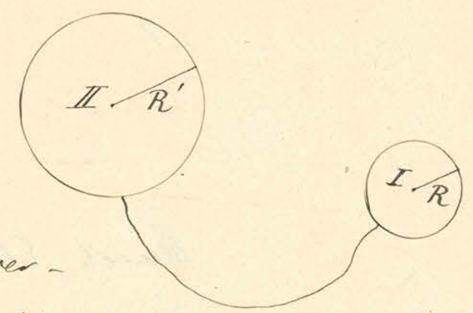
und

$$\underline{V = \varepsilon . 4\pi R.}$$

5. Gleichgewicht der Electricität in zwei weit entfernten durch einen dünnen Draht verbundenen Kugeln.

Denken wir uns zwei freie Electricität enthaltende Kugeln, die weit genug entfernt sind um auf einander nicht einzuwirken, durch einen dünnen Draht verbunden, dessen Oberfläche gegen die Kugeloberflächen verschwindend klein ist. – Durch diesen Draht findet ein Austausch an freier Electricität statt, und es tritt eine neue Gleichgewichtslage der Theilchen ein – die wir jetzt aufsuchen wollen. Es seien: der Radius der Kugel I R, der der Kugel

II, R'_{ξ} — Die Dichtigkeit an der Oberfläche von I ε, und die an der Oberfläche von II, ε'. —
~~Nach~~ Das Potential dieser ~~Kugeln~~ Electr. mengen auf einen innerhalb gelegenen Punkt ist



in I $\quad 4\pi\varepsilon R$

und in II $\quad 4\pi\varepsilon' R'$

Da die zwei Kugeln durch den Draht verbunden einen und denselben Leiter bilden, so muss für Punkte des innern beider Kugeln das Potential constant sein, also:

$$\varepsilon R = \varepsilon' R' \qquad \ldots\ldots \quad (1,$$

d.h. die Dichtigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien. —

Wenn wir dann mit e und e' die gesamten Electricitätsmengen in der Kugel I resp. II bezeichnen, so dass:

$$e = 4\pi R^2 \varepsilon$$

und $\qquad e' = 4\pi R'^2 \varepsilon'$

so ergiebt sich aus (1,

$$\frac{e}{R} = \frac{e'}{R'} \qquad \ldots\ldots \quad (2,$$

d.h. die Electricitätsmengen beider Kugel sind proportional ihren Radien. —

Ist die Summe der beiden ~~Kug~~ isolirten Kugeln mitgetheilten freien Electricität $= e_0$, und verbindet man dann die Kugeln auf die beschriebene weise, so ist

$$e_0 = e + e'$$

und
$$\frac{e}{R} = \frac{e'}{R'}$$

Durch Elimination aus beiden Gleichungen

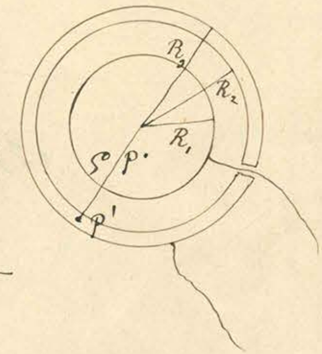
$$(3) \quad \begin{cases} e = e_0 \dfrac{R}{R+R_1} \\[2ex] e_1 = e_0 \dfrac{R_1}{R+R_1} \end{cases}$$

Es vertheilt sich also die freie Electricität in beiden Leitern nach einem Verhältnisse, welches abhängig ist von der Formen und Dimensionen der Leiter. – Bei complicirteren Oberflächen diese Vertheilung zu berechnen übersteigt die Grenzen der Mathematik. –

6. – Gleichgewicht der Electricität in zwei sehr nahen isolirten Leitern. –

Zwei nahe gelegene Leiter werden auf einander einwirken, und zwar so dass wenn der eine electrisch ist, dann auch der andere electrisch werden muss, und eine Rückwirkung auf den ersten ausüben wird. – Hierauf beruht die Theorie der Leydener Flasche und des Condensators. –

Es sei der eine Leiter eine massive Kugel mit dem Radius R_1 der andere eine diesen Umgebende Hohlkugel deren innerer Radius R_2 äusserer R_3 ist. – beide sollen durch ein isolirende Schicht ~~Beide Leiter sollen durch~~ getrennt und durch Drähte mit anderen weit entfernten Leitern verbunden sein was jedoch so geschehen soll, dass die Kugel und Hohlkugel möglichst vollkommen ~~[illegible]~~ isolirt bleiben. – ~~Sind aber diese zwei Leiter nahe genug so wird durch die isolirende Schicht ein Austausch an Electricität statt finden Körpern, und es wird zum Potentiale der Punkte des einen Leiters auch die Elect. mengen des anderen~~ beitragen. – Seien im Falle des Gleichgewichtes die Electricitätsmengen an den 3 Kugelflächen mit den Radien R_1, R_2, R_3 der Reihe nach e_1, e_2, e_3 – so wissen wir nach Vorangegangenem dass diese Electricitätsmengen an den Oberflächen gleichmässig verbreitet sind. – Und es wird das



Potential in Bezug auf einen innerhalb der massiven Kugel gelegenen Punkt

(1) ..... $$V_1 = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3}$$

Das Potential in Bezug auf einen in der Kugelschale gelegenen Punkt ist aber:

(2) .... $$V_2 = \frac{e_1}{\varrho} + \frac{e_2}{\varrho} + \frac{e_3}{R_3}$$

wo ϱ die Entfernung dieses Punktes von dem Kugelmittelpunkte ist. Soll nun die Electricität im Gleichgewicht sein, so muss das Potential innerhalb der ~~Hohlkugel~~ Kugelschale constant sein, d.h. es muss sich V_2 nicht ändern wenn ϱ von r_2 bis r_3 wächst. – Dies ist allein möglich, wenn:

(3) .... $$e_1 + e_2 = 0$$

d.i. wenn auf den beiden inneren Flächen gleiche Mengen entgegengesetzter Electricitäten vorhanden sind. –

Ist V_1 und V_2 gegeben so findet man:

(4) $$\left\{ \begin{aligned} e_1 &= -e_2 = (V_1 - V_2)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ e_3 &= V_2 R_3 \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich wenn $V_2 = 0$ gesetzt wird. – Diese Bedingung wird ~~erfüllte~~ erfüllt ~~wir~~ wenn ~~wir~~ der Draht der Hohlkugel mit der ~~zur~~ Erde ~~ableiten~~ ~~sie~~ verbunden wird – denn und wir ~~haben~~ können die Electricitätsmenge welche die Erde ~~sie~~ enthält im Verhältniss zu ihrem Radius als verschwindend betrachten – es wird dann

dann bildet diese mit der Erde einen Leiter in welchem das Potential Constant ist

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= -e_2 = V_1 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ e_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

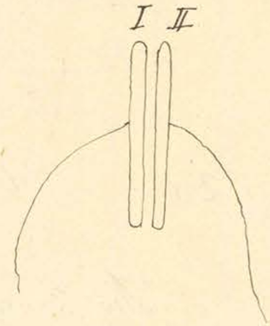
Wir sehen hieraus wie eine solche Einrichtung zur Vergrösserung der Electricität dienen kann, denn Offenbar ist e_1 ~~bedeutend~~ in dem betrachteten Falle viel grösser als ob wenn die ~~einschliessende~~ umgebende Hohlkugel nicht da wäre – es wäre ja dann $e_1 = V_1 R_1$; wir sehen auch dass ~~je~~ diese Electricitätsmenge ~~um~~ so grösser ist je kleiner der Zwischenraum zwischen der Kugel und der Hohlkugel. – In der Wirklichkeit kann es nie gelingen diese Einrichtung vollkommen herzustellen, welcher Art auch der Isolator zwischen der massiven und der Hohlen Kugel sei, so wird durch ihn doch immer eine

Entladung ~~gegenseitige Einwirkung~~ der verschiedenartigen Electricitäten möglich sein. – Die beschriebene Einrichtung ist eine kugelförmige Leydener Flasche; sie wurde von Faraday zusammengestellt, der einen festen Isolator anwendete und damit unter andern auch nachwies dass die verschiedenartigen Electricitäten ~~auch~~ der inneren Flächen auch durch den Isolator sich austauschten ~~gegenseitig einwirkten~~. –

7. – Der Condensator. –

Beim Condensator ~~beste~~ sind die zwei Leiter wie wir sie bei jetzt betrachteten die Condensator Platten. – Als isolirende Schicht dient die Luft – denn bei den kleinen Electricitätsmengen, welche die Platten enthalten kann man sie sehr nahe zu einander bringen ohne einen Austausch der Electricität fürchten zu müssen. Es seien I und II die beiden Condensator Platten, welche durch feine Drähte mit weit entfernten Leitern verbunden sind, die freien Electricitätsmengen der Platten ~~inneren Flächen~~

e_1 und e_2, und das Potential bezüglich auf einen Punkt der Platte I . V_1, und bezügl. auf einen Punkt der Platte II V_2.



Die mathematische Schwierigkeit erlaubt es dann nicht e_1 und e_2 für alle Fälle streng zu berechnen – Wohl aber werden wir zeigen dass e_1 und e_2 immer in der Form dargestellt werden können:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= a_1 V_1 - b_1 V_2 \\ e_2 &= -a_2 V_1 + b_2 V_2 \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Wo a_1, b_1, a_2, b_2 von der relativen Lage der Platten abhängige, aber in Bezug auf die Potentiale constante Grössen sind.

Ist dO_1 ein Element der Oberfläche der Platte I, dO_2 ein Element der Oberfl. der Platte II; ε_1^* und ε_2^* die entsprechenden Dichtigk. in denselben – ~~Dann~~ ferner r_1 die Entfernung eines Punktes innerhalb der Platte I von dO_1 und von dO_2, und r_2 die Entfernung eines Punktes der Platte II von denselben Flächenelementen, so ist:

$$V_1 = \int \frac{\varepsilon_1 \, dO_1}{r_1} + \int \frac{\varepsilon_2 \, dO_2}{r_1} \qquad \Big\} \quad (2)$$

Die beiden Integrale über die entsprechenden Oberflächen ausgedehnt. –

Ebenso ergiebt sich:

$$(2) \ldots \quad V_2 = \int \frac{\varepsilon_1 dO_1}{r_2} + \int \frac{\varepsilon_2 dO_2}{r_2}$$

Die Integration dieser Gleichungen können wir nicht ausführen, es lässt sich aber der Satz (1) nichts desto weniger beweisen. –

Die Gleichungen (2) werden nämlich erfüllt wenn man setzt:

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 V_2 \\ \varepsilon_2 = \alpha_2 V_1 + \beta_2 V_2 \end{cases}$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ von V_1 und V_2 unabhängige Grössen sind; denn setzt man diese Werthe in (2) ein, so ergiebt sich

$$V_1 = V_1 \int \frac{\alpha_1 dO_1}{r_1} + V_2 \int \frac{\beta_1 dO_2}{r_1} + V_1 \int \frac{\alpha_2 dO_2}{r_1} + V_2 \int \frac{\beta_2 dO_2}{r_1}$$

$$V_2 = V_1 \int \frac{\alpha_1 dO_1}{r_2} + V_2 \int \frac{\beta_1 dO_2}{r_2} + V_1 \int \frac{\alpha_2 dO_2}{r_2} + V_2 \int \frac{\beta_2 dO_2}{r_2}$$

Und da diese Gleichungen für alle Werthe von V_1 und V_2 bestehen müssen, so ~~muss~~ bestehen zwischen den Coefficienten von V_1 und V_2 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \int \frac{\alpha_1\, dO_1}{r_1} + \int \frac{\alpha_2\, dO_2}{r_1} \\
0 &= \int \frac{\beta_1\, dO_1}{r_1} + \int \frac{\beta_2\, dO_2}{r_1} \\
0 &= \int \frac{\alpha_1\, dO_1}{r_2} + \int \frac{\alpha_2\, dO_2}{r_2} \\
1 &= \int \frac{\beta_1\, dO_1}{r_2} + \int \frac{\beta_2\, dO_2}{r_2}
\end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Diese Gleichungen welche zur Bestimmung der Grössen α_1, α_2, β_1 und β_2 dienen können, zeigen dass diese Grössen von V_1 und V_2 unabhängig sind — und somit spricht (3) den Satz aus: dass die Dichtigkeiten der freien Electricität in den Condensatorplatten homogene lineare Functionen der Potentiale sind.-

Dass die Gleichungen (3) wirklich Lösungen der Gl. (2) sein können zeigt ~~auch~~ dass sie die Lösungen eines speciellen Falles, nämlich der Gleichungen (4) sind — welche von (2) abgeleitet werden können, indem man erstens $V_1 = 1$ und $V_2 = 0$ dann $V_1 = 0$ und $V_2 = 1$ setzt.- Dieser specielle Fall ist auch in der Natur zu verwirklichen.-

Da nun:

$$e_1 = \int \varepsilon_1 dO_1 \quad \text{und} \quad e_2 = \int \varepsilon_2 \cdot dO_2$$

so wird:

$$(4) \begin{cases} e_1 = V_1 \int \alpha_1 dO_1 + V_2 \int \beta_1 dO_1 \\ e_2 = V_1 \int \alpha_2 dO_2 + V_2 \int \beta_2 dO_2 \end{cases}$$

Setzt man dann diese 4 Integrale gleich a_1, b_1, a_2, b_2 so ist die Gleichung (1, und somit das bewiesen dass im Condensator die Electricitätsmengen der Condensatorplatten lineare homogene Functionen der Potentiale sind. Die Gleichungen (1, sind die Grundgleichungen der Theorie des Condensators. –

Wenn der Condensator sehr empfindlich ist, d. i. wenn die Entfernung der Platten im Verhältniss zu ihrer Grösse sehr klein ist, so werden sich ~~sich~~ die Electricitätsmengen e_1 und e_2 auf den Platten 1 und 2 so sehr verbreiten dass die Potentiale V_1 und V_2 (gegen die) sehr klein werden ~~gegen~~. Hieraus sieht man dass in den Gleichungen (1, a, b, a_2 b_2 sehr gross im Verhältniss zu V_1 und V_2 sind. –

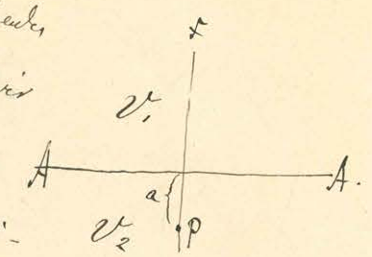
Die Gleichungen (1) müssen aber für alle Werthe von V_1 und V_2 bestehen, also auch dann wenn, die beiden Platten mit demselben Leiter verbunden werden — das ist wenn $V_1 = V_2$ dann wird aber auch $e_1 = 0$ und $e_2 = 0$, und dies ist nur möglich wenn die Grössen $a_1 - b_1$ und $b_2 - a_2$ Grössen derselben Ordnungszahl sind wie $V_1 - V_2$ und e_1 also wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. — Hierdurch werden die Gleichungen (1)

$$e_1 = a_1(V_1 - V_2) \quad \text{und} \quad e_2 = -a_2(V_1 - V_2)$$

8. Electricitätserregung beim Contact zweier heterogener Leiter. –

Der Gleichgewichtszustand der Electrischen Flüssigkeiten in einem Leiter, erfordert die Bedingung $V = Const.$ – wenn sich also zwei homogene Leiter berühren, so muss in beiden V denselben Werth haben. – Wenn aber die zwei sich berührenden Leiter heterogener Natur sind, so wird das Potential in ~~bei~~ jedem einen anderen Werth haben. – Es ist dies eine Folge der ~~der~~ Kräfte, welche die wägbaren Molecüle des Leiters auf die in ihm verbreiteten Electricitäts theilchen ausüben; diese Kräfte sind bei heterogenen Körpern verschieden – und hier her rührt auch die Verschiedenheit der Vertheilung der Electricität in ihnen her. – Wenn die Electricitätmengen sehr gross sind, so ~~verschwin~~ ist die Einwirkung dieser Molecularkräfte vernachlässigbar – sie wird aber stark merkbar bei Versuchen mit schwacher Electricität. – Bei schwacher Electricität ist also die Änderung des Potentials beim Übergange

aus einem Leiter in den Andern endlich. –
Es sei AA die Grenzfläche der zwei sich berührenden Leiter. – Einen kleinen Theil dieser Fläche können wir immer als eben betrachten – und diese Ebene sei die YZ Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. – Wir wollen die Gleichgewichtsbedingung eines Electricitätstheilchens ~~betrachten~~ aufsuchen, welches in der x Axe, um ~~die~~ eine Grösse a von der YZ Ebene entfernt liegt, welche für unsere Sinne verschwindend ist. – Hiermit soll gesagt sein dass a eine so kleine Entfernung von der Oberfläche ist, in welcher die erwähnten Molecular Kräfte noch wirksam sind. –



Ist dann V das Potential in P. diesem Punkte P, so ist die Kraft welche die Electricitätsmengen auf ihn in der Richtung der x Axe ausübt:

$$-\frac{\partial V}{\partial a}$$

Gleichzeitig mit dieser Kraft wirken aber auf dasselbe Theilchen auch die Molecularkraft $f(a)$, so dass im Falle des Gleichgewichtes

$$f(a)-\frac{\partial V}{\partial a}=0$$

sein muss. –

Nimmt a einen endlichen messbaren Werth l an – so verschwindet $f(a)$. –
Durch Integration ergiebt sich

$$\int_{-l}^{+l} f(a)da = V_l - V_{-l}$$

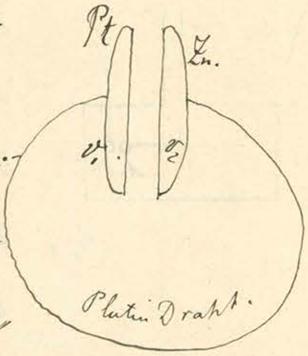
Da l alle Werthe haben kann die grösser sind als unendlich klein so ist:

$$(1) \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} f(a)da = V_1 - V_2$$

V_1 und V_2 bezeichnen hierin die Potentiale in den zwei Leitern + $(V_1 - V_2)$ ist die Änderung des Potentials indem man von einem Leiter in den anderen übergeht – es ist die Grösse welche wir die electrische Differenz der zwei Leiter nennen werden. – Diese Electrische Differenz ist für dieselben zwei Leiter constant – denn $f(a)$ ist für nicht unendlich kleine Werthe von a gleich 0 und folglich das Integral (1) constant. –
Die electr. Diff. ist nur von der chem. Beschaff. der zwei Leiter abhängig. –
Kohlrausch bestimmte die electrische Differenz mehrerer Leiter – er veröffentlichte seine Versuche

in dem 82ten Bande von Poggendorff's Annalen. (1851) — das wesentliche seiner Methode soll hier folgen. —

Es seien die zwei Platten eines Condensators aus verschiedenen Leitern etwa aus Platin und Zink gebildet ~~bestehen~~ — und durch einen Platin Draht verbunden. Das Potential in der Platinplatte und in dem Platindraht, welche ja einen und denselben Leiter bilden, ~~sollt~~ ist constant und zwar $= V_p$ — das Potential der Zinkplatte ist auch constant $= V_z$. — Wenn wir die electrische Differenz zwischen Platin und Zink durch (P,Z) bezeichnen — so ist:



$$V_p - V_z = (P,Z)$$

und

$$V_z - V_p = (Z,P)$$

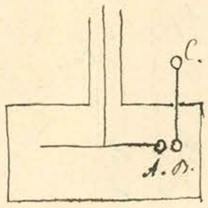
also:

$$(P,Z) = -(Z,P)$$

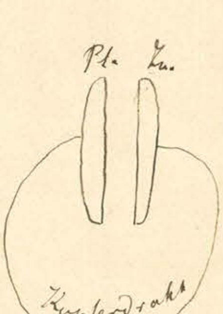
Sind die Electricitätsmengen, welche die zwei ~~gleich gross~~ Condensatorplatten, deren Dimensionen als gleich angenommen werden e_1 und e_2 so ist:

$$e_1 = -e_2 = a(V_1 - V_2) = a(P,Z)$$

Entfernt man die Condensator Platten genügend so hören e_1 und e_2 auf sich gegenseitig zu fesselnman wird sie dann mit einem Electrometer messen können — als solches wandte Kohlrausch eine Vorrichtung an, welche der Coulomb'schen Drehwage ähnlich war. —



Bringt man ~~kein eine~~ die Platten in Berührung mit der Kugel C einer solchen Vorrichtung, so werden die Kügelchen A und B gleichartig electrisirt, und zwar nehmen sie Electricitätsmengen auf die proportional sind mit e_1. — Die Kügelchen stossen sich ab mit einer Kraft, welche ~~gegen~~ durch die Torsion des Aufhängungsfadens gemessen werden kann — diese Kraft is proportional mit dem Producte der Electricitätsmengen in A und B, also mit e_1^2 — da aber e_1 proportional ist mit (P,Z) so ist (P,Z) proportional mit der $\sqrt{Kraft}$. —



Nach ausgeführter Messung von (P,Z) verbinden wir die zwei Platten mit einem Kupferdraht. Dann ist das Potential

in	Pt.	V_1
"	Cu	$V_1 + (K,P)$
"	Zn	$V_1 + (K,P) + (Z,K) = V_2$

in diesem Falle ist:

$$e_1 = -e_2 = a\left((P,K) + (K,Z)\right)$$

Wenn man nun e_1 wieder an der Drehwage misst, so findet man dass sie denselben Werth hat als vorher, da die Condensator Platten mit einem ~~Kupf~~ Platindraht verbunden waren. Hieraus folgt dass:

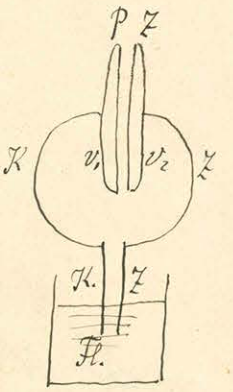
$$(P,Z) = (P,K) + (K,Z) \qquad \ldots\ldots (2)$$

Mit Leichtigkeit ~~ist~~ kann dieser Satz für so erweitert werden ~~andere und auch mehrere~~ dass noch mehr Leiter eingeschaltet werden. – Diesem Satze genügen aber nicht alle Körper, eine grosse Classe von Körpern genügt dieser Gleichung nicht, wir nennen sie Leiter 2ter Classe; während wir unter Leiter 1ter Classe alle Leiter verstehen die die Gleichung erfüllen. – Leiter 1ter Classe sind ~~die~~ alle Metalle, Leiter 2ter Classe die meisten Flüssigkeiten. –

Wir besprachen eine Methode nach welcher die electrische Differenz (P,Z) bestimmt werden könnte, als Resultat ergiebt sich $(P,Z) = e_1$ Factor. ~~wo dieser Factor~~ ähnlich könnte man die Electrische Differenz zweier anderer Metalle A und B finden es –

ergiebt sich dann $(A,B) = c$ (Derselb. Factor) — eines dieser electr. Differenzen als Einheit angenommen — könnte man demnach alle anderen durch Zahlenwerthe ausdrücken. — Diese Methode ist aber praktisch fast unausführbar — denn die Constanz des Factors bei allen Bestimmungen, erfordert dass bei allen Versuchen a denselben Werth habe, also dass ~~die~~ alle Condensatorplatten genau dieselbe Gestalt haben. —

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen wandte Kohlrausch folgende Methode an. —



Er verband die Platinplatte durch einen Kupferdraht mit dem Kupfer, die Zinkplatte durch einen Zinkdraht mit dem Zink eines Elementes — welches von Zink Kupfer und einer Flüssigkeit bestand. — Bezeichnen wir mit V_1 das Potential in der Platinplatte, mit V_2 dasselbe in der Zinkplatte, so ist

das Potential in P	V_1
" " K	$V_1 + (K,P)$
" " Fl.	$V_1 + (K,P) + (F,K)$
" " Zn	$V_1 + (K,P) + (F,K) + (Z,F) = V_2$

also:

$$V_1 - V_2 = (P,K) + (K,F) + (F,Z)$$

Setzt man hierin statt (P,K) , $(P,Z)+(Z,K)$ so wird:

$$V_1 - V_2 = (P,Z) + (Z,K) + (K,F) + (F,Z)$$

die Summe

$$(Z,K) + (F,Z) + (K,F) = k$$

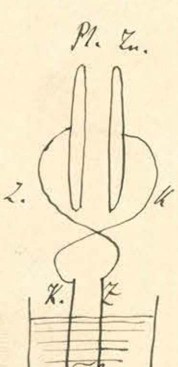
hängt nur von der Beschaffenheit des angewendeten Elementes ab, man nennt sie die Electromotorische Kraft derselben. – Es ist also:

$$V_1 - V_2 = k + (P,Z)$$

Auf dem Electrometer kann dann gemessen werden:

$$e_1 = -e_2 = a\left((P,Z) + k\right) = A$$

Verbindet man jetzt die Platinplatte des Condensators mit dem Zink, und die Zinkplatte mit dem Kupfer des Elementes, so ergiebt sich:



$$V_1 - V_2 = (P,Z) - k$$

und man findet:

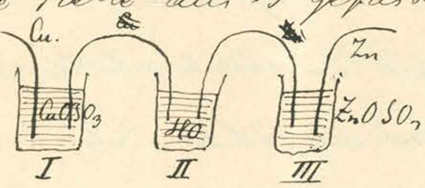
$$e_1 = -e_2 = a\left((P,Z) - k\right) = B$$

Es ergiebt sich dann:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{(P,Z)}{k} \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

A und B sind durch Zahlenwerthe gegebene Grössen – Durch (2) bestimmt man also das Verhältniss von (P,Z) zu K – Denselben Versuch mit anderen Condensatorplatten wiederholend, ergiebt sich das Verhältniss der electrischen Differenzen eines anderer Leiter zur electromotorischen Kraft desselben Elementes. –

Diese Versuche sind von der Wahl der Substanzen welche das ~~Kette~~ Element bilden unabhängig; Es muss aber die ~~K~~ electromotorische Kraft des Elementes möglichst constant sein, d.i. es müssen die chemischen Veränderungen in demselben verhindert werden. – Dies erreichte Kohlrausch in dem er die Kette aus 3 Gefässen, wie es die Figur zeigt zusammenstellte. –



Die Gefässe I mit II und II mit III verband Kohlrausch durch Baumwollenfäden. – Die electromotorische Kraft seiner Kette war demnach:

$$K=(K,F_1)+(F_1,F_2)+(F_2,F_3)+(F_3,Z)+(Z,K)$$

Als Controlversuch ~~machte~~ führte Kohlrausch noch folgenden aus. – Er verband die zwei Condensator Platten, also etwa die ~~Zink~~ und Platinplatte durch einen Platindraht – und fand so:

$$e_1 = -e_2 = a(P, Z) = C$$

Mit Hülfe ~~Aus~~ der Gleichung (3) ergiebt sich aber dann:

$$\frac{A+B}{2} = C \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nach diesen Methoden fand Kohlrausch bei Versuchen mit dem Zinkplatin Condensator:

$A = -2{,}96$

$B = 12{,}00$

$C = 4{,}46$

Die Einheit in welcher diese Grössen ausgedrückt sind ist von der Gestalt der Condensatorplatten, und von dem Electrometer abhängig. –

Es ergiebt sich

$$\frac{A+B}{2} = 4{,}52$$

also sehr nahe zum direct gefundenen Werthe von C. –

Bei Versuchen mit dem Zink–Kupfer Condensator fand er: $A = -3{,}08$

$B = 11{,}06$

$C = 3{,}98$

also: $$\frac{A+B}{2} = 3,99$$

Diese Werthe von A, B in (3) eingesetzt, ergeben:

$$(Z,P) = 0,604 \cdot k$$

$$(Z,K) = 0,564 \cdot k$$

hieraus ergiebt sich

$$(Z,P) = 1,07 (Z,K)$$

So stellte Kohlrausch folgende Tafel der electrischen Differenzen zusammen:

$$(Zn,Cu) = 1$$

$$(Pb,Cu) = 0,93$$

$$(Sn,Cu) = 0,42$$

$$(Fe,Cu) = 0,25$$

$$(Cu,Cu) = 0$$

$$(Ag,Cu) = -0,06$$

$$(Pt,Cu) = -0,07$$

$$(Au,Cu) = -0,13$$

Die Electrischen Differenz irgend zweier dieser Metalle, welche hier mit dem Kupfer verbunden sind, lässt sich nun leicht zu berechnen. – Suchen wir z. B. (Zn,Pt), so wissen wir dass

$$(Zn,Pt) = (Zn,Cu) - (Pt,Cu)$$

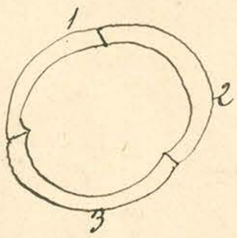
also:

$$(Zn, Pt) = 1,07$$

Diese Reihe nennen wir die electrische Spannungsreihe, sie ist dieselbe wenn die mit dem Kupfer zusammengestellten Metalle, mit einem anderen verglichen werden. –

In derselben weise wie Kohlrausch hat auch Hankel sorgfältige Versuche ausgeführt. –

II
Electrodynamik.
Theorie stationärer Ströme.
1. Allgemeine Theorie stationärer Ströme.



Sind ~~zwei~~ drei Leiter in der weise verbunden wie es das Schema darstellt, so ist ein Gleichgewicht der Electricität in ihnen nur dann möglich wenn sie Leiter 1ter Classe sind. – Im Falle des Gleichgewichtes nun:

$$V_1 - V_2 = (1,2)$$
$$V_2 - V_3 = (2,3)$$
$$V_3 - V_1 = (3,1)$$

Addiert:

$$0 = (1,2) + (2,3) + (3,1)$$

dies ist eben die Bedingungsgleichung dafür dass 1, 2 und 3 Leiter erster Classe sind. – Ist ~~dies~~ aber eines der 3 Leiter ein Leiter 2ter Classe ~~nicht so~~, dann tritt eine Bewegung der Electrischen Flüssigk. in dem Systeme ein, – es entsteht ein Strom, welcher Anfangs, wie die Bewegung des ~~was~~ durch eine geöffnete Schleuse strömenden

Wassers, stürmisch und unregelmässig ist dann aber an Heftigkeit ~~fort~~ fortwährend abnimmt, und schliesslich stationär wird. – Die stationären Ströme zu untersuchen sei unsere nächste Aufgabe. – Das Schema 1, 2, 3 ist wenn einer dieser Leiter ein Secundärer ist das Schema einer galvanischen Kette, die folgenden Untersuchungen dienen also auch der Theorie der Galvanischen Kette als Grundlage. –

Es sei V das Potential des ganzen Systems von Leiter auf einen Punkt (x, y, z) in ihm – es wird also V eine Function von x, y, z, aber da der zu untersuchende Strom ein Stationärer ~~Strom~~ sein soll unabhängig von der Zeit t sein. – Die Kraftcomponenten mit welcher dann die Electricität auf die Einheit der electr. Menge in x, y, z ~~einwirkt~~ einwirkt sind dann

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \quad -\frac{\partial V}{\partial y} \quad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Wenn in x, y, z nicht die Einheit sondern die Menge e Electricität enthalten ist, so werden diese Kraftcomponenten

$$-e\frac{\partial V}{\partial x} \quad -e\frac{\partial V}{\partial y} \quad -e\frac{\partial V}{\partial z}$$

Wenn also u, v, w die Componenten der Geschw. nach den Coordinaten Axen sind, und m die Masse derjenigen Menge electrischer Flüssigkeit ist, die wir als Einheit angenommen haben, so ist nach allgemeinen Prinzipien der Dynamik

$$me\frac{\partial u}{\partial t} = -e\frac{\partial V}{\partial x} \qquad u.s.w.$$

dann ist:

$$(1) \quad \begin{cases} m\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ m\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ m\dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Es würde demnach wenn V constant wäre u, v, w constant sein. –

Die Erfahrung hat aber gezeigt dass ausser den von den Electricitätstheilchen ausgeübten Kräften, noch andere da sind, die von den Molecülen des Leiters herrühren. – Einen Beweis hierfür liefert jeder Inductionsstrom, welcher augenblicklich aufhört, sobald der Magnet aus ihrer Mitte entfernt wird; diese Erscheinung kann eben nur erklärt werden, wenn wir der Reibung ähnliche ~~Kr~~ Molecularkräfte annehmen, welche der Bewegung der Electricität entgegen wirken. – Über diese Kräfte wollen wir eine einfache Hypothese machen, welche mit folgender Betrachtung zusammenhängt. – Denken wir uns eine in Wasser fallende Kugel, der Widerstand des Wassers wird nach kurzer Zeit ihrer Geschwindigkeit u proportional ~~sein~~ werden. Dieser Widerstand kann also durch bu ausgedrückt werden, wo b eine constante ist – es wird demnach die Beschleunigung der in dem Wasser fallenden Kugel

$$\frac{du}{dt} = a - bu \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

sein, worin a die Beschleunigung der frei fallenden Kugel, also ~~ihre~~ die Schwere ist.

Um sie integriren zu können schreibe ich die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = -b\left(u - \frac{a}{b}\right)$$

setze

$$v = u - \frac{a}{b}$$

$$\frac{dv}{dt} = -bv \qquad \frac{dv}{v} = -b\,dt\,;$$

$$\log v = -bt + C$$

$$v = e^{-bt+C} = e^{-bt}.e^{C} = A.e^{-bt}$$

also:

$$u = A.e^{-bt} + \frac{a}{b}$$

Wir nehmen an dass für $t=0$ auch $u=0$, dann ist

$$A = -\frac{a}{b}$$

und

$$u = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$

Für $t = \infty$ nimmt u den Grenzwerth $\frac{a}{b}$ an, die Grenzgeschwindigkeit ist also direct mit der Beschleunigung indirect mit dem Widerstande proportional — diesem Grenzwerthe nähert sich u um so schneller desto grösser b ist. — Wir wollen nun annehmen dass der Bewegung des Electricitätstheilchen in einem Leiter auch ein Widerstand entgegenstehe, und zwar, dass b sehr gross sei, so dass in sehr kurzer Zeit der Endzustand der Geschwindigkeit eintreten muss, und man u mit a proportional betrachten kann. — Das a wird in diesem Falle die von der freien Electricität auf das bewegte Theilchen ausgeübte Kraft sein. —

~~Wir werden jetzt die Menge positiver oder negativer Electricität aufsuchen welche in der Zeit dt durch das Flächenelement dO hindurchfliesst. —~~

Die Componenten dieser Kraft sind:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Also wenn wir die Kraft mit R bezeichnen, so ist:

$$R=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

Wir wollen jetzt die Menge positiver oder negativer Electricität aufsuchen, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement dO fliesst. — Denkt man sich die Bewegung der Electricitätstheilchen durch Austausch ermittelt, so fliesst in einer Richtung eben so viel positive Electricität ein, als in der entgegengesetzten negative aus fliesst. —

1) Es sei das Flächenelement dO senkrecht zur Richtung des Stromes also zu R — die Cosinuse der Winkel welche R mit den Coordinatenaxen bildet sind:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{R}, \quad \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{R}, \quad \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{R}$$

dieselben Grössen sind ~~in diesem Falle~~ aber auch die Cosinuse der Winkel welche die Normale der Fläche $V = Const.$ mit den Coord. Axen einschliesst. — Die Richtung des Stromes ist demnach auf die Oberfläche constanten Potentials senkrecht. — Das Element dO wird also ein Theilchen dieser Oberfläche sein. — Wir nehmen an, dass die positive Electricität sich in der Richtung $+R$ die negative in der Richtung $-R$ bewegt. — Nennen wir L die Menge positiver Electricität, welche in dem Zeitelement dt durch dO fliesst, nennen wir ferner $+E$ und $-e$ die Dichtigkeiten der electrischen Fluida, so ist:

$$\alpha = E . dO . u . dt$$

worin u die Geschwindigkeit der Electricitätstheilchen bedeutet. – Da E und $-e$ nur unendlich wenig verschieden sein können, so sind auch die Geschwindigkeiten für beide Electricitäten nur unendlich wenig verschieden. – Nach der Hypothese ist u proportional mit R und zwar $= R$, dividirt durch den Widerstand. – Es ist also $u = \frac{R}{w}$; worin w den Widerstand des Leiters also eine von seiner chemischen Beschaffenheit abhängige Grösse bedeutet. – Wir setzen

$$\frac{E}{w} = \lambda$$

und nennen λ die Leitungsfähigkeit des Leiters. Hierdurch wird:

$$(3) \ldots\ldots \qquad \alpha = \lambda . dO . R dt$$

2) Ist nun dO nicht senkrecht zu R sondern bildet es mit dieser Richtung, also mit der Normale von dO den Winkel $\varphi = (N, R)$, so so ist:

$$\alpha = \lambda \, dO \, R dt \cos (N, R)$$

R cos(N, R) ist die Componente von R nach der Richtung von N. – Diese selbe Componente ist aber auch

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,z)\right)$$

und daher folgt, wenn α jetzt die in der Zeiteinheit hindurchströmende Electricitätsmenge ist:

$$\alpha = -\lambda d\Theta\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,z)\right\}\;\ldots\ldots\quad(4)$$

Denken wir uns nun im Inneren des Leiters ein den Coordinaten Axen Paralleles unendlich kleines Parallelepipedon. – Die Kanten desselben seien dx, dy, dz, seine 6 Flächen sind dx dy, ~~dydz +~~, d dydz und dz dx – dann die drei diesen entgegengesetzten Flächen. – Die Electricitätsmengen welche durch 3 dieser Flächen ~~hindurch flo~~ in das Parallelepiped hineinfliessen – müssen wenn der Strom stationär sein soll in ~~ganz~~ derselben Zeit durch die entgegengesetzten Flächen wieder hinausfliessen. – Da aber in der Zeiteinheit durch die vorderen Flächen die Electricitätsmengen

$$-\lambda\, dy\, dz \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$-\lambda\, dz\, dx \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$-\lambda\, dx\, dy \frac{\partial V}{\partial z}$$

in das Parallelepiped hineinfliessen, und in der Zeiteinheit durch die hinteren Flächen, die Mengen

$$-A\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\right)$$

$$-A\,dz\,dx\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dy\right)$$

$$-A\,dx\,dy\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dz\right)$$

hinausfliessen – so ergiebt sich als Bedingung des stationären Stromes

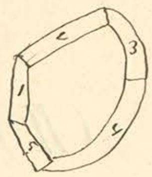
$$A\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=0$$

oder:

(5) .... $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

~~Erst~~ Ist x, y, z ein Punkt im Innern des Leiters so spricht diese Gleichung einen Satz aus, welchen wir schon als Bedingung des Gleichgewichtes kennen gelernt haben. – Die Summe (5) muss aber dann nach Betrachtungen des Potentials $=-4\pi k$ sein; dieses Behauptung können wir aber mit (5) nur dadurch vereinigen dass wir setzen $k=0$, das ist die Dichtigkeit der Electr. in jedem Punkte des Inneren des Leiters $=0$. – Bei einem stationären Strome ist demnach die freie Electricität auf die Oberfläche der Leiter beschränkt. –

Haben wir nun mehrere, ich will sagen n Leiter, die mit einander so eine Schliessung bilden dass ~~jeder derselben nur mit einem an~~ sie einfach neben einander gelegt sind, und bezeichnen wir mit V_1, V_2, V_3 .... die Potentiale innerhalb dieser einzelnen Leiter — so muss im Falle eines stationären Stromes für jeden dieser Leiter die Gleichung (5) gebildet werden können, dies giebt die Gruppe von Gleichungen:



$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}=0\\
&\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(I)$$

Neben diesen Gleichungen müssen noch weitere ~~d~~ Grenzbedingungen erfüllt werden.—
Beim stationären Strome ~~ka~~ darf keine Electricität aus dem Leiter hinausfliessen — es muss also die durch die Oberfläche fliessende Electricitätsmenge $=0$ und somit:

$$\lambda\, dO\, R\, dt \cos(N,R)=0 \quad {}^{+)}$$

sein; da diese Bedingung für jeden einzelnen Leiter zu erfüllen ist, so ergieben sich: —

+) diese Gleichung kann nur dadurch erfüllt werden dass $\cos(N,R)=0$; d.i. ~~der~~ Richtung des Stromes ist auf die Normale der Oberfläche vertical.—

$$(II)\quad \begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial x}\cos(N_1x) + \frac{\partial V_1}{\partial y}\cos(N_1y) + \frac{\partial V_1}{\partial z}\cos(N_1z) = 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial x}\cos(N_2,x) + \frac{\partial V_2}{\partial y}\cos(N_2y) + \frac{\partial V_2}{\partial z}\cos(N_2z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x}\cos(N_nx) + \frac{\partial V_n}{\partial y}\cos(N_ny) + \frac{\partial V_n}{\partial z}\cos(N_nz) = 0 \end{cases}$$

Eine weitere Bedingung des stationären Stromes ist die dass an der Grenzfläche zweier Leiter, so viel positive Electricität von einem Leiter in den anderen fliesst, als von ~~diesem~~ in den ersten: negative fliesst. Sind also N_1 und N_2 etc. die in das innere der Leiter 1 und 2 … gerichteten Normalen der Grenzfläche, ~~so ist~~; und λ_1, λ_2 die entsprechenden Leitungsfähigkeiten so ist:

$$(III)\dots \begin{cases} \lambda_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\cos(N_1x) + \frac{\partial V_1}{\partial y}\cos(N_1y) + \frac{\partial V_1}{\partial z}\cos N_1z\right) + \\ \quad + \lambda_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\cos(N_2,x) + \frac{\partial V_2}{\partial y}\cos(N_2y) + \frac{\partial V_2}{\partial z}\cos(N_2z)\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n\left(\frac{\partial V_n}{\partial x}\cos(N_nx) + \frac{\partial V_n}{\partial y}\cos(N_ny) + \frac{\partial V_n}{\partial z}\cos(N_nz)\right) + \\ \quad + \lambda_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\cos(N_1x) + \frac{\partial V_1}{\partial y}\cos(N_1y) + \frac{\partial V_1}{\partial z}\cos(N_1z)\right) = 0 \end{cases}$$

Beim Übergange aus einem Leiter in einen anderen erleidet das Potential einen Sprung — dieser Sprung ist beim stationären Strome eben so gross wie beim Gleichgewichte der Electricität (~~warum?~~), d. i. gleich der electrischen Differenz. So dass:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - V_2 = (1,2) \\ V_2 - V_3 = (2,3) \\ \dots\dots\dots \\ V_n - V_1 = (n,1) \end{array}\right\} \dots (IV)$$

Man kann nachweisen, dass ~~mit Hülfe~~ Durch dieser vier Gruppen (I–IV) von je n Gleichungen – diejenigen Werthe von V in den n Leitern, welche der Bedingung des stationären Stromes genügen bis auf einer additiven in allen V-s vorkommenden Constante eindeutig bestimmt sind. – Die additive Constante lässt sich leicht bestimmen, wenn man den Werth des Potentials in einem Punkte der Schliessung kennt. – (Man kann zu diesem Zwecke einen der Leiter mit der Erde verbinden dann bestimmt sich die Constante aus $V=0$). – Zur Kenntniss der Strömungen ist übrigens die ~~Kenn~~ Bestimmung ~~derselben~~ der Constante nicht erforderlich – denn wenn wir uns mit dieser Frage beschäftigen so haben wir es nur mit den Diff. Quot. der V-s, als Ausdrücken der Kraft zu thun. –

<u>Literatur.</u> Kirchhoff's Abhandlungen. Poggendorff. Band 75 u. 78

Weber. Electrodynamische Maassbestimmungen. 1850.

2. Bedingungen des stationären Stromes in linearen Leitern.-

Drähte nennt man lineare Leiter.- Die abgeleiteten IV. vier Gruppen von Bedingungsgleichungen vereinfachen sich wesentlich wenn alle Leiter der Schliessung linear sind.- Es ist dies eine Bedingung welche ~~von~~ nicht verwirklicht werden kann, es lässt sich aber zeigen dass Ströme welche durch gewöhnlich benützte nicht lineare Ketten hervorgebracht werden sich in linearen Leiten ganz so verhalten, wie es Ströme thun würden welche durch ideelle lineare Ketten erzeugt wären.- Bei linearen Leiten ~~ist die~~ ~~bei~~ geschieht die Strömung in ihrer Längsrichtung - es folgt dies aus dem schon angeführten Satze dass die Richtung des Stromes immer senkrecht ist auf die Oberfläche gleichen Potentials - und diese Oberfläche ist bei linearen Leiten der Querschnitt.- Es folgt dies übrigens auch aus der Bemerkung auf Seite 53.-

Ist V das Potential in einem linearen Leiter, λ seine Leitungsfähigkeit, q sein Querschnitt an einer Stelle welche um s von ~~xx~~ dem Anfangspunkte des Leiters absteht; dann ist die Menge positiver Electricität, welche in der Zeiteinheit durch q fliesst:

$$\varepsilon = -\lambda q \frac{dV}{ds}$$

V ist nur eine Function von s. —

~~Angenommen dass λ und q im ganzen Leiter constant sind, wird auch~~ die Electricitätsmenge ε, unab- muss hängig vom Orte sein*) wenn also λ und q im ganzen Leiter constant ~~und~~ dann muss ~~aber~~

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \text{Const.}$$

sein, und somit:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (I)$$

Haben wir ein System von n linearen Leitern so wird diese Gleichung n-mal zu bilden sein. — Sie entspricht der Gl. I in 1.. —

Die II-te zu erfüllende Bedingung haben wir in diesen Gleichungen auch ausgedrückt, wir haben ja angenommen dass der Strom senkrecht auf den Querschnitt gerichtet ist. —

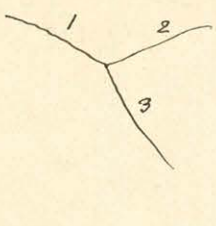
Die allgemeinen Gleichungen III des 1ten Kapitels

*) ist sehr fraglich 15/4 1872 El

verwandeln sich, wenn wir sie auf die Berührungsfläche zweier linearer Leiter anwenden, in

III .... $$\lambda_1 q_1 \frac{dV_1}{ds_1} = \lambda_2 q_2 \frac{dV_2}{ds_2}$$

hierbei werde die Längsrichtung eines jeden Drahtes zur Messung der Entfernung seines Querschnittes durch s resp. x Axe gewählt — die Normale werde ebenso gerichtet wie in den allgemeinen Betrachtungen. — Bei linearen Leitern kann der Fall eintreten ein Querschnitt die Berührungsfläche mehrerer derselben ist — in diesem Falle wird:



$$\lambda_1 q_1 \frac{dV_1}{ds_1} = \lambda_2 q_2 \frac{dV_2}{ds_2} + \lambda_3 q_3 \frac{dV_3}{ds_3}$$

Um Irrungen zu vermeiden, muss man streng darauf achten, dass die positive Richtung des Stromes für alle Leiter die positive Richtung der s sei, oder umgekehrt. —

Das System der Gleichungen IV bleibt auch hier

(IV) $$V_1 - V_2 = (1,2) \quad \text{etc.}$$

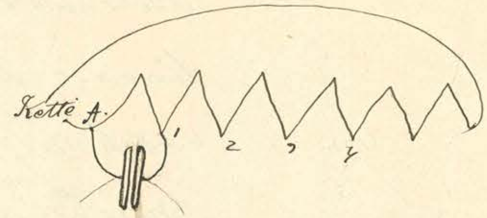
Diese Gleichungen Gruppen I, III, IV, bestimmen auch ~~too~~ in diesem Falle bis auf eine gemeinsame additive Constante die Werthe aller Potentiale eindeutig. —

Die Integration der ~~ersten~~ I giebt

$$\frac{dV}{ds} = a \quad \text{und}$$

$$V = as + b \qquad \ldots\ldots (6)$$

Wo a und b Constanten sind. – Dieses Resultat constatirte Kohlrausch experimentell. – Er verband die Pole einer galv. Kette mit einem theilweise zickzackförmig gebogenen Draht – ~~dessen Eckpunkte~~ die Entfernungen der Eckpunkte dieses Drahtes von einem Punkt A waren genau abgemessen. – Er verband darauf die eine Condensatorplatte mit A die andere successive mit allen Eckpunkten des Drahtes. – in (6) $s=0$ gesetzt erhält man den Potential im Punkte $s=0$, bei diesen Versuchen A – nennt man dies Potential V_0 so ist:



$$(V - V_0) = as$$

Kohlrausch zeigte durch diese Versuche dass $V - V_0$ mit s proportional ~~sind~~ ist. –

Wir definiren die Intensität des Stromes als die Menge pos. electr. Flüssigk. welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt q fliesst – Es ist also

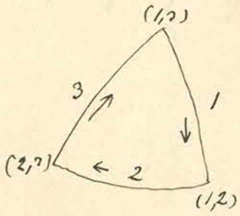
$$i = -\lambda q a$$

dies in (6) gesetzt:

$$V = -\frac{i}{\lambda q} s + b \qquad \ldots\ldots (7)$$

3. Das Ohm'sche Gesetz. –

Betrachten wir jetzt den einfachen Fall dass jeder lineare Leiter nur mit zwei anderen in Berührung sei. – Die Intensität des Stromes ist dann in allen 3 Leitern dieselbe. – Fasse ich die Berührungsfläche (1,2) in's Auge, da besteht nach IV.



$$(V_1 - V_2) = (1,2)$$

V_1 und V_2 kann ich mit Hülfe der Gleichung (Z) des 2ten Kap. ausdrücken; ich muss aber da für s_1 die ganze Länge des Leiters 1, für s_2 dagegen 0 zu setzen; so dass:

$$-\frac{i}{\lambda_1 q_1} l_1 + b_1 - b_2 = (1,2)$$

ähnlich ergiebt sich:

$$-\frac{i}{\lambda_2 q_2} l_2 + b_2 - b_3 = (2,3)$$

$$-\frac{i}{\lambda_3 q_3} l_3 + b_3 - b_1 = (3,1)$$

Merkwürdigerweise lassen sich die 3 unbekannten Grössen b_1, b_2 und b_3 aus diesen Gleichungen durch einfache Addition eliminieren, man erhält so:

$$i\left\{\frac{l_1}{q_1\lambda_1}+\frac{l_2}{\lambda_2 q_2}+\frac{l_3}{\lambda_3 q_3}\right\} = (2,1)+(3,2)+(1,3) \qquad \ldots (8)$$

oder auch:

$$i = \frac{(2,1)+(3,2)+(1,3)}{\frac{l_1}{\lambda_1 q_1}+\frac{l_2}{\lambda_2 q_2}+\frac{l_3}{\lambda_3 q_3}} \qquad \ldots\ldots (9)$$

Diese Gleichung spricht das Ohmsche Gesetz aus – der Zähler ist ja die electromotorische Kraft der Schliessung, und der Nenner die Summe der Widerstände der einzelnen Leiter also der Widerstand der ganzen Schliessung. –

Diesen von Ohm theoretisch ungenügend aufgestellten Satz bewies Fechner experimentell. –

Wir haben dieses Ohm'sche Gesetz nur für 3 Leiter bewiesen – durch Einschalten mehreren verändert sich der Beweis nicht im geringsten. –

Bevor ich den Fall der unverzweigten Schliessung verlasse, will ich noch eine nützliche Bemerkung machen – Gesetzt es wären 4 Leiter auf die besprochene Weise zu einer Schliessung zusammengestellt – es muss dann, damit ein Strom entstehen könne wenigstens einer ein Leiter 2ter Classe sein. – Die Electromotorische Kraft dieser Schliessung ist:

$$E = (2,1)+(3,2)+(4,3)+(1,4)$$

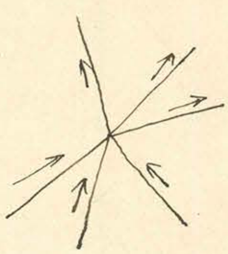
Sei 1 eine Flüssigkeit, und mit 2 und 4 in Verbindung – d.i. es sei 1,2,4 ein galv. Element durch einen Draht 3 verbunden; wir kommen dann zum merkwürdigen Resultate dass die Electromotorische Kraft eines Elementes von der Natur des Schliessungsdrahtes unabhängig ist; denn da 2,3, und 4 Leiter erster Klasse sind so ist:

$$(4,3)+(3,2)=(4,2)$$

und somit

$$\mathcal{E}=(2,1)+(4,2)+(1,4)$$

4. Die Kirchhoff'schen Sätze. –



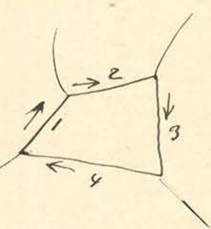
Es sollen sich die Leiter 1,2, ...n alle in einem Punkte, besser gesagt in einer Fläche ~~durch kreuzen~~ durchschneiden, dann muss auch im Falle des stationären Stromes durch diesen gemeinschaftlichen Querschnitt ~~ebensoviel~~ in einer Richtung + Elect. ~~in einer Richtung~~ fliessen, als in der entgegengesetzten negative überfliesst. – Nehmen wir also die Intensitäten der Ströme, welche ~~gegen~~ dem Kreuzungspunkte zu gerichtet sind als positiv; die entgegengesetzt gerichteten dagegen als negativ an – so muss der

Gleichung (III, entsprechend:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots i_n = 0 \qquad \dots\dots (10)$$

Es ist dies der erste der Kirchhoff'schen Sätze. –

Der zweite Satz bezieht sich auf System von linearen Leitern, welche eine in sich zurückkehrende Leitung bilden. Betrachten wir z. B. ein System von 4 Leitern in welchen sich die pos. Electr. theilchen in der Richtung der Pfeile bewegen, und nennen die Stromintensitäten in den einzelnen Leitern i_1, i_2, i_3, i_4. –



Auf diesen Fall werden wir das System IV der allg. Gleichungen anwenden. – Wir werden hiebei die Potentiale ausdrücken in der Form

$$V = b - \frac{i}{\lambda q} s$$

also das Potential im Anfangspunkte des Leiters, d. i. in $s=0$

$$V = b$$

Bezeichnet man nun die Länge der Leiter mit l_1, l_2 ... etc. so ergiebt sich

$$b_2 - b_1 + \frac{i_1}{\lambda_1 q_1} l_1 = (2,1)$$

Worin b_2 der Werth des Potentials des zweiten Leiters in $s=0$ ist. – Die Grössen $\frac{l_1}{\lambda_1 q_1}$, $\frac{l_2}{\lambda_2 q_2}$ .. etc. nennt man die Widerstände der Leiter und bezeichnet sie successive mit w_1 w_2 ...etc. – Dann ist:

$$b_2 - b_1 + i_1 w_1 = (2,1)$$

$$b_3 - b_2 + i_2 w_2 = (3,2)$$

$$b_4 - b_3 + i_3 w_3 = (4,3)$$

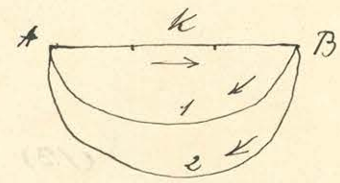
$$b_1 - b_4 + i_4 w_4 = (1,4)$$

Addirt ergiebt sich auf der rechten Seite eine Summe, welche der electromotorischen Kraft der ganzen Schliessung gleich ist – bezeichnen wir diese mit E so wird

(11) .... $i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \ldots\ldots i_n w_n = E$

Hiebei erlaubte ich mir eine Verallgemeinerung, welche aber, da die Betrachtungen eben so gut für n wie für 4 Leiter bestehen, auf keinen Einwand finden kann. – Diese Gleichung wird auch dann richtig anwendbar sein – wenn an der Grenzfläche au Leiter – noch mehrere Leiter zusammenkommen. – Mit Hülfe der abgeleiteten zwei Sätze wird es möglich die Vertheilung des Stromes, in den verzweigtesten Systemen von Leitern zu bestimmen. – Wir werden uns auf Untersuchung einiger der wichtigsten Fälle beschränken. –

5. Verzweigung des Stromes einer galvanischen Kette in zwei linearen Leitern. –



A und B seien die Polen einer galvanischen Kette welche durch zwei Leitungsdrähten verbunden sind. – Ich habe dann ein System von 3 linearen Zweigen, angenommen dass meine Kette eine lineare ist, welche ich wie es noch gezeigt werden soll immer statt einer nicht linearen einführen kann. – Die Richtungen des Stromes in diesen Leitern seien die der Pfeile, die Intensitäten i_1 i_2 und i_k; dies letztere Zeichen führen wir für die Intensität des Stromes in der Kette ein – diese ist in der Kette als ~~gleichen~~ constant anzusehen, da ~~bei~~ durch einen ~~Pole~~ Pole der Kette eben so viel Electricität ausfliesst – als durch den anderen wieder hineinfliesst. – Nach dem 1ten Satze ist in dieser Schliessung:

$$i_k = i_1 + i_2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Diese Gleichung zeigt dass sich der Strom der Kette in diesen zwei Schliessungsdrähten vertheilen muss. – Zu diesem Resultate gelangt man auch durch Anwendung des zweiten Satzes, auf die geschlossene

Figur (K1), nämlich:

$$i_k w_k + i_1 w_1 = \mathcal{E}$$

Da aber, wie bereits gezeigt wurde, der Schliessungsdraht einer Kette von keinem Einfluss ist auf ihre electromotorische Kraft, so giebt die Anwendung des 2ten Satzes auf die Figur (K.2):

$$\ldots \quad i_k w_k + i_2 w_2 = \mathcal{E}$$

und diese beiden zusammengefasst:

(13) .... $$i_1 w_1 = i_2 w_2$$

Der Strom theilt sich also auf die Art in diese zwei Schliessungsdrähte, dass in diesen die Stromintensitäten den Widerständen umgekehrt proportional werden. — (12) und (13) zusammengefasst, geben:

(14) $$\left\{ \begin{aligned} i_1 &= i_k \frac{w_2}{w_1 + w_2} \\ i_2 &= i_k \frac{w_1}{w_1 + w_2} \end{aligned} \right.$$

eine dieser Gleichungen mit (12) giebt

$$i_k \left\{ w_k + \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} \right\} = \mathcal{E}$$

d. i.

(15) ..... $$i_k = \frac{\mathcal{E}}{w_k + \dfrac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}}$$

Es ist dies dieselbe Gleichung als die welche das Ohmsche Gesetz für einen durch einen Schliessungsdraht geschlossene Kette giebt — wenn der Widerstand des Drahtes $= \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}$ ist.

Diesen Widerstand also den Gesammtwiderstand der zwei Leiter bezeichnen wir mit

$$w = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}$$

und aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}$$

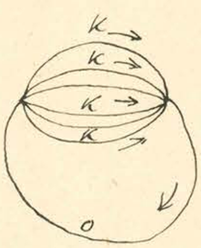
Diese Gleichung erlaubt aber auch eine Erweiterung auf n Schliessungsdrähte — es ist denn, wenn die Widerstände der einzelnen Drähte w_1, w_2, w_3 .... etc. sind — und den wir ~~wird~~ Gesammtwiderstand mit w bezeichnen:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \ldots \text{ etc.} \qquad \ldots (16)$$

6. Zusammenstellen mehrerer galv. Ketten. —

Hat man n gleiche galv. Ketten so kann man sie auf zwei verschiedene weisen zusammenstellen. Man kann sie nämlich erstens so durch einen Leitungsdraht verbinden — das sämmtliche gleichartige Polen mit einem Ende des Drahtes in Berührung seien – oder man kann sie auch säulenartig zusammenstellen. –

Bei der ersten Zusammenstellung liefert ~~die~~ der erste Kirchhoff'sche Satz die Gleichung:



$$n i_k = i_0$$

wo n die Anzahl der Elemente, i_k die Stromintensität in einer Kette und i_0 die Stromintens. in dem Schliessungsdrahte ~~ist~~ bedeutet. – Dass i_k in allen Ketten gleich ist folgt daraus, dass die Ketten gleich also ihre Widerstände gleich sind – denn für je zwei derselben liefert der zweite Kirchhoff'sche Satz:

$$i_k w_k = i_k' w_k$$

was aber nur möglich ist wenn $i_k = i_k'$. –

Ist w_k der Widerstand einer Kette, so ergiebt sich als ~~der~~ Resultat des zweiten Kirchhoff-schen Satzes, für eine Schliessung welche durch eine Kette und den Schliessungsdraht gebildet ist:

$$w_k i_k + w_0 i_0 = \mathcal{E}$$

Da aus der oben angeführten Gleichung

$$i_k = \frac{1}{n} i_0 \qquad \text{so ist.}$$

$$i_0\left(w_0 + \frac{w_k}{n}\right) = \mathcal{E}$$

also:

$$i_o = \frac{E}{\frac{w_k}{n} + w_o} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Substituirt man die n Ketten, deren jede den Wiederstand w_k hat, durch eine einzelne Kette mit dem Wiederstande $\frac{w_k}{n}$, so giebt das Ohmsche Gesetz für die Schliessung dieser Kette mit dem Drahte o dieselbe Gleichung. –

Sind aber die n Ketten nicht auf diese Weise sondern säulenartig zusammengestellt und durch den Schliessungsdraht o geschlossen – so giebt das Ohmsche Gesetz mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

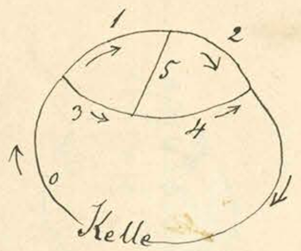
$$i_o = \frac{nE}{nw_k + w_o}$$

oder

$$i_o = \frac{E}{w_k + \frac{w_o}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) zeigen, dass die erste Art der Zusammenstellung derselben Ketten und desselben Drahtes, in Bezug auf die Stromstärke im Drahte dann vorzuziehen ist über die säulenartige Zusammenstellung – wenn $w_k > w_o$. – Dieselben Ketten säulenartig zusammengestellt liefern dagegen einen stärkeren Strom als in der ersten Weise verbunden wenn $w_k < w_o$. –

7. Die Weatstone-sche Brücke.-



Bei einer ähnlichen Anordnung kann es bewirkt werden, dass der Draht 5 in der einen oder der entgegengesetzten Richtung durchflossen wird.- Wir wollen die Bedingung dafür aufsuchen dass

$$i_5 = 0$$

sei, und angeben wie hierauf eine Methode der Vergleichung der elect. Widerstandes verschiedener Drähte gegründet werden kann.-

Die Intensitäten des Stromes in den einzelnen Leitern bezeichne ich mit i_1 i_2 i_3 i_4 und nehme an dass die Ströme in der Richtung der Pfeile fliessen.- Der erste Kirchhoff'sche Satz auf die Kreuzungspunkte (1,2) dann (2,3) angewendet giebt

$$i_1 = i_2$$

und $$i_3 = i_4$$

Der zweite Kirchhoff'sche Satz liefert ferner für die Figuren 1,3,5 und 2,4,5 (wobei zu betrachten ist dass $i_5=0$) folgende Gleichungen:

$$i_1 w_1 = i_3 w_3$$
$$i_2 w_2 = i_4 w_4$$

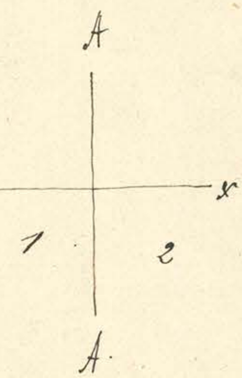
Dividirt man diese Gleichungen so findet man durch Anwendung von $i_1 = i_2$ und $i_3 = i_4$:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} \qquad \ldots\ldots (19)$$

~~Die~~ Diese Gleichung ist die Bedingung dafür, dass $i_5 = 0$ sei – ~~ist diese so~~ sind demnach drei dieser Widerstände bekannt und ist $i_5 = 0$ erreicht so ergiebt sich der Werth des vierten ~~Wi~~ zu bestimmenden Widerstandes. –
Um bei Ausführung eines solchen Versuches beurtheilen zu können ob $i_5 = 0$ ist, schaltet man in 5 ein Galvanometer ein. –
Um diese Betrachtungen mit der Erfahrung in Übereinstimmung bringen zu können setzten wir voraus dass eine beliebige Kette durch eine lineare ersetzt werden kann. – Dass dies für alle Arten von Ketten möglich ist bewies Kirchhoff in seiner Abhandlung „Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen." Pogg. Ann. 75 – Es ist nun unsere

Aufgabe diesen Beweis für einen bestimmten Fall zu führen. – Wir müssen unsere Aufmerksamkeit zuerst auf eine Erscheinung wenden, die uns bei nicht linearen Leitern auffällt – es ist dies die Brechung des Stromes an der Grenzfläche zweier heterogener Leiter. –

8. Brechung des Stromes an der Grenzfläche zweier heterogener Leiter. –



Es sei AA die Grenzfläche zweier heterogener Leiter betrachten wir dabei den Fall dass sie eine Ebene ~~einen kleinen Theil derselben werde ich als eben~~ sei ~~betrachten können~~, und wählen wir diese ~~die~~ zur ~~der~~ ~~der~~ YZ Ebene eines rechtw. Coordinatensystems – so dass die Gleichung der Berührungsfläche ~~als~~ $x=0$ ~~betrachtet~~ werde ~~kann~~. –

Für diese Berührungsfläche muss dann

(20) . . . . . $v_1 - v_2 = (1,2)$

Es muss aber auch durch diese Berührungsfläche im Falle des stationären Stromes ebensoviel negative Electricität in einer Richtung fliessen, als in der entgegengesetzten positive fliesst. – Da in diesem Falle die Normale der Fläche mit der x Axe zusammenfällt, so muss der Gleichung III der allg.

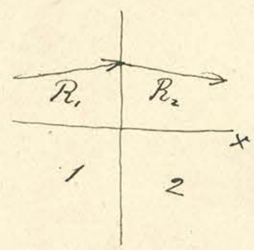
Theorie entsprechend:

$$\lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Diese beiden Gleichungen müssen für alle Werthe von y und z bestehen, durch partielle Diff. der Gleichung (20) nach diesen zwei Variabeln erhält man also die richtigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} &= \frac{\partial V_2}{\partial y} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= \frac{\partial V_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots \quad (22)$$

Wir betrachten nun die Richtung des Stromes ~~der~~ in der Nähe der Grenzfläche der zwei Leiter — bezeichnen wir die Richtung und Stärke des Stromes in dem ersten Leiter mit R_1, und denselben Strom nachdem er in den zweiten Leiter übergetreten ist mit R_2 — so ist:



$$\left.\begin{aligned} \cos(R_1,x) : \cos(R_1,y) : \cos(R_1,z) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} : \frac{\partial V_1}{\partial y} : \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \cos(R_2,x) : \cos(R_2,y) : \cos(R_2,z) &= \frac{\partial V_2}{\partial x} : \frac{\partial V_2}{\partial y} : \frac{\partial V_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Bis jetzt bestimmten wir die Lage der Coordinatenaxen noch nicht, wir können sie um möglichst zu vereinfachen so wählen dass:

$$\cos(R_1, z) = 0$$

Hierdurch setzen wir fest, dass die ~~xy Ebe~~ Richtung des einfallenden Stromes in die xy Ebene fällt. —
Bei dieser Voraussetzung wird:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 0$$

Es folgt dies daraus dass $\frac{\partial V_1}{\partial z}$ die Componente der Kraft R_1 also $= R_1 \cos(R_1, z)$ ist. — Nach (22) ergiebt sich aber für diesen Fall auch:

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = 0$$

oder da $\frac{\partial V_2}{\partial z}$ die Componente von R_2 und zwar $= R_2 \cos(R_2, z)$ ist; so folgt:

$$\cos(R_2, z) = 0$$

Es ist dies aber nur möglich wenn R_2 auch in der xy Ebene liegt. —
Wollen wir analog wie bei dem Lichte von einem einfallenden und gebrochenen Strome sprechen — so können wir den Satz aussprechen — Der einfallende und der gebrochene Strom liegen für zur Grenzfläche nahe gelegene Punkte in derselben durch das Einfallsloth gehenden Ebene. — Diese bei der Lichtbrechung unberücksichtigte Begrenzung des Satzes, rührt von einer Eigen-

schaft der Electr. her, sich in beliebigen Krummen bewegen zu können – während die Bewegung des Lichts ~~immer~~ eine geradlinige ist. –

Durch Einführung dieses eben bestimmten Coordinatensystem's vereinfachen sich die ~~Gl~~ Relationen (23) in:

$$tg(R_1, x) = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial y}}{\frac{\partial V_1}{\partial x}}$$

$$tg(R_2, x) = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial y}}{\frac{\partial V_2}{\partial x}}$$

Dividirt man diese Gleichungen und berücksichtigt (21) und (22), so ergiebt sich:

$$\frac{tg(R_1, x)}{tg(R_2, x)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Dieses Gesetz der Brechung ist dadurch von dem Gesetze der Lichtbrechung verschieden – dass sie statt dem Verhältnisse von Sinusen, das Verhältniss der Tangenten enthält – und somit keine totale Reflexion des elect. Stromes eintreten kann. –

Wir setzten bei diesen Untersuchungen voraus, dass die brechende Fläche eine Ebene sei – unsere Betrachtungen gelten aber auch für alle anderen Flächen – deren beliebig kleine Theile wir als oben betrachten können. –

Ist 2 eine Flüssigkeit und 1 ein Metall so – ~~wird~~ ist λ_2 unendlich klein gegen λ_1 – also es ist

$$tg(R_2, x) = 0$$

oder $(R_2, x) = 0$ d. i. die Richtung des Stromes in einer Flüssigkeit ist senkrecht auf die Grenzfläche. Es ist dieser Schluss auch mit ~~unsere~~ einen unserer früheren Behauptungen dass nämlich in Flüssigk. die Richtung des Stromes zur Oberfläche gleichen Potentials senkrecht ist in Übereinstimmung; da ja in ~~der~~ das Potential der Grenzfläche Constant sein muss. –

9. Wiederstand einer galv. Kette. –

Die Bedingungsgleichungen stationärer Strömungen in linearen Leitern leiteten wir unter der Bedingung aus den allg. Gleichungen ab – dass ~~lineare Leiter~~ die Richtung des Stromes in linearen Leitern senkrecht ist auf die Oberflächen gleichen Potentials. – Unter dieser Bedingung war der Wiederstand des Leiters durch den Ausdruck bestimmt:

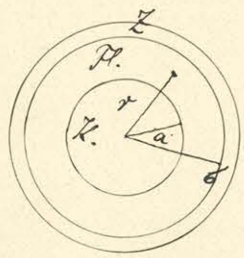
$$w = \frac{V_b - V_a}{i} \quad {}^{+)}$$

+) Es ergiebt sich dies aus Ohm's Gesetz.

wo V_b und V_a die Werthe des Potentials an den Grenzflächen des Leiters sind. – Bei dieser Definition eines linearen Leiters kann jede galvanische Kette als ein linearer Leiter angesehen werden – denn die bestimmenden Elemente des Leiters sind in ihr dieselben wie bei linearen Leitern. – Diese bestimmenden Elemente eines Leiters sind ihre Electromotorische Kraft und ihr Wiederstand – die electromotorische Kraft ist von der Gestalt des Leiters unabhängig; nur der Wiederstand ~~ist~~ könnte bei linearen und nicht linearen Leitern verschieden sein. – Da der Wiederstand von Flüssigkeiten im Verhältnisse zu dem Wiederstande der Metalle sehr gross ist, so können wir von diesem letzteren absehen – und können sagen dass der Wiederst. einer galv. Kette gleich ist dem Wiederstande der Flüssigk. in ihr. – In jeder Flüssigk. bewegt sich aber der Strom senkrecht auf die Oberflächen gleichen Potentials, welche ~~wie~~ die Grenzflächen derselben sind; der Wiederstand der Flüssigkeit, und somit auch der Wiederstand der ganzen Kette ergiebt sich also in derselben Weise wie der Wiederstand eines linearen Leiters. – Wiederholt ist.

es erklärt dass all' unsere bisherigen Be-
trachtungen über Stromverzweigung auch dann
bestehen, wenn wir die linearen Leiter theilweise
durch galv. Ketten ersetzen. –

Wir suchen jetzt den Widerstand einer galv. Kette,
welche nach dem beistehenden Schema gebildet ist. –



~~Ist~~ Sind x, y, z die Coordinaten eines variabeln
Punktes der Flüssigkeit, und V das Potential in
diesem Punkte, – so muss als Bedingung des stat. Stromes die Gleichung erfüllt
werden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Die Wahl des Coordinatensystems war bis jetzt
eine beliebige, wir wollen ~~es~~ jetzt so bestim-
men dass die YX Ebene mit dem Boden des
Gefässes, und die Z Axe mit der Axe des
Cylinders zusammenfallen soll. – Ist h die Höhe
der Flüssigkeitssäule so ist $z=0$ die Gleichung
seines unteren und $z=h$ die Gleichung seines oberen
Niveau's — Da diese an nicht leitenden Grenzen
so muss für $z=0$ und $z=h$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

sein. – Da ferner die Grenzflächen der Flüssigkeit

Oberflächen gleichen Potentials sind – so nun das Potential an ihrer inneren so wie äusseren Grenzfläche ~~einen~~ bestimmten Werthe annehmen – diese seien

für $r = a$ $\quad V = A$

für $r = b$ $\quad V = B$

wo r den senkrechten Abstand des Punktes xyz von der Axe des Cylinders bedeutet. – Da r nur von x und y abhängt, so genügen wir diesen Bedingungen nur indem wir annehmen dass V überhaupt unabhängig von z also – für alle Werthe dieser Variable

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

ist – Die Bedingungsgleichung des stationären Stromes ist dann in diesem Falle:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Zur Bestimmung von V haben wir ausserdem die Grenzbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } r = a & V = A \\ \text{" } r = b & V = B \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Um die Lösung dieser Gleichung zu finden bequemer transformiren wir x und y in Polarcoordinaten – gesetzt

$$x = r\cos\vartheta \quad \text{und} \quad y = r\sin\vartheta$$

wo ϑ der Winkel zwischen der X Axe und der Richtung von r ist. – Da in Bezug auf die Z Axe, die ganze Vertheilung electr. Fluida symmetrisch ist – so muss V auch von ϑ unabhängig sei also nur eine Function von r sein. – Nach der Umwandlung von (26, in Polarcoordinaten – und der Berücksichtigung dieser Eigenschaft von V erhalten wir demnach eine gewöhnliche partielle Diff. Gleichung 2ter Ordnung. –

Betrachten wir V als Function der Variabeln r und ϑ so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

Da $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ ...etc. auch als Functionen von x und y zu betrachten so wird der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}\left(\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2\right) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right)$$

Die Coefficienten der diff. Quot. ~~die~~ von V in diesem Ausdrucke sind noch als Functionen von ϑ und r auszudrücken. – Durch Differentiiren der Gleichungen:

$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta$$

ergeben sich:

$$dx = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta \qquad 1)$$
$$dy = \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta \qquad 2)$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter (die 1te mit $\cos\vartheta$ die 2te mit $\sin\vartheta$ multiplicirt addirt)

$$dr = \cos\vartheta\, dx + \sin\vartheta\, dy$$
$$r\, d\vartheta = -\sin\vartheta\, dx + \cos\vartheta\, dy$$ (Die 1te mit $\sin\vartheta$ die 2te mit $\cos\vartheta$ multiplicirt, und addirt)

Hieraus ~~ex~~ die partiellen Diff. Quotienten:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\vartheta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\vartheta$$
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{r} \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\cos\vartheta}{r}$$

und die 2ten part. Diff. Quot.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\vartheta}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{r}$$
$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta}{r^2} \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = -\frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta}{r^2}$$

Setzt man dann diese Werthe in den langen Ausdr. ein so vereinfacht sich dieser :

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

Da aber V ~~nr~~ eine Function von nur r sein soll, So vereinfacht sich dieser Ausdr. noch mehr:

(27) . . . . . . $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0$

Es ist dies die in Polarcoordinaten transformirte Gleichung (25), in welcher V noch den Bedingungen (26) zu genügen hat. -

Gesetzt

$$\frac{dV}{dr} = U$$

übergeht die Gleichung (27) in:

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{1}{r}U$$

also:

$$\log U = -\log r + G$$

(28) . . . . $U = \frac{C}{r}$

und da $U = \frac{dV}{dr}$

(29) . . . . $V = C \log r + D$

wo D eine zweite Integrationsconstante ist — diese Constanten C und D bestimmen sich, aus folgenden den Bedingungen (26) entsprechenden Gleichungen:

$$A = C \log a + D$$

$$B = C \log b + D$$

hieraus:

$$C = \frac{B-A}{\log \frac{b}{a}} \quad \ldots\ldots (30)$$

Betrachten wir nun irgend eine Cylinderfläche deren Radius r zwischen den Grenzen a und b liegt; so ist wenn dO ein Element dieser Cylinderfläche sein soll, die Menge Electricität welche durch dieses Element in der Zeiteinheit durchfliesst:

$$= -\lambda\, dO \frac{dV}{dr}$$

Wir setzten aber $\frac{dV}{dr} = u = \frac{C}{r}$ und somit ist dieselbe Electricitätsmenge =

$$= -\lambda \frac{C}{r} dO$$

dieser Ausdruck über die ganze Cylinderfläche integrirt, giebt die Electricitätsmenge welche in der Zeiteinheit durch die Cylinderfläche strömt:

$$= -\lambda \frac{C}{r} 2\pi r h$$

Dies ist aber die Intensität des Stromes – d. i.

$$i = -\lambda C\, 2\pi h$$

Da aber eine Galv. Kette als ein linearer Leiter betrachtet werden kann, so ist sein Widerstand:

$$W = \frac{A-B}{i}$$

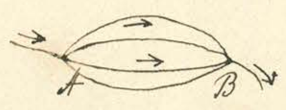
$$W = \frac{B-A}{\lambda C\, 2\pi h}$$

Diesen Werth in (30) gesetzt:

(31) $$W = \frac{\log \frac{b}{a}}{\lambda 2\pi h}$$

Also ist der Widerstand mit der Höhe und der Leitungsfähigkeit der Säule umgekehrt, mit dem Logarithmus der Verhältnisse ihrer Radien direct proportional.-

10. Richtung des Stromes auf einer leitenden Platte.-



Zwei Punkte A und B einer Metallplatte sollen mit den Polen einer galv. Kette verbunden werden.- Der bei A einströmende Strom wird bei B wieder aus der Platte austreten, - zwischen A und B verzweigt sich dann der Strom in eine unendl. Anzahl von Strömungslinien.- Die Art dieser Strömungslinien zu bestimmen ~~sei~~ ist unsere ~~sta~~ vorliegende Aufgabe.- Nach den theoretischen Untersuchungen werden wir auch sehen wie diese experimentell bestätigt werden können.- Verlege man die YZ Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems in die Mittel~~fläche~~ Ebene der

Platte, die wir vorläufig als unbegrenzt ansehen wollen – so entspricht

$$z = \pm \varepsilon$$

den Gleichungen der Plattenoberflächen, wenn ε die halbe Dicke der Platte ist. –

Da diese Oberflächen ausser den zwei Punkten A und B mit einem Isolator etwa mit der Luft in Verbindung stehen, so tritt durch sie keine Electricität aus oder ein – es wird also für $z = \pm \varepsilon$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

da aber die Richtung des Stromes in allen Punkten der Platte ausgenommen A und B senkrecht auf die z Axe ist – so wird in all den Punkten

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

sein. – Und somit reducirt sich die Bedingungsgleichung stationärer Ströme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auch hier in die einfachere Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Diese Gleichung besteht für alle Punkte des inneren des Leiters – sie besteht nicht für ~~A und~~ Punkte in der Einströmungs und Ausströmungsfläche – also innen diese auf einer der äusseren Fläche der Platte liegen. – Eine particuläre Lösung dieses Integrals ist wie wir schon sahen:

$$V = C \log r + D$$

wo $$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte A und B mit a, b resp. a_1, b_1 – so können wir diese Lösung leicht so umformen dass V der Bedingung ~~dass~~ genüge leisten soll; dass sie für die Punkte A und B unstätig werde – nämlich

$$V = C \log \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Da die Diff. Gleichung linear und homogen ist, so genügt ihr auch ~~selbst~~ die Summe solcher part. Integrale – die Punkte A und B wieder ausgeschlossen. – Ich kann somit die Lösung bilden:

$$V = C_1 \log \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + C_2 \log \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} + D$$

Setzen wir:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}$$

so ist:

$$V = C_1 \log r_1 + C_2 \log r_2 + D$$

Diese Lösung wird für die Punkte A und B also für $r_1=0$ und $r_2=0$ unendlich. – Sie ~~wird~~ giebt für $r_1=\infty$ und $r_2=\infty$ auch $V=\infty$; was mit der Natur der Sache in Widerspruch ist – denn V kann für unendl. weit entfernte Punkte ~~ta~~ nicht unendlich werden – dieser Widerspruch wird beseitigt; wenn man zwischen den Intgr. Constanten C_1 und C_2 die Relation feststellt

$$C_1+C_2=0$$

Dann wird

$$V=C\log\frac{r_1}{r_2}+D \quad \ldots\ldots (33)$$

Da für unendliche Werthe von r_1 und r_2 $r_1=r_2$ wird, so sieht man ein dass mit wachsender Entfernung r_1 oder r_2 sich das Potential einem Constanten Werthe D nähert. –

~~Für allen Strömungscurven zwischen A und B~~

~~muss, da in ihnen derselben stationär sein soll,~~

Für alle Punkte gleichen Potentials; d. i. für die Curven gleichen Potentials ist:

$$V=\text{Const.}$$

~~dies~~ – Dies mit (33) zusammengefasst, giebt als Gleichung der ~~Strömungscurven.~~ Curven gleichen Potentials. –

$$\frac{r_1}{r_2}=\text{Const.} \quad \ldots\ldots (34)$$

Diese Gleichung stellt ein System von Kreisen dar die ihren Mittelpunkt, auf der Verlängerung der Gerade AB haben,

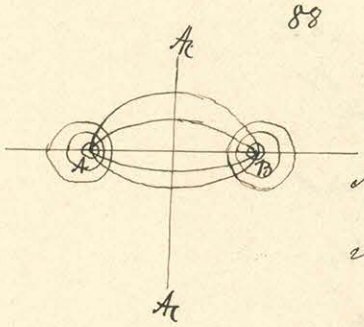
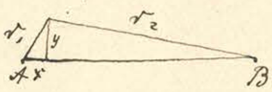


Fig 2



Wählen wir in Fig. 2 als Coordinaten Anfangspunkt A, so ist

$$r_1^2 = x^2+y^2$$

und $AB = a$ gesetzt

$$r_2^2 = (a-x)^2+y^2$$

Also ist die Gleichung der Curven gleichen Potentials:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = C = \frac{x^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$

$$C(a-x)^2 + Cy^2 = x^2+y^2$$

Dass dies wirklich die Gleichung von Kreisen entspricht die ihren Mittelpunkt auf der verlängerten Gerade AB haben, ergiebt sich aus der Vergleichung mit der Gleichung solcher Kreise – diese ist.

$$(\alpha - x)^2 + y^2 = r^2$$

Die Gleichung der fraglichen Curven ist:

$$x^2+y^2+\frac{Ca^2}{C-1} - \frac{2Ca}{C-1}\,x = 0$$

Das constante Glied kann ich immer in die Summe zweier constanter Glieder zerlegen, kann also setzen:

$$\frac{Ca^2}{C-1} = p+q$$

und setzen:

$$q = \frac{C^2a^2}{(C-1)^2}$$

dadurch wird die Gleichung

$$\left(\frac{Ca}{C-1} - x\right)^2 + y^2 = -q$$

diese Gleichung, entsprechend den Curven $\frac{r_1}{r_2} = \text{Const.}$ ist die der Kreise mit dem Mittelpunkte auf der x Axe. –

Die Bedingung $\frac{r_1}{r_2}$ = const. sagt auch, dass die Durchschnittspunkte jeder dieser Kreise mit der durch AB gelegten Axe ~~harmonisch~~ sind zu den Punkten A und B. – ~~Diese Eigenschaft.~~

Da die Stromesrichtungen senkrecht ~~ist~~ sind auf die Curven gleichen Potentials – so müssen die Stromescurven auf die durch $\frac{r_1}{r_2}$ = const. dargestellten Curven senkrecht sein – d. i. es sind diese die sämmtlichen Kreisbögen zwischen A und B. –

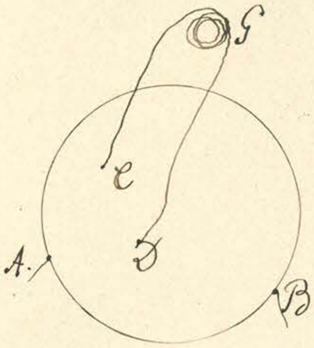
Diese Betrachtungen galten für unbegrenzte Platten, ist ~~es~~ aber die Platte begrenzt, dann besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

nur in einem Theile der Platte. – Es ist aber für die Begrenzungsfläche:

$$\frac{\partial V}{\partial N} = 0$$

welche Gleichung ausdrückt, dass keine Electricität aus der Platte in den umgebenden Isolator fliesst. – ~~Ind~~ Die Stromescurve in einer begrenzten Platte ist also seine Grenzlinie. – Die für die unbegrenzte Platte angestellten Betrachtungen gelten demnach auch für eine ~~wenn die~~ ~~diese~~ Platte, die durch zwei Kreisbögen begrenzt ist – wenn ~~und~~ der Eintritts- und Austrittspunkt in den Schnittpunkten dieser Kreisbögen ~~derselben~~ liegt. –



Diese Resultate lassen sich auch experimentell bestätigen. – Um zweckmässigsten benützt man hiezu eine ~~kugel~~ kreisförmige metallene Scheibe, an deren Rande etwa bei A der Strom eingeleitet wird – und derselbe bei B wieder austritt. – Die Curven gleichen Potentials enthalten alle Punkte der Scheibe in welchen die Stromintensität dieselbe ist – ~~diese Punkte lassen sich nun leicht dadurch finden~~, verbindet man je zwei solche Punkte mit einem Drahte, so kann durch diesen kein Strom fliessen. – Um ~~also~~ alle zu derselben Curve gleichen Potentials gehörenden Punkte der Platte finden zu können benützt man einen Draht in dem ein Electrometer (G) eingeschaltet ist, befestigt das eine Ende derselbe etwa in C und sucht dann alle ~~~~ Stellungen (D) des anderen Endes, bei welchen das Electrometer keinen Ausschlag zeigt. – Diese Stellungen des Drahtes des D ~~zeig~~ liegen in der gesuchten Curve und zeigen dass diese wirklich ein Kreisbogen ist. – Durch eine zweite Stellung des Endes C ergiebt sich eine zweite Curve gleichen Potentials u. s. w. – ~~Ab~~ Der Versuch kann auch so umgestaltet

werden dass man auch das Gesetz auffinden
kann nach welchem sich der Werth des Potentials
von einer Curve zur anderen ändert. – Zu
diesem Zwecke schaltet man in den Draht CD
ausser dem Galvanometer auch noch eine schwache
galv. Kette, oder etwa eine Thermokette ein, und
sucht dann wieder die Punkte der Platte auf welche
mit den Enden des Drahtes verbunden keine Ab-
lenkung der Magnetnadel hervorrufen. – Durch
dieses Verfahren findet man je zwei Punkte in welchen die ~~deren~~ Po-
tentialwerthe in einer einfachen Beziehung stehen, nämlich in der,
dass ~~nämlich~~ das Potential in dem einen derselben
gleich ist dem Potentiale des anderen + der electro-
motorischen Kraft der eingeschalteten Kette. –
Diese Versuche bestätigen den theoretisch ab-
geleiteten Ausdruck (33). –

Kirchhoff. Pogg. Bd. 64.

K. löst da ~~auch~~ die Aufgabe auch für eine
beliebige Anzahl von Eintritts und Austritts punkten –
und für eine beliebige Lage derselben im Innern
der Platte. –

III.

Electromagnetismus. -

Wirkung von electrischen Strömen und magnetischen Flüssigkeiten auf einander. -

1. Wirkung eines Magnetpols auf [illegible] Stromelement. -

Ein ~~Leiter~~ durch einen electr. Strom durchflossener Draht übt auf einen Magneten ge[illegible] Kräfte aus, und dieser wirkt wieder auf den Strom ein. - Ist nämlich die eine dieser Einwirkungen da, so folgt auch evident das andere nach dem in der Natur allgemein gültigen Prinzipe der Wirkung und Gegenwirkung. - Dieses Prinzip sagt: ~~Wenn ein Kor.~~ Wenn A auf B eine Kraft ausübt, so übt auch B eine Kraft auf A aus, und diese Kräfte sind der Art dass wenn A und B fest verbunden werden, sie sich das Gleichgewicht halten. - Kennen wir demnach die Wirkung eines Magneten auf einen Strom, so werden wir mit Hülfe dieses Prinzips