Ms 5096/13 Eötvös Loránd [illegible]
I. egyetemi jegyzetei

Theorie der Elastizität fester Körper.–

Vorlesungen. G. Kirchhoff's ..

18 R 68

Roland Eötvös

Erster Abschnitt.

Die isotropen Mittel.–

I Kapitel. Beziehungen zwischen den äusseren und den Moleculardruckkräften.

II Kapitel. – Die Formveränderung.–

Zweiter Abschnitt. –

Die krystallinischen Mittel. –

Dritter Abschnitt. –

Theorie der Körper mit theilweise unendlich kleinen Dimensionen

I Kapitel. – Formänderung dünner Stäbe. –

I. Kapitel. –

Beziehungen zwischen den äusseren und den Moleculardruckkräften. –

§1. Einleitung. –

Körper sind nicht absolut starr d. i. sind auch ihrer Form nach nicht unveränderlich. Kräfte können die Veränderung ihrer ursprünglichen Form bewirken. – Diese Formveränderung kann mit dem Laufe der Zeit wieder zurücktreten – angenommen natürlich dass auch die Kräfte aufgehört haben einzuwirken. Dieses Zurücktreten der Materie in die ursprüngliche Lage erfolgt im Zeitraume von einigen Stunden manchmal auch Tagen. Weber beobachtete diese Thatsache zuerst bei Seidenfäden und bezeichnete sie mit dem Namen der Elastischen Nachwirkung. – April 28.

In vielen andern Fällen verschwindet diese Formveränderung nicht, ein ausgedehnter Bleidrath z. B behaltet seine Verlängerung – eine merkwürdige Thatsache ist es aber, dass der Zustand des Körpers von den Kräften, die seine Gestalt veränderten abhängig bleibt. – Die heutige Theorie der Elasticität besitzt nicht die Mittel dazu diese schon gewirkten Kräfte mit in Betracht ziehen zu können; sie macht daher die Beschränkung, dass Kräfte die ~~schon~~ zu wirken aufgehört haben auch ihren Einfluss auf die elastischen Erscheinungen des Körpers verloren haben. – Aufgabe der Theorie ist nun die Formveränderung des ganzen Körpers, daneben aber auch die Verrückungen einzelner Theile festzustellen. –

Wird ein Körper durch irgend welche Kraft in eine andere Form gebracht so haben sich seine Theile verrückt und es findet Dilatation oder Contraction statt – da nun aber die Molecüle ihre ursprüngliche Lage wieder einzunehmen streben so kommen Druck auch Zugkräfte in Wirkung. – Diese ~~nur~~ von der elastischen Beschaffenheit abhängigen Kräfte bezeichnen wir mit dem Namen der elastischen oder Molecular-Druckkräften, ~~ein~~ um sie von den auf den Körper formverändernd wirkenden

äusseren Druckkräften zu unterscheiden. –
Ist ein Körper in Gleichgewicht so muss zwischen der äusseren Druckkraft und den inneren Molecularkräften Gleichgewicht bestehen – unsere Aufgabe sei nun dies auch analytisch darzustellen. – Dadurch werden wir zu ergründen suchen:

a) Welche sind die Relationen zwischen der äusseren Druckkräften und den Molecularkräften, die einen Körper in Gleichgewicht verhalten?

b) Welche sind die Verrückungen der einzelnen ~~Molecüle~~ Theile bei einer Formveränderung des Körpers?

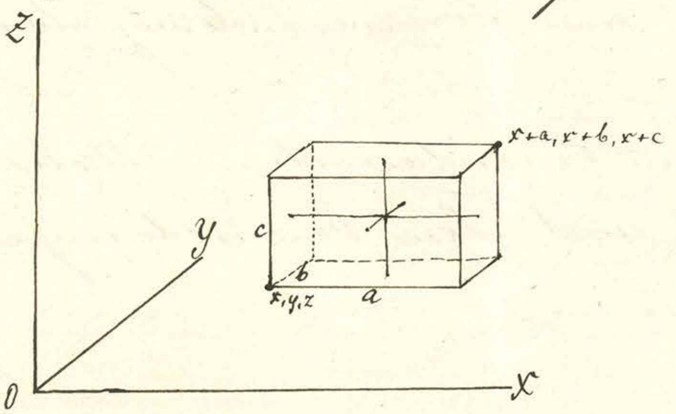
c) Die Beziehungen zwischen den Moleculärdruckkräften und den Verrückungen der Körpertheile. –

§2. Die 6 Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines endlichen Parallelepipeds. –

Als Grundgleichungen der Theorie, wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen eines unendlich

Kleinen Parallelepipeds aufstellen – um diesen Zweck erreichen zu können betrachten wir nun ein ~~selber~~ unabhängiges Parallelepiped, auf welches eine innere Molecular-Kraft z. B. die Schwere – dann aber auch äussere Druckkräfte wirken. –

Die Mechanik lehrt als Bedingungen des Gleichgewichtes, dass die Summen der Kraft Componenten nach den 3 Axen $=0$ und die Summen der Drehungsmomente nach 3 den Coordinaten-Axen parallelen Richtungen $=0$ sein müssen. –



Die Zeichnung stellt ein auf rechtwinkelige Coordinaten bezogenes Parallelepiped dar; dessen Seiten a, b, c endlich sind. – ~~Die Form dieses Parallelepipeds wird bei~~ Auf dies Parallelepiped wirkt eine innere Kraft – dessen Componenten sind auf die Masseneinheit X, Y, Z. –

Die Richtung der ~~aufw~~ äusseren ~~Druck~~kräfte ist nicht nothwendig die Verticale; der durch denselben ~~be~~ erzeugte Druck sei an verschiedenen Punkten einer Fläche gleichmässig, verschiedenartig aber an jeder der 6 Grenzflächen des Parallelepipeds. - Den Druck der auf eine Fläche wirkt zerlege ich nach den 3 Coordinatenaxen in 3 Componenten und erhalte so 18 Druckcomponenten - diese bezeichne ich

$$X_x, Y_x\ Z_x \quad X_y, Y_y, Z_y \quad X_z, Y_z, Z_z$$
$$X'_x, Y'_x\ Z'_x \quad X'_y, Y'_y, Z'_y \quad X'_z, Y'_z, Z'_z$$

Hierbei bedeuten X_x, Y_x, Z_x die Componenten des auf die ~~durch~~ ~~den Punkt~~ xyz ~~mit~~ parallel der ZY Ebene ~~lau~~ gelegte Fläche wirkenden Druckes - X'_x, Y'_x, Z'_x sind die Componenten des Druckes, welcher auf die entgegengesetzte durch den Punkt $x+a, y+b, z+c$ laufende Ebene ausgeübt wird. -
Hiernach ergiebt sich auch die Bedeutung der übrigen 12 eingeführten Zeichen. -
X_x ist eine Kraft welche senkrecht auf die Ebene wirkt - Y_x, Z_x solche welche in der Ebene selbst - also diese etwa fortzuschieben suchen -
Es sind die Kräfte welche senkrecht auf die Grenzflächen wirken: X_x, X'_x, Y_y, Y'_y.

Z_z, Z'_z – diejenigen welche sie in ihrer eigenen Ebene zu verschieben suchen: $Y_x, Z_x, X_y, Z_y, X_z, Y_z, Y'_x, Z'_x, X'_y, Z'_y, X'_z, Y'_z$. –
Die Richtung der sechs verticalen Componenten geht aus ihrem Namen hervor – es ist X_x entgegengesetzt dem X'_x etc.
Die Richtung der 12 Componenten ist nicht so klar ersichtlich – wir müssen darüber übereinkommen, dass die mit einem Strich bezeichneten negativen, die mit keinem versehenen positiven Grössen entsprechen. –
Zu bemerken ist noch – dass all diese Componenten sich auf die ~~Massen~~ Flächeneinheit beziehen. –
– Ist ϱ die Dichtigkeit des Parallelopipeds so ist ihre Masse $= \varrho abc$, und die X Componente der innern Kraft $= \varrho abc X$
Dem haben wir noch die Summe der äusseren Druckkräfte hinzuzuaddiren und dann den Ausdruck $= 0$ setzen um den Gleichgewichtsbedingungen genüge zu leisten, also:

$$\varrho abc X + bc X_x - bc X'_x + ac X_y - ac X'_y + ab X_z - ab X'_z = 0$$

oder einfacher:

$$(1) \;\ldots\ldots\; \varrho X + \frac{X_x - X'_x}{a} + \frac{X_y - X'_y}{b} + \frac{X_z - X'_z}{c} = 0$$

es ist leicht nun noch folgende 2 Gleichungen aufzustellen:

$$\rho Y + \frac{Y_x - Y'_x}{a} + \frac{Y_y - Y'_y}{b} + \frac{Z_z - Z'_z}{c} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

und:

$$\rho Z + \frac{Z_x - Z'_x}{a} + \frac{Z_y - Z'_y}{b} + \frac{Z_z - Z'_z}{c} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Das Gleichgewicht erfordert ausser diesen noch 3 Gleichungen worin die Summe der Drehungsmomente nach 3 den Coordinatenaxen parallelen Richtungen $= 0$ gesetzt sind. –

Suchen wir zuerst den Drehungsmoment um die Axe X – die Drehungsaxe ~~muss~~ ist der X Axe parallel, kann aber wohin immer verlegt werden – wählen wir ~~ihn~~ sie so, dass sie den Schwerpunkt des Parallelepipeds schneidet. (Die Lage des Schwerpunktes ist an der Figur angedeutet) – Es sind nun all die Kräfte welche mit ~~der~~ der Drehungsaxe parallel sind oder ~~auf dier~~ durch einen Punkt derselben vertical hindurchlaufen – in Bezug auf das Drehungsmoment unwirksam. –

Parallel mit der X Axe sind: $X, X_x, X'_x, X_y, X'_y, X_z, X'_z$

Die Drehungsaxe durchschneiden $Y, Z, Y_x, Y'_x, Y_y, Y'_y, Z_x, Z'_x, Z_z, Z'_z$

Es sind also nur vier Grössen Z_y, Z'_y und Y_z, Y'_z in Betracht zu ziehen. –

Da Z_y die Fläche ac, mit dem Radius $\frac{b}{2}$ zu drehen sucht, so ist ihre Wirkung:

$$Z_y\, ac\, \frac{b}{2}$$

Nach Ermittelung der Wirkungen von Z'_y, Y_z, Y'_z ist als Gleichgewichtsbedingung:

$$Z_y\, ac\frac{b}{2} + Z'_y\, ac\frac{b}{2} + Y_z\, ab\frac{c}{2} + Y'_z\, ab\frac{c}{2} = 0$$

also auch:

(4) $$Z_y + Z'_y = Y_z + Y'_z$$

Ähnlich werden auch die Bedingungsgleichungen gefunden:

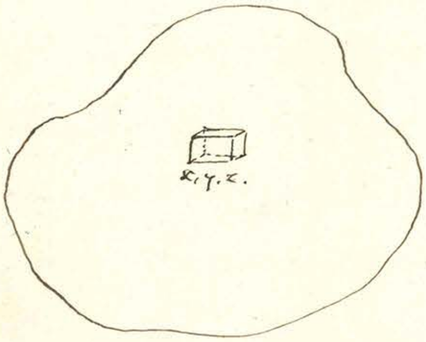
(5) $$X_z + X'_z = Z_x + Z'_x$$

(6) $$Y_x + Y'_x = X_y + X'_y$$

§3. Gleichgewichtsbedingungen eines unendlich kleinen Parallelepipeds im innern eines elastischen Mittels. –

IIte Vorlesung. Maj. 1.

Wir stellen uns nun einen elastischen Körper vor, welcher durch Einfluss ~~irgend~~ welcher Druckkräfte ~~ein~~ in veränderter Form, aber schon im Gleichgewichte dasteht – ein unendlich kleines Parallelepiped in demselben, wird dann in ähnlicher Lage sein, wie das im vorhergehenden §. behandelte Parallelepiped. – Durch die Formveränderung treten in einer der Materie Dilatationen, Contractionen ein – und diese bewirken den äussern Druck des Körperelementes – und ~~mit~~ diesem Druck halten dann die elastischen Druckkräfte des ~~Para~~ Elementes Gleichgewicht. –



Da die Kanten des Par. (a, b, c) unendl. klein sind so kann der äussere Druck constant an jeder Fläche angenommen werden – dadurch werden wir berechtigt die schon abgeleiteten Formeln zu benutzen. – Bezeichnen wir die Componenten der äussern Druckkräfte, wie vorher:

$$\begin{array}{lll} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{array} \qquad \begin{array}{lll} X'_x & Y'_x & Z'_x \\ X'_y & Y'_y & Z'_y \\ X'_z & Y'_z & Z'_z \end{array}$$

Diese Kräfte können als Functionen der Ortscoordinaten x, y, z betrachtet werden – ~~man~~ es geht X_x in X'_x über indem man die Fläche xy um a verschiebt – also ist

$f(x+h, y+k, z+l) = f(x) + \frac{\partial f_x}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial z} l + \frac{1}{1,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$

$f(x+h, y, z) = f(x y z) + h \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + etc.$

X_x dieselbe Function von x, $y+b$, als X_x' von $x+a$, $y+b$ – hiernach kann Taylor's Satz angewendet werden:

$$X_x' = X_x + a \frac{\partial X_x}{dx}$$

und nach ganz ähnlichen Betrachtungen:

$$Y_x' = Y_x + a \frac{dY_x}{dx}$$

$$Z_x' = Z_x + a \frac{dZ_x}{dx}$$

so auch:

$$X_y' = X_y + b \frac{dX_y}{dy}$$

$$Y_y' = Y_y + b \frac{dY_y}{dy}$$

$$Z_y' = Z_y + b \frac{dZ_y}{dy}$$

$$X_z' = X_z + c \frac{dX_z}{dz}$$

$$Y_z' = Y_z + c \frac{dY_z}{dz}$$

$$Z_z' = Z_z + c \frac{dZ_z}{dz}$$

diese Werthe in die Gleichungen (1–3) gesetzt ergeben:

$$(7) \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} \varrho X &= \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} \\ \varrho Y &= \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} \\ \varrho Z &= \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} \end{aligned} \right.$$

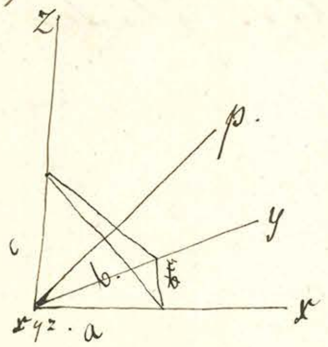
Ausserdem folgt noch aus den Gleichungen (4-6) da die mit a, b, c multyplic. Glieder verschwinden:

$$\left.\begin{array}{l} Z_y = Y_z \\ X_z = Z_x \\ Y_x = X_y \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Diese Gleichungen (7) und (8) können die Grundgleichungen der Elast. Theorie genannt werden. – Die Ableitungsweise derselben war nicht gar streng, wir machten ja die Beschränkung dass der Druck an jedem Punkte derselben Fläche des Parallelepipedons derselbe sei – dies ist in der That nicht der Fall – ziehen wir aber auch diese Änderungen des Druckes mit in Betracht so erhalten wir ~~nach~~ auf etwas mühsamerem Wege dasselbe Resultat. –

§4. Berechnung des Druckes auf einer Fläche die durch einen seinem Drucke nach bekannten Punkt gelegt ist. –

Wir haben die Absicht hier zu zeigen, dass wenn der Druck an einem Punkte bekannt ist – er auch für eine durch denselben gelegte Ebene bestimmt werden kann. –



Der Punkt dessen Druck als bekannt vorausgesetzt ist – sei $x\,y\,z$ – die Normale der Ebene p. Es sollen X_p, Y_p u. Z_p die Componenten des Druckes sein welcher auf die Flächeneinheit der auf p senkrechten Fläche ausgeübt wird. Es wird angenommen dass dieser Druck in unendlich kleinen Abständen unendlich kleine Änderungen erleidet – die Ebene kann also von $x\,y\,z$ so verschoben werden, dass sie die Coordinatenaxen in den Entfernungen a, b, c schneidet – wobei zu bemerken ist ist dass diese letztern unendl. kleine Grössen sind. – Die so erzielte Figur ist eine Pyramide, bezeichnen wir nun f die Basis derselben, die eben betrachtete Fläche – und mit (p,x), (p,y) und (p,z) die Winkeln welche p mit den Coord. Axen bildet, so sind die Seitenflächen der Pyramide

$$\frac{ac}{2} = f\cos(p,y)$$

$$\frac{ab}{2} = f\cos(p,z)$$

$$\frac{bc}{2} = f\cos(p,x)$$

Die äussern Druckkräfte können ~~Wirken~~ ~~nun~~ auf diese 3 Flächen in Kräfte zerlegt werden, ~~deren~~ Componenten X_x X_y X_z; Y_x, Y_y Y_z und Z_x Z_y Z_z sind – ~~so~~ so müssen dann diese im Falle des Gleichgewichtes die innern ~~Druck~~kräfte auf f vernichten – Also die Gleichgewichtsbedingung ist:

$$fX_p = f\left(X_x\cos(p,x) + X_y\cos(p,y) + X_z\cos(p,z)\right)$$

~~oder~~:

$$X_p = X_x\cos(p,x) + X_y\cos(p,y) + X_z\cos(p,z)$$

auch:

$$\left.\begin{aligned} Y_p &= Y_x\cos(p,x) + Y_y\cos(p,y) + Y_z\cos(p,z) \\ Z_p &= Z_x\cos(p,x) + Z_y\cos(p,y) + Z_z\cos(p,z) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

Hiernach ist die Grösse u. Richtung des ~~auf~~ Druckes auf der Fläche bekannt welche durch ~~durch~~ $x\,y\,z$ gehend, dem p normal steht – denn es ist:

$$P^2 = X_p^{\,2} + Y_p^{\,2} + Z_p^{\,2}$$

Die Richtung von P folgt aus:

$$\cos(P,x) = \frac{X_p}{P}$$

$$\cos(P,y) = \frac{Y_p}{P}$$

$$\cos(P,z) = \frac{Z_p}{P}$$

Wobei (P,x), (P,y) und (P,z) die Winkel bedeuten welche P mit den Coordinatenaxen bildet. –

§5 – Die Fläche an welcher verticalen Druck-Kräften ein verticaler Moleculardruck entspricht.

Im allgemeinen fallen die Winkel (px) und (Px) nicht zusammen – wäre dies so möchte den Druck-Kräften X_x, Y_x, Z_x etc. welche vertical wirken auch ein ~~Dru~~ verticaler Druck das Gleichgewicht halten – und diesen Fall werden wir jetzt in's Auge fassen. – Wenn $Px = px$ so ist:

$$X_p = P\cos(p,x)$$

$$Y_p = P\cos(p,y)$$

$$Z_p = P\cos(p,z)$$

und nach (9)

$$P\cos(p,x) = X_x\cos(p,x) + X_y\cos(p,y) + X_z\cos(p,z)$$

$$P\cos(p,y) = Y_x\cos(p,x) + Y_y\cos(p,y) + Y_z\cos(p,z)$$

$$P\cos(p,z) = Z_x\cos(p,x) + Z_y\cos(p,y) + Z_z\cos(p,z)$$

Ausserdem besteht noch

$$\cos^2(p,x) + \cos^2(p,y) + \cos^2(p,z) = 1$$

und gesetzt

$$\cos(p,x) = \alpha \qquad \cos(p,y) = \beta \qquad \cos(p,z) = \gamma$$

Zweckmässig geordnet:

$$\left.\begin{aligned} (X_x - P)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= 0 \\ Y_x\alpha + (Y_y - P)\beta + Y_z\gamma &= 0 \\ Z_x\alpha + Z_y\beta + (Z_z - P)\gamma &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{-------} (10)$$

(8) ergiebt noch die Relationen

$$X_y = Y_x \qquad X_z = Z_x \qquad Y_z = Z_y$$

Diese Gleichungen führen zu einer Ellypsoid-fläche – oder allgemeiner zu einer Oberfläche 2ter Ordnung – dieser Behauptung soll bewiesen werden –

Sind die laufenden Coordinaten eines Punktes der Ellypsoidoberfläche ξ, η, ζ – so ist die Gleichung dieser letztern Fläche:

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\xi\eta$$

in welcher Gleichung A, B, C und a, b, c Constanten bedeuten! – Bezeichnen wir mit r den Radius vector eines Punktes der Oberfläche, und mit α β γ die Cosinuse der Winkel, die derselbe mit den Coordinatenaxen bildet dann ist:

$$\xi = \alpha r \quad , \eta = \beta r \quad , \zeta = \gamma r$$

und folglich:

$$\frac{1}{r^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2a\beta\gamma + 2b\gamma\alpha + 2c'\alpha\beta$$

Für maxima von r werden α, β, γ die Axen des Ellypsoid's – dieser Maxima müssen aber so bestimmt werden dass die Gleichung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

erfüllt wird. –

III Vorlesung. 5 Maj.

Die Maxima einer Function $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, für welche noch die Bedingungsgleichung $G = 0$ stattfindet ergeben sich aus den Gleichungen. –

$$\frac{dF}{d\alpha} = \Lambda \frac{dG}{d\alpha}$$

$$\frac{dF}{d\beta} = \Lambda \frac{dG}{d\beta}$$

$$\frac{dF}{d\gamma} = \Lambda \frac{dG}{d\gamma}$$

und $\quad G = 0$

In unserem Falle ist. $F = \frac{1}{r^2} \quad G = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1$ folglich die Gleichungen woraus α, β, γ zu berechnen sind:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dF}{d\alpha} = (A - \Lambda)\alpha + c\beta + b\gamma \\ \dfrac{dF}{d\beta} = c\alpha + (B - \Lambda)\beta + a\gamma \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{d\gamma} &= b\alpha + a\beta + (C-\Lambda)\gamma = 0 \\ \alpha^2 &+ \beta^2 + \gamma^2 = 1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

Die Determinante ist in Bezug auf Λ vom dritten Grade – auch eine Vorstellung der gewöhnlichen Auflösung dieser Gleichungen führt zur dieser Überzeugung – Λ hat also drei Werthe, u. durch diesen wird ~~bestimmen~~ ~~die~~ ~~verschiedenen~~ α, β, und γ. bestimmt. –

Es wurde behauptet dass die Gleichungen (10) sich auf eine Ellypsoid fläche beziehen – und wahrhaft geben diese – in das eben abgeleitete System von Gleichungen über wenn gesetzt wird:

$$A = X_x \qquad B = Y_y \qquad C = Z_z$$
$$a = Y_z \qquad b = Z_x \qquad c = X_y$$
$$\Lambda = P$$

Zufolge dieser Identität können wir nun behaupten dass es wirklich eine Oberfläche giebt auf welcher senkrechten Druckkräften senkrechte Molecular druckkräfte widerstehen – und diese ~~Fig~~ Fläche ist die der ~~des~~ Ellypsoids. – Dass die mathematische Ableitung auch die Möglichkeit, eines Hyperboloidfläche, mit der erwähnten Eigenschaft beibehält ist leicht einzusehen — die Betrachtung dieses Falles ist aber von geringer Bedeutung. —

Es sind nun die Axen dieses Ellypsoids die Hauptdruckaxen, und Drucke die in der Richtung derselben wirken die Hauptdrucke. — Die Gleichung dieses Ellypsoids auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen ist:

(12) ------ $$1 = X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2 Y_z \eta \zeta + 2 Z_x \zeta \xi + 2 X_y \xi \eta$$

13 Gleichung der Hauptdruckfläche.

Die Werthe von Λ stehen in besonderer Beziehung zu α, β, γ. — ~~Wenn~~ Angenommenen ein Werth von Λ sei bestimmt und setzen wir diesen in die Gleichungen $\frac{dF}{d\alpha}$ etc. u. addiren, so folgt:

$$\Lambda = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2a\beta\gamma + 2b\gamma\alpha + 2c\alpha\beta$$

also: $\Lambda = \frac{1}{r^2}$

Die drei Werthe von Λ sind also reciproke Quadrate der Halbaxen der Fläche; da aber als Identitätsbedingung $\Lambda = P$ besteht so kann man auch sagen, dass die 3 Hauptdrucke gleich sind den Reciproken Quadraten der Hauptdruckaxen. —

§6 Gleichungen zwischen den Hauptdrucken und ~~den~~ den äusseren Druckkräften. –

Bezeichnen wir mit P_1, P_2 u. P_3 die Hauptdrucke – mit $X_x\ X_y\ X_z$, Y_x etc. die Componenten der äusseren Druckkräfte, welche auf die Flächeneinheit, eines in Gleichgewicht bestehenden ~~Körper~~ Flächenelementes wirken – bezeichnen wir ferner mit α_1 $\beta_1\ \gamma_1$; $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$; $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ die Cosinuse der Winkel welche $P_1\ P_2\ P_3$ mit den Coordinatenaxen bilden – so geben die Gleichungen (10) folgende 9 Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
P_1\alpha_1 &= X_x\alpha_1 + X_y\beta_1 + X_z\gamma_1\\
P_1\beta_1 &= Y_x\alpha_1 + Y_y\beta_1 + Y_z\gamma_1\\
P_1\gamma_1 &= Z_x\alpha_1 + Z_y\beta_1 + Z_z\gamma_1\\
P_2\alpha_2 &= X_x\alpha_2 + X_y\beta_2 + X_z\gamma_2\\
P_2\beta_2 &= Y_x\alpha_2 + Y_y\beta_2 + Y_z\gamma_2\\
P_2\gamma_2 &= Z_x\alpha_2 + Z_y\beta_2 + Z_z\gamma_2\\
P_3\alpha_3 &= X_x\alpha_3 + X_y\beta_3 + X_z\gamma_3\\
P_3\beta_3 &= Y_x\alpha_3 + Y_y\beta_3 + Y_z\gamma_3\\
P_3\gamma_3 &= Z_x\alpha_3 + Z_y\beta_3 + Z_z\gamma_3
\end{aligned}\right\} \text{---} (13)$$

— Sind x, y, z die ~~Coor~~ Coordinaten eines Punktes auf das erste System — x' y' z' die Coordinaten desselben Punktes auf ein zweites System bezogen; dessen Nullpunkt mit dem des ersteren zusammenfällt — bezeichnen wir ferner mit α, β, γ, etc. die Cosinuse der Winkel welche die Axen des zweiten Systemes mit den Axen des ersten Systemes bilden — so ergebt sich die Transformationsformel.

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

und die Auflösungen dieser Gleichungen nach x sind:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

Multipliziren wir nun die oberen Gleichungen ~~mit~~ der Reihe nach mit α_1 α_2 α_3 und addiren so ergeben sich die Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$
$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0$$

Ähnlich folgen durch Multiplication dersel-
ben Gleichungen mit β_1 β_2 β_3 und γ_1 γ_2
γ_3 und Addition noch folgende Relationen:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0$$

α_1, β_1 γ_1 etc. haben in den Gleichungen (13, IV Vorlesung. 8 mai
dieselbe Bedeutung wie in dem neu betrach-
teten Falle – all die zwischen diesen Grös-
sen aufgestellten Relationen sind also
~~auf~~ auch auf unsere Betrachtungen be-
züglich. – Mit Hülfe dieser Relationen
wollen wir die Componenten der äusse-
ren Druckkräfte durch die Hauptdrucke
darstellen. – Multipliziren wir nämlich
die ersten ~~3~~ Gleichungen jeder der 3 Gruppen ~~(~~von (13) je mit α_1
α_2 α_3 und addiren ~~so~~ folgt:

$$X_x = P_1\alpha_1^2 + P_2\alpha_2^2 + P_3\alpha_3^2 \quad \text{-------------} (14)$$

Eine ~~Addi~~ Multiplication der zweiten
Gleichungen jeder Gruppe – also der Gleichungen
2, 5, 8 von (13) mit β_1, β_2, β_3 und Addi-
tion, giebt:

$$Y_y = P_1\beta_1^2 + P_2\beta_2^2 + P_3\beta_3^2 \quad \text{-------------} (14)$$

Ähnlich abzuleiten ist noch:

(14.) --- $$Z_z = P_1\gamma_1^2 + P_2\gamma_2^2 + P_3\gamma_3^2$$

Die Tangentialdruckcomponenten – mit diesem Namen sollen X_y, Y_z etc von X_x, Y_y, Z_z unterschieden werden – erhaltet man, indem man die ~~Gleichungen~~ erste, vierte, siebente der Gleichungen (13) mit β_1 β_2 β_3 multiplicirt und addirt; dann die zweite fünfte, achtte mit γ_1, γ_2 γ_3 – und die dritte, sechstte, neunte mit α_1 α_2 α_3 multiplicirt und die Producte in beiden Fällen addirt, mit Betrachtung der Relationen zwischen α_1, β_1, γ_1, α_2 ... etc. ergeben sich dann:

(14) ---
$$\left\{\begin{aligned}
X_y &= Y_x = P_1\alpha_1\beta_1 + P_2\alpha_2\beta_2 + P_3\alpha_3\beta_3\\
Y_z &= Z_y = P_1\beta_1\gamma_1 + P_2\beta_2\gamma_2 + P_3\beta_3\gamma_3\\
Z_x &= X_z = P_1\gamma_1\alpha_1 + P_2\gamma_2\alpha_2 + P_3\gamma_3\alpha_3
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichheit je zweier der Tangentialcomponenten werde auf (8) gestützt aufgestellt. –

§7. – Bemerkungen.

Unsere Aufgabe würde es sein in einem der folgenden Kapitel sein die Druckkräfte mit den Verrückungen, welche ein Körper in Folge derselben erleidet in Übereinstimmung zu bringen – bei dieser Gelegenheit werden wir die mit (7) bezeichneten Formeln gebrauchen

$$\varrho X = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}$$

$$\varrho Y = \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} \qquad \text{---- (I)}$$

$$\varrho Z = \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz}$$

Es werden ~~hier~~ die Verrückungen u v w durch die Componenten der Druckkräfte ausgedrückt werden – es werden hiebei noch 3 Grenzbedingungen derselben nothwendig. Es seien (X) (Y) (Z) die Componenten einer auf die Flächeinheit wirkenden, gegebenen, äusseren Druckkraft – Im Falle des Gleichgewichtes muss dann:

$$(X) = X_n$$

$$(Y) = Y_n$$

$$(Z) = Z_n$$

Wo X_n, Y_n, Z_n die Componenten des inneren Druckes bezeichnen, welcher auf die auf n verticale Fläche wirkt – in diesem Falle folgt aber nach den Gleichungen (9)

$$
(\mathrm{II}) \ldots \quad
\begin{aligned}
(X) &= X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z) \\
(Y) &= Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) + Y_z \cos(n,z) \\
(Z) &= Z_x \cos(n,x) + Z_y \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z)
\end{aligned}
$$

das sind die erwähnten Grenzbedingungen. –

Sei zum Beispiel die Gleichung der Oberfläche

$$g = 0$$

gegeben, wo g eine Function von x, y, z ist. – es besteht dann offenbar das Verhältnis:

$$\cos(n,x) : \cos(n,y) : \cos(n,z) = \frac{dg}{dx} : \frac{dg}{dy} : \frac{dg}{dz}$$

da noch

$$\cos^2(n,x) + \cos^2(n,y) + \cos^2(n,z) = 1$$

so können (n,x), (n,y), (n,z) wirklich bestimmt werden – und die so erhaltenen Werthe in II gesetzt ergeben sich:

$$
\begin{aligned}
X_x \frac{dg}{dx} + X_y \frac{dg}{dy} + X_z \frac{dg}{dz} &= (X) \sqrt{\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dz}\right)^2} \\
Y_x \frac{dg}{dx} + Y_y \frac{dg}{dy} + Y_z \frac{dg}{dz} &= (Y) \sqrt{\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dz}\right)^2} \\
Z_x \frac{dg}{dx} + Z_y \frac{dg}{dy} + Z_z \frac{dg}{dz} &= (Z) \sqrt{\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dz}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Sind ausserdem noch ϱX, ϱY, ϱZ bekannt so ergeben sich, mit Betrachtung von (8) die Werthe der äüsseren Druckcomponenten, und diese werden dann zur Bestimmung von u, v, w benützt. –

II. Kapitel. –
Die Formveränderung. –

§8. – Wie der Zustand eines Körpers nach der Formveränderung aus seinem Zustande vor derselben erklärt werden kann. –

Das Molecül eines Körpers, welcher Formveränderung erleidet soll in Betracht gezogen werden. – Die Coordinaten dieses Molecüls ~~vor~~ in dem natürlichen Zustande des Körpers – und die nach der Formveränderung werden verschieden sein. –
Seien die Coordinaten im Nat. Zustande x, y, z; nach der Formveränderung $x+u$, $y+v$, $z+w$. – wo u, v, w den Coordinatenaxen parallele Längen sind – und je nachdem eine Contrac-

tion oder Dilatation eintritt ~~from~~ negativ oder positiv zu nehmen sind. –

Die Coordinaten eines zweiten von $x\ y\ z$ in <u>unendl. kleiner</u> Entfernung gelegenen ~~Punktes~~ Moleküls seien ~~$x+u$~~ im natürlichen Zustande des Körpers $x+a,\ y+b,\ z+c$ – dieselben nach der Formveränderung $x+a',\ y+b',\ z+c'$. –

Die Verrückungen dieser zwei Moleküle sind verschieden – ~~aber allein~~ also es sind diese Abhängig von der Lage – folglich:

$$u = f(x, y, z)$$

$$a' - a = f(x+a,\ y+b,\ z+c)$$

Da a, b, c unendlich klein so ergiebt Taylor's Reihe:

$$(15)\ldots \left\{ \begin{array}{ll} & a'-a = u + \frac{du}{dx}a + \frac{du}{dy}b + \frac{du}{dz}c \\ \text{und:} & b'-b = v + \frac{dv}{dx}a + \frac{dv}{dy}b + \frac{dv}{dz}c \\ & c'-c = w + \frac{dw}{dx}a + \frac{dw}{dy}b + \frac{dw}{dz}c \end{array} \right.$$

Hieraus:

$$(16)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} a' = u + \left(1+\frac{du}{dx}\right)a + \frac{du}{dy}b + \frac{du}{dz}c \\ b' = v + \frac{dv}{dx}\cdot a + \left(1+\frac{dv}{dy}\right)b + \left(\frac{dv}{dz}\right)c \\ c' = w + \frac{dw}{dx}\cdot a + \frac{dw}{dy}\cdot b + \left(1+\frac{dw}{dz}\right)c \end{array} \right.$$

a, b, c sind hier die Coordinaten des zweiten Punktes auf ein Coordinatensystem bezogen dessen Mittelpunkt x, y, z ist — nehmen wir beispielsweise an dass a b, c auf der Oberfläche einer unendl. klein. Kugel liegt dessen Mittelpunkt ~~ist~~ auch x y z ist. — Die Coordinaten desselben Punktes nach der Formveränderung des Kugelchens sind dann a', b', c'. —
Der Zustand dieser klo. Kugel nach der Formveränderung des Körpers lässt sich aus dem Zustande vor der Formveränderung ableiten; wenn man annimmt — dass die Kugel ~~in~~ sich selbst ‖ parallel verschoben wird (in der durch die Punkte o u. (abc) bezeichneten Richtung) — dass sie um ihren Mittelpunkt gedreht worden ist — und dass sie in der Richtung der 3 Coord. Axen dilatirt ist.

Die Ausdrücke (16) für a', b', c' enthalten u, v, w — und 9 Differentialquotienten dieser Grössen ~~also~~ sie sind also allg. lineare Functionen von 12 von einander unabhängigen Grössen — hieraus folgt die Richtigkeit der oben angeführten Behauptung.

Wird die Kugel sich selbst parallel um u, v, w fortgerückt und bezeichnen wie vorher a b c die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche nach vor – a' b' c' die nach der Formveränderung – so ist:

$$a' = a + u$$

$$b' = b + v$$

$$c' = c + w$$

Also lineare Ausdrücke von 3 unabh. Grössen. –

Um die Umdrehung der Kugel zu betrachten müssen wir ein Hülfs coord. System aufstellen – dessen Mittelpunkt ~~im~~ mit Mittelpunkte der Kugel fest verbunden ist – die Coordinaten eines Punktes (a, b, c) auf dies System bezogen sein ξ, η, ζ – dann ist nach bekannten Umwandlungsformeln:

$$a' = \xi \cos(a\xi) + \eta \cos(a\eta) + \zeta \cos(a\zeta)$$

$$b' = \xi \cos(b\xi) + \eta \cos(b\eta) + \zeta \cos(b\zeta)$$

$$c' = \xi \cos(c\xi) + \eta \cos(c\eta) + \zeta \cos(c\zeta)$$

Wobei (aξ) etc die Winkel bedeuten welche die neuen Coordinatenaxen mit den alten bilden – wie leicht ein zu sehen werden die im natürl. Zustande alle gleich = 0. –

Da die ursprüngl. Coordinaten a, b, c oder ξ η ζ — in dem letzteren Coord. Systeme auch nach der Form veränderung gleich bleiben — so folgt:

$$a' = a\cos(a\xi) + b\cos(a\eta) + c\cos(a\zeta)$$

$$b' = b\cos(b\xi) + b\cos(b\eta) + c\cos(b\zeta)$$

$$c' = c\cos(c\xi) + c\cos(c\eta) + c\cos(c\zeta)$$

Diese Ausdrücke sind linear — sie sind von 9 Cosinusen — da aber zwischen diesen noch 6 Relationen bestehen — nur von 3 unabhängigen Grössen bestimmt. —

Dilatirt nun die Kugel in der Richtung der Coordin. Axen so ist:

$$a' = a(1-\delta_1)$$

$$b' = b(1-\delta_2)$$

$$c' = c(1-\delta_3)$$

wo δ_1, δ_2 δ_3 die Contractionen in der Richtung der Axen bezeichnen. — Beziehen wir diese Dilatation auf ein System dessen Anfangspunkt mit dem des ersteren zusammenfällt — — dann ist:

$$\xi' = \xi(1-\delta_1)$$

$$\eta' = \eta(1-\delta_2)$$

$$\zeta' = \zeta(1-\lambda_3)$$

Die Umwandlungsformeln beider Coord. Systeme:

$$\xi = a\cos(a\xi) + b\cos(b\xi) + c\cos(c\xi)$$

$$\eta = a\cos(a\eta) + b\cos(b\eta) + c\cos(c\eta)$$

$$\zeta = c\cos(a\zeta) + b\cos(b\zeta) + c\cos(c\zeta)$$

ferner:

$$a' = \xi'\cos(a\xi) + \eta'\cos(a\eta) + \zeta'\cos(a\zeta)$$

$$b' = \xi'\cos(b\xi) + \eta'\cos(b\eta) + \zeta'\cos(b\zeta)$$

$$c' = \xi'\cos(c\xi) + \eta'\cos(c\eta) + \zeta'\cos(c\zeta)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Ausdrücke zwischen $a'\ b'\ c$ und $a.\ b\ c$ sie sind lineare Functionen enthaltend ~~a~~ $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ und 9 Cosinuse. – Zwischen den 9 Cosinusen bestehen 6 Bedingungsgleichungen Die erwähnten Functionen enthalten also 6 unabhängige Grössen. –

Wir haben nun gezeigt wie sich Ausdrücke von $a'\ b'c$ gestalten wenn sich die Kugel 1) verschiebt 2) um ihren Mittelpunkt dreht 3) in den Axen Richtungen dilatirt – und fanden so im ersten Falle Ausdrücke von 3 – im zweiten Falle ebenfalls von

3 – im Dritten Falle endlich von sechs unabhängigen Grössen – erleidet nun die Kugel all diese Veränderungen gleichzeitig so ergeben sich zwischen a' b' c' und a b c lineare Ausdrücke von 12 unabhängigen Grössen. – ~~Und~~ Dies war ja eben zu beweisen; dass nämlich ein ~~solcher~~ Ausdruck von der Form (16) die oben angeführte Vorstellung ~~von~~ der Formveränderung einer Kugel, oder irgend eines andern Figur zulässt. –

§9 – Die Hauptcontractionen. –

Vte Vorl. 12 Mai.

Es sollen hier die Richtungen u. Grössen der Hauptcontractionen besprochen werden. – Ist der Körper dessen Formveränderung betrachtet wird eine Kugel, so geht derselbe, wie es gezeigt werden soll in ein Ellypsoid über – die Axen dieses Ellypsoid's sind dann die Hauptcontractionsrichtungen. –
Die Gleichung der Kugeloberfläche ist:

$$\varepsilon^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Die Coordinaten a b c gehen nach der Formveränderung in a' b' c' — und nun auf die Mittelpunktsgleichung zurückzukehren muss gesetzt werden:

$$\xi = a' - u$$
$$\eta = b' - v$$
$$\zeta = c' - w$$

es folgt dann aus Gleichungen (16)

$$\xi = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) a + \frac{du}{dy} b + \frac{du}{dz} c$$
$$\eta = \frac{dv}{dx} a + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) b + \frac{dv}{dz} c$$
$$\zeta = \frac{dw}{dx} a + \frac{dw}{dy} b + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) c$$

Ist die Formveränderung unendlich klein so wird $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$ und folglich — durch Vertauschung dieser Grössen in den eben angeführten Gleichungen:

$$(17) \ldots \begin{cases} a = \xi - \left(\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\eta + \frac{du}{dz}\zeta\right) \\ b = \eta - \left(\frac{dv}{dx}\xi + \frac{dv}{dy}\eta + \frac{dv}{dz}\zeta\right) \\ c = \zeta - \left(\frac{dw}{dx}\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{dw}{dz}\zeta\right) \end{cases}$$

Also auch:

$$(18) \ldots \begin{cases} a^2 = \xi^2 - 2\xi\left(\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\eta + \frac{du}{dz}\zeta\right) \\ b^2 = \eta^2 - 2\eta\left(\frac{dv}{dx}\xi + \frac{dv}{dy}\eta + \frac{dv}{dz}\zeta\right) \\ c^2 = \zeta^2 - 2\zeta\left(\frac{dw}{dx}\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{dw}{dz}\zeta\right) \end{cases}$$

Die Gleichung der Oberfläche geht dann in $\xi\eta\zeta$ mit Hülfe dieser Werthe in folgende über:

$$\varepsilon^2 = \xi^2\left(1-2\frac{du}{dx}\right)+\eta^2\left(1-2\frac{dv}{dy}\right)+\zeta^2\left(1-2\frac{dw}{dz}\right)-2\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\eta\zeta$$
$$-2\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\zeta\xi-2\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\xi\eta \quad \ldots\ldots (19)$$

Die Richtungen der Axen dieser Oberfläche, welche offenbar ein Ellypsoid ist sind die Richtungen der Hauptcontractionen. –

Ein Molecül $(a\,b\,c)$ der Oberfläche ist vor der Formveränderung von dem Mittelpunkte entfernt um $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ – die Entfernung derselben Moleculs vom Mittelpunkte der Kugel nach der Formveränderung ist: $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ Also die Verrückung des Moleculs – die Contraction ist:

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

auch:

$$\lambda = 1-\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

da wir λ unendlich klein setzten:

$$1-2\lambda = \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{a^2+b^2+c^2}$$

hieraus:

$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bezeichnen wir mit $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Winkel welche die Contractionsrichtung mit den in der Kugel fest gestellten Coordinatenaxen bildet, so ist:

$$\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\beta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\gamma = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

Setzen wir nun im ~~Zähler~~ Nenner des Ausdruckes von λ statt ~~ξ, η, ζ~~ a, b, c die Grössen ξ, η, ζ; und bilden den Zähler derselben Ausdruckes mit Betrachtung der Gleichungen (18); so erhalten wir eine Gleichung, welche mit Berücksichtigung der eben angeführten Werthe von $\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ in folgende übergeht:

$$(20) \ldots\ldots \lambda = \frac{du}{dx}\alpha^2 + \frac{dv}{dy}\beta^2 + \frac{dw}{dz}\gamma^2 + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\beta\gamma + \left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\alpha\beta$$

Die Richtungen der Hauptaxen von (19) sind die Richtungen der Hauptcontractionen – es handelt sich nun um die Aufgabe diese zu finden: –

Die Hauptaxen ~~deren~~ einer Oberfläche zweiten Grades, deren Gleichung von der Form ist:

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\eta\xi$$

ergeben sich aus folgenden Ausdrücken:

$$0 = (A-\lambda)\alpha + c\beta + b\gamma$$

$$0 = c\alpha + (B-\lambda)\beta + a\gamma$$

$$0 = \beta\alpha + c\beta + (C-\lambda)\gamma$$

wo: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$

Wo $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Cosinusse der Winkel bezeichnen welche die Axen mit den Coord. Axen bilden. Wir haben hier ganz denselben Fall nur müssen wir setzen:

$$A = \left(1-2\frac{du}{dx}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$B = \left(1-2\frac{dv}{dy}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$C = \left(1-2\frac{dw}{dz}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$a = -\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$b = -\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$c = -\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

Multiplizire ich sämmtliche Glieder mit $-\frac{\varepsilon^2}{2\,\varepsilon^2}$ und addire zu A, B und C je die Grösse 1 so verändert sich der Ausdruck in Bezug auf $\alpha\ \beta\ \gamma$ nicht; und ich erhalte so als Gleichung der Contractionsfläche:

$$1=\frac{\partial u}{dx}\xi^2+\frac{\partial v}{dy}\eta^2+\frac{dw}{dz}\zeta^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\eta\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\zeta\xi+ \qquad (21)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\xi\eta$$

Die Richtungen der Hauptaxen dieser Oberfläche fallen mit den Hauptcontractionsrichtungen zusammen – wie diese zu berechnen sind ist durch die eben angeführten Gleichungen angegeben. –
Der Ausdruck für den Radius vector (r) dieser Oberfläche ist:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\partial u}{\partial x}\alpha^2+\frac{dv}{dy}\beta^2+\frac{dw}{dz}\gamma^2+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\beta\gamma+\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\gamma\alpha$$
$$+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\alpha\beta$$

Ein mit (20) identischer Ausdruck, woraus folgt:

$$\lambda=\frac{1}{r^2}$$

Also die Contraction an irgend einem Punkte der Oberfläche gleich dem reciproken Quadrate des Radius vectors. –

Die Gleichung der Contractionsfläche lässt sich durch die Componenten der Contraction in folgender Gestalt darstellen:

$$(22) \cdots\cdots 1=X_x\xi^2+Y_y\eta^2+Z_z\zeta^2+Y_z\eta\zeta+Z_x\zeta\xi+Y_x\xi\eta$$

worin: $X_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Y_y=\frac{\partial v}{\partial y}$, $Z_z=\frac{\partial w}{\partial z}$

$$y_z = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \qquad z_x = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$$

$$y_x = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Dieselben Grössen lassen sich wenn $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ die Hauptcontractionen, $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ etc die Cosinuse der Winkel bedeuten welche diese mit den Coord. Axen bilden, auch in folgender Gestalt darstellen:

$$-\frac{du}{dx} = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2$$

$$-\frac{dv}{dy} = \lambda_1\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 + \lambda_3\beta_3^2$$

$$-\frac{dw}{dz} = \lambda_1\gamma_1^2 + \lambda_2\gamma_2^2 + \lambda_3\gamma_3^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (23)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) = \lambda_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\beta_2\gamma_2 + \lambda_3\beta_3\gamma_3$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) = \lambda_1\alpha_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\gamma_2 + \lambda_3\alpha_3\gamma_3$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = \lambda_1\alpha_1\beta_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2 + \lambda_3\alpha_3\beta_3$$

durch Addition dieser Gleichungen, und Anwendung von Formeln die sich auf Transformation der Coordinaten zweier rechtwinkeligen Systeme, mit demselben Anfangspunkte, beziehen; ergiebt sich:

$$-\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \ldots\ldots \qquad (24)$$

III Kapitel. –
Beziehungen zwischen Druck und Contraction. –

VI te Vorl. 15 Mai

§10. – Die Druckkräfte als Functionen der Contractionen dargestellt. –

Bei isotropen Mitteln ~~fallen~~ geschehen die Verrückungen in der Richtung der Druckkräfte selbst – es fallen also bei diesen die Richtungen der Hauptdrucke mit denen der Hauptcontractionen zusammen. –
Sind P_1, P_2, P_3 die Hauptdrucke; λ_1 λ_2, λ_3 die Hauptcontractionen so ist:

$$P_1 = F(\lambda_1 \, \widehat{\lambda_2 \lambda_3})$$
$$P_2 = F(\lambda_2 \, \widehat{\lambda_3 \lambda_1})$$
$$P_3 = F(\lambda_3 \, \widehat{\lambda_2 \lambda_1})$$

Diese Functionen müssen in Bezug auf ihre letzten zwei Argumente symmetrisch sein. – ~~Sie~~ müssen ausserdem $P_1 P_2 P_3$ ~~Functionen sein welche~~ für den Werth $= 0$ der 3 Argumente, selbst $= 0$ werden. –

Wir sind genöthigt hier die Hypothese zu machen dass $P_1\ P_2\ P_3$ lineare Functionen der Grössen $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ sind — eine Hypothese die sich ~~auch~~ durch alle ~~praktische~~ Anwendungen der ~~durch sie~~ mit ihrer Hülfe gezogenen Resultate bestätigt. —
Hiernach sind diese Functionen:

$$P_1 = A\lambda_1 + B(\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$P_2 = A\lambda_2 + B(\lambda_3 + \lambda_1)$$

$$P_3 = A\lambda_3 + B(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Wo A und B ~~A, B, C~~ Constanten des Körpers sind; es ist:

$$A = 2K(1+\vartheta)$$

$$B = 2K\vartheta$$

K eine Constante verschieden für verschiedene Körper — Man dachte ϑ sei eine Grösse welche für alle festen Körper dieselbe ist — Poisson bestimmte $\vartheta = \frac{1}{2}$; Wertheim widerlegte die Ansicht Poisson's und stellte für ϑ den Werth $= 1$ auf — nun sind beide Ansichten verworfen; es zeigte sich dass ϑ ebenso wie K von der speciellen Beschaffenheit eines Körpers abhängig ist. —
Die Werthe von A u. B umwandeln die Gleichungen P_1 etc in folgende:

$$17) \quad \begin{cases} P_1 = 2K(\lambda_1 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\ P_2 = 2K(\lambda_2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\ P_3 = 2K(\lambda_3 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \end{cases}$$

Den Gleichungen (14) entsprechend:

$$X_x = 2K(\lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \lambda_3 \alpha_3^2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$$

$$Y_y = 2K(\lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2 + \lambda_3 \beta_3^2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$$

$$Z_z = 2K(\lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2 + \lambda_3 \gamma_3^2 + \vartheta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$$

$$Y_z = Z_y = 2K(\lambda_1 \beta_1 \gamma_1 + \lambda_2 \beta_2 \gamma_2 + \lambda_3 \beta_3 \gamma_3)$$

$$Z_x = X_z = 2K(\lambda_1 \alpha_1 \gamma_1 + \lambda_2 \alpha_2 \gamma_2 + \lambda_3 \alpha_3 \gamma_3)$$

$$X_y = Y_x = 2K(\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 + \lambda_2 \alpha_2 \beta_2 + \lambda_3 \alpha_3 \beta_3)$$

Die ~~dem~~ Bedeutung von α_1, α_2 etc ist in (14) dieselbe als in (23) und (24) – es sind ja im ersten Falle α_1 etc. die Cosinuse der Winkel welche die Hauptdrucke mit den Coordinatenaxen bilden – im 2ten Falle die Cosinuse der Winkel welche die Hauptcontractionen mit den Coordinatenaxen bilden – diese Winkel sind aber bei isotropen Mitteln gleich – folglich durch Anwendung von (23) und (24):

$$
\begin{aligned}
X_x &= -K\left\{2(1+\vartheta)\frac{du}{dx} + 2\vartheta\frac{dv}{dy} + 2\vartheta\frac{dw}{dz}\right\}\\
Y_y &= -K\left\{2\vartheta\frac{du}{dx} + 2(1+\vartheta)\frac{dv}{dy} + 2\vartheta\frac{dw}{dz}\right\}\\
Z_z &= -K\left\{2\vartheta\frac{du}{dx} + 2\vartheta\frac{dv}{dy} + 2(1+\vartheta)\frac{dw}{dz}\right\}\\
Y_z &= -K\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\\
Z_x &= -K\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\\
X_y &= -K\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(25)}
$$

(2)

Dies sind die Gleichungen aus welchen u v w die Verrückungen eines Theilchens in ihrem Zusammenhange mit den Druckkräften dargestellt sind – wobei noch zu bemerken ist dass diese Gleichungen sich allein auf isotrope Mittel beziehen. –

§11 – Anwendung auf auf die Spannung eines Drahtes. –

Ist ein Draht – oder ein Cylinder auf seiner einen Endfläche aufgehängt; während er durch ein ~~Gewicht~~ an seine zweiten Endfläche aufgehängtes Gewicht seiner Längsaxe nach gespannt wird – und sehen wir von

Schwere des Drahtes ab ($\rho = 0$); dann können wir auf dieses System die Gleichungen (I) (§7) anwenden, wodurch:

$$0 = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}$$

$$0 = \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz}$$

$$0 = \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz}$$

Auf die Grundfläche des Drahtes wirkt das Gewicht G — ist diese Grundfläche $= f$, und wird die x Axe in der Längsrichtung des Drahtes angenommen, so ist:

$$X_x = -\frac{G}{f}$$

$$Y_x = 0$$

$$Z_x = 0$$

Das negative Vorzeichen des Ausdruckes X_x erklärt sich daraus, dass das Gewicht eine Ausziehung folglich, was gleichbedeutend ist einem negativen Druck aus bewirkt. —

~~Die I~~ Betrachten wir nun den Druck an einem Element der Mantelfläche des Drahtes — diese hat an jedem ihrer Punkte eine Normale, welche die x Axe durchschneidet — folglich auf diese ~~er ist also~~: vertical ist ~~cos nx~~, — also:

$$\cos(n,x) = 0$$

Dies in den Gleichungen II (§7) benützt, folgt:

$$0 = X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z)$$

$$0 = Y_y \cos(n,y) + Y_z \cos(n,z)$$

$$0 = Z_y \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z)$$

Die Normale u. die Coord. Axen Y und Z liegen in derselben Ebene — die willkührlichen Coordinataxen können also leicht so gewählt werden dass $(n,y) = (n,z)$ — in diesem Falle werden die zwei letzten Gleichungen:

$$-Y_y = Y_z$$
$$-Z_y = Z_z$$

Es ~~sind~~ ist aber $Y_z = Z_y$, folglich ist auch: $-Y_y = Z_z$ und $-Y_z = Y_z$, was allein so möglich ist, wenn:

$$Y_y = 0 \qquad Z_z = 0 \qquad Y_z = 0$$

Es sind nun Werthe von u v w zu ersehen, welche den Gleichungen (25), mit den oben festgestellten Werthen von X_x etc. ~~genügten~~ entsprechen — diese Bedingungen werden wirklich von den Werthen:

$$u = lx \qquad v = -my \qquad w = -mz$$

erfüllt. — Die Richtigkeit dieser Werthe ergibt sich schon aus der Anschauung, wenn wir annehmen, dass l die, die Längendilatation der Längeneinheit, m dagegen die Quercontraction der Breiteneinheit ist. – Mit Hülfe dieser Substitutionen folgen aus (25):

$$\frac{G}{f} = K(2(1+\vartheta)l - 4\vartheta m)$$

$$0 = K(2\vartheta l - 2(1+2\vartheta)m)$$

Diese zwei Gleichungen entsprechen der Verlängerung eines, durch das Gewicht G gespannten Drahtes, es folgt aus ihnen

$$m = l\cdot\frac{\vartheta}{1+2\vartheta} \quad \text{und} \quad l = \frac{G}{f}\cdot\frac{1}{2K}\cdot\frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta}$$

Die Längendilatation l ist also für positive Werthe von G positiv – wird aber diese Grösse negativ – dass ist wird das Gewicht im entgegengesetzten Sinne aufgehängt – oder der Draht in seiner Längsrichtung durch irgend welche Kraft zusammengepresst, so ist l negativ. – In allen Fällen entspricht aber einem positiven Werthe von l, ein positiver Werth von m, und für einen negativen – ein negativer. – Es ist also, hier mit der Längendilatation, eine Quercontraction – und mit der Längencontraction eine Querdilatation verbunden. –

~~Denn~~ Nach dem Poisson'schen Werthe $\vartheta = \frac{1}{2}$ folgt das Verhältniss:

$$l : m = 4 : 1$$ Cagniard de Latour

nach Wertheims Werth $\vartheta = 1$ Wertheim. Mémoires sur l'équilibre des corps solides Annales de Ch. et Phys. 3 série T. XXIII.

$$l : m = 3 : 1$$

beide Ansichten sind widerlegt. – Es ist l proportional mit $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$ also: Kirchhoff. über das Verh. der Longendilatation zur Quercontraction bei Stäben von federhartem Stahl. P. A. CVIII.

$$l = E\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$$

Wo E das Elasticitäts coefficient bedeutet, welches von der Mater. Beschaffenheit des Körpers abhängt. –

Mit Benützung des Werthes von l folgt dann:

$$\frac{1}{E} = 2K\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}$$

§12. – Anwendung auf die Formveränderung eines Körpers, auf welchen in jedem seiner Punkte ein senkrechter, gleicher Druck wirkt. –

Diese Bedingung des Druckes kann leicht erfüllt werden, wenn der Körper z. B. in Wasser getaucht, und so einem höheren Drucke ausgesetzt wird. –

D sei der Druck der auf die Flächeneinheit wirkt – die Richtung derselben bildet mit den Coord. Axen dieselben Winkel, welche die Normale der Fläche mit diesen bildet; – folglich sind die Componenten von D:

$$(X) = D\cos(n,x)$$
$$(Y) = D\cos(n,y)$$
$$(Z) = D\cos(n,z)$$

diese Werthe, mit den Gleichungen (II) verglichen, geben:

$$X_x = D \qquad Y_y = D \qquad Z_z = D$$

ferner:

$$X_y\cos(n,y) + X_z\cos(n,z) = 0$$
$$Y_x\cos(n,x) + Y_z\cos(n,z) = 0$$
$$Z_x\cos(n,x) + Z_y\cos(n,y) = 0$$

Diesen Ausdrücken kann nur genügt werden indem

$$Y_z = Z_y = 0 \qquad Z_x = X_z = 0$$
$$X_y = Y_x = 0$$

gesetzt wird. –

Die gefundenen Werthe in (25) eingesetzt, ergeben sich ~~folgen~~ 3 ~~Gleichungen~~ Differential Gleichungen von $u\,v\,w$, deren linker Theil dieselbe Constante ist, es wer- ~~es them~~

den die nur dann erfüllt, wenn:

$$u = -lx \qquad v = -ly \qquad w = -lz$$

Mit Anwendung dieser Werthe giebt jede der 3 Gleichungen:

$$D = 2K(1+3\vartheta)l$$

Die Werthe von u, v, w zeigen dass der Körper von welcher Form er auch sei, sich nach der Formveränderung ähnlich bleibt. –
Es ist die eben eingeführte Grösse l die Zusammendrückbarkeit der Längeneinheit des Körpers. –
Durch Division des im vorigen § festgestellten Ausdruckes für E mit D ergiebt sich:

$$l = \frac{D}{E(1+2\vartheta)}$$

§13 Fortplanzung einer ebenen Welle in isotropen Mitteln. –

Bis jetzt haben wir nur den Fall des Gleichgewichtes betrachtet – um aus diesem zur Bewegung über zugehen, müssen wir den D'Alembert-schen VII te Vorl. 19/5

Principe zu Folge ~~tritt~~ in den Gleichungen (I, statt X setzen $X - \frac{d^2u}{dt^2}$, statt Y setzen $Y - \frac{d^2v}{dt^2}$, und statt Z setzen $Z - \frac{d^2w}{dt^2}$; um die Aufgabe zu vereinfachen wollen wir setzen $X = 0$ $Y = 0$ $Z = 0$; dann sind:

$$(26)\ldots\ldots \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} + \varrho\frac{d^2u}{dt^2} \\ 0 &= \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} + \varrho\frac{d^2v}{dt^2} \\ 0 &= \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} + \varrho\frac{d^2w}{dt^2} \end{aligned}$$

Es sind in diesen Ausdrücken u, v, w die Verrückungen zur Zeit t.

Wir nehmen den Körper als unbegrenzt an deshalb keine Grenzbedingungen.

Die Verrückungen aller Materielle sind zu einer gewissen Zeit ~~für~~ in derselben Ebene gleich — diese Ebene ist die Wellenebene — und die Welle die sich in dieser Weise fortpflanzt ist eine ebene Welle. —

Ist die Wellenebene auf die X axe vertical; so werden die Verrückungen u, v, w allein Functionen von x — dies wollen wir annehmen, dann ist:

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = 0 \qquad \frac{dw}{dy} = 0$$
$$\frac{du}{dz} = 0 \qquad \frac{dv}{dz} = 0 \qquad \frac{dw}{dz} = 0$$

Also nach den Gleichungen (25):

$$X_x = -2K(1+\vartheta)\frac{du}{dx}$$

$$Y_y = -2K\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Z_z = -2K\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y_z = Z_y = 0$$

$$Z_x = X_z = -K\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$X_y = Y_x = -K\frac{\partial v}{\partial x}$$

Diese Werthe in (26) gesetzt, folgt:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2K(1+\vartheta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Diese 3 Ausdrücke enthalten u v w ganz separat; die Behandlung der einen genügt um auch die der zwei anderen klar zu machen. – Setzen wir

$$\frac{2K(1+\vartheta)}{\varrho} = v^2$$

worin v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bedeutet, welche die Verrückungen u hervorbringt – es ist dies eine longitudinale Welle. – Dann wird

$$\frac{d^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (28)$$

Ähnliche Ausdrücke können wir für v und w darstellen – so es werden sich aber diese durch Werthe $\underline{v}$ unterscheiden.. Ein partielle Lösung von 28 ist:

$$u = \varphi(x+vt)$$

wo φ eine beliebige Function bedeutet. – Dass dies wirklich ein partielle Lösung ist, können wir uns leicht überzeugen – dieselbe differenzirt.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+vt)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+vt)$$

ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\varphi'(x+vt)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\varphi''(x+vt)$$

folglich $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

eine mit (28) identische Gleichung. – Eine zweite partielle Lösung derselben ist:

$$u = \psi(x-vt)$$

Also die vollkommnere Lösung:

(29) .... $$u = \varphi(x+vt) + \psi(x-vt)$$

Es sollen die ~~Gewisse~~ Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t=0$ gegeben sein, daher ist:

$$u = U(x)$$

und $$\frac{\partial u}{\partial t} = U_1(x)$$

In Folge dessen wird (29) für $t=0$:

(30) .... $$U(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

und da:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\varphi'(x+vt) - v\psi'(x-vt)$$

also ist für $t=0$

$$U_1(x) = v\varphi'(x) - v\psi'(x)$$

durch Integration wird diese Gleichung

$$\frac{1}{v}\int U_1(x)dx = \varphi(x) - \psi(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

die Gleichungen (30) und (31) addirt, folgt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{v}\int U_1(x)dx$$

u. die Gl. (31) von (30) abgezogen:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}U(x) - \frac{1}{2}\frac{1}{v}\int U_1(x)dx$$

Die Constante der Integration ist auf U von keinem Einfluss — in dem Ausdrucke desselben wird er ja mit dem positiven — dann mit dem negativen Zeichen auftreten. —

Sind U und U_1 so gegeben dass $\psi(x) = 0$ wird dann ist

$$u = \varphi(x+vt)$$

das heisst es entstehen Wellen die ohne ihre Gestalt zu verändern sich in der Richtung der Positiven X Axe, mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen — es sind diese Wellen da sie vertical auf die Wellenebene sind longitudinale Wellen. —

Ist U u. U_1 so gegeben dass $\varphi(x) = 0$ wird, dann ist

$$u = \psi(x-vt)$$

es entstehen in diesem Falle ganz ähnlich longitudinale Wellen; die sich aber in der entgegengesetzten Richtung, als die im vorherigen Falle betrachteten, ~~[illegible]~~ fortpflanzen.

Ähnliche Betrachtungen über die zwei letzten Gleichungen (27) zeigen dass v und w den Verrückungen transversaler Wellen entsprechen. – Es ist [illegible] aus diesen Gleichungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen $=\sqrt{\frac{K}{\varrho}}$ – während die longitudinaler Wellen $=\sqrt{\frac{2K(1+\vartheta)}{\varrho}}$ ist. –

Zweiter Abschnitt. –

Die krystallinischen Mittel. –

I Kapitel. –

Die Beziehungen zwischen Druckkräften und Verrückungen. –

§14. Die Grundgleichungen. –

Die Betrachtungen der Kapitel I und II behalten ihre Giltigkeit auch auf kryst. Körper – sie setzten ja die Isotropie des Mittels keineswegs voraus. – Es bestehen also bezüglich der Verhältnisse der Druckkräfte die Gleichungen I und II, die Grenzbedingungen im Falle eines begrenzten Körpers – dann die Gleichungen (23) und die in §9 angegebenen Werthe der Verrückungen x_x y_y etc. – Bei der Herleitung der Verhältnisse zwischen Druck und Verrückung machten wir ~~schon~~ von der Isotropie des Mittels schon Gebrauch – deshalb sind diese gewonnenen Resultate auch für krystallinische Medien unbrauchbar. – Jedenfalls müssen aber auch hier X_x, Y_y .... etc Functionen von x_x, y_y, z_z .... sein; und zwar müssen diese Functionen derart sein, dass wenn x_x .... etc verschwinden, dann auch X_x .... gleich 0 werden. – Über die Beschaffenheit dieser Function müssen wir eine Hypothese machen – welche sich allerdings in den Resultaten der Theorie vollkommen bestätigt – es ist die; dass die Function eine lineare ist. –

Nach diesen Angaben müssen wir diese Functionen zuerst in ganz allgemeiner Form darstellen – es sind diese:

$$
(1)\quad \begin{cases}
X_x = A_{11} x_x + A_{12} y_y + A_{13} z_z + A_{14} y_z + A_{15} z_x + A_{16} x_y \\
Y_y = A_{21} x_x + A_{22} y_y + A_{23} z_z + A_{24} y_z + A_{25} z_x + A_{26} x_y \\
Z_z = A_{31} x_x + A_{32} y_y + A_{33} z_z + A_{34} y_z + A_{35} z_x + A_{36} x_y \\
Y_z = A_{41} x_x + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z_x = A_{51} x_x + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_y = A_{61} x_x + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Es sind hier die 6 Componenten von 36 Argumenten abhängig dargestellt – es reduziren sich diese auf 15, indem gezeigt werden kann dass die As deren Indices nur durch die Reihenfolge derselben Zahlen verschieden sind – gleiche Werthe haben. –

§15. – Vereinfachung dieser Ausdrücke durch den Beweis dass $A_{ab} = A_{ba}$. –

Wir denken uns ein unendl. kleines rechtwinkliges

Parallelepiped dessen Eckpunkt die Coordinaten x, y, z hat, und dessen Kanten $dx\, dy\, dz$ sind. – Die Verrückungen dieses Punktes seien nach der Formänderung die unendl. kleinen Grössen u, v, w – die eines andern ~~Eck-punktes~~ entgegengesetzten Eckpunktes sind dann $u+\delta u$, $v+\delta v$, $w+\delta w$. – Wir suchen nun das virtuelle Moment ~~für diese unendlich~~ der Druckkräfte für diese unendlich kleine Verschiebung der Formänderung – also das Moment der Kräfte welche es bewirken, dass u, v, w wird $u+\delta u$, $v+\delta v$, $w+\delta w$. – Es wirken auf die 6 Flächen des Parallelepipeds 18 Druckcomponenten – darunter je zwei entgegengesetzt. – In nächststehender Tabelle sind in der Ersten Reihe die Kräfte angeführt die auf die vordere Fläche wirken – in der zweiten die diesen Kräften entsprechenden Verrückungen – in der dritten die Kräfte die auf die entgegengesetzte Fläche wirken – und in der vierten die diesen entsprechenden Verrückungen. –

Auf die $dy\,dz$ Fläche wirkt:

$$dy\,dz\,X_x \quad , \quad \delta u \quad \Big| \; - dy\,dz\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right) \quad , \quad \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x}dx$$

$$dy\,dz\,Y_x \quad , \quad \delta v \quad \Big| \; - dy\,dz\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right) \quad , \quad \delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial x}dx$$

$$dy\,dz\,Z_x \quad , \quad \delta w \quad \Big| \; - dy\,dz\left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x}dx\right) \quad , \quad \delta w + \frac{\partial \delta w}{\partial x}dx$$

Auf die $dz\,dx$ Ebene wirken:

$$\begin{array}{lll|ll}
dz\,dx\,X_y & , & \delta u & -dz\,dx\left(X_y+\frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right) & ,\ \delta u+\frac{\partial\delta u}{\partial y}dy \\
dz\,dx\,Y_y & , & \delta v & -dz\,dx\left(Y_y+\frac{\partial Y_y}{\partial y}dy\right) & ,\ \delta v+\frac{\partial\delta v}{\partial y}dy \\
dz\,dx\,Z_y & , & \delta w & -dz\,dx\left(Z_y+\frac{\partial Z_y}{\partial y}dy\right) & ,\ \delta w+\frac{\partial\delta w}{\partial y}dy
\end{array}$$

Auf die $dx\,dy$ Ebene und entgegengesetzt wirken:

$$\begin{array}{lll|ll}
dx\,dy\,X_z & , & \delta u & -dx\,dy\left(X_z+\frac{\partial X_z}{\partial z}dz\right) & ,\ \delta u+\frac{\partial\delta u}{\partial z}dz \\
dx\,dy\,Y_z & , & \delta v & -dx\,dy\left(Y_z+\frac{\partial Y_z}{\partial z}dz\right) & ,\ \delta v+\frac{\partial\delta v}{\partial z}dz \\
dx\,dy\,Z_z & , & \delta w & -dx\,dy\left(Z_z+\frac{\partial Z_z}{\partial z}dz\right) & ,\ \delta w+\frac{\partial\delta w}{\partial z}dz
\end{array}$$

Aus diesen Grössen können wir das Gesammtmoment der formändernden Kräfte bilden indem wir jede Kraft – mit der Verrückung der Fläche auf der sie wirkt – multipliciren und dann all diese Glieder addiren – wir erhalten so einen Ausdruck, welcher nach Fortlassung der unendl. kleinen Glieder höherer Ordnung – und durch zweckmässige Anordnung – folgende Form erhält:

$$\begin{aligned}
\text{Moment} = -dx\,dy\,dz\Big\{ & X_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial\delta v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial\delta w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial\delta v}{\partial z}+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)+ \\
& +Z_x\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right)+X_y\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)+ \\
& +\rho\left(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{2}$$

Bei der Bildung dieses Ausdruckes wurde auch die Gleichung I des ersten Abschnittes benützt.

Es ist die Änderung welche $\frac{du}{dx}$ erleidet indem aus u wird $u+\delta u$

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u+\delta u)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

also:

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\delta u}{\partial x}$$

Ähnlich ist auch:

$$\delta\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\delta v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \delta\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial\delta w}{\partial x} \qquad \text{etc}$$

Infolge dessen wird der Ausdruck (2):

$$\text{Moment} = -dx\,dy\,dz\Big\{X_x\,\delta\frac{du}{dx} + Y_y\,\delta\frac{dv}{dy} + Z_z\,\delta\frac{dw}{dz} + Y_z\,\delta\Big(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\Big) + Z_x\,\delta\Big(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\Big) + X_y\,\delta\Big(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\Big) + \varrho\,(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\Big\}$$

Der Vereinfachung wegen setzen wir die Druckkräfte X, Y, Z gleich 0 und benützen die Bezeichnungen an Seite (36), — dann folgt:

$$\text{Moment} = -dx\,dy\,dz\Big\{X_x\delta x_x + Y_y\delta y_y + Z_z\delta z_z + Y_z\delta y_z + Z_x\delta z_x + X_y\delta x_y\Big\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Betrachte ich die Variation δ als Differentiationszeichen, dann wird dieser Ausdruck ein vollständiges Differential — ich kann ihn also auch als einen Ausdruck der Arbeit betrachten welche geleistet werden muss, um diese unendl. kleine Veränderung der Formänderung hervorzubringen. —
Verändern wir nämlich x_x, y_y etc., so dass wir

schliesslich zu den Anfangswerthen zurückkehren, dann muss die geleistete Arbeit gleich 0 sein – das heisst es muss das ~~Integr~~ Ausdruck 3 (wenn wir darin δ mit d vertauschen) für geschlossene Grenzen verschwinden

$$(4) \ldots\ldots \int (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y) = 0$$

dies ist nur möglich wenn (3) ein vollständiges Integral ist, also wenn:

$$\frac{\partial X_x}{\partial y_y} = \frac{\partial Y_y}{\partial x_x}$$

$$\frac{\partial X_x}{\partial z_z} = \frac{\partial Z_z}{\partial x_x}$$

$$\frac{\partial Y_y}{\partial z_z} = \frac{\partial Z_z}{\partial y_y}$$

etc.

Diese Werthe nach (1) wirklich gebildet drücken aus:

$$A_{12} = A_{21}\ ,\quad A_{13} = A_{31}\ ,\quad A_{23} = A_{32}\quad \text{etc.}$$

Also die A-s die sich nur durch Reihenfolge der Zahlen ihrer Indices unterscheiden sind gleich. –

§16. Umwandlung der Gleichungen durch $A_{ab} = A_{ba}$. – Wir wollen nun die Function betrachten deren vollständiges Differential darstellt der Ausdruck

(3) ist — wir bezeichnen diese mit F, sie ist offenbar die Arbeit welche erfordert wird um die Formänderung des Parallelepipeds zu bewirken. Bilden wir mit Hilfe der Beziehungen zwischen denn A-s ferner mit Hilfe von (1) die Gleichung (3), ~~differentiren~~ integriren wir sie im Gedanken — dann sehen wir ein, dass wir zu einer homogenen Functiones zweiten Grades kommen müssen — es ist diese:

$$
\begin{aligned}
-F = \frac{1}{2}\Big\{ & A_{11} x_x^2 + 2A_{12} x_x y_y + 2A_{13} x_x z_z + 2A_{14} x_x y_z + 2A_{15} x_x z_x + 2A_{16} x_x x_y + \\
& + A_{22} y_y^2 + 2A_{23} y_y z_z + \cdots \\
& + A_{33} y_y^2 + 2A_{34} y_y y_z + \cdots \\
(4) \ldots \quad & + A_{44} y_z^2 + \cdots \\
& + A_{55} z_x^2 + \cdots \\
& + A_{66} x_y^2
\end{aligned}
$$

Nach der Definition der Function F ist nun:

$$
\left.
\begin{aligned}
-\frac{\partial F}{\partial x_x} &= X_x & \qquad -\frac{\partial F}{\partial y_z} &= Y_z \\
-\frac{\partial F}{\partial y_y} &= Y_y & \qquad -\frac{\partial F}{\partial z_x} &= Z_x \\
-\frac{\partial F}{\partial z_z} &= Z_z & \qquad -\frac{\partial F}{\partial x_y} &= X_y
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

Jetzt soll wieder der allgemeine Fall eintreten bei dem die äusseren Kräfte X, Y, Z von 0 verschieden sind — mit Hülfe der Werthe (5) bilden wir nun die Grundgleichungen für krystallinische Mittel — indem wir (5) in (I) des vorigen Abschnittes einsetzen — es wird dann:

$$(6)\quad (III)\left\{\begin{aligned} \varrho X + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x_z}\right) = 0 \\ \varrho Y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y_z}\right) = 0 \\ \varrho Z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z_z}\right) = 0 \end{aligned}\right.$$

Zu dem Falle der Bewegung gehen wir über indem wir setzen

für X $\qquad X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

für Y $\qquad Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

für Z $\qquad Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

In den folgenden Kapiteln werden wir Anwendungen betrachten, bei welchen $X = Y = Z = 0$; dann sind die Gleichungen der Bewegung:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x_z}\right) \\ \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y_z}\right) \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z_z}\right) \end{aligned}$$

II Kapitel. –
Fortplanzung einer ebenen Welle in Krystallinischen Mitteln. –

§17.

Der Körper sei unbegrenzt – dadurch machen wir uns von den Grenzbedingungen unabhängig. Es sei die Richtung der Wellenebene durch die Gleichung gegeben:

$$mx + ny + pz = s$$

wo dann m, n, p die Cosinusse der Winkel bezeichnen, welche die Wellennormale, mit den Coordinatenaxen bildet. – Es sind dann u v w nicht allein von t sondern auch von s abhängig – ~~die~~ es müssen die Verrückung mit den Coord. Axen Winkel bilden welche einem constanten Werthe von s entsprechen. – Die Verrückung eines Punktes der durch s bestimmten Wellenebene sei zur Zeit t gleich σ; und die Cosinusse der Winkel welche die Richtung derselben mit den Coordinaten Axen bildet α, β, γ – es ist dann:

$$u = \alpha\sigma$$

$$v = \beta\sigma$$

$$w = \gamma\sigma$$

Zwischen den Winkeln haben wir die Relationen:

$$m^2+n^2+p^2=1$$

$$u^2+v^2+w^2=1$$

Wir werden im folgenden sehen, dass $\alpha, \beta,$ und γ unabhängig von der Zeit sind; dass also die Wellen ~~überall und immer dieselbe~~ ihre angenommenen Richtung beibehalten ~~haben~~. —
Mit Benützung angegebener Werthe, folgt:

$$X_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\alpha\frac{\partial\sigma}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\alpha m\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

(8) Ähnlich

$$Y_y=\beta n\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

$$Z_z=\gamma p\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

$$Y_z=(\beta p+\gamma n)\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

$$Z_x=(\gamma m+\alpha p)\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

$$X_y=(\alpha n+\beta m)\frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

Bezeichnen wir diese Variabeln, wenn man in ihren Ausdrücken $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ nicht in Betracht zieht, mit $\overline{X_x}$, $\overline{Y_y}$ ... etc; und mit $\frac{\partial\overline{F}}{\partial x_x}$ ... etc den Werth von $\frac{\partial F}{\partial x_x}$ wenn darin für x_x ... etc — gesetzt wird

$$\overline{X_x}=\alpha m \qquad \overline{Y_y}=\beta n \qquad \overline{Z_z}=\gamma p$$

$$\overline{Y_z}=\beta p+\gamma n \qquad \overline{Z_x}=\gamma m+\alpha p \qquad \overline{X_y}=\alpha n+\beta m$$

dann folgen die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_y} = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_z} = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_z}$$

Mit diesen Werthen wollen wir (7, bilden:
In folge der Gleichungen (8, wird

$$\frac{\partial \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s}}{\partial x} = m \frac{\partial \sigma^2}{\partial s^2} \quad \dots \quad etc$$

und
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

Also ist:

$$\rho \alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \left\{ m \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x} + n \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_y} + p \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_z} \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial s^2}$$

So noch 2 Ausdrücke. –
Es können diese vereinfacht werden, es ist ja

$$\cancel{\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}} = \cancel{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x}} + \cancel{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x} \cdot \frac{\partial \overline{x_x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_y} \cdot \frac{\partial \overline{x_y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_z} \cdot \frac{\partial \overline{x_z}}{\partial \alpha}$$

So noch 2 Ausdrücke von $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma}$ – die Herleitung derselben erhellt aus den Werthen von x_x, y_y etc welche dem $\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x}$ entsprechen. – Es werden diese Ausdrücke schliesslich von der Form:

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_x} \cdot m + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_y} \cdot n + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_z} \cdot p.$$

. . . .

Also die Ausdrücke (7):

(9)
$$\varrho\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}$$
$$\varrho\beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}$$
$$\varrho\gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} : \frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta} : \frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma} = \alpha : \beta : \gamma$$

oder auch:

(10)
$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} = \lambda\alpha$$
$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta} = \lambda\beta$$
$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma} = \lambda\gamma$$

Um $\alpha\ \beta\ \gamma$ und λ zu bestimmen haben wir noch die Hülfsgleichung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

dann ist:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{\varrho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}$$

$\sigma = f(t - \frac{s}{v})$

$\frac{d\sigma}{dt} = f'(\ )$

$\frac{d\sigma}{ds} = -f'(\ )\frac{1}{v}$

$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = f''(\ )\frac{1}{v^2}$

Wo dann $\sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bezeichnet. –

Es ist $\overline{\overline{F}}$ eine homogene Function zweiten Grades der Argumente x_x, y_y, z_z etc — ebenso wie $\overline{F}$ eine homogene Function zweiten Grades der Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$ sein. —

~~Ist~~ Bilden wir

$$2\overline{F} = \frac{\varrho}{r^2}$$

~~Ist~~ wo $\overline{F}$ die besprochene Bedeutung hat — und r den Radius vector bezeichnet — dann haben wir die Gleichung einer Oberfläche 2ten Grades. — Suchen wir die Hauptaxen dieser Fläche auf dann kommen wir zu den Gleichungen (9) und (10). — Es müssen also 3 Lösungen der ~~Gle~~ ~~sogenannten~~ genannten Gleichungen möglich sein, welche dann 3 Tripel von Werthen der Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$ geben, die der Gleichung (8) genügen können. — Für jede gegebene Richtung der Wellen normale $\underline{S}$ giebt es also drei Wellen, die sich durch die aufeinander senkrechten Richtungen ihrer Verrückungen unterscheiden — (~~zwei der Wellen sind transversal, die eine longitudinal~~?)

Es ist nun:

$$\Lambda = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}\cdot\alpha + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta}\cdot\beta + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma}\cdot\gamma = 2\overline{F} = \frac{\varrho}{r^2}$$

also

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\varrho}}$$

Die Fläche deren Gleichung $2\overline{F} = \frac{\varrho}{r^2}$ ist, nennen wir die Wellenfläche des krystallinischen Mittels – ~~dann~~ – und nehmen an dass eine der Wellen sich in der Richtung der eine Axe derselben fortpflanzt – dann thun dies auch dies auch die zwei andern bezüglich der zwei andern Axen. –

$\sqrt{\frac{a}{\varrho}}$ bezeichneten wir schon als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle – nun sehen wir dass diese gleich ist dem reciproken Halbaxe der Wellenfläche – in deren Richtung die Verschiebung geschieht. –

III Kapitel. –

Fortpflanzung einer Lichtwelle in krystallinischen Mitteln. –

§ 18. Vereinfachung des Ausdruckes F durch die Annahme dass eine der 3 Wellen eine longitudinale ist. –

Um die Lichterscheinungen in krystallinischen Mitteln erklären zu können, nehmen wir an es wäre der Aether in denselben krystallinisch. – und ~~von solcher Natur~~ incompressibel. – Da nun alle Erscheinungen in Krystallen nur zwei mögliche Lichtwellen kund geben – so sind wir weiter genöthigt anzunehmen, dass bei Fortpflanzung von Wellen in Krystallen, die eine ~~derselben~~ der drei Wellen eine longitudinale sein muss — diese longitudinale Welle verschwindet dann in Bezug auf das Licht wegen der Incompressibilität des Aethers. — Die zwei Wellen die sich fortpflanzen, die Lichtschwingungen hervorbringen sind transversale. ~~Dient~~ Der Aether kann nach diesen Annahmen sein Volum nicht ändern — Also müssen die Ausdehnungen eines Aethertheilchens in 3 aufeinander senkrechten Richtungen gleich 0 sein — so folgt aus der Gleichung (24) des ersten Abschnittes

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$$

da $\frac{\partial u}{\partial x}=x_x$, $\frac{\partial v}{\partial y}=y_y$ und $\frac{\partial w}{\partial z}=z_z$

so ist:

$$x_x+y_y+z_z=0$$

Also nach ~~der voraus~~ d. Werthen die in §17 Seite 64 enthalten sind:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s}(\alpha m+\beta n+\gamma p)=0$$

Wenn also der Aether incompressible dann muss

$$\alpha m+\beta n+\gamma p=0 \qquad \text{. . . . . . . (11)}$$

sein. — Es bezeichnen hier α, β, γ die Cosinuse welche die Richtung der Verrückung — m n p

die Cosinus der Winkel, welche die Wellen-
normale mit den Coordinatenaxen bildet –
diese Gleichung sagt nur aus – dass die Rich-
tung der Verrückung senkrecht ist auf die
die Wellennormale. – Dies ist eben der Fall
transversaler Schwingungen. –
Unsere Aufgabe ist, nun, die 21 Constanten
im Ausdrucke von F so zu bestimmen, dass der
Gleichung (11) genügt wird. =
Eine der drei Wellen muss eine longitudinale
sein – dass ist es muss die von ihr her-
vorgebrachte Verrückung in der Wellennor-
male selbst liegen. – Es ist ~~nun~~ in diesem
Falle

$$\alpha = m$$
$$\beta = n$$
$$\gamma = p$$

Wir bezeichneten im voran dem besprochenen
Kapitel mit $\bar{F}$ die Function F wenn in ihr
X_x, Y_y, etc die Werthe αm, βn ... etc annehmen;
wir ~~haben~~ führen nun $(\bar{F})$ als Zeichen derselben
Function F wenn in ihr ~~für~~ $\alpha = m$, $\beta = n$, $\gamma = p$ ge-
setzt wird. – Die Argumente dieser Function sind
dann: m^2, n^2, p^2, $2np$, $2mp$, $2nm$
hiernach werden die Gleichungen (9)

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}\right) = \lambda m$$

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta}\right) = \lambda n \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma}\right) = \lambda p$$

Es ist:

$$\frac{\partial(\overline{F})}{\partial m} = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial m}\right)$$

Es ist $(\overline{F})$ in Bezug auf α, β, γ, und m, n, p symmetrisch – es können also diese 6 Argumente vertauscht werden, so ~~gehet~~ wird durch Vertauschung α-s mit m

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial m}\right)$$

Hiernach ist:

$$\frac{\partial(\overline{F})}{\partial m} = 2\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha}\right)$$

Ähnlich ergeben sich noch die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial(\overline{F})}{\partial n} = 2\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial(\overline{F})}{\partial p} = 2\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma}\right)$$

Diese Werthe in (12) gesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\overline{F})}{\partial m} = 2\lambda m \\ \dfrac{\partial(\overline{F})}{\partial n} = 2\lambda n \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\frac{\partial(\overline{F})}{\partial p} = 2\Delta p$$

Wir sahen dass $\Delta = 2\overline{F}$, also ist Δ eine homogene Function 2ten Grades von m, n, p (die wir uns statt $\alpha\, \beta\, \gamma$ darin gesetzt zu denken haben) und folglich $(\overline{F})$ eine homogene Function 4ten Grades derselben Argumente. –

Die Differentiation der zwei ersten der Gleichungen (13) zeigt dass:

$$\frac{\partial(\Delta m)}{\partial n} = \frac{\partial(\Delta n)}{\partial m}$$

dass also:

$$m\frac{\partial \Delta}{\partial n} = n\frac{\partial \Delta}{\partial m}$$

oder dass:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial m} : \frac{\partial \Delta}{\partial n} = m : n$$

Durch ähnliches Verfahren mit den Gleichungen 2 u 3 dann 3 und 1 der Gruppe (13) erfolgen noch ~~folgende~~ zwei Proportionen; diese zusammengefasst:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial m} : \frac{\partial \Delta}{\partial n} : \frac{\partial \Delta}{\partial p} = m : n : p$$

oder auch:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial m} = 4Km$$

(14) . . . . . . $$\frac{\partial \Delta}{\partial n} = 4Kn$$

(17)

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p} = 4Kp$$

Das K eine Constante, ist auch daraus ersichtlich, dass die linken theile dieser Ausdrücke linear sind, hiernach müssen es auch die rechten sein – folglich K constante. – Es ist die Summe der Gleichungen (14) ein vollständiges Differential Quotient – durch Integration dieser, ergiebt sich also:

$$\Delta = 2K(m^2+n^2+p^2) \quad \ldots\ldots (15)$$

da nun $\Delta = 2(\overline{F})$ also:

$$(\overline{F}) = K(m^2+n^2+p^2)^2 \quad (16)$$

Wie bereits bemerkt ist $\overline{F}$ der Werth der Function F für eine longitudinale Welle +) – ~~im Falle der Lichtbewegung, wo wir der Gleichung (11) zu genügen haben ist~~

~~$(\overline{F}) = 0$~~

~~denn wir müssen $m^2=0$ $n^2=0$ $p^2=0$ setzen. –~~

~~Wie Es erfolgt nach der Definition $(\overline{F})$ auch aus~~

~~Diese~~ Gleichung (17), geht wenn man darin statt $x_x, y_y \ldots$ … etc ~~setzt~~ m^2, n^2, p^2 etc. setzt in 16 über. Also muss der ~~Summe~~ Ausdruck der mit a behafteten Glieder = 0 sein es kann so ein Ausdruck gebildet werden – welcher gleich 0 ist – und sich in der Form einer homogenen Function 4ten Grades von m n p darstellt – die Coefficienten der ~~ei~~ verschie-

+) Durch Einführung der Constante $a_{11}, a_{12} \ldots$ etc kann die Gl. (17) auf folgende Form gebracht werden:

$$F = K(x_x+y_y+z_z)^2 + a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_x y_y + 2a_{13}x_x z_z + 2a_{14}x_x y_z + 2a_{15}x_x z_x + 2a_{16}x_x x_y + a_{22}y_y^2 + \ldots$$

denen Potenzen von $m\,n\,p$ müssen hier einzeln gleich 0 sein. — Wir erhalten dann da: $\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} = 15$ G verschiedne Glieder in der Function enthalten sind; zwischen den 21 ~~Argon~~ Coefficienten 15 Gleichungen — diese sind:

	$a_{11} = 0$	Coefficient von	m^4
	$a_{15} = 0$	"	m^3p
	$a_{16} = 0$	"	m^3n
	$a_{22} = 0$	"	n^4
	$a_{24} = 0$	"	m^3p
	$a_{26} = 0$	"	m^3n
	$a_{33} = 0$	"	p^4
(18)	$a_{34} = 0$	"	p^3n
	$a_{35} = 0$	"	p^3m
	$4a_{44} + 2a_{23} = 0$	"	n^2p^2
	$4a_{55} + 2a_{31} = 0$	"	m^2p^2
	$4a_{66} + 2a_{12} = 0$	"	m^2n^2
	$8a_{56} + 4a_{14} = 0$	"	m^2np
	$8a_{64} + 4a_{25} = 0$	"	n^2pm
	$8a_{45} + 4a_{36} = 0$	"	p^2mn

Es können also die a-s deren Werthe von 0 verschieden sind, durch 6 von einander unabhängige Constanten ausgedrückt werden — es sind diese:

$$\cancel{4A_{44}}\quad 4a_{44} = A$$
$$4a_{55} = B$$
$$4a_{66} = C$$
$$4a_{56} = -D$$
$$4a_{64} = -E$$
$$4a_{45} = -G$$

Hierdurch wird der Ausdruck (17) :

$$F = K(x_x + y_y + z_z)^2 + A\left(-y_y z_z + \tfrac{1}{4} y_z^2\right) + B\left(-z_z x_x + \tfrac{1}{4} z_x^2\right) +$$
$$+ C\left(-x_x y_y + \tfrac{1}{4} x_y^2\right) + 2D\left(-\frac{y_x z_x}{4} + \frac{x_x y_z}{2}\right) + 2E\left(-\frac{z_y x_y}{4} + \frac{y_y z_x}{2}\right)$$
$$+ 2G\left(-\frac{x_z y_z}{4} + \frac{z_z x_y}{2}\right) \quad \ldots (19)$$

Dies ist der Ausdruck welcher im Falle das eine Welle longitudinal ist gültig ist — welcher also bei der Fortpflanzung der Lichtwellen die Grundlage der Theorie bildet. —

§19. Vereinfachung der Ausdrücke durch passende Wahl des Coordinatensystem's. —

Die 7 Coefficienten des Ausdruckes (19) sind Functionen von x, y, z, wir legen uns also die Frage auf, wie verhält sich diese Function F in Bezug auf ein anderes Coordinatensystem dessen Coordin. x', y', z' sind. — Die cosinuse der Winkel, welche die Axen dieses

Systemes mit den x, y, z bildet bezeichnen wir:

$$\cos x'x = m_1 \qquad \cos y'x = m_2$$
$$\cos x'y = n_1 \qquad \cos y'y = n_2$$
$$\cos x'z = p_1 \qquad \cos y'z = p_2$$
$$\cos z'x = m_3$$
$$\cos z'y = n_3$$
$$\cos z'z = p_3$$

Die Verrückungen u, v, w bezogen auf das neue System sollen u' v' w'; und ganz ähnlich die Grössen K^x, A^x, B^x .... etc und x_x, y_y ... etc bezogen auf dies System K', A', B' ... etc und x'_x, y'_y ... etc bezeichnen. – Wir können dann unter F' die Function F verstehen, wenn darin die genannten Gestrichenen Grössen eingesetzt werden. –

Es ist F, wie bereits definirt wurde, die Arbeit welche erfordert wird, um die Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipeds zu bewirken – diese Arbeit ist in beiden Coordinatensystemen gleich – sie ist ja gar nicht von diesem abhängig – also folgt.

(20) ..... $$F = F'$$

hierzu kommt noch eine Gleichung:

(21) $$(x_x + y_y + z_z)^2 = (x'_x + y'_y + z'_z)^2$$

Es bedeutet ja $x^x + y_y + z_z$ die räumliche Contraction des Parallelepipeds – und diese muss offenbar auch von dem Coord. Systeme unabhängig sein. –

Wir sind nun genöthigt Betrachtungen anzustellen die der Anal. Geometrie angehören –

Die Coordinaten eines Punktes bezogen auf zwei rechtwinkelige Systeme, mit demselben Anfangspunkte seien ξ, η, ζ und $\xi' \eta' \zeta'$

Sind dann $m, n, p \ldots$ etc. die Cosinus der Winkel welche ~~jede~~ die zwei Axensysteme ~~mit~~ bilden – dann bestehen die Transformationsformeln

$$\xi = m_1 \xi' + m_2 \eta' + m_3 \zeta'$$
$$\eta = n_1 \xi' + n_2 \eta' + n_3 \zeta'$$
$$\zeta = p_1 \xi' + p_2 \eta' + p_3 \zeta'$$

Mit dem Anfangspunkte der Coordinatensysteme soll auch der Mittelpunkt eines Ellypsoides zusammenfallen. – Die Gleichung desselben im ersten Systeme ist:

$$a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta = 1 \quad \ldots\ldots (22)$$

die Gleichung desselben Ellypsoides im 2ten Systeme.

$$a'_{11}\xi'^2 + a'_{22}\eta'^2 + a'_{33}\zeta'^2 + 2a'_{23}\eta'\zeta' + 2a'_{31}\zeta'\xi' + 2a'_{12}\xi'\eta' = 1 \quad \ldots\ldots (23)$$

Setzt man nun in die erste Gleichung des Ellypsoides die durch die Transformationsformeln gegebenen Werthe von $\xi\ \eta\ \zeta$, so erhält eine mit der zweiten Gleichung des Ellypsoides identische Gleichung – es müssen in dieser gleiche Potenzen von $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ auch gleiche Coefficienten haben – wir erhalten die im folgenden sehr nützlichen Gleichungen:

$$\underline{\underline{a'_{11}}} = a_{11} m_1^2 + a_{22} n_1^2 + a_{33} p_1^2 + 2a_{23} n_1 p_1 + 2a_{31} p_1 m_1 + 2a_{12} m_1 n_1$$

$$\underline{\underline{a'_{22}}} = a_{11} m_2^2 + a_{22} n_2^2 + a_{33} p_2^2 + 2a_{23} n_2 p_2 + 2a_{31} p_2 m_2 + 2a_{12} m_2 n_2$$

$$\underline{\underline{a'_{33}}} = a_{11} m_3^2 + a_{22} n_3^2 + a_{33} p_3^2 + 2a_{23} n_3 p_3 + 2a_{31} p_3 m_3 + 2a_{12} m_3 n_3$$

$[a'a]$ ..... $$\underline{\underline{a'_{23}}} = a_{11} m_2 m_3 + a_{22} n_2 n_3 + a_{33} p_2 p_3 + \cancel{2}a_{23}(n_2 p_3 + n_3 p_2) + \\ + a_{31}(p_2 m_3 + p_3 m_2) + a_{12}(m_2 n_3 + m_3 n_2)$$

$$\underline{\underline{a'_{31}}} = a_{11} m_3 m_1 + a_{22} n_3 n_1 + a_{33} p_3 p_1 + a_{23}(n_3 p_1 + p_3 n_1) + \\ + a_{31}(p_3 m_1 + m_3 p_1) + a_{12}(m_3 n_1 + n_3 m_1)$$

$$\underline{\underline{a'_{12}}} = a_{11} m_1 m_2 + a_{22} n_1 n_2 + a_{33} p_1 p_2 + a_{23}(n_1 p_2 + n_2 p_1) + \\ + a_{31}(p_1 m_2 + p_2 m_1) + a_{12}(m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

Setzen wir aber in die zweite Gleichung des Ellypsoides die ganz ähnlichen Transformationswerthe von $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ ausgedrückt durch $\xi\ \eta\ \zeta$ – dann erhalten wir eine mit der ersten Gleichung identische Gleichung; hieraus folgt ein zweites ganz ähnliches System von Gleichungen – in welchen die ungestrichenen a – durch die gestrichenen dargestellt sind – wie be-diese mit [aa'] . – Es ergeben sich diese auch aus [a'a], indem man im Complex:

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$$

jedes Element einer horizontalen Reihe A^{λ}_{κ} mit A^{κ}_{λ} vertauscht – (z.B. für m_2 setzt n_1) (wobei man die L in der Diagonale ungeändert zu lassen hat) und dann die gestrichenen Grössen mit den ungestrichenen vertauscht. ~~Bezeichnet~~ Bedeutet $H=1$ die Gleichung des Ellypsoides in ihrer ersten Form – dann ergeben sich ihre Axen aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi} = \lambda \xi$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \eta} = \lambda \eta$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \lambda \zeta$$

Oder für H den Ausdruck gesetzt und differenziert.

$$(a_{11}-\lambda)\xi + a_{12}\eta + a_{31}\zeta = 0$$

$$a_{12}\xi + (a_{22}-\lambda)\eta + a_{23}\zeta = 0$$

$$a_{31}\xi + a_{23}\eta + (a_{33}-\lambda)\zeta = 0$$

Die Determinante in Bezug auf λ vom dritten Grade – heraus folgen die drei ~~drei~~ Werthe $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ deren reciproke Quadrate die Halbaxen sind. –

Die erwähnte Determinante ist:

$$\Delta = 0 = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - (a_{11}-\lambda)a_{23}^2 - (a_{22}-\lambda)a_{31}^2 - (a_{33}-\lambda)a_{12}^2 + 2a_{23}a_{31}a_{12}$$

Zwischen den Grössen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ besteht die Relation

$$0 = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

Es ist dies eine mit Δ identische Gleichung – in Folge dessen müssen die Coefficienten gleicher Potenzen in beiden gleich sein – folglich nun:

[a, a']

$$(24)\quad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}-a_{12}^2-a_{23}^2-a_{31}^2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2+2a_{31}a_{23}a_{12} = \Delta_0 \end{cases}$$

Ein ähnliches System von Gleichungen, jedoch mit gestrichenen Grössen folgt auch aus der Gleichung des Ellypsoides, bezogen auf das System $\xi' \eta' \zeta'$ – da nun $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ unabhängig sind von der Wahl des Coordinatensystemes so können zwischen den gestrichenen und ungestrichenen a-s noch einige Relationen aufgestellt werden – die aber schon in [aa'] und [a'a] inbegriffen sind. – (?)

~~Hierpaus~~ Diese Resultate wollen wir auf unsere Theorie anwenden. – Wir fanden im I Abschnitte, die

Gleichung der Contractionsfläche (22):

$$x_x\xi^2 + y_y\eta^2 + z_z\zeta^2 + y_z\eta\zeta + z_x\zeta\xi + x_y\xi\eta = 1$$

dieselbe Gleichung bezogen auf ein anderes System ist:

$$x'_x\xi'^2 + y'_y\eta'^2 + z'_z\zeta'^2 + y'_z\eta'\zeta' + z'_x\zeta'\xi' + x'_y\xi'\eta' = 1$$

Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit (22) und (23) – dann ersehen wir – dass dieselben Beziehungen [a'a] und [aa'] welche zwischen den gestrichenen und ungestrichenen a-s bestehen – auch bestehen müssen zwischen

$$x_x,\ y_y,\ z_z,\ \frac{y_z}{2},\ \frac{z_x}{2},\ \frac{x_y}{2}$$

und

$$x'_x + y'_y + z'_z + \frac{y'_z}{2} + \frac{z'_x}{2} + \frac{x'_y}{2}$$

Eine ähnliche Betrachtung der Druckfläche (I Abschnitt Gl. (12)) zeigt dass die Relationen [aa'], [a'a] auch ~~bestehen~~ statt finden zwischen:

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Z_x,\ Y_z,\ X_y$$

und

$$X'_x,\ Y'_y,\ Z'_z,\ Z'_x,\ Y'_z,\ X'_y$$

Die Benützung dieser Relationen zur Vereinfachung des Ausdruckes (19) wäre noch mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden – deshalb kehren wir zu den geometrischen Betrachtungen zurück.–

Wir setzen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi_1$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \eta} = \eta_1$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \zeta_1$$

Und betrachten ξ_1, η_1, ζ_1 als Coordinaten anderen eines variabeln Punktes bezogen auf das System der $\xi\ \eta\ \zeta$ ~~bezogen auf das System der ξ, η, ζ~~ D. es liegt dieser Punkt auf einem 2ten Ellypsoide, dessen Gleichung wir nun aufstellen wollen.-

Es ist dann:

$$\xi_1 = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta$$

$$\eta_1 = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta$$

$$\zeta_1 = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta$$

Die Gleichung des Ellypsoides ist nun

$$H = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{\partial H}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial H}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right)$$

oder

$$H = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 1$$

Die Auflösungen der Gleichungen für ξ_1 etc sind folgende:

$$\xi = b_{11}\xi_1 + b_{12}\eta_1 + b_{13}\zeta_1$$

$$\eta = b_{21}\xi_1 + b_{22}\eta_1 + b_{23}\zeta_1$$

$$\zeta = b_{31}\xi_1 + b_{32}\eta_1 + b_{33}\zeta_1$$

und in Folge dieser die Gleichung des gesuchten Ellypsoides:

$$b_{11}\xi^2 + b_{22}\eta^2 + b_{33}\zeta^2 + 2b_{12}\xi\eta + 2b_{23}\eta\zeta + 2b_{31}\zeta\xi = 1$$

worin wenn man setzt

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

die Grössen $\underline{b}$ folgende Werthe annehmen:-

$$b_{11} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta_0} \qquad b_{22} = \frac{a_{33}a_{11} - a_{31}^2}{\Delta_0}$$

$$b_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta_0} \qquad b_{23} = b_{32} = \frac{a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23}}{\Delta_0}$$

$$b_{31} = b_{13} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31}}{\Delta_0} \qquad b_{12} = b_{21} = \frac{a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12}}{\Delta_0}$$

Die Hauptaxen des ersten Ellypsoides werden aus den Gleichungen gefunden:

$$\xi_1 = \lambda\xi \qquad \eta_1 = \lambda\eta \qquad \zeta_1 = \lambda\zeta$$

Die des zweiten aus den Gleichungen:

$$\xi = \mu\xi_1 \qquad \eta = \mu\eta_1 \qquad \zeta = \mu\zeta_1$$

$$\text{wo} \quad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

Hieraus folgt.

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta$$

und wir sehen; dass die Hauptaxen des zweiten Ellypsoides gleiche Richtung mit den Hauptaxen des ersten haben, und die reciproken Längen jener besitzen. — Die letzte der Gleichungen (24) giebt uns den Werth von Δ_0 ~~xa~~ und dieser ändert sich daher nicht wenn ~~da~~ man den Grössen a Striche beifügt

~~Also müssen die Gleichungen [aa'] und [a'a] auch bestehen zwischen~~: dadurch erhalten wir die Gleichung des zweiten Ellypsoides im gestrichenen System, und es müssen die Gleichungen [aa'] und [a'a] auch bestehen zwischen den gestrichenen und ungestrichenen b-s. – Hieraus bestehen sie auch zwischen:

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) \quad , (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad , (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23})$$

$$(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31}) \quad , (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12})$$

und den entsprechenden Grössen wenn darin gestrichene a-s vorkommen. –
Wenden wir dies auf die Contractionsfläche an, so sehen wir dass die durch [a'a] ausgedrückten Relationen auch bestehen müssen zwischen den Grössen

$$\left(Y_y Z_z - \frac{Y_z^2}{4}\right) \quad , \left(Z_z X_x - \frac{Z_x^2}{4}\right) \quad \ldots\ldots \left(\frac{Y_x Z_x}{4} - \frac{X_x Y_z}{2}\right)$$

und $$\left(Y'_y Z'_z - \frac{Y'^2_z}{4}\right) \quad , \left(Z'_z X'_x - \frac{Z'^2_x}{4}\right) \quad \ldots\ldots \left(\frac{Y'_x Z'_x}{4} - \frac{X'_x Y'_z}{2}\right)$$

Setzen wir nun alle diese gefundenen Werthe in die Gleichung (19) Seite 75 ein, so erhalten wir, da diese für alle Werthe der Argumente gilt, folgende Gl.:

$$K = K'$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}'m_1^2 + \mathcal{B}'m_2^2 + \mathcal{C}'m_3^2 + 2\mathcal{D}'m_2m_3 + 2\mathcal{E}'m_3m_1 + 2\mathcal{G}'m_1m_2 \\
\mathcal{B} &= \mathcal{A}'n_1^2 + \dots \\
\mathcal{C} &= \dots \\
\mathcal{D} &= \mathcal{A}'n_1p_1 + \mathcal{B}'n_2p_2 + \mathcal{C}'n_3p_3 + \mathcal{D}'(n_2p_3+n_3p_2) + \mathcal{E}'(n_3p_1+p_3n_1) \\
&\qquad + \mathcal{G}'(n_1p_2+n_2p_1) \\
\mathcal{E} &= \mathcal{A}'m_1p_1 + \dots \\
\mathcal{G} &= \mathcal{A}'m_1n_1 + \dots
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Diese Gleichungen sind genau von der Form der Auflösungen der Gleichungen [a'a]; also von der Form der zu bildenden [aa'] — und daraus folgt, dass das Ellypsoid dessen Gleichung im ersten Systeme ist:

$$\mathcal{A}\xi^2 + \mathcal{B}\eta^2 + \mathcal{C}\zeta^2 + 2\mathcal{D}\eta\zeta + 2\mathcal{E}\zeta\xi + 2\mathcal{G}\xi\eta = 1$$

unabhängig ist von der Wahl des Coordinatensystems — die Gleichung desselben im zweiten Systeme wäre:

$$\mathcal{A}'\xi'^2 + \mathcal{B}'\eta'^2 + \mathcal{C}'\zeta'^2 + \dots = 1$$

Die Wahl des Coord. Systems ist eine willkürliche — wählen wir als Coordinataxen die Hauptaxen dieses Ellypsoides — dann wird

$$\mathcal{D} = 0 \qquad \mathcal{E} = 0 \qquad \mathcal{G} = 0$$

Und wir erhalten (19) in folgender vereinfachter Form:

$$\mathcal{F} = K(x_x + y_y + z_z)^2 + \mathcal{A}\left(-y_y z_z + \frac{y_z^2}{4}\right) + \mathcal{B}\left(-z_z x_x + \frac{z_x^2}{4}\right) + \mathcal{C}\left(-x_x y_y + \frac{x_y^2}{4}\right) \quad \dots (26)$$

In den nun zu Betrachtenden Fällen der Lichtschwingungen haben wir den Aether als incompressibl angenommen. Hiernach wird x_x y_y z_z unendlich klein – aber K unendlich gross gegen A, B, C – und folglich vereinfacht sich der Ausdruck nicht. –

§20. – Die Richtung der Verrückung und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen. –

Wir bildeten aus F $\overline{F}$ indem wir die Argumente x_x, y_y, z_z ....etc – durch αm, βn und γn ersetzten – und kamen zur Gleichung

$$2\overline{F} = \frac{\varrho}{r^2}$$

Es ist dies die Gleichung eines Ellypsoides dessen Hauptaxen wir aufsuchen wollen – die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ergiebt sich dann durch den Ausdruck: $\sqrt{\frac{2\overline{F}}{\varrho}}$

In (26) statt x_x...etc αm etc. gesetzt

$$\overline{F} = K(\alpha m + \beta n + \gamma p)^2 + \frac{A}{4}(\beta p - \gamma n)^2 + \frac{B}{4}(\gamma m - \alpha p)^2 + \frac{C}{4}(\alpha n - \beta m)^2 \qquad (27)\ldots$$

Um das Problem der Hauptaxen zu lösen nimmt wir nun die Maxima und minimas derselben

druckes (27) auf zu suchen – wobei die Glei-
chung besteht

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

Für die longitudinale Welle besteht ferner

$$\alpha=m \quad \beta=n \quad \gamma=p$$

Und für die transversalen

$$\alpha m+\beta n+\gamma p=0$$

Uns interessiren hier nur die letzteren. –
In Folge dieser Bedingungsgleichungen wird das
erste Glied des Ausdruckes (27) gleich 0 – um
den Ausdruck weiter zu vereinfachen führen
wir neue Variabeln ein u. zwar

$$\alpha' = \beta p - \gamma n$$
$$\beta' = \gamma m - \alpha p$$
$$\gamma' = \alpha n - \beta m$$

hiernach – erhält F die Form:

$$F=\frac{A}{4}\alpha'^2+\frac{B}{4}\beta'^2+\frac{C}{4}\gamma'^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Zwischen den neu eingeführten Variabeln
bestehen auch die Bedingungsgleichungen –

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$$

und

$$m\alpha'+n\beta'+p\gamma'=0$$

Die Geom. Bedeutung dieser Gleichungen erklärt sich indem
man unter α' β' γ' die Cosinusse der Winkel
versteht – welche eine Gerade welche zu

Richtung der Verrückung so wie sie [illegible] Wellennormale senkrecht steht – mit den Coord. Axen bildet. – Wir haben nun die Maxima und Minima von 28 zu suchen, welche den angegebenen Bedingungsgleichungen entsprechen. – Sind $\alpha'\beta'\gamma'$ die Cosinuse der Winkel die ein Radius mit den Coord. Axen bildet – so stellt die Gleichung:

(29) $$4F = A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2 = \frac{M}{r'^2}$$

ein Ellypsoid dar – in derselben ist $\underline{M}$ eine noch zu bestimmende Constante. – Unsere Aufgabe ist nun Geometrisch gefasst – die Hauptaxen der Curve auf zu suchen in welcher die Wellenebene – dies Ellypsoid schneidet. – Wir haben ja die Maxim. und minima von (29) – unter der Bedingung dass

$$\alpha' m + \beta' n + \gamma' p = 0$$

dies ist aber die Gleichung der Wellenebene. – Es sei $M = 2\varrho$, wo ϱ die Dichtigkeit des Aethers bedeutet – also:

$$A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2 = \frac{2\varrho}{r'^2}$$

und die neuen Constanten eingeführt

$$\frac{A}{2\varrho} = a^2 \quad \frac{B}{2\varrho} = b^2 \quad \frac{C}{2\varrho} = c^2$$

Th. d. El. XXIII.

$$a^2\alpha_1^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2 = \frac{1}{r'^2}$$

Die Richtungen der Verrückungen der Lichtwellen sind die Hauptaxen des Schnittes dieser Fläche mit der Wellenebene — die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellen sind die reciproken Halbaxen dieses Schnittes — es ist dies aber so zu verstehen — dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen Welle die reciproke Grösse der Halbaxe ist in deren Richtung sich die andere verrückt. — Nimmt man an, dass die Schwingungsebene und Polarisationsebene zusammenfallen, so sind die Gleichungen die uns die gerichteten Hauptaxen geben — identisch mit den Fresnel'schen Gesetzen. — Es könnte dies ~~als ein Beweis~~ zur Entscheidung der so oft erörterten Frage führen — ob nämlich die Schwingungen wirklich in der Polarisationsebene geschehen?, wenn sich nicht die ~~unsere~~ Herleitung dieser Formeln auf die Hypothese stützte, dass Aether in Krystallen sich wie ein krystallinischer Körper verhält. —

Die Hauptaxen haben wir zu finden, mit Hülfe folgender Gleichungen

$$a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2 = \frac{1}{r'^2}$$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\alpha_1 m + \beta_1 n + \gamma_1 p = 0$$

Multiplizirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -\lambda, -2\mu$ und addirt sie, so folgt:

$$(a^2-\lambda)\alpha'^2 + (b^2-\lambda)\beta'^2 + (c^2-\lambda)\gamma'^2 - 2\mu m\alpha' - 2\mu n\beta' - \\ - 2\mu p\gamma' = \frac{1}{r'^2} - \lambda$$

Maxima und minima erhalten wir folglich aus den Gleichungen:

$$(a^2-\lambda)\alpha' = \mu . m$$

$$(b^2-\lambda)\beta' = \mu . n$$

$$(c^2-\lambda)\gamma' = \mu . p$$

Hieraus folgt die in λ quadratische Gleichung:

(30) ..... $$0 = \frac{m^2}{a^2-\lambda} + \frac{n^2}{b^2-\lambda} + \frac{p^2}{c^2-\lambda}$$

Hier ist $\lambda = v^2$, wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet, so dass die Quadratische Gleichung die Form annimmt

(31) ...... $$0 = \frac{m^2}{a^2-v^2} + \frac{n^2}{b^2-v^2} + \frac{p^2}{c^2-v^2}$$

Es giebt nun im allgemeinen zwei Richtungen im Krystall, für welche die beiden Werthe von v^2 einander gleich sind — diese heissen die Optischen Axen. — Man kann sie auch definiren als die Normale der Kreisschnitte des Ellypsoids

$$a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2=1$$

Aus den obigen Gleichungen folgt im allgemeinen zur Bestimmung der Hauptaxen:

$$\alpha':\beta':\gamma' = \frac{m}{a^2-v^2}:\frac{n}{b^2-v^2}:\frac{p}{c^2-v^2}$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$$

Wenn ~~man~~ die Wellennormale mit einer der Optischen Axen zusammenfällt, so muss sich in den Gleichungen dies dadurch zeigen, das die Richtung der Verrückung unbestimmt wird, das heisst, dass $\alpha'\beta'\gamma'$ unbestimmt wird. – d. h. dass eine der Grössen

$$\frac{m}{a^2-v^2} \quad \frac{n}{b^2-v^2} \quad \frac{p}{c^2-v^2}$$

sich unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellt. – Für die Optischen Axen müssen wir also haben:

$$m=0 \quad v=a \quad \text{oder} \quad n=0 \quad v=b \quad \text{oder} \quad p=0 \quad v=c$$

In jedem dieser drei Fälle wird die Quadratische Gleichung zweigliedrig; ein Glied davon muss also stets positiv, das andere negativ sein. – Wenn wir nun die Annahme machen:

$$a>b>c \quad \text{oder} \quad a<b<c$$

So ist nur die zweite der 3 Fälle möglich. –

In diesem Falle wird die Quadratische Gleichung:

$$\frac{m^2}{a^2-b^2}+\frac{p^2}{c^2-b^2}=0$$

und hiezu die Gleichung:

$$m^2+n^2+p^2=1$$

und $n=0$

genommen, erhalten wir die Lösungen:

$$(32) \ldots\ldots \begin{cases} m=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ n=0 \\ p=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{cases}$$

Hiernach giebt es 4 Richtungen die der geforderten Bedingung entsprechen. – Wir nennen aber nur die beiden Optische Axen, welche Spitze Winkel mit der positiven x Axe bilden. – Für diese beiden ist dann:

$$m_1=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad n_1=0 \qquad p_1=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

$$m_2=+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad n_2=0 \qquad p_2=-\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Wellennormale mit den beiden Optischen Axen bildet mit u_1 und u_2, so haben wir nach der bekannten Regel der analytischen Geometrie:

$$\cos u_1 = m m_1 + p p_1$$

$$\cos u_2 = m m_1 - p p_1$$

Diese Werthe mit in Rechnung geführt – erhalten wir:

$$m^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \cos^2 \frac{u_1 + u_2}{2} \cdot \cos^2 \frac{u_1 - u_2}{2}$$

$$p^2 = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2} \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2}$$

$$n^2 = 1 - m^2 - p^2$$

Dann folgt die Biquadratische Gleichung:

$$v^4 - v^2 \left\{ a^2 \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 - u_2}{2} + a^2 \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 + u_2}{2} \right\} +$$
$$+ \left(a^2 \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 - u_2}{2} \right) \left(a^2 \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 + u_2}{2} \right) = 0$$

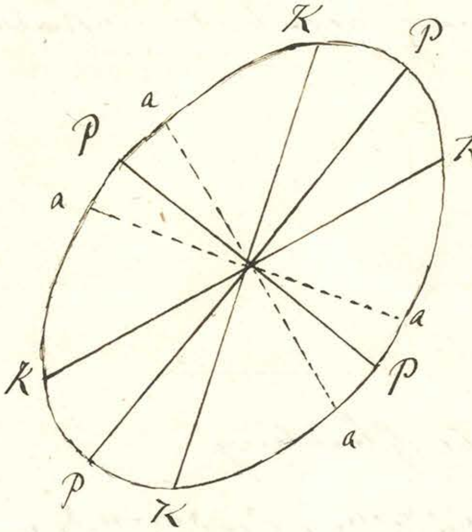
Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\left. \begin{aligned} v_o^2 &= a^2 \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 - u_2}{2} \\ v_e^2 &= a^2 \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2} + c^2 \cos^2 \frac{u_1 + u_2}{2} \end{aligned} \right\} \cdots (33)$$

Es sind dies die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der ordinären und extraordinären Welle, wie auch aus der Optik hervorgehen. –

§21. – Geometrische Construction. –

Wir wollen eine Zeichnung entwerfen – und zwar in der Wellenebene. – Den Schnitt der Wellenebene mit dem Ellypsoid haben wir dann durch eine Ellypse darzustellen – deren Hauptaxen PP die Richtungen der Verrückungen in beiden Wellen sind. — Die Ebenen der Kreisschnitte schneiden die Ebene der Zeichnung in 2 gleichen und concentrischen Durchmessern KK. Diese beiden Durchmesser sind gleich den Radien des Kreisschnitts d.h. $= \frac{1}{b}$ — die Normalen der Kreisschnitte sind die optischen Axen. — Legen wir durch diese und die Wellennormale 2 Ebenen — die also senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehen werden — so werden die Schnitte dieser Ebenen mit der Ebene der Zeichnung durch die beiden Durchmessern aa dargestellt, welche senkrecht zu KK sind. —



Die Polarisationsebenen der beiden Wellen sind die Ebenen, die durch die Hauptaxen PP und die Wellennormale, also senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt sind — da die Durchmesser KK unter einander gleich sind, und daher auch die Durchmesser aa, so müssen die Hauptaxen PP die Winkel zwischen ihnen halbiren. — Wir können die Linien PP daher auch definiren, als die Halbirungslinien der Winkel, welche die Durchmesser aa bilden. – – Die Polarisationsebenen der beiden Wellen können daher auch definirt werden, als Halbirungsebenen der Winkel – welche die beiden durch die Durchmesser aa und die Wellennormale (oder die beiden durch die Optischen Axen und die Wellennormale) gelegten Ebenen mit einander bilden. – Um die Polarisationsebenen der beiden Strahlen unterscheiden zu können, setzen wir $u_1 = u_2 = 90°$ und finden dann

$$v_0 = c \qquad v_e = a$$

dann liegt die Polarisationsebene des gewöhnlichen Strahles also zwischen den Ebenen, die ~~statt~~ durch die Optischen Axen gehen –, das heißt bildet mit ihnen spitze Winkel, und da sie sich doch nur continuirlich ändern können, so wissen wir dass die Polarisationsebene des gewöhnlichen Strahles den kleineren Winkel halbirt, den jene beiden Ebenen bilden; die des ungewöhnlichen den grösseren. –

Dritter Abschnitt. –

Theorie der Körper mit theilweise unendlich kleinen Dimensionen. –

I Kapitel.

Formänderung dünner Stäbe. –

§ 22. – Grundgleichung der Theorie der Körper mit theilweise sehr kleinen Dimensionen. –

Wir betrachteten bis jetzt Fälle bei welchen die die Formveränderung des Körpers – ~~mit~~ und die Molecularverschiebungen Grössen derselben Ordnung waren. – Die jetzige Aufgabe sei die Fälle zu betrachten bei welchen der endlichen Formänderung des Körpers unendlich kleine Molecularverschiebungen entsprechen. – Es ist dies ~~der~~ ein Fall der bei ~~...~~ ~~dünnen elastischen Stäben~~ Körpern ein tritt, deren Dimensionen zum Theil unendlich klein sind wie z. B. dünne Stäbe – Platten. ~~vor eintritt~~. –

Denken wir uns in ~~diesem~~ ~~einem dünnen~~ einem solchen Körper ~~Stabe~~ ein unendlich kleines Parallelepipedon – dessen Anfangspunkt $x\,y\,z$ und dessen Kanten $dx\,dy\,dz$ sind – es wird in Gleichgewicht sein wenn das Moment der äusseren Druckkräfte – gleich ist dem Momente der Moleculardruckkräfte. .

Behält F seine Bedeutung aus dem vorigen Abschnitte d. i. bezeichnet es die Kraft welche erfordert wird um die Formveränderung hervorzubringen – dann ist für eine unendl. kleine Formveränderung der Formveränderung

des Parallelepipedes
das Moment der inneren Kräfte:

$$dx\,dy\,dz\,\delta F$$

Diesen Kräften müssen die äusseren X Y Z das Gleichgewicht halten, und zwar ist deren Moment, wenn δu δv δw ~~die unendl. kleinen~~ Verrückungen des unendl. kleinen ~~u, v, w~~ bezeichnen, folgendes:

$$-\varrho\,dx\,dy\,dz(X\delta u + Y\delta v + Z\delta z)$$

Also:

$$0 = dx\,dy\,dz\,\delta F - \varrho\,dx\,dy\,dz(X\delta u + Y\delta v + Z\delta z)$$

hieraus folgt durch Integration eine Gleichung welche sich auf den ganzen Körper bezieht; diese ist, wenn wir das gesammt Moment der äusseren Kräfte mit Ω bezeichnen, folgende:

$$0 = \delta\Omega - \iiint \delta F.\,dx\,dy\,dz$$

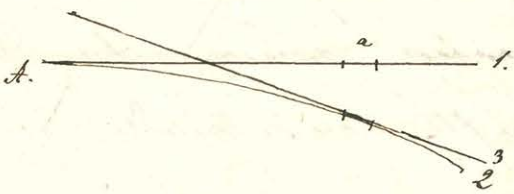
oder, was gleichbedeutend ist:

(1) .... $$0 = \delta\Omega - \delta\iiint F.\,dx\,dy\,dz$$

Diese Gleichung setzt u, v, w unendl. klein voraus, ist diese Bedingung erfüllt, so ist sie auch auf Theile des Körpers anwendbar. –

§ 23. – Theorie dünner Stäbe.

Theilen wir den dünnen Stab dessen Gleichgewichtsbedingungen wir eben erforschen wollen – ~~in gleiche aber sehr kleine~~ Theile durch verticale Schnitte auf die Längsaxe des Stabes – in gleiche sehr kleine Theile – u. zwar so dass die Dimensionen derselben von Grössen derselben Ordnung seien.



An dem bei A befestigten Stabe sei (a) ein solcher Theilchen – wirkt keine Kraft dann gestaltet sich der Stab wie Lage 1. – durch Einfluss äusserer Kräfte biegt er sich nun in Lage (2). – Was hier unter dem Molecular verrückung zu verstehen ist, ergiebt sich am einfachsten wenn eine ~~zu~~ (2) unendlich nahe gelegene Lage des Stabes betrachtet wird – bei welcher diese Verrückungen noch nicht eingetreten sind – das ist der Stab noch seine ursprüngliche Form beibehalten hat – es sind dann u s w die unendl. kleinen Verrückungen des Elementes (a) indem es aus Lage (3) in Lage (2) übergeht. – Bezeichnet also F die Arbeit welche erfordert wird um die Molecüle a – s aus der Lage 3 in die Lage (2) zu bringen – dann ist für das Theilchen das Moment der ~~äusseren~~ inneren Druck: Druckkräfte

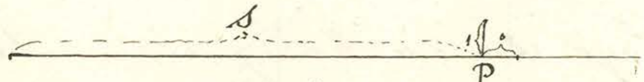
$$\iiint F\,dx\,dy\,dz$$

Eine ähnliche Lage (3, ist für alle Stabselemente leicht zu ermitteln – wir können so Gleichung (1) für alle Stab:elemente bilden – da diese nun auch für die Summe aller richtig sein muss, so folgt, wenn unter ~~von~~ $\delta\Omega$ ~~unter~~ wieder das Moment der Formändernden Kräfte verstanden wird:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad 0=\delta\Omega - \delta\sum\int F\,dx\,dy\,dz.$$

Das Integral bezeichnet eigentlich ein dreifaches Integral. –

Der Stab dessen Formänderungen uns ~~eben~~ nun beschäftigen sollen – sei im Gleichgewichtszustande gerad und überall von gleichem Querschnitt. – ~~Als~~ Zur Erleichterung nehmen wir auch noch an dass dieser Querschnitt eine Ellypse ist. – Die Mittelpunkte der Querschnitte liegen also im Gleichgew. Zustande in einer Geraden – Sei ~~die~~ in dieser Entfernung eines Punktes P ~~in dieser~~, von dem Anfangspunkte des Stabes – s



Wir betrachten 3 ~~Linien~~ verticale Linienelemente (0,1 und 2 senkrecht auf die Ebene der Zeichnung) in P. Es findet bei der Formveränderung eine Drehung die-der Elemente statt – so dass die Winkel zwischen ihnen nach der Formänderung von 90° um ~~kam~~ Grössen abweichen die von der Ordnung der Formänderung sind ~~– <del>δλτσ</del>~~ . –

Wir beziehen diese Elemente 0 1 2 auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Anfangspunkt in P liegt – dessen X Axe immer mit dem Element 0 ~~~~ vor der ~~Formänderung~~ zusammenfällt – ~~also für jeden Theil des Stabes~~ und dessen Z und Y Axe ~~unendlich nahe zu~~ vor wie nach der Formveränderung unendlich nahe zu den Elementen 2 und 1 stehen; und zwar so dass $\sphericalangle (Z,1)$ immer gleich $\frac{\pi}{2}$ sei. – System I

Dieses System ist für verschiedne Theilchen des Stabes verschieden – ihre X Axe ist ja immer – die Lage 3.

Die Coordinaten eines Punktes unendlich nahe zu P, bezeichnen wir in der Lage 3, also wenn die X Axe mit 0, die Z Axe mit 2, die Y Axe mit 1 zusammenfällt; ~~durch~~ mit x, y, z – Die Coordinaten desselben Punktes nachdem der Stab aus 3 in 2 übergegangen ist – und die Molecüle unendlich kleine Verschiebungen erlitten haben, mit x+u, y+v, z+w. – Da P vor wie nach der Formänderung der Anfangspunkt des Coordinatensystemes ist – so ist für

$x=0$, $y=0$, $z=0$ auch $u=0$ $v=0$ $w=0$

Auf dieses System beziehen wir nun ein Linienelement – dessen Endpunkte vor der Formänderung die Coordinaten haben

$$x, y, z \quad \text{und} \quad x+dx, y+dy, z+dz$$

die aber nach vorgegangener Formänderung zu

$$\begin{array}{lcl} x+u & \text{und} & x+dx+u+du \\ y+v & & y+dy+v+dv \\ z+w & & z+dz+\cancel{dw+}dw \end{array}$$

werden. – Es ist ~~d~~ hier:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Die Cosinusse der Winkel, welche das Element vor der Formänderung mit dem beschriebenen Systeme bildet – verhalten sich wie ~~zu den~~ ~~Cosinussen~~

$$dx : dy : dz$$

Die Cosinusse der Winkel welche das Element ~~System~~ nach der Formänderung, mit dem Systeme bildet, wie

$$dx+du : dy+dv : dz+dw$$

Wenn nun das Element, mit der X Axe zusammenfällt, dann wird $dy=0$ und $dz=0$ folglich ist nach angeführten Werthen von du, dv, dw das Verhältniss der Cosinuse:

$$dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx : \frac{\partial v}{\partial x}dx : \frac{\partial w}{\partial x}dx$$

Es ist schon u unendlich klein deshalb du neben dx verschwindend, daher:

$$1 : \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial z}$$

Fällt das Element vor der Formänderung mit der Y Axe zusammen dann ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{\partial u}{\partial y} : 1 : \frac{\partial w}{\partial y}$$

und fällt es mit Z zusammen, dann:

$$\frac{\partial u}{\partial z} : \frac{\partial v}{\partial z} : 1$$

Es lassen sich ~~nun~~ also folgende Bedingungen aufstellen. –

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Für} & x=0 & y=0 & z=0 \\ \text{ist:} & u=0 & v=0 & w=0 \\ \text{und} & \frac{dw}{dx}=0 & \frac{\partial w}{\partial x}=0 & \frac{\partial w}{\partial y}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (3)$$

Neben diesem System führen wir ein zweites ein dessen Lage, beliebig sein kann – ~~aber~~ welches aber von dem Stabe unabhängig – ~~sonst~~ für alle System II.

Theile derselben Constant ist. – Die Coordinaten des Punktes P auf dieses System bezogen sind ξ, η, ζ ; die Cosinuse der Winkel welche diese Coord. mit den x, y, z bilden, sind.

ξ	η	ζ	
α_0	β_0	γ_0	x
α_1	β_1	γ_1	y
α_2	β_2	γ_2	z

Wo die Indices 0, 1, 2 ~~sich auf die~~ den Elementen 0, 1, 2 entsprechen – so dass α_0 der Cosinus des Winkels ist, welchen ξ naheru mit 0 bildet. – Das erste Coordinaten System können wir so verlegen dass sein Anfangspunkt – der ~~befestigte~~ ~~Punkt~~ Anfangspunkt des Stabes wird – dann ist der Punkt

System III.

P in diesem Systeme durch s bestimmt. – Gleichungen welche sich auf Transformation rechtwinkliger Coordinaten beziehen geben dann ξ, η, ζ und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1$, etc. als Functionen von s. – Die Coordinaten eines unendl. nahe zu P gelegenen Punktes nach der Formänderung bezeichnen wir im System II mit ξ', η', ζ', in dem Systeme I mit $x+u$, $y+v$, $z+w$. Dann bestehen zwischen ξ und ξ' die Gleichungen: