Ms 5096/1. I-VIII Eötvös Loránd: Mechanikai alapelvek előadásai

Távolba hatás törvényei.

Előszó

Az első nagy lépés a physikai elméletek terén az volt midőn összetartozó testrendszerek ~~mo~~ tagjainak mozgásai kölcsönös távolba hatásokból magyaráztattak.

Tudjuk mit tett Newton a bolygók rendszerével. Azóta hozzá jöttek az electrostatikai, magneticai és dynamikai jelenségek. Más oldalról azóta fejlődött ki a fénytan, melyben nyugvó távol testek hatásait, bár az másként nyilatkozott mint az előbbi tanokban, ismerni tanultuk. –

Jelen előadás tárgya e távolba hatások törvényeinek megállapítása kf. alapjul ~~jelenésekből~~ bizonyos a dynamika feltevéseit fogjuk

tárgyalni. Nem fogjuk a
hystoriai sorrendet követni,
hanem inkább rövidítve
tárgyaljuk a dolgot. —

A.) ~~A mechanika alaptételei~~ Az alapfeltevések s azoknak)
következményei.

B) A gravitatio törvénye.

C) Az electrostatika alaptörvénye.

D) A magnetismus [illegible] alaptörvénye.

E) A electrodynamika alaptörvénye

F) A fény hatásának alaptörvénye. (Összehasonlításul.)

Bevezetés.

~~A mozgásá~~ A pont mozgásának mennyiségtani leírása

~~[illegible]~~
Mozgás az időben helyzet változás

Anyagi pont eleny[illegible]ő kicsiny méretű, forgásai alakváltozásai itt tekintetbe nem jönnek.

Első leírási mód.

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

2ik leírási mód.

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \frac{dy}{dt} = v \quad \frac{dz}{dt} = w$$

$$\cancel{x}\ t = 0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0$$

u, v, w a sebesség összetevőinek neveztetnek.

A sebesség nagysága és iránya azon egyenes nagysága és iránya mely az xyz vel párhuzamos koordináta rendszer kezdőpontját u v w ponttal összeköti, tehát

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \quad \cos\beta = \frac{v}{(u^2+v^2+w^2)} \quad \cos\gamma = \frac{w}{(u^2+v^2+w^2)}$$

—

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ds a dt alatt befutott út.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

tehát a sebesség számértéke = a befutott út számértékének [illegible]

cos

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

$$\cancel{x_1} = \cancel{v_x = c} \quad v_y = c' \quad v_z = c''$$

$$x = x_0 + ct \quad y = y_0 + c't \quad z = z_0 + c''t$$

$$\frac{x - x_0}{c} = \frac{y - y_0}{c'} = \frac{z - z_0}{c''}$$ egyenes vonal

A egyenes iránya

$\cos\alpha' = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$ | $\cos\beta' =$ $\cos\gamma' =$

a sebesség iránya $\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{(c'^2+c''^2+c'''^2)}}$

$\cos\alpha' = \frac{c}{\sqrt{c'^2+c''^2+c}}$

Az egyenes iránya a sebesség iránya.

Sík leirási mód.

$t=0$

$x = c \quad y = c' \quad z = c''$

$\frac{dx}{dt} = c_I \quad \frac{dy}{dt} = c'_I \quad \frac{dz}{dt}\ c''_I$

$\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$

$X\ Y\ Z$ a gyorsulás összetevői az reveglettel.

A gyorsulás nagysága

$= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$

iránya $\cos\lambda = \frac{X}{V} \quad \cos\mu = \frac{Y}{V} \quad \cos\nu = \frac{Z}{V}$

$X\ Y\ Z$ összetevői lesznek egy pontnak egy xyz-vel párhuzamos rendszerben az XYZ tkez O bólkurott

egyenes gyorsulást nagyság s irányra

nézve előállítja.

Lehetne még szaggatott is előadás

mind, de azokat nem ugrasztjuk.

példa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = gt + c_1 \qquad \frac{dy}{dt} = c_1' \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = c_1''$$

$$x = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c \qquad y = c_1' t + c' \qquad z = c_1'' + c''$$

~~x=0~~ $c_1 = 0 \quad c_1' = 0 \quad c_1'' = 0$

szabad esés

$c_1 = a \quad c_1', \; c_1'' = 0$

merőleges hajítás

$c_1 = 0 \quad c_1' = b \quad c_1'' = 0$

vízszintes hajítás

$c_1 = a \quad c_1' = b \quad c_1'' = 0$

ferde hajítás.

Az erő.

Erő a mozgás változásának oka. Előállítása

$$P = mg = m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \frac{d^2y}{d}}$$

$$= m\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

iránya $\lambda\ \mu\ \nu$.

Zik előállítási mód.

Erőösszetevők

$\cancel{X}\ P_x = mX \qquad P_y = mY \qquad P_z = mZ$

akkor. $\cos\lambda = \frac{P_x}{P} \qquad \cos\mu = \frac{P_y}{P} \qquad \cos\nu = \frac{P_z}{P}$

Egy pontra több erő hat.

Izö előállítási mód

P_1	P_2	P_3	......	P_n
~~arf~~ $\lambda_1\mu_1\nu_1$	$\lambda_2\mu_2\nu_2$	$\lambda_3\mu_3\nu_3$		$\lambda_n\mu_n\nu_n$

Zik előállítási mód

$\cancel{P_{x_1}}\ P_{1x} \quad P_{1y} \quad P_{1z}$

$P_{2x} \quad P_{2y} \quad P_{2z}$

$P_{3x} \quad P_{3y} \quad P_{3z}$

Ebből áttérhetünk az 1 re vagy.
meghatározhatjuk tehát az egy erőt,
az eredő erőt, mely a többit
helyettesíti.

$\cancel{P = P_1}$

$$P_x = P_{1x} + P_{2x} + \dots = \sum P_{kx}$$

$$P_y = \qquad = \sum P_{ky}$$

$$P_z = \qquad = \sum P_{kz}$$

$$\cancel{\cos\alpha = \frac{\sum P_{kx}}{\sqrt{}}} \qquad P = \sqrt{\left(\sum P_{kx}\right)^2 + \left(\sum P_{ky}\right)^2 + \left(\sum P_{kz}\right)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P} \qquad \cos\mu = \frac{P_y}{P} \qquad \cos\nu = \frac{P_z}{P}$$

Ebből következik az erők egyensúlyának tétele is.

Maga a mozgás egyszerűen az eredő erőt határozza meg; de nem az erőrendszer egyes erőit.

A természetben előforduló mozgásoknál rendesen az egyes erőket határozzuk meg s azokból az eredőt, abból ismét a mozgást állapítjuk meg.

Az erő fogalmának definitiójában

benfoglaltatik már a tétlenség

elve, mely szerint ha a pontra

erő nem hat, az egyenesen

s egyenletesen mozog tova.

Ugyanis ha

$$P_x, P_y, P_z = 0$$

egyszersmind

$$X, Y, Z = 0$$

és így $\frac{dx}{dt} = c \quad \frac{dy}{dt} = c' \quad \frac{dz}{dt} = c''$

mely esetben mint láttuk a

mozgás egyenes és egyenletes.

I Feltevések és azoknak következményei.

§1. Feltevések.

1) Az erő melyet egy tömegpont a másikra gyakorol, az összekötő egyenes irányába esik és csupán e pontok tömegeitől és távolától függ.

2) Az erő melyet A tömegpont B tömegpontra gyakorol egyenlő nagyságú de ellentett irányú azon erővel, melyet B tömegpont A-ra gyakorol.

3) Egy pontrendszerben az erő melyet két tömegpont egymásra gyakorol csupán e két pont tömegeitől s távolától függ és független a környező pontoktól.

—

§2. Az erőfüggvény.

Egy rendszerben két pont ~~m, x, y, z~~ ; $m_\kappa, x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa$

~~m, x, y~~ $m_\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$

Legyen $P_{\kappa\lambda}$ ~~az~~ vonzó erő melyet λ κ-ra gyakorol

$P_{\lambda\kappa}$ . . — κ λ-ra . . .

akkor $$P_{\kappa\lambda} = P_{\lambda\kappa}$$

Továbbá

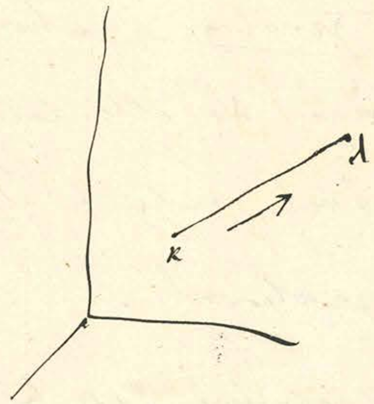
~~$P_{\kappa\lambda}$-ra~~

Az erő összetevői κ-ra

$$= P_{\kappa\lambda} \cos(P_{\kappa\lambda}, x)$$

$$= P_{\kappa\lambda} \cos(P_{\kappa\lambda}, y)$$

$$= P_{\kappa\lambda} \cos(P_{\kappa\lambda}, z)$$



A két pont távolsága legyen $= r_{\kappa\lambda}$ akkor

$$\cos(P_{\kappa\lambda} x) = \frac{x_\lambda - x_\kappa}{r_{\kappa\lambda}}$$

$$\cos(P_{\kappa\lambda}, y) = \frac{y_\lambda - y_\kappa}{r_{\kappa\lambda}}$$

$$\cos(P_{\kappa\lambda}, z) = \frac{z_\lambda - z_\kappa}{r_{\kappa\lambda}}$$

vagyis mivel ~~$r_{\kappa\lambda} =$~~ $r_{\kappa\lambda}^2 = (x_\lambda - x_\kappa)^2 + (y_\lambda - y_\kappa)^2 + (z_\lambda - z_\kappa)^2$

$$dr_{\kappa\lambda} = \frac{x_\lambda - x_\kappa}{r_{\kappa\lambda}}$$

$$\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial x_{\kappa}} = \frac{x_\lambda - x_\kappa}{r_{\kappa\lambda}} = \frac{x_\kappa - x_\lambda}{r_{\kappa\lambda}}$$

etc és így

$$\cos(P x) = -\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa}$$

$$\cos(P y) = -\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial y_\kappa}$$

$$\cos(P, z) = -\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial z_\kappa}$$

Az erő összetevői e szerint a κ pontra

$$-P_{\kappa\lambda}\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa}$$

$$-P_{\kappa\lambda}\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial y_\kappa}$$

$$-P_{\kappa\lambda}\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial z_\kappa}$$

legyen $\int P_{\kappa\lambda}\, dr_{\kappa\lambda} = Q_{\kappa\lambda}$ akkor $Q_{\kappa\lambda}$ a feltevések értelmében csupán m_κ m_λ x_κ y_κ z_κ és x_λ y_λ z_λ -tól függ

$$\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_{\kappa\lambda}} = P_{\kappa\lambda}\cdot\frac{\partial r_{\kappa\lambda}}{\partial z_{\kappa\lambda}}$$

tehát az erő összetevői

$$-\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa}, \quad -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial y_\kappa}, \quad -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial z_\kappa}$$

Így ha κ át felcseréljük λ-val a λ-ra gyakorolt összetevők

$$-\frac{\partial Q_{\lambda\kappa}}{\partial x_\lambda}\;,\;\frac{\partial Q_{\lambda\kappa}}{\partial y_\lambda}\;,\;\frac{\partial Q_{\lambda\kappa}}{\partial z_\lambda}$$

mivel pedig $P_{\kappa\lambda} = P_{\lambda\kappa}$ és

$$Q_{\lambda\kappa} = Q_{\kappa\lambda}$$

$$-\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_\lambda}\;,\;-\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial y_\lambda}\;,\;-\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial z_\lambda}$$

Folytatás a III íven

Legyen most n pontunk melyek egymást kölcsönösen vonzzák.

$m_1\; m_2\; m_3 \ldots\ldots m_n$ tömegekkel

és a megfelelőleg jelölt összerendezőkkel.

Akkor az 1 re gyakorolt erő összetevői:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial (Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + \ldots\ldots Q_{1n})}{\partial x_1}$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{\partial (Q_{12} + Q_{13} + \ldots\ldots Q_{1n})}{\partial y_1}$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{\partial (Q_{12} + Q_{13} + \ldots\ldots Q_{1n})}{\partial z_1}$$

Hasonló módon jegyezhetjük ki az m_2 tömegre gyakorolt erő összetevőket.

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{\partial\left(Q_{12} + Q_{23} + Q_{24} + \dots Q_{2n}\right)}{\partial x_2}$$

. . . . . . —

— — —

Minden egyes pontra nézve megkapjuk ha a negativ diff. hányadosokat képezzük azon Q integralok összegéből, melyeknek kettős jelzőjében a pont számána valamennyi többi pont számával van combinálva.

Végre is képezhetjük az összeget

$$\begin{aligned} U = -\{ Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{15} + Q_{16} + \dots & \quad Q_{1,n-1} + Q_{1n} \\ Q_{23} + Q_{24} + Q_{25} + \dots & \quad Q_{2,n-1} + Q_{2n} \\ + Q_{34} + Q_{35} + \dots & \quad Q_{3,n-1} + Q_{3n} \\ \dots\dots & \\ Q\ \dots\dots & \\ & \quad Q_{n-2,n-1} + Q_{n-2,n} \\ & \quad + Q_{n-1,n} \end{aligned}$$

s akkor az m_i pontra gyakorolt erő ~~összetevői~~ lesznek.

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}\ , \quad m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}\ , \quad m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

példa

U = a Hamilton erőfüggvénye

$\frac{m_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}^2}$ erő esetében

$$\int \frac{m_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}^2} dr_{\kappa\lambda} = -\frac{m_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}}$$

tehát 3 pontra nézve

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

Távolba hatás III.

Recapitulatió.

Az erő melyet $m_\lambda\, x_\lambda y_\lambda z_\lambda$ pont gyakorol $m_\kappa\, x_\kappa y_\kappa z_\kappa$ pontra:

$$P_{x\kappa} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa}$$

$$P_{y\kappa} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial y_\kappa} \qquad \text{a hol} \quad Q_{\kappa\lambda} = \int P_{\kappa\lambda}\, dr_{\kappa\lambda}$$

$$P_{z\kappa} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial z_\kappa}$$

épen így az erő melyet $m_\kappa\, x_\kappa y_\kappa z_\kappa$ gyakorol $m_\lambda\, x_\lambda y_\lambda z_\lambda$ pontra:

$$P_{x\lambda} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_\lambda}$$

$$P_{y\lambda} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial y_\lambda}$$

$$P_{z\lambda} = -\frac{\partial Q_{\kappa\lambda}}{\partial z_\lambda}$$

Tegyük $Q_{\kappa\lambda} = m_\kappa R_{\kappa\lambda}$ akkor a gyorsulás:

lesz

$$X_\kappa = -\frac{\partial R_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa} \qquad X_\lambda = -\frac{\partial R'_{\kappa\lambda}}{\partial x_\lambda}$$

a hol

$$Y_\kappa = -\frac{\partial R_{\kappa\lambda}}{\partial y_\kappa} \qquad Y_\lambda = -\frac{\partial R'_{\kappa\lambda}}{\partial y_\lambda} \qquad \frac{R_{\kappa\lambda}}{R'_{\kappa\lambda}} = \frac{m_\lambda}{m_\kappa}$$

$$Z_\kappa = -\frac{\partial R_{\kappa\lambda}}{\partial z_\kappa} \qquad Z_\lambda = -\frac{\partial R'_{\kappa\lambda}}{\partial z_\lambda}$$

Leggyen most egy pontunk $\xi\eta\zeta\,\mu$ és keressük az erő összetevőit melyek rea $m_1 x_1 y_1 z_1$ / $m_2 x_2 y_2 z_2$ ...... $m_n x_n y_n z_n$ pontok gyakorolnak.

Tegyük $m_n = \mu$ $x_n = \xi$ $y_n = \eta$ $z_n = \zeta$

s leggyen m_1 m_2 ... m_n pontok általános jeltője $m\lambda$ összetevőike $x_\lambda\, y_\lambda\, z_\lambda$.

Akkor az erő $\xi\eta\zeta$ pontra m_1 által

$$P_{x1} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 1}}{\partial \xi}$$

$$P_{y1} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 1}}{\partial \xi}$$

$$P_{z1} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta}}{\partial \xi}$$

Az erő $\xi\eta\zeta$ ra m_2 által

$$P_{x2} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 2}}{\partial \xi}$$

$$P_{y2} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 2}}{\partial \eta}$$ s. i. t.

$$P_{z2} = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 2}}{\partial \xi}$$

Az összes erő

$$P_x = -\frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 1}}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta 2}}{\partial \xi} - \dots - \frac{\partial Q_{\xi\eta\zeta n}}{\partial \xi}$$

etc.

$$P_x = -\frac{\partial\{Q_{\xi\eta\zeta_1} + Q_{\xi\eta\zeta_2} + \dots + Q_{\xi\eta\zeta_n}\}}{\partial\xi}$$

etc.

Vagy ha ~~$Q_{\xi\eta\zeta_1}$ $R_{\xi\eta\zeta_1}$~~ … etc. $Q_{\xi\eta\zeta_1} = \mu R_{\xi\eta\zeta_1}$ akkor

$$X = -\frac{\partial\{R_{\xi\eta\zeta_1} + R_{\xi\eta\zeta_2} + \dots + R_{\xi\eta\zeta_n}\}}{\partial\xi}$$

etc.

$$V = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} R_{\xi\eta\zeta\lambda}$$ = n tömegpont ~~pur~~ potentiál függvénye.

A rendszer potentiálja az a függvény, melynek első rend. diff. hányadosa ~~az~~ ~~tömeg~~pont összrendezői ~~szerint~~ = az e pontra a rendszer által gyakorolt erő gyorsulásának összetevői.

$$X = +\frac{\partial V}{\partial\xi}$$

$$Y = +\frac{\partial V}{\partial\eta}$$

$$Z = +\frac{\partial V}{\partial\zeta}$$

§2.

Legyen egy pontrendszer $\left.\begin{array}{l}\mu_1\, \xi_1\, \eta_1\, \zeta_1 \\ \mu_2\, \xi_2\, \eta_2\, \zeta_2 \\ \dots \\ \mu_m\, \xi_m\, \eta_m\, \zeta_m\end{array}\right\}$ s μ_k jelző helyébe

$\mu_k\, \xi_k\, \eta_k\, \zeta_k = m_k\, x_k\, y_k\, z_k$

Keressük az erőt melyet λ rendszer a k rendszer egy pontjára gyakorol.

$$P_{kx} = -\frac{\partial Q_{k1}}{\partial \xi_k} - \frac{\partial Q_{k2}}{\partial \xi_k} - \dots \frac{\partial Q_{kn}}{\partial \xi_k}$$

$$= -\frac{\partial \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} Q_{k\lambda}}{\partial \xi_k}$$

vagy

$$P_{kx} = -\frac{\partial \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} Q_{k\lambda}}{\partial \xi_k}$$

$$P_{ky} = -\frac{\partial \sum \sum Q_{k\lambda}}{\partial \eta_k}$$

$$P_{kz} = -\frac{\partial \sum \sum Q_{k\lambda}}{\partial \xi_k}.$$

de épen így a λ rendszer egy pontjára gyakorolt erő

$$P_{\lambda x} = -\frac{\partial \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{k=1}^{k=n} Q_{k\lambda}}{\partial x_\lambda}$$

$$P_{\lambda y} = -\frac{\partial}{\partial y_\lambda}$$

$$P_{\lambda z} = -\frac{\partial}{\partial z_\lambda}$$

IV.

$$-\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} Q_{k\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\sum_{k=1}^{k=m} Q_{k\lambda} = U_{ab}$$

vagy ha a két rendszer sorszámait folytatólagosan jelöltük A 1-m B m-n akkor $U_{ab} = \sum^{\lambda=n} \sum^{k=m} Q_{k\lambda}$.

U_{ab} = ~~A rendszer Potentialja~~ a és b rendszerek potentiálja egymásra.

E potentiál diff. hányadosa az egyik rendszer egy pontjának összrendezője szerint = a másik rendszer által e pontra gyakorolt erő összrendezője

§ 3.

Legyen csak egy rendszerünk $m_1\ x_1\ y_1\ z_1$

$m_2\ x_2\ y_2\ z_2$

. . . .

$m_n\ x_n\ y_n\ z_n$

Keressük az 1 pontra a többi által gyakorolt erőt

$$P_{x1} = -\frac{\partial \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} Q_{1\lambda}}{\partial x_1} \quad \text{vagy} \quad P_{xk} = -\frac{\partial \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} Q_{k\lambda}}{\partial x_k}$$ az Σ k kivételével

. . . .

. . . .

De ha képezzük

$$\sum Q_{\kappa\lambda}$$

úgy hogy minden $Q_{\kappa\lambda}$ képezzük az egész számoknak lehető combinatiójából ismétlés nélkül akkor lesz ugyanaz

$$P_{\kappa\lambda} = -\frac{\partial \sum Q_{\kappa\lambda}}{\partial x_\kappa}$$

. . . .

. . . . .

$-\sum Q_{\kappa\lambda} = U$ = ~~a~~ a rendszer erőfüggvénye vagy Potentiálja önmagára

A rendszer Potentiálja önmagára az a függvény, melynek részletes diff-hányadosa a rendszer egy pontjának összrendezője szerint = az e pontra a rendszer többi pontjai által gyakorolt erő összetevőjével.

$$\left.\begin{array}{llll} -U = Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} & \cdots\cdots & & Q_{1n} \\ \qquad\quad + Q_{23} + Q_{24} & \cdots & & Q_{2n} \\ & & Q_{n-2,n-1} & Q_{n-2,n} \\ & & & Q_{n-1,n} \end{array}\right\}$$

~~Példa~~ Példa:

~~Négy~~ pont

Ha az U összegből kitörülhetjük mindazon combinatiókat melyek 1 … ν tagok egymásközött és ν … n tagok egymásközött képeznek akkor U_{ab} függvényt nyerjük. $n > \nu > 1$

Példa

5 tömegpont $m_1\ m_2\ m_3\ m_4\ m_5$

erő 1 és 2 között $\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$

$\frac{m_k m_l}{r_{kl}}$ Potentialfüggvény

$$Q_{\xi\eta\zeta_1} = \int \frac{\mu m_1}{r_1} dr_1$$

$$R_{\xi\zeta\zeta_1} = \int \frac{m_1}{r_1^2} dr_1 = -\frac{m_1}{r_1}$$

Potential függvény $V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \frac{m_4}{r_4} + \frac{m_5}{r_5}$

Válasszuk ki A rendszerbe $m_1\ m_2\ m_3$

B rendszerben $m_4\ m_5$ pontokat

Legyen $m_4 = \mu_1$ $m_5 = \mu_2$ $m_4\ m_5$ a k rendszer.

Akkor.

$$Q_{\kappa\lambda} = -\frac{\mu_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}}$$

tehát ~~[illegible]~~

$$U_{ab} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} \frac{\mu_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=3}\sum_{\kappa=1}^{\kappa=2} \frac{\mu_\kappa m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}}$$

$$\cancel{U_{ab} = \frac{\mu_1 m_1}{r}} \qquad \cancel{U_{ab} = \frac{m_4 m_1}{r_{14}} + \frac{m_4 m_2}{r_{24}} + \frac{m_4 m_3}{r_{43}} + \frac{m_5 m_1}{r_{15}} + \frac{m_2 m_5}{r_{25}} + m}$$

$$\cancel{U_{ab} = m_1 m}$$

Potentiál vagy Erőfüggvény a és b rendszerek között

$$U_{ab} = \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{m_1 m_5}{r_{15}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{m_2 m_5}{r_{25}} + \frac{m_3 m_4}{r_{34}} + \frac{m_3 m_5}{r_{35}}$$

Potentiál vagy Erőfüggvény magára a

$$U = \cancel{\frac{m_1 m_2}{r_{12}}} + \cancel{\frac{m_1 m_3}{r_{13}}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{m_1 m_5}{r_{15}} + \cancel{\frac{m_2 m_3}{r_{23}}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{m_2 m_5}{r_{25}} + \frac{m_3 m_4}{r_{34}} + \frac{m_3 m_5}{r_{35}} + \cancel{\frac{m_4 m_5}{r_{45}}}$$

kitörülve az előbbi szakaszokat

Uab-t nyerjük

Távolba hatás V.

—

Az m_i tömegpontra gyakorolt erő összetevői:

$$P_{x_i} = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \qquad P_y = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad P_z = m_i \frac{d^2 z}{dt^2}$$

ilyen egyenletek állanak fel a rendszer minden egyes pontjára.

Írhatjuk:

$$\left(P_{x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\lambda_i + \left(P_{y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\mu_i + \left(P_{z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\nu_i = 0$$

és

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left(P_{x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\lambda_i + \left(P_{y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\mu_i + \left(P_{z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\nu_i\right\} = 0$$

Ha azt kívánjuk hogy ez egyenlet a λ μ és ν szorzók minden értékére fennálljon úgy ez az eredeti $3n$ mozgási diff. egyenletekhez vezet.

Tegyük $\lambda_i = \delta x_i$ $\quad \mu_i = \delta y_i$ $\quad \nu_i = \delta z_i$

akkor:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left(P_{x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(P_{y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(P_{z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\} = 0$$

Ez a Lagrange mozgási egyenlete.

ebben δx_i δy_i és δz_i egymástól független variatiók a szabad pontrendszer esetében.

Ehhez jegyzet az elmúlt számított 3ik oldalon.

A fentebbi egyenletet így is írhatjuk

$$1) \quad \sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \sum\left(P_{x_i}\delta x_i + P_{y_i}\delta y_i + P_{z_i}\delta z_i\right)$$

vagy ha tehát erőkről van szó melyeknek Potentiálja van akkor:

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)$$

Ha $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ az x_i, y_i és z_i végtelen kicsiny növekvéseinek tekintetnek akkor nyerjük

$$2) \quad \sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U$$ 28/9

Ez egyenlet csak addig helyes míg a $\delta x_i, \delta y_i\, \delta z_i$ variatiók elenyészö kicsinyek.

Tegyük $\delta x_i = \frac{dx_i}{dt}dt \qquad \delta y_i = \frac{dy_i}{dt}dt \qquad \delta z_i = \frac{dz_i}{dt}dt$

akkor

$$\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d^2x_i}{dt^2}dt + \frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d^2y_i}{dt^2}dt + \frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d^2z_i}{dt^2}dt\right) = dU$$

$$\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}d\frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt}d\frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt}d\frac{dz_i}{dt}\right) = dU$$

$$\sum \frac{1}{2} m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = U + h$$

A hol h az integratió állan-
dóját jeldi:

$$\sum \tfrac{1}{2} m v_i^2 = U + h.$$

$\sum \tfrac{1}{2} m v_i^2$ = a rendszer eleven ereje

~~Tehát: A rendszer eleven ereje~~

E szerint az eleven erő tétele,
melyet először Dán. Bernoulli mondott
ki: Egy rendszer eleven erejének
és Erőfüggvényének különbsége állandó.

Ha a rendszer I helyzetből II be
megy át akkor

$\sum \tfrac{1}{2} m v_i^2$

$$L_{II} - L_I = U_{II} - U_I$$

vagyis az eleven erő változása
= az erőfüggvény változásával.
Tehát nem függ az úttól hanem
csak a kezdet és végHelyzettől.

Ha egy rendszer eredeti helyzetébe visszatér akkor eleven erejének változása $=0$.
Erre vonatkozik a megmaradás szó.

<u>Jegyzet</u> Lagrange mozgási egyenleteihez.

Ha a rendszer nem szabad akkor a symbolikus egyenlethez

$$\sum\left\{\left(P_{xi}-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i+\left(P_{yi}-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i+\left(P_{zi}-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\}=0$$

még feltételi egyenletek jönnek, például három.

$f=0$

$\varphi=0$

$\psi=0$

akkor $\delta x_i\ \delta y_i\ \delta z_i$ nem független változók hanem reájuk nézve fennállnak

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial \psi}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial \psi}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

egyenletek.

ne vész el az eleven erő meg-
maradásának elve akkor is
fenáll.

<u>Az eleven erő megmaradása elvének</u>
<u>dinamikus kifejezése az erély</u>
<u>megmaradási elve.</u>

~~A mechan egy pontra R erő hat~~
~~ez eltolódik ampak és irányában~~
~~ds-sal a munka eltolódik~~

~~Rds~~

~~Végy~~ Egy pont eltolódik ds-el —
az irányában működő erő
legyen S akkor a munka

$$S\,ds$$

Ha a pont az erő irányában
mozog akkor $S = P$, ha a ds
iránya P irányával φ szöglétet
zár be akkor a munka

$$= P\,ds\cos\varphi$$

$$\varphi = \sphericalangle(P, ds)$$

$$\cos\varphi = \cos(P,x)\cos(\delta s,x) + \cos(P,y)\cos(\delta s,y) + \cos(P,z)\cos(\delta s,z)$$

és így a munka

$$\cancel{P\cos(P,x)\cos(\delta s,x)\,\delta s}$$

$$= P\cos(P,x)\cos(\delta s,x)\,\delta s + P\cos(P,y)\,\delta s\cos(\delta s,y) + P\cos(P,z)\,\delta s\cos(\delta s,z)$$

$$= P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z$$

n tömegpontból álló rendszerre nézve a munka

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\left(P_{xi}\,\delta x_i + P_{yi}\,\delta y_i + P_{zi}\,\delta z_i\right)$$

és így a mozgás symbolikus egyenletéből folyó 1 egyenlet

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \text{a munka } \delta x_i\,\delta y_i\,\delta z_i \text{ eltolódások}$$

között

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dt}dt \qquad \delta y_i = \frac{dy_i}{dt}dt \qquad \delta z_i = \frac{dz_i}{dt}dt$$

$$dL = \sum\left(P_{xi}\frac{dx_i}{dt}dt + P_{yi}\frac{dy_i}{dt}dt + P_{zi}\frac{dz_i}{dt}dt\right)$$

$$L_{II} - L_I = \int_I^{II}\sum\left(P_{xi}\frac{dx_i}{dt}dt + P_{yi}\frac{dy_i}{dt}dt + P_{zi}\frac{dz_i}{dt}dt\right)$$

ΔL = a végzett munka I és II helyzetek között

Vagyis az eleven erő változása egyenlő a végzett munkával.

ez a tétel semmit sem mond, egyszerüen a munka ~~m~~ elnevezés definitioját adja

De ha tekintetbe veszük hogy erőfüggvény esetében

$$\int_I^{II} \overset{L_{II} - L_I}{\cancel{\sum \left(P_{x_i}\frac{dx_i}{dt}dt + P_{y_i}\frac{dy_i}{dt}dt + P_{z_i}\frac{dz_i}{dt}dt\right)}} = U_{II} - U_I$$

~~akkor írhat~~

~~ez esetben~~

akkor következik

a végzett munka $= U_{II} - U_I$

vagyis a végzett munka csak a kezdet és vég helyzettől függ és Null, ha a rendszer eredeti helyzetébe visszatér.

Térjünk most vissza

$$L = U + h$$

egyenlethez.

Egy különös helyzetben

$$L' = U' + h$$

ekét egyenletből

$$\cancel{L - L' = U} - U'$$

$$L - L' = U - U'$$

$$L + (U' - U) = L'$$

A ~~különös~~ különös meghatározott helyzet melyre U' és L' vonatkoznak tetszőleges lehet.

L = actuelle Energie = mozgási erély = E_m

$U' - U$ = a munka melyet a rendszer erői végeznek ha a pillanatnyi helyzetből egy tetszőleges helyzetbe átmennek.

= potentielle Energie = E_h

$$E_h + E_m = E_ö \qquad E_ö = \text{összes erély}.$$

~~Briot~~ (A tétel úgy áll Briot-ban és Verdetben.)

(Riemann, Schwere, Elect. etc. $T - P = \text{const}$.

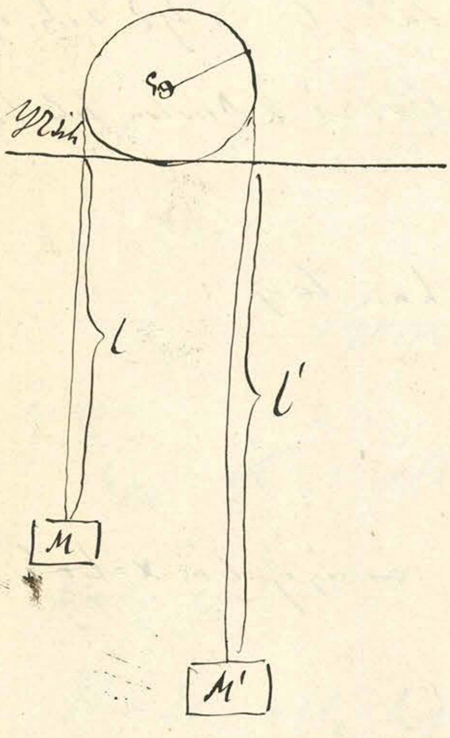
T = virtuelle mechanische Kraft. P = potentielle mechanische Kraft im Falle anziehender oder abstossender Kraft Potential, Arbeit die verrichtet wird bei der Übertragung der Punkte aus unendlicher Entfernung in ihre wirkliche Lage)

Thomson ~~scheint~~ ~~Riemann~~ ist ganz confus.

Példa az eleven erő megmaradásának elvére.

Atwood féle gép teljes elmélete.

Az elv fennáll oly rendszerekre is, melyek kényszernek vannak alávetve, ha a mozgások virtuálisak. Így az Atwood féle gépre is.



YZ sík, ettől lefelé számítva x összrendező

A fonál hossza YZ alatt l és l'

$$l + l' = \lambda$$

A fonál keresztmetszete q sűrűsége k összes tömege m, λ hosszaságú részének tömege $= \mu$

A súlyok tömegei M és M'.

A rendszerben 5 rész: a föld (F), a kerék és a fonál rész YZ sík felett (K), az M tömeg, az M' tömeg, és a μ tömeg. A Potential.

$$U = -\{\Omega_{FM} + \Omega_{FM'} + \Omega_{F\mu} + \Omega_{FK} + \Omega_{MM'} + \Omega_{M\mu} + \Omega_{MK} + \Omega_{M'\mu} + \Omega_{M'K} + \Omega_{\mu K}\}$$

itt az utolsó 6 tag elhanyagolható az első 4 irányában tehát:

$$U = -\left\{ Q_{FM} + Q_{FM'} + Q_{F\mu} + Q_{FK} \right\}$$

$$\cancel{-Q} \quad \cancel{-Q_{FM} = f\frac{FM}{}}$$

$$-Q_{FM} = \int f\frac{F\,dM}{(R-x)}$$

az integratió kiterjesztendő az egész M tömegre dM a tömegelem R az O pont távola a föld középpontjától, O az YZ sík egy pontja, F a föld tömege, f arányossági szorzó a Newton-féle képletből. ~~Tegyük x = l + ξ lesz~~.

$\cancel{-Q_{FM} = \int f}$ Fejtsük ki $\frac{1}{R-x}$ sorban lesz:

$$-Q_{FM} = \int \left\{ f\frac{F\,dM}{R} + x f\frac{F\,dM}{R^2} + \cdots \right\}$$

a többi tagokat elhanyagolhatjuk és így téve $x = l + \xi$

$$-Q_{FM} = f\frac{FM}{R} + l f\frac{FM}{R^2} + \int \xi f\frac{F\,dM}{R^2}$$

$\int \xi f\frac{F\,dM}{R^2}$ független l-től s így a mozgásra nézve állandó. az összes Q_{FM}-ben előforduló állandó tagok összegét C-vel jelölve és téve $f\frac{F}{R^2} = g$ lesz:

$$-Q_{FM} = C + glM$$

épen így

$$-Q_{FM'} = C' + gl'M'$$

$$-Q_{F\mu} = \int_0^{l} f\frac{Fkq\,dx}{(R-x)} + \int_0^{l'} f\frac{Fkq\,dx}{(R-x)}$$

vagy kifejtve mint előbb és integrálva

$$-Q_{F\mu} = f\frac{F\mu}{R} + f\frac{Fkq}{R^2}\frac{l^2}{2} + f\frac{Fkq}{R^2}\frac{l'^2}{2} \qquad C'' = f\frac{F\mu}{R} = \text{állandó}$$

végre:

$$-Q_{F\mu} = C'' + gkq\left(\frac{l^2}{2} + \frac{l'^2}{2}\right)$$

és végre

$$Q_{FK} = K = \text{állandó}:$$

Ezek szerint:

$$U_2 - U_1 = (l_2 - l_1)gM + (l_2' - l_1')gM' + \frac{gkq}{2}\left(l_2^2 - l_1^2 + l_2'^2 - l_1'^2\right)$$

tt. $$\underline{U_2 - U_1 = (l_2 - l_1)g(M - M') + gkq\left(l_2^2 - l_1^2 + 2\lambda(l_1 - l_2)\right)}$$

Határozzuk meg most a rendszer eleven erejét.

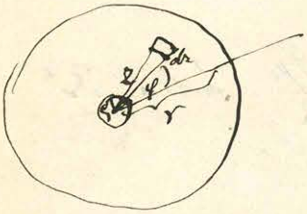
Legyen a súlyok sebessége v akkor

A fonal + M + M' eleven ereje $= \frac{1}{2}(m + M + M')v^2$

Ehhez még hozzá adandó a kerék és tengelyének elevenereje.

A kerék egy korong, ~~tehát~~ gyűrű melynek vastagsága D külső sugara r belső sugara ϱ, sürüsége σ.

A kerület egy pontjának sebessége v s így a szögsebesség $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$



A kerék tömegeleme

$$\sigma D z\, dz\, d\varphi$$

ennek eleven ereje

$$\frac{1}{2}\sigma D z\, dz\, d\varphi\, z^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma D v^2}{2r^2} z^3 dz\, d\varphi$$

~~A kerék eleven ereje~~

a kerék eleven ereje $$= \frac{1}{2}\frac{v^2}{r^2}\int\limits_{z=\varrho}^{z=r}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sigma D z^3 dz\, d\varphi$$

$\int \sigma D z^2 dz\, d\varphi =$ tehetetlenségi nyomaték

A kerék eleven ereje $= \pi \frac{v^2}{r^2}\sigma D \Big/_{\varrho}^{r} \frac{z^4}{4} = \pi \frac{v^2}{r^2}\sigma D\left[\frac{r^4}{4} - \frac{\varrho^4}{4}\right]$

A kerék eleven ereje $= \frac{v^2 m_k}{4} - \frac{v^2 m_k}{4}\frac{\varrho^4}{r^4}$

1

A tengely tömegeleme: T a tengely hossza σ' sűrűsége ϱ sugara

$$= \sigma' T z \, dr \, d\varphi$$

ez elem eleven ereje $= \frac{1}{2} \sigma' T z^3 dr \, d\varphi \cdot \frac{v^2}{r^2}$

A tengely eleven ereje $= \frac{1}{2} \sigma' T \frac{v^2}{r^2} \int\limits_{z=0}^{z=\varrho} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} z^3 dr \, d\varphi$

$$= \pi \frac{v^2}{r^2} \sigma' T \frac{\varrho^4}{4}$$

$$\pi \varrho^2 \sigma' T = m_t$$

A tengely eleven ereje $= \frac{v^2 m_t}{4} \cdot \frac{\varrho^2}{r^2}$

$$U_2 - U_1 = L_2 - L_1$$

$$(l_2 - l_1)(M - M')g + gkq\left(l_2^2 - l_1^2 + 2\lambda(l_1 - l_2)\right) = \frac{1}{2} v_2^2 \left\{ m + M + M' + \frac{m_k}{2} + \frac{m_t}{2} \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{m_k}{2} \frac{\varrho^4}{r^4} \right\}$$

$$- \frac{1}{2} v_1^2 \{ \text{ugyanaz} \}$$

tegyük $l_1 = 0$ $v_1 = 0$ és $l_2 = l$ $v_2 = v$ lesz

$$lg(M - M') + gkq(l^2 - 2\lambda l) = \frac{1}{2} v^2 \left(m + M + M' + \frac{m_k}{2} + \frac{m_t}{2} \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{m_k}{2} \frac{\varrho^4}{r^4} \right)$$

$$lg(M - M') + \frac{g\mu}{\lambda} l^2 - 2 g\mu l = \frac{1}{2} v^2 \left(\qquad \right)$$

$$\cancel{g(M-M')} \quad l \cdot \lambda \frac{M - M'}{\mu} + l^2 - 2\lambda l = v^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\lambda}{g\mu} \left(\qquad \right)$$

$$\lambda \frac{M-M'}{\mu} - 2\lambda = \beta \qquad \frac{1}{2}\frac{\lambda}{g\mu}\left(m+M+M'+\frac{m_k}{2}+\frac{m_t}{2}\frac{\varrho^2}{r^2}-\frac{m_k}{2}\frac{\varrho^4}{r^4}\right)=c$$

$$l^2+\beta l = c v^2$$

$$= c\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{dx}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{c}}} \qquad \frac{dl}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{l^2+\beta l}$$

$$dt = \pm\sqrt{c}\,\frac{dl}{\sqrt{l^2+\beta l}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+c^2}} = \log\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+C$$

$$t = \pm\sqrt{c}\int\frac{dl}{\sqrt{l^2+\beta l}} + C$$

$$t = \pm\sqrt{c}\,\log\left(\frac{\beta}{2}+l+\sqrt{l^2+\beta l}\right)+C$$

$$t = \pm\sqrt{c}\,\log\left(\frac{\beta}{2}+l+\sqrt{l^2+\beta l}\right)\mp\sqrt{c}\,\log\frac{\beta}{2}$$

t positív.

$$t = \sqrt{c}\,\log\left(\frac{\beta}{2}+l+\sqrt{l^2+\beta l}\right)-\sqrt{c}\,\log\frac{\beta}{2}$$

Lemérendő mennyiségek M, M', μ, m_k, m_t, λ, ϱ, r

$$t = \sqrt{c}\,\log\left(1+\frac{2l}{\beta}+\frac{2}{\beta}\sqrt{l^2+\beta l}\right)$$

Tömegközéppont megmaradásának elve.

Legyen a rendszer eltolható három irányban a nélkül hogy pontjainak viszonyos helyzete változnék.

$$\sum\left\{m_k\left(\frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x + m_k\left(\frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y + m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\delta z\right\} = \sum\left\{P_{x_k}\delta x + P_{y_k}\delta y + P_{z_k}\delta z\right\}$$

s miután áll δx δy és δz minden értékére nézve lesz:

$$\sum m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = \sum P_x \qquad \sum m_k\frac{d^2y_k}{dt^2} = \sum P_y \qquad \sum m_k\frac{d^2z_k}{dt^2} = \sum P_z$$

ha behozzuk $\sum m_k = M$ $\quad \sum m_k x_k = \mathfrak{A}M$ $\quad \sum m_k y_k = \mathfrak{B}M$ $\quad \sum m_k z_k = \mathfrak{C}M$

akkor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ a tömegközéppont összrendezői és lesz.

$$M\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} = \sum P_x \qquad M\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = \sum P_y \qquad M\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2} = \sum P_z$$

Vagyis a rendszer tömegközéppontja úgy mozog mintha az összes benne működő erők ~~a tömegközép~~ reá hatnának.

Ha a rendszernek Potentiálja van, akkor

$$\sum P_{x_k} = \sum\frac{\partial U}{\partial x_k} \qquad \sum P_{y_k} = \sum\frac{\partial U}{\partial y_k} \qquad \sum P_{z_k} = \sum\frac{\partial U}{\partial z_k}$$

Ha U a Potentiál melybe minden ható tömeget bevettünk, akkor az független x_k y_k z_k értékétől, hanem egyedül a Pontok kölcsönös távolaitól függ. Egy szóval U független az összrendezői rendszer választásától.

Válasszuk $x_n\ y_n\ z_n$ pontot összrenderők kezdőpontjának, akkor

$$x_1 - x_n = \xi_1 \qquad x_2 - x_n = \xi_2 \quad \dots\dots \quad x_{n-1} - x_n = \xi_n$$

$$y_1 - y_n = \eta_1 \qquad\qquad y_{n-1} - y_n = \eta_n$$

$$z_1 - z_n = \zeta_1 \qquad\qquad z_{n-1} - z_n = \zeta_n$$

a mennyiben U x-ektől függ.

$$U = F(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial U}{\partial \xi_{n-1}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = -\frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - \dots - \frac{\partial U}{\partial \xi_{n-1}}$$

tehát

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

éppen így $\sum \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ és $\sum \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ tehát

$$M\frac{d^2A}{dt^2} = 0 \qquad M\frac{d^2B}{dt^2} = 0 \qquad M\frac{d^2C}{dt^2} = 0$$

$$A = a + a't \qquad B = b + b't \qquad C = c + c't$$

A tömegközéppont egyenesen és egyenletesen mozog.

~~Ha~~ $\sum P_x = \sum \frac{\partial U}{\partial x} + \sum P'_x$ vagyis ha a rendszerre külső erők hatnak. Akkor a ~~[illegible]~~ tömegközéppont úgy mozog mintha reá csupán e külső erők hatnának. Egy rendszer tömegközéppontjának mozgása csupán a külső erők folytán történik, s megmarad ~~[illegible]~~ a rendszerben működő erők ~~magában véghezmenő~~ változásaikat ~~[illegible]~~ okozmányuk.

Távolba hatás. VII.

Az ezeken való ~~megmaradásának~~ állandóság és a tömegközéppont megmaradásának elve alkalmazva gömbalakú testek egymás ütközésére. (Schell 1901)

Két homogén, vagy koncentrikusan rétegzett gömb középpontja egy egyenesben mozog. Két ideális eset.

1) Teljesen rugalmatlan, akkor a két golyó ütközés után egy testként s együtt mozog tovább.

2) Teljesen rugalmas, a két golyó alakját ütközés után teljesen visszanyeri s különválva marad.

---

a) Két teljesen rugalmatlan golyó.

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

~~$m_1 = m$~~

$$m_1 = m_2$$

$$v_x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

$$v_1 = -v_2) \qquad v_x = 0$$

$$v_1 = v_2 \qquad v_x = v_1$$

b) Két teljesen rugalmas golyó

$$v_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}$$

ezenkívül Munka nem végeztetvén

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1 + v_1' - v_2 - v_2)$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1' - 2m_2 v_2$$

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2u - v_1$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2u - v_2$$

<u>Példa</u> legyen $v_2 = 0$ a testek rugalmatlanok ütközés után $u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

ha $m_2 = \infty$ akkor a ~~testek nyugalomban~~ $u = 0$

$\lambda = \frac{m_1}{m_2}$

a testek rugalmasak $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ $\quad \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = -1$

és $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

ha $m_2 = \infty$ $v_1' = -v_1$

és $v_2 = 0$

Ha $m_1 = m_2$ akkor:

$$v_1' = v_2$$

$$v_2' = v_1$$

Távolba hatás VIII

Felületek elve.

Szépen megcsinálva 1877 okt 19.

A Lagrange féle egyenlet:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\delta x_k + m_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\delta y_k + m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\delta z_k\right\} = \sum_{k=1}^{k=n}\left(P_{kx}\delta x_k + P_{ky}\delta y_k + P_{kz}\delta z_k\right)$$

fenáll minden szabad rendszerre, vagy kényszernek alávetett rendszerre nézve is ha δx_k δy_k δz_k virtuális eltolódásai.

Legyen rendszerünk olyan hogy forgatása x tengely körül lehetséges legyen, úgy hogy az egyes pontok forgási sugarai ugyanazon $\delta\varphi$ szögletet írják le. Ez akkor lesz ha a rendszer pontjai kényszerítve vannak oly forgási felületen mozogni, melynek tengelye x. Akkor is lesz ez természetesen ha a rendszer egészen szabad.

Tegyük polárösszrendezőkben.

$$y_k = \varrho_k\cos\varphi_k \qquad z_k = \varrho_k\sin\varphi_k$$

akkor

$$\delta y_k = \frac{dy_k}{dt}\delta t \qquad \delta z_k = \frac{dz_k}{dt}\delta t$$

$$dy_k = \delta t\left(\frac{d\varrho_k}{dt}\cos\varphi_k - \varrho_k\sin\varphi_k\frac{d\varphi_k}{dt}\right) \qquad \delta z_k = \delta t\left(\frac{d\varrho_k}{dt}\sin\varphi_k + \varrho_k\cos\varphi_k\frac{d\varphi_k}{dt}\right)$$

Írjuk fel Lagrange egyenletét azon eltolódásokra hol $\delta x_k = 0$ és $\frac{d\varrho_k}{dt}\delta t = 0$ és $\frac{d\varphi_k}{dt}\delta t$ valamennyi pontra nézve ugyanaz. Akkor.

$$\delta y_k = -z_k\frac{d\varphi_k}{dt}\delta t \qquad \delta z_k = y_k\frac{d\varphi_k}{dt}\delta t$$

tehát:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{m_k y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - m_k z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}\right\}\frac{d\varphi}{dt}\delta t = \sum_{k=1}^{k=n}\left\{P_{kz} y_k - P_{ky} z_k\right\}\frac{d\varphi}{dt}\delta t$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left\{\frac{d^2 z_k}{dt^2} y_k - \frac{d^2 y_k}{dt^2} z_k\right\} = \sum_{k=1}\left\{P_{kz} y_k - P_{ky} z_k\right\}$$

Ha Potentiál van akkor

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{m_k y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - m_k z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}\right\}\frac{d\varphi}{dt}\delta t = \delta U$$

Ez eseteben azonban (ha Potentiál van) $\delta U = 0$ mert U $r_{k\lambda}$-tól függ s mint ki mutathatjuk $r_{k\lambda}$ nem változik ha φ_k az említett módon $\delta\varphi_k$-val változik, úgy hogy $\varphi_k - \varphi_\lambda$ változatlan maradjon. Hiszen:

$$r_{k\lambda}^2 = (x_k - x_\lambda)^2 + (y_k - y_\lambda)^2 + (z_k - z_\lambda)^2$$

vagyis

$$r_{k\lambda} = (x_k - x_\lambda)^2 + (\varrho_k \cos\varphi_k - \varrho_\lambda \cos\varphi_\lambda)^2 + (\varrho_k \sin\varphi_k - \varrho_\lambda \sin\varphi_\lambda)^2$$

$$= (x_k - x_\lambda)^2 + \varrho_k^2 + \varrho_\lambda^2 - 2\varrho_k\varrho_\lambda \cos(\varphi_k - \varphi_\lambda)$$

tehát csakugyan $r_{k\lambda}$ csupán $(\varphi_k - \varphi_\lambda)$ tól függ s így független a $\delta\varphi$-tól ha $\delta\varphi$ valamennyi pontra nézve ugyanaz.

Potentiál esetében e szerint:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left\{ y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right\} = 0 \qquad 1)$$

és így

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left\{ y_k \frac{d z_k}{dt} - z_k \frac{d y_k}{dt} \right\} = C \quad (\text{constans}) \qquad 2)$$

~~y_k~~ tekintetbe véve hogy

$$y_k = \varrho_k \cos\varphi_k \quad \text{és} \quad z_k = \varrho_k \cancel{\cos} \sin\varphi_k$$

$$\cancel{\frac{dy_k}{dt} = \varrho_k}$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \cos\varphi_k \frac{d\varrho_k}{dt} - \sin\varphi_k \varrho_k \frac{d\varphi_k}{dt} \quad \Bigg| \quad \frac{dz_k}{dt} = \sin\varphi_k \frac{d\varrho_k}{dt} + \cos\varphi_k \varrho_k \frac{d\varphi_k}{dt}$$

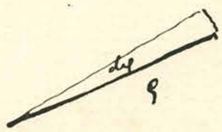
$$-z_k \frac{dy_k}{dt} = -\varrho_k \sin\varphi_k \cos\varphi_k \frac{d\varrho_k}{dt} + \varrho_k^2 \sin^2\varphi_k \frac{d\varphi_k}{dt} \quad \Bigg| \quad y_k \frac{dz_k}{dt} = \varrho_k \sin\varphi_k \cos\varphi_k \frac{d\varrho_k}{dt} + \varrho_k^2 \cos^2\varphi_k \frac{d\varphi_k}{dt}$$

tehát:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} = C \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$\sum m_k \int_{t_1}^{t_2} \varrho_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} dt = C(t_2 - t_1) \quad \ldots \quad 4)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varrho_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt}\, dt = 2 F_{12}$$ $F_{1,2}$ a t_1 és t_2 között ϱ_k által súrolt felület



$$\varrho^2 \frac{d\varphi_k}{dt}\, dt = dF$$

E szerint: Egy teljesen szabad rendszerben melynek Potentiálja van a rendszer pontjainak forgási sugarai által súrolt felületek összege, az idővel arányos. Forgási sugár a pontból a forgási tengelyre bocsátott merőleges.
Kényszernek alávetett rendszerben, melynek Potentiálja van, s ha ~~lehet~~ lehetséges ~~az egyes pontok forgási sugarait~~ a pontokat úgy eltolni, hogy forgási sugaraik egy tengelyre vonatkoztatva egyidejűleg ugyanazon szögleteket írják le, a ~~rendszer~~ pontok forgási sugarai e tengelyre vonatkoztatva oly felületeket írnak le, melyeknek összege az idővel arányos. —

Teljesen szabad rendszerre melynek Potentiálja van ~~nézve~~ e tétel ~~minden~~ a három tengelyre nézve áll.

Ha egy tengelyrendszert veszünk fel beláthatjuk, hogy épen úgy fog állani az y és z tengelyekre, itt is ugyanazon okoskodások állván: Itt azután lesz.

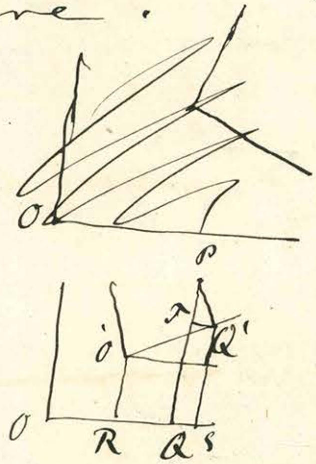
$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k\left(z_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dz_k}{dt}\right) = C' \qquad \text{és}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left\{ x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right\} = 0$$

lásd a folytatást

Fennáll bármelyik az x tengellyel, vagy az y tengellyel, vagy a z tengellyel párhuzamos tengelyre.

Legyen az x tengellyel $\parallel$-ra ~~az olyan~~ véve benne



$$\cancel{x' = a + x}$$

$$\cancel{y' = b + y}$$

~~ξ ...~~

$$\cancel{x = a + \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha}$$

$$\cancel{y = b + \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha}$$

$$\cancel{\frac{dx}{dt} =} \quad \cancel{x = a + \xi \cos\beta} -$$

$$y = b + \eta \cos\beta - \xi \sin\beta$$

$$z = c + \eta \sin\beta + \xi \cos\beta$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos\beta \frac{d\eta}{dt} - \sin\beta \frac{d\xi}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \cos\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} - \sin\beta \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin\beta \frac{d\eta}{dt} + \cos\beta \frac{d\xi}{dt} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \sin\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \cos\beta \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\cancel{x \frac{dz}{dt}} =$$

$$y \frac{d^2z}{dt^2} = b \sin\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} + b \cos\beta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} \sin\beta\cos\beta + \eta \cos^2\beta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \sin^2\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} - \xi \sin\beta\cos\beta \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$z \frac{d^2y}{dt^2} = c \cos\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} - c \sin\beta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} \sin\beta\cos\beta - \eta \sin^2\beta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi \cos^2\beta \frac{d^2\eta}{dt^2} - \xi \sin\beta\cos\beta \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2}(b \sin\beta - c \cos\beta) + \frac{d^2\xi}{dt^2}(b \cos\beta + c \sin\beta) + \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2\eta}{dt^2}$$

Ezszerint 1) egyenlet következő alakot ölt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left\{ (b\sin\beta - c\cos\beta)\frac{d^2\eta_k}{dt^2} + (b\cos\beta + c\sin\beta)\frac{d^2\xi_k}{dt^2} + \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\eta}{dt^2} \right\} = 0$$

Ha a rendszer teljesen szabad és potentiálja van, akkor áll reá nézve a tömegközéppont megmaradásának elve, vagyis

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \frac{d^2\eta_k}{dt^2} = 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} m_k \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = 0$$

e szerint a fentebbi egyenlet.

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left\{ \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\eta}{dt^2} \right\} = 0$$

a mi kifejezi a felületek ~~megma~~ elvét.

Ms 5096/1. Eötvös Loránd: Mechanikai
IX–XIX. alapelvek előadása

Távolba hatás IX.

Felületek elve (folytatás)

Találtuk a szabad rendszerre

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{k=n} m_k \left\{ y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right\} = 0 \\
&\sum m_k \left\{ z_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right\} = 0 \\
&\sum m_k \left\{ x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right\} = 0
\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

vagy

$$\left.\begin{aligned}
&\sum m_k \left\{ y_k \frac{dz_k}{dt} - z_k \frac{dy_k}{dt} \right\} = C \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = C' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = C''
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Ha az 1) s ennek folytán 2) egyenletek fenállanak egy koordinátarendszerre akkor fennállanak ~~a másikra~~ minden másikra is

a) Fenállanak egy az előbbivel párhuzamos rendszerre így hogy

$$x = a + \xi$$
$$y = b + \eta$$
$$z = c + \zeta$$

Mivel akkor 1) egyenletek lesznek:

$$\sum m\left\{(b+\eta)\frac{d^2\zeta}{dt^2}-(c+\zeta)\frac{d^2\eta}{dt^2}\right\}=0$$

tehát

$$\sum m\left\{\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right\}+\sum mb\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\sum mc\frac{d^2\eta}{dt^2}$$

már pedig ha szabad rendszerünk van melyre nézve áll a súlypont megmaradásának elve arra nézve.

$$\sum m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0 \quad \text{és} \quad \sum m\frac{d^2\eta}{dt^2}=0$$

tehát

$$\sum m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)=\alpha \quad \text{és ct.}$$

Ha így fenáll minden az erdétnél párhuzamos tengelyrendszere fenáll egyszersmind minden olyanra is melynek vele közös kezdőpontja van. Ahilyen

$$x\ \cancel{\xi}=a\xi+b\eta+c\zeta$$

$$y\ \cancel{\eta}=a'\xi+b'\eta+c'\zeta$$

$$z\ \cancel{\zeta}=a''\xi+b''\eta+c''\zeta \quad \text{ahol}$$

$a=b'c''-b''c'$ $\quad$ $b=c'a''-a'c''$ $\quad$ $c=a'b''-a''b'$

$a'=b''c-c''b$ $\quad$ $b'=c''a-ca''$ $\quad$ $c'=a''b-ab''$

$a''=bc'-c'b$ $\quad$ $b''=ca'-c'a$ $\quad$ $c''=ab'-a'b$

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \alpha$$

$$y\frac{dz}{dt} = \left(a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}\right)\left(a'\xi + b'\eta + c'\zeta\right)$$

$$z\frac{dy}{dt} = \left(a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + c'\frac{d\zeta}{dt}\right)\left(a''\xi + b''\eta + c''\zeta\right)$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \eta\frac{d\xi}{dt}(a''b' - a'b'') + \zeta\frac{d\xi}{dt}(a''c' - a'c'')$$

$$+ \xi\frac{d\eta}{dt}(b''a' - b'a'') + \zeta\frac{d\eta}{dt}(b''c' - b'c'')$$

$$+ \xi\frac{d\zeta}{dt}(c''a' - a''c') + \eta\frac{d\zeta}{dt}(b'c'' - b''c')$$

$$= \cancel{\eta\frac{d\xi}{dt}} - c\eta\frac{d\xi}{dt} + b\zeta\frac{d\xi}{dt}$$

$$+ c\xi\frac{d\eta}{dt} - a\zeta\frac{d\eta}{dt}$$

$$- b\xi\frac{d\zeta}{dt} + a\eta\frac{d\zeta}{dt}$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = a\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) + b\left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right) + c\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$= a\alpha + b\beta + c\gamma = \text{álland\'o}$$

Quod erat demonstrandum.

Mechanikai alapelvek (távolba hatás) X.

Virtuális munka elve.

$$\delta L = \sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

$$\sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z) = 0$$

~~[illegible]~~

Ha az eltolódásnál a kényszer erőkön munka végeztetik, ha előbben a kényszertől megszabadít. akkor.

$$\sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z) + A = 0$$

A = positiv a virtuális eltolódásnál tehát

$$\sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z) \leq 0$$

Ha az eltolódásnak ellentett is lehetséges akkor

$$\sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z) = 0$$

Alkalmazások.

A föld magnetikus ereje. Ennek van Potentialfüggvénye.

$$\int P_{\kappa\lambda}\, dr_{\kappa\lambda} = \mathfrak{L}_{\kappa\lambda} \qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} - \int \frac{P_{\kappa\lambda}\, dr_{\kappa\lambda}}{m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} - R_{\kappa\lambda} = V$$

$$X_\kappa = \frac{\partial V}{\partial x_\kappa}$$

Lássuk ezt a magnetikus folyadékokra nézve

$$P_{\kappa\lambda} = -\frac{\cancel{\ } m\mu}{r^2} \qquad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$\int -\frac{m\mu}{r^2}\, dr = \frac{m\mu}{r} \qquad R_{\kappa\lambda} = \frac{\cancel{m}\mu}{r}$$

$$\cancel{\sum_{\lambda=1} - \frac{m\mu}{r}} \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} -\frac{\mu}{r} = V$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} + \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dx}$$

$$2r\frac{dr}{dx} = 2(x-\xi) \qquad X = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{x-\xi}{r}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-\xi}{r}$$

$$\sum \frac{\mu}{r^2} \cos(r_{x\xi}, x)$$

Ha μ folytonosan van eloszolva akkor

$$-\int \frac{d\mu}{r} = V.$$

A föld magnetismusának Potentiálja van

Ha $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$ $Z = \frac{\partial V}{\partial z}$

akkor $S = \frac{dV}{ds}$

~~akk~~

$$S = R\cos\varphi$$
$$= R\cos\alpha\cos\alpha' + R\cos\beta\cos\beta' + R\cos\gamma\cos\gamma'$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta' + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\beta'$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{ds}$$

~~$\frac{dz}{ds}$~~

~~s akk~~ $S = \frac{dV}{ds}$

Legyen s egy ív a föld felületén akkor

$\frac{dV}{ds} = \varphi\cos\delta$ $\delta = f(\varphi, ds)$

$dV = \varphi\cos\delta\, ds$ P_0 és P_1

$$V_1 - V_0 = \int_{s_0}^{s_1} \varphi\cos\delta\, ds$$

1) Az $\int_{s_0}^{s_1} \varphi \cos \vartheta \, ds$ független az úttól.

2) $= 0$ ha a görbe zárt

3) Ha egy zárt görbén ϑ nem mindig $= \frac{\pi}{2}$ akkor részben nagyobb részben kisebb ennél.

Niveaufelület.

$V = V_0$ az erő φ erre merőleges mert hisz $\frac{dV}{\partial x} = 0$ és $\frac{dV}{\partial z} = 0$ e felületben az erő reá merőleges.

$$V = V_0 + dV_0$$

dz a távolság.

$$V = V_0$$

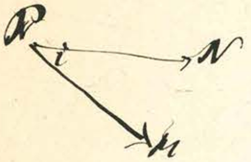
$$\varphi = \frac{dV_0}{dz}.$$

az erő.

$$V_1 - V_0 = \int_{s_0}^{s_1} \pi \cos\tau \, ds$$

A föld felület egy pontjában legyen

φ = a magn. erő. PM az iránya



π és PN

PN horizontális

i inclinatió.

N PM a magnetikus meridián

ϑ $\quad$ τ

$\tau = (\pi, s)$ $\quad$ $\vartheta = (\varphi, s)$

$$\frac{dV}{ds} = \varphi \cos\vartheta$$

$\varphi = \frac{\pi}{\cos i}$

$\varphi \cos i = \pi$ $\quad$ $\cos\vartheta = \cos i \cos\tau$

$\varphi \cos\vartheta = \pi \cos\tau$

$$\frac{dV}{ds} = \pi \cos\tau$$

$$V_1 - V_0 = \int_{s_0}^{s_1} \pi \cos\tau \, ds.$$

Mechanikai alapelvek. (távolba hatás) XI.

Földmagnetismus folytatás.

Niveaufelület $V = V_0$ az erő minden pontban merőleges a Niveaufelületre.

Válasszunk Niveaufelületeket úgy hogy

$$V_0 = V_0$$
$$V_1 = V_0 + \Delta V_0$$
$$V_2 = V_0 + 2\Delta V_0 \quad \text{etc.}$$

akkor az erő mindenütt

$$\cancel{\frac{dV}{dN}} = \cancel{\frac{\Delta V_0}{\Delta N} = \frac{dV_0}{d}}$$

$$\delta V = \Delta V_0 = \frac{dV}{dN}\Delta N$$

$$\frac{dV}{dN} = \frac{\Delta V_0}{\Delta N}$$

Tehát az erő a Niveauréteg vastagságával arányos.

A Niveau felületek a föld felületét metszik a magnetikus parallel vonalakban. A magnetikus erő azon összetevője $\underline{h}$ mely a föld felületébe esik, mindenütt merőleges a magnetikus parallel vonalakra. Ez az összetevő $= \frac{dV}{dN}\cos i$

i az inclinatió. Vagyis

$\frac{dV}{d\sigma}$ hol σ a magnetikus meridián ívét jeleli

$$\frac{dV}{d\sigma} = \frac{dV}{dN}\cos i$$

$$\frac{dV}{d\sigma} = \quad \delta V_0 = \frac{dV}{dN}\delta N$$

$$\cancel{\cos i\,\delta V_0 = \frac{dV}{d\sigma}}$$

$$\cancel{\cos i\,\delta V_0 = \frac{dV}{d\sigma}\cdot\delta N}$$

$$\delta V_0 = \frac{dV}{dN}\delta N$$

$$\delta V_0 = \frac{dV}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\cos i}\,\delta s \cos i. \quad = \delta V_0 = \frac{dV}{ds}\delta s$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\delta V_0}{\delta s}.$$

Az adatok havi és évi középértékek 1871 ről

Declinatió. Budapest, Bécs, Prága

	Budapest	Bécs	Prága
Jan.	9° 47'8	11° 5'7	11° 57·40
Febr.	46·7	3·7	56·34
Mart.	44·5	4·6	56·10
Apr.	42·3	4·2	54·95
Maj.	44·1	5·0	55·45
Jun.	44·4	3·7	54·82
Jul.	42·4	2·8	55·41
Aug.	41·9	4·0	54·03
Sept.	41·5	5·1	53·13
Okt	41·7	3·7	51·03
Nov.	40·4	0·5	52·14
Dec.	40·7	1·5	49·66
Év	9° 43'2	11° 3'7	11° 54'20

Az Inclinatió legvalószinübb évi

közepe Budapesten 62° 57'7

Bécsben 63 31·4

Prágában 65 12·5

A vízszintes Intensitás.

	Budapesten	Bécsben	Prágában
Jan	2·1004	2·0531	1·9315
Febr.	0994	30	318
márc.	81	23	392
Apr.	61	15	443
Máj.	76	18	423
Jun.	77	28	376
Jul	78	25	376
Aug	77	19	348
Sept	60	03	337
okt	41	35	402
Nov.	28	34	362
Dec.	84	36	347
Év.	2·0972	2·0525	1·9370

Földrajzi szegvenyek

Budapest	36°43′	+47°30′
Bécs	34° 2′	+48°13′
Prága	32° 5′	+50° 5′

A magnetikus erő horizontális összetevője $\underline{h}$ [illegible] a magnetikus parallel görbékre és ~~iránya~~ fordítva arányos a parallelszalag szélességével.

~~Mondd~~ Vegyünk egy pontot a földön P-t, melyben PM a föld magn. erejének K nak iránya PL. a vízszintes. ~~egy hosszú~~ s menjünk abból s innen egy másik pontba akkor.

$$\frac{dV}{ds} = \cancel{\varrho\cos\nu}$$

$$\frac{dV}{ds} = K.\cos\delta$$

$$\cos\delta = \cos i \cos\tau \quad \text{tehát}$$

$$\frac{dV}{ds} = K\cos i\cos\tau = h\cos\tau$$

$$dV = h\cos\tau\, ds$$

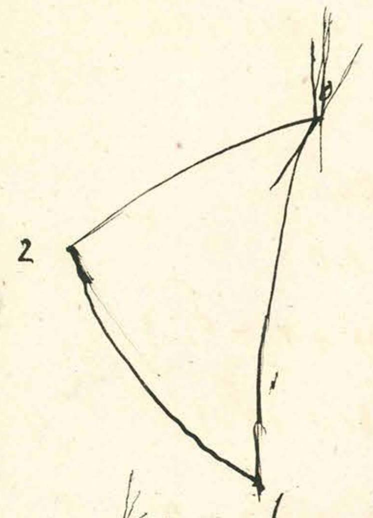
$$V_1 - V_0 = \int_{s_0}^{s_1} h\cos\tau\, ds$$

1) az integrál független az úttól.

2) Ugyanaz ha körülmegyünk

3) Ha τ nem mindenütt $\frac{\pi}{2}$,

akkor részben hegyes részben tompa.



~~01 02 21~~

0 1 2 három pont a föld felületén

01 02 12 legnagyobb körök ívei.

δ_0 δ_1 δ_2 a deklinatiók

északról ~~keletre~~ nyugatra pozitívan számítva

(01) a 01 vonal azimuthja 0-ban

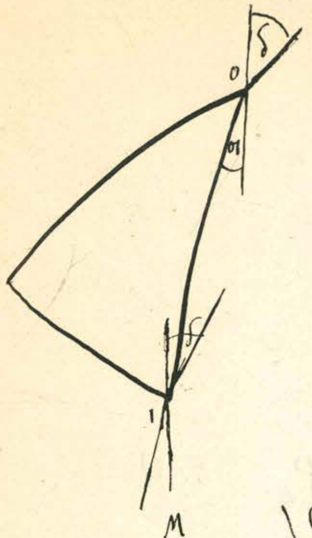
(10) a 01 vonal azimuthja 1-ben

Az azimuthok déltől nyugatnak számítva.

Körüljárólag $\int_0^1 h\cos\tau\, ds + \int_1^2 h\cos\tau\, ds + \int_2^0 h\cos\tau\, ds$.

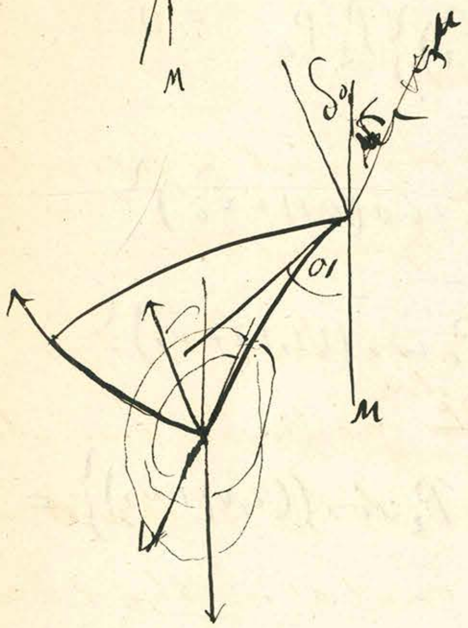
$$\int_0^1 h\cos\tau\, ds = \frac{1}{2}\left(h_0\cos\tau_0 + h_1^*\cos\tau_1^*\right) P_0P_1$$

$$\tau_0 = (\delta_0 + \pi - 01) \qquad \tau_1 =$$



$\tau_0 = \pi - \delta_0 + (01)$

$\tau_1 =$



$\tau_0 = \left(\pi - (01) - \delta_0\right)$

$\tau_1 =$

$1,0 =$

$\pi - \left((1,0) + \pi + \delta_1\right)$

$2\pi - (10 + \delta_1)$

$\tau + \delta + 10 - \pi = \pi$

$\tau = 2\pi - (10 + \delta_1)$

$\cos\tau_0 = -\cos\left((01) + \delta_0\right) \qquad \cos\tau_1 = \cos(10 + \delta_1)$

$\delta_0' = \frac{1}{2}\left\{ h_1 \cos\left((1,0) + \delta_1\right) - h_0 \cos\left((01) + \delta_0\right)\right\}$

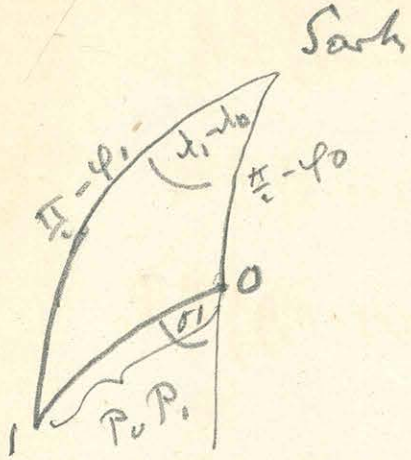
τ_1''

$$\cancel{h_0 \{ P_0 P_1 \cos}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left\{ h_1 \cos\left((1,0)+\delta_1\right) - h_0 \cos\left((0,1)+\delta_0\right)\right\} P_0P_1 \\
+\ &\tfrac{1}{2}\left\{ h_2 \cos\left((2,1)+\delta_2\right) - h_1 \cos\left((1,2)+\delta_1\right)\right\} P_1P_2 \\
+\ &\tfrac{1}{2}\left\{ h_0 \cos\left((0,2)+\delta_0\right) - h_2 \cos\left((2,0)+\delta_2\right)\right\} P_2P_0 \quad = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h_0 \left\{ P_0P_2 \cos\left((0,2)+\delta_0\right) - P_0P_1 \cos\left((0,1)+\delta_0\right)\right\} \\
+\ &h_1 \left\{ P_0P_1 \cos\left((1,0)+\delta_1\right) - P_1P_2 \cos\left((1,2)+\delta_1\right)\right\} \\
+\ &h_2 \left\{ P_1P_2 \cos\left((2,1)+\delta_2\right) - P_0P_2 \cos\left((2,0)+\delta_2\right)\right\} = 0
\end{aligned}$$

	geogr. Brl	[illegible] Greenwich östl.	δ	h	
Göttingen	57°21°	9°58	18°38	0,50980	
~~Paris~~ Mailand	45°28	9°9	18°33	0,57094	Steinheil
Paris	48°52	2°21	22°4	0,51804	0,51696


Sark
$\frac{\pi}{2} - \varphi_1$
$\lambda_1 - \lambda_0$
$\frac{\pi}{2} - \varphi_0$
0
σ_1
$P_0 P_1$
1

Mechanikai alapelvek. (Távolba hatás) XII

Alkalmazás az electricitási jelenségekre.

A testekben electricus folyadékok, melyek egymásra a III alapfeltevés értelmében hatnak.

Nehéz testek s electricus folyadékok között erők, melyek a mozgást a felületen akadályozzák.

A potentiálfüggvény

$$V = \frac{Q_{\kappa\lambda}}{\varepsilon} = \sum \frac{1}{\varepsilon}\int \rho_{\kappa\lambda}\, d\tau_{\kappa\lambda}.$$

$$V_\lambda = \sum \frac{Q_{\kappa\lambda}}{\varepsilon_\kappa}$$

$$V_\lambda = -\sum \frac{Q_{\kappa\lambda}}{\varepsilon_\kappa} \qquad V = -\frac{\sum Q}{\varepsilon}$$

V_λ a λ tömegek potentiálfüggvénye.

Akkor azután.

$$X = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial V_\lambda}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial V_\lambda}{\partial z}.$$

Az electricus tömegek potentiálfüggvénye e szerint állandó, ha vezetők belsejében az electrikus folyadékok egyensúlyban vannak.

~~A folyadékok a felületre szoritvák~~

Az elektrikus potentiál adottakban függvény

$$V_\lambda = A\,\mathcal{E}_\lambda$$

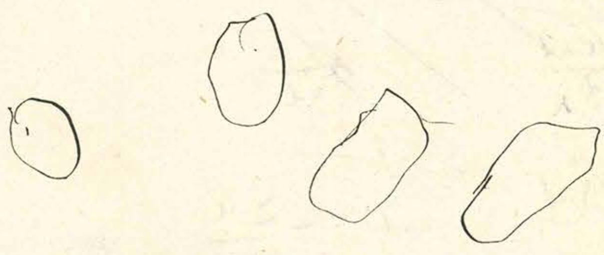
arányos az összes elektrikus folyadék mennyiségével.

A földre nézve constans vele összekötött testekre ugyanaz és mégis $\cancel{V = J}$ e = 0 tehát $V = 0$.

A Potentiál

$$U = -\sum\sum Q_{\kappa\lambda}.$$

$$\cancel{U = \frac{1}{2}\sum \varepsilon \sum \frac{Q_{\kappa\lambda}}{\varepsilon_\kappa}}$$



$\varepsilon_\kappa V_{\kappa\lambda}$

$\varepsilon_\kappa V_\lambda$

$\varepsilon_1 V_1$

$-\sum Q_{\kappa\lambda}$

$\cancel{\varepsilon_{k1}}$

$$\mathfrak{U} = -\sum Q_{k\lambda}$$

$\cancel{\varepsilon_1}$

$$\varepsilon_1 \left\{ \frac{\sum Q_{k\lambda}}{\varepsilon_1} \right\}$$

$$+ \varepsilon_2 \left\{ \frac{\sum Q_{k\lambda}}{\varepsilon_2} \right\}$$

$$\cancel{\varepsilon_1 V_1 = \mathfrak{U}} = \frac{1}{2} \sum \varepsilon V \qquad \mathfrak{U} = \frac{1}{2} \sum \varepsilon V$$

$$W = \frac{1}{2} \cancel{\{ \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 + \varepsilon_3} V_3$$

$\mathfrak{U} =$

$$\mathfrak{U} = - \sum Q_{k\lambda}$$

$$\mathfrak{U} = -\frac{1}{2} \quad \cancel{\varepsilon_1 \{ Q_{1\lambda} + Q_{2\lambda} + Q}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \{ Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + \dots Q_{1n} \}$$

$$+ \varepsilon_2 \{ Q_{21} + Q_{23} + Q_{24} + \dots Q_{2n} \}$$

$\underline{Q_k}$

$+ \dots$

$-\sum Q \dots$

$$\frac{Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + \dots Q_{1n}}{\varepsilon_1}$$

V_1

$U = V, Q.$

Legyeni palackok.

$V = AE$

$$U = \tfrac{1}{2}AE^2 + \tfrac{1}{2}JE$$

$\cancel{J = E}$

Kösszük össze a földdel.

$L = U + h.$

$$U_1 = \tfrac{1}{2}AE^2 + \tfrac{1}{2}JE$$

$\cancel{J = AE}$

$\cancel{U_2 = \frac{AE}{2}}$ $U_2 = 0$

$\frac{AE^2}{2}$

$U = \tfrac{1}{2}EV \quad V = \frac{E}{n}$

$\cancel{U = \tfrac{1}{2} n E V}$ $U = \frac{1}{2}\frac{E^2}{n}$

$\cancel{V = \frac{E}{n}}$

$\cancel{U = \tfrac{1}{2} A \frac{E}{n}}$

$$\cancel{U_1 = \frac{A}{2}\frac{\mathcal{E}^2}{n_1}}$$

$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$

n_2

$$\cancel{U}$$

$$U = \frac{A}{2}\frac{\mathcal{E}^2}{n}$$

$$U' = \frac{A}{2}\frac{\mathcal{E}^2}{n+m}$$

$$U' - U = \frac{A}{2}\Big($$

$$= \frac{A}{2}\mathcal{E}^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$$

$$= -\frac{A}{2}\mathcal{E}^2\frac{m}{n(n+m)}$$

Przy ewentualnej =

$$U = \frac{1}{2}\left\{ V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \dots \right\}$$

n palach.

$$V_1 = A Q_1$$

$$U = -\frac{1}{2}A\{$$

$$\cancel{U = -\frac{1}{2} A V Q_1^2}$$

$$U = -\frac{1}{2} V (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots)$$

$$U = \frac{1}{2} V Q$$

$$V = A \cdot \frac{Q}{n}$$

$$U = -\frac{1}{2} A \frac{Q^2}{n}$$

$$U' = -\frac{1}{2} A \frac{Q^2}{n+m}$$

$$U' - U = \frac{1}{2} A Q^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} A Q^2 \frac{m}{n(n+m)}}$$

Laid Riess.

Mechanikai alapelvek XIII (távolba hatás)

Homogén gömb Potentiálja Newtonféle erők szerint.

A potentiál
$$U = \sum m V$$

$$\cancel{V = \sum R} \qquad V = -\sum R_{\kappa\lambda}$$

Newtonféle erőknél

$$-f \cdot \frac{m_\kappa m_\lambda}{\cancel{m_\kappa}\, r_{\kappa\lambda}}$$

$$V = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{m_\lambda}{r_{\kappa\lambda}}$$

Itt nem szabad a κ^{ik} pontot az egyik λ-ba helyezni.

Folytonos anyag külső pont.

$$V = \int \frac{dm}{r}$$

folytonos anyag belső pont:

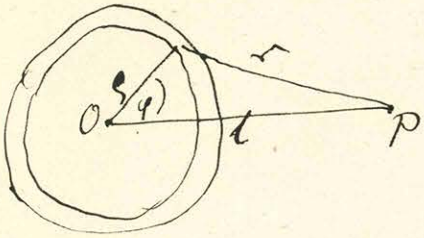
$$V = \int \frac{dm}{r}.$$

Itt benne van~~az~~nak igaz oly elemek melyekre nézve $\frac{1}{r}$ végtelen nagy ezek mégis csupán végtelen kicsiny hatással járulnak az összeghez be fogjuk bebizonyítani. Így azt

$$U = \iint dm_1 \int \frac{dm_1}{r}$$

mindkét integrál az egész testre kiterjesztendő.

Gömbhéj potentiálfüggvénye



ϱ a gömbhéj sugara $d\varrho$ vastagsága

σ sűrűsége.

l a pont távola a gömbhéj középpontjától

r a pont távola a gömbhéj egy elemétől

a térfogatelem

$$= d\varrho \cdot \varrho\, d\varphi \cdot \varrho \sin\vartheta\, d\vartheta$$

~~sűrűsége~~ tömege:

$$= \sigma \varrho^2 d\varrho\, d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta$$

potentiálfüggvény eleme

$$= \frac{\sigma \varrho^2 d\varrho\, d\varphi \sin\varphi\, d\vartheta}{r}$$

Az integrál egy gyűrűre =

$$= \cancel{\int_0^{2\pi} \frac{\sigma \varrho^2 d\varrho\, d\varphi \sin\varphi\, d\vartheta}{r}}$$

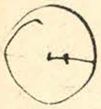
$$= \sigma \varrho^2 d\varrho\, 2\pi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{r}$$

$$\cos\varphi = \frac{\varrho^2 + l^2 - r^2}{2\varrho l} \quad \text{tehát} \quad -\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2r\,dr}{2\varrho l}$$

$$\text{egy gyűrűre} = \sigma \varrho^2 d\varrho\, 2\pi \frac{r\,dr}{r \varrho l} = \sigma \varrho^2 d\varrho\, 2\pi \frac{dr}{\varrho l}$$

I kívül $\int_{l-\varrho}^{l+\varrho} \frac{dr}{\varrho l} = \frac{1}{\varrho l}[2\varrho]$
$= \frac{2}{l}$

$dV_k = f\cdot 4\pi\varrho^2\sigma\, d\varrho \cdot \frac{1}{l}$



$dV_b = \int_{\varrho-l}^{\varrho+l} = V_b = f\cdot 4\pi\varrho^2\sigma\, d\varrho\, \frac{1}{\varrho}$

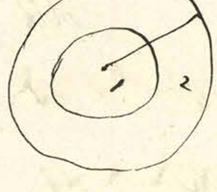
$\int_0^{\text{gömb}} = 4\pi\sigma\frac{R^2}{2}$

A gömbhéj potentiál függvénye külső pontra

$$dV_k = f\,4\pi\varrho^2\sigma\, d\varrho\, \frac{1}{l} = \frac{dm}{l}$$

$$dV_b = f\,4\pi\varrho^2\sigma\, d\varrho\, \frac{1}{\varrho} = \frac{dm}{\varrho}$$

~~Gömb~~ Homogén gömb potentiálfüggvénye egy középpontjától l távolra levő belső pontra. A gömb sugara R



$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \int_0^l f\,4\pi\varrho^2\sigma\, d\varrho\,\frac{1}{l} = f\,4\pi\frac{1}{l}\sigma\int_0^l \varrho^2 d\varrho = f\,4\pi\frac{1}{l}\sigma\frac{l^3}{3} = f\frac{4\pi\sigma}{3}l^2$$

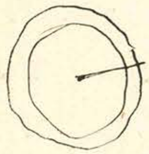
$$V_2 = \int_l^R f\,4\pi\varrho\sigma\, d\varrho = f\,4\pi\sigma\int_l^R \varrho\, d\varrho = \frac{f\,4\pi\sigma}{2}(R^2 - l^2)$$

$$V = V_1 + V_2 = f\,4\pi\sigma\left(\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{2} + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{f\,4\pi\sigma}{6}(3R^2 - l^2)$$

A potentiál

$$U = \frac{1}{2}\int dm\, V = \frac{1}{2}\int dm\, f\,\frac{4\pi\sigma}{6}\left(3R^2 - \ell^2\right) = f\,\frac{4\pi\sigma}{12}\int \sigma\, \ell^2 d\ell \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \left(3R^2 - \ell^2\right)$$

$$U = f\cdot\frac{4\pi\sigma}{12}\cdot 4\pi\sigma \int_0^R \ell^2 d\ell \left(3R^2 - \ell^2\right) = f\,\frac{4\pi\sigma\cdot 4\pi\sigma}{12}\left[3R^2\cdot\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5}\right]$$



$$U = f\,\frac{4\pi\sigma\cdot 4\pi\sigma}{12\cdot 5}\cdot 4R^5 = f\cdot\frac{4\pi\sigma\cdot 4\pi\sigma}{3\cdot 3}\cdot\frac{12}{20}R^5$$

$$\cancel{M = f\cdot M} \qquad U = \frac{3}{5}f\cdot\frac{M^2}{R}$$

~~A hő melyet egy test kiad ha M tömeg $d\vartheta$ hőfokkal alább száll~~

Egy test hőmennyiségénél ~~...~~ elvesz. dQ hőt, maga külső munka által egy. $\frac{1}{k}dW$ hőt, összes hőmennyisége, melyitést fogja okozni.. ~~Ha tömege M fajhője σ akkor hőemelkedése~~ dτre

$$dQ' = dQ + \frac{1}{k}dW$$

$$\cancel{M}\, dQ' = M c\, d\vartheta$$

$$\cancel{dQ = \frac{c}{M}\,dt}\cdot dQ' = M c\, d\vartheta$$

$$M\sigma\, d\vartheta = dQ + \frac{1}{k}dW$$

~~A test által kifelé átadott hő~~

$$-dQ = \frac{1}{k}\,dW - M\sigma\, d\vartheta$$

$$M\sigma \frac{d\vartheta}{dt}dt = \frac{dQ}{dt}dt + \frac{1}{k}\frac{dW}{dt}dt.$$

Legyen a hő melyet egy test kiad mennyiségének dQ, a hő melyet munka által nyer $\frac{1}{k}dW$ akkor hőveszteség

$$dQ - \frac{1}{k}dW$$

és lehűtése $d\vartheta$

$$M\sigma\, d\vartheta = dQ - \frac{1}{k}dW$$

Tehát a test által kiadott hő:

$$dQ = M\sigma\, d\vartheta + \frac{1}{k}dW$$

ha az időben végbemenő jelenséget tekintjük, akkor a dt alatt átadott hő

$$dQ = M\sigma\frac{d\vartheta}{dt}dt + \frac{1}{k}\frac{dW}{dt}dt$$

$\frac{d\vartheta}{dt}$ = a lehűlés sebessége

$$dk = M\sigma \frac{d\vartheta}{dt}\,dt + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}\,dt$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{dk}{dt} = M\sigma\frac{d\vartheta}{dt}\,dt + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\cancel{\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dk}{dt} - \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial t}}{M\sigma + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial \vartheta}}}$$

tehát

~~dk~~ $$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dk}{dt} - \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{dt}}{M\sigma} \quad \ldots\ 1)$$

ha $\cancel{\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}}$ akkor $\quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$ tehát

$\frac{d\vartheta}{dt} =$ dU

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dk}{dt} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial U}{dr}\frac{\partial r}{\partial t}}{M\sigma + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{d\vartheta}}$$

ha r csupán lehűlés folytán változik akkor

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{\partial \vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta} \quad \text{tehát}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dk}{dt} \cancel{- \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}}}{M\sigma + \frac{1}{\kappa}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{d\vartheta}} \qquad 2).$$

$f = \frac{67097}{10^{12}}$ $k = 4165$

Mechanikai alapelvek XIV. (távolba hatás)

Összehúzódó homogén gömb kihülési sebessége: lásd XIII.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{k}\frac{dU}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}}{M\sigma} \quad \ldots\ldots \ 1)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\frac{dQ}{dt}}{M\sigma + \frac{1}{k}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{d\vartheta}} \quad \ldots\ldots \ 2)$$

$\frac{d\vartheta}{dt}$ = a kihülési sebesség 1) képlet adja ha az összehúzódás gyorsasága $= \frac{dr}{dt}$, és összehúzódás számítni abból.

2) képlet adja ha az összehúzódás csupán a kihülés folytán történik.

$$U = \frac{3}{5} f \cdot \frac{M^2}{r}$$

r = a gömb sugara.

A nap tömege = $3'60000 . 509180^{20}$ Kilogramm.

A nap sugara = 714750 Kilometer

$f \quad = \frac{67097}{10^{12}}$ ~~Kilogr. méter. sec.~~ ~~Kilogr.~~

$k \quad = 4165$ ~~Kilogr. méter sec.~~ $\frac{\text{Kilogr. méter. méter}}{\text{sec. sec.}}$

A nap látszólagos sugara egy és <u>16'nyi</u>

A napra nézve $-\frac{dQ}{dt}$ = A nap egy felületét fedő 1 méter vastag vízréteg hőmérsékletét 1 perc alatt 800°-al emelné.

lásd Secchi . 582

A fajhő legyen $\sigma = 1$

Vízre nézve $\frac{dr}{d\vartheta}$ = legyen $\frac{1}{1000}$

Lehet hogy ez 2000 éven át a látszólagos átmérő

0,'' 003-al fogyott volna.

A forgási sebesség növekedése.

A felületek elve szerint

~~Forgatási nyomaték~~ . $\int dm \cdot \varrho^2 \frac{d\omega}{dt}$

$$dm = \varrho^2 d\varrho \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\frac{d\omega}{dt}\int \sigma\varrho^2 d\varrho \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \cdot \varrho^2 \sin^2\varphi = \frac{d\omega}{dt} 2\pi\sigma \int_{\varrho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \varrho^4 d\varrho \sin^3\varphi \, d\varphi = C.$$

$$\int \sin^3\varphi \, d\varphi = -\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3} + \frac{2}{3}\int d\varphi \sin\varphi = -\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3} \underline{-\frac{2}{3}\cos\varphi}$$

$$C = \frac{d\omega}{dt}\frac{4}{3} \cdot 2\pi\sigma \int_0^R \varrho^4 d\varrho = \frac{d\omega}{dt}\frac{8}{15}\pi\sigma R^5 = \underline{\frac{d\omega}{dt}\frac{2}{5} M . R^2}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\frac{d\omega'}{dt}} = \frac{R'^2}{R^2}$$

$$\int \sin^m\varphi \, d\varphi = -\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int d\varphi \sin^{m-2}\varphi$$

Két golyó vonzása

A és B. A olyan mintha

tömegeik ő... összpontosítva volnának.

$$\text{erő} = f\frac{M\mu'}{R^2}$$

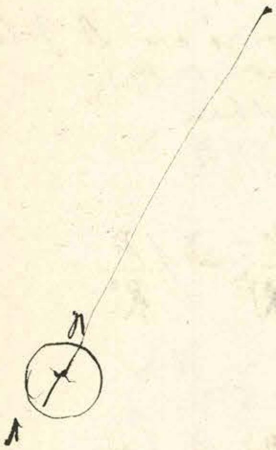
a potenciál

$$f\cdot\frac{M\mu'}{R}.$$

$$f\frac{M\mu}{l^2}$$ a forgatónyomaték ...

$$f\frac{M\mu}{(l+R)^2}\ \text{A-ban és}\ f\frac{M\mu}{(l-R)^2}\ \text{B-ben}$$

Közelítőleg



$$f\frac{M\mu}{l^2} \dots f\frac{M\mu}{l} \quad f M\mu\,(l^{-2} \mp 2 l^{-3} \dots)$$

$$f\frac{M\mu}{l^2} - 2f\frac{M\mu}{l^2}\cdot\frac{\rho}{l} \quad \dots$$

A-ban

$$\cancel{\frac{d^2x}{dt^2} = g - f\frac{M\mu}{l^2} + 2f\frac{M\mu}{l^2}\frac{\rho}{l}}\ \ \text{~~A-ban~~}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} =$$

~~$l+\rho+x$~~ $\quad l+\rho-x = r$

$$L = l+\rho-x \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2L}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} = f\cdot\frac{M\mu}{l^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2L}{dt^2} = f\frac{M\mu}{l^2} - f\frac{M}{l^2}\frac{\rho}{l} +$$

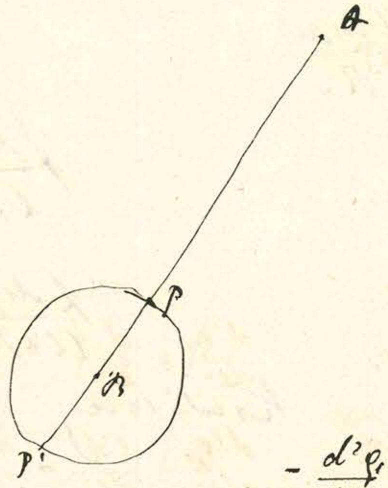
Dagály és apály.

Két golyó által egymásra kifejtett erő.

$$\cancel{f\frac{M\mu}{R^2}} \qquad f\frac{M\mu}{l^2}$$

két pont.

Egy golyó



$AB = l$

$BP = R$

A vonzó erő A felé

P pontban.

$$-\frac{d^2\varrho_1}{dt^2} = f\frac{M}{(l-R)^2} - f\frac{\mu}{R^2}$$

P' pontban

$$-\frac{d^2\varrho_2}{dt^2} = f\frac{M}{(l+R)^2} - f\frac{\mu}{R^2}$$

továbbá B pontra.

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = f\frac{M}{l^2}$$

$$\varrho_1 = l - R - x$$

$$\frac{d^2\varrho_1}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$\underline{\frac{d^2 x_1}{dt^2} = f\frac{M}{l^2} - f\frac{M}{(l-R)^2} + g}$$

$$\rho_2 = l + R - x$$

$$\frac{d^2\rho_2}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$\frac{d^2\rho_1}{dt^2} = g - f\frac{M}{(l-R)^2}$$

$$\frac{d^2\rho_2}{dt^2} = -g - f\frac{M}{(l+R)^2}$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -f\frac{M}{l^2}$$

$$\cancel{\rho_1 = l - R - x}$$

$$\rho_1 = l - R + x_1 \qquad \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$\rho_2 = l + R - x_2 \qquad \frac{d^2\rho_2}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g - f\frac{M}{(l-R)^2} + f\frac{M}{l^2}$$

$$f\frac{M}{(l-R)^2} = f\frac{M}{l^2} + 2f\frac{M}{l^2}\cdot\frac{R}{l}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -f\frac{M}{l^2} + g + f\frac{M}{(l+R)^2}$$

$$f\frac{M}{(l+R)^2} = f\frac{M}{l^2} - 2f\frac{M}{l^2}\cdot\frac{R}{l}$$

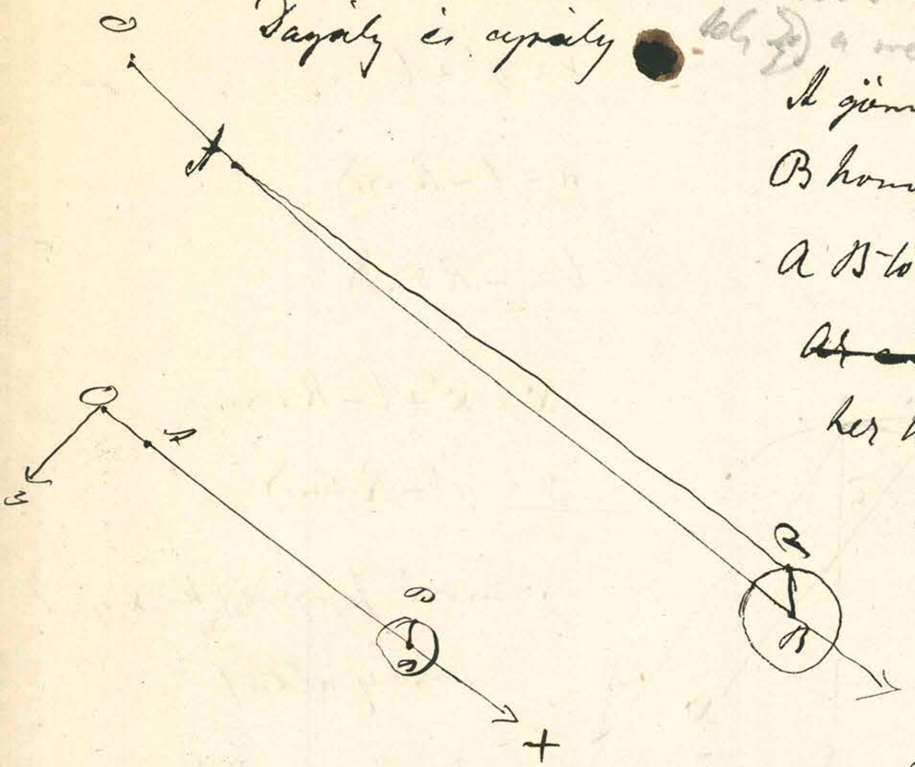
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g - 2f\frac{M}{l^2}\cdot\frac{R}{l}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g - 2f\frac{M}{l^2}\cdot\frac{R}{l}$$

Mechanikai alapelvek XV.

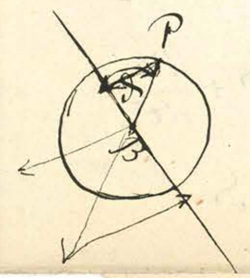
részben hibás képletek a végképletek (5) a mellékletlapon

Dagály és apály



A gömb $\underline{m}$ tömeggel vonzza B homogen gömböt. A B tömege μ sugara R és ~~A gö~~ utóbbi kicsiny $AB = l$ hez képest úgy hogy AP párhuzamosnak tekintessék AB-vel. és $\frac{R}{l}$ magasabb hatványai elhanyagolhatók legyenek. Keressük az erőt a B gömb különböző pontjaiban, viszonyítva egy $\xi\ \eta$ tengelyrendszerre, melynek kezdőpontja P a B vel együtt mozog és ξ tengelye PB-be esik.

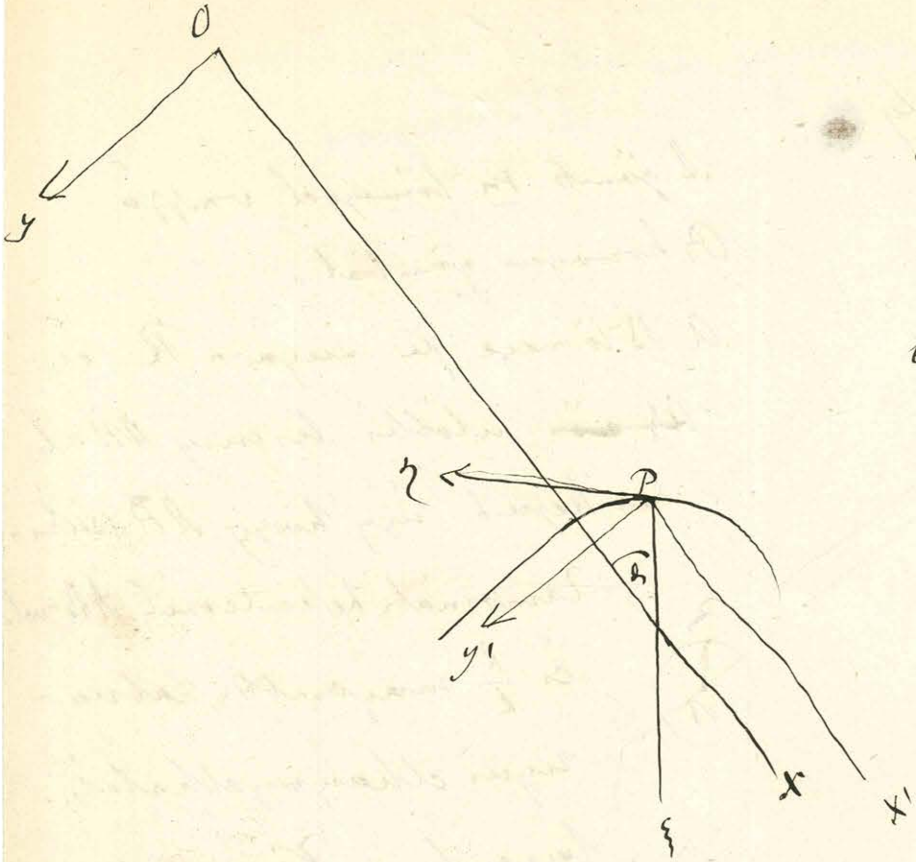
~~A gö~~ A gyorsulási összetevő egy OXY tengelyrendszerre vonatkoztatva, a hol O nyugszik a térben



$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - f\frac{m}{(l-R\cos\vartheta)^2}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f\frac{\mu}{R^2}\sin\vartheta\end{aligned}\right\}\ 1)$$

§ 5

Alakítsuk át az összenderőket.



$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

$$a = l - R\cos\vartheta$$

$$b = -R\sin\vartheta$$

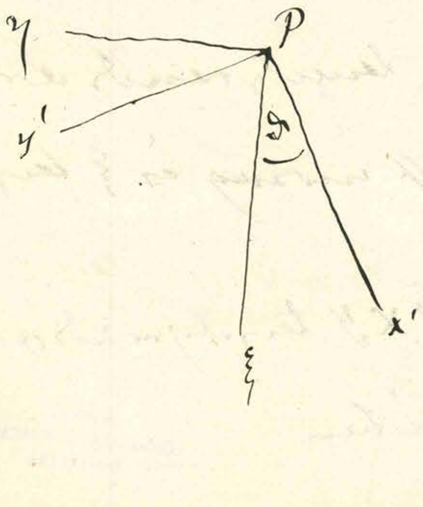
$$x = x' + l - R\cos\vartheta$$

$$y = y' - R\sin\vartheta$$

most fejezzük ki $x'y'$et ξ és η által

$$x' = \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta$$

$$y' = \eta\cos\vartheta + \xi\sin\vartheta$$



E szerint:

$$x = \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta + l - R\cos\vartheta$$

$$y = \eta\cos\vartheta + \xi\sin\vartheta - R\sin\vartheta$$

Már most

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\vartheta + \frac{d^2l}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\vartheta$$

Vegyük tekintetbe hogy

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -f\frac{m}{l^2}$$ akkor lesz : 1 nek tekintetbe vételével

$$\cancel{f\frac{\mu}{R^2}}$$

$$f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - f\frac{m}{(l-R\cos\vartheta)^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\vartheta - f\frac{m}{l^2} \qquad 1)$$

$$f\frac{\mu}{R^2}\sin\vartheta = \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Tegyük közelítőleg

$$f\frac{m}{(l-R\cos\vartheta)^2} = \cancel{f\frac{m}{(l-R\cos\vartheta)^2} + 2f\frac{m}{l^2}\cdot\frac{l-R\cos\vartheta}{l}} = f\frac{m}{(l-R\cos\vartheta)^2} + 2f\frac{m}{l^2}\cdot\frac{R\cos\vartheta}{l}$$

és tegyük $f\frac{\mu}{R^2} = g$ akkor lesz.

$$g\cos\vartheta - 2f\frac{m}{l^2}\frac{R\cos\vartheta}{l} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\vartheta \quad \ldots \quad 1)$$

$$g\sin\vartheta = \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Szorozzuk 1) $\cos\vartheta$-val 2.it $\sin\vartheta$-val s adjuk össze, lesz:

$$g - 2f\frac{m}{l^2}\frac{R}{l}\cos^2\vartheta = \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Szorozzuk 1st $\sin\vartheta$-val 2őt $\cos\vartheta$-val s adjuk össze lesz:

$$2f\frac{m}{l^2}\frac{R}{l}\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{d^2\eta}{dt^2}$$

Mellék lap 1

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - f\frac{ml}{\varrho^3} + f\frac{mr\cos\vartheta}{\varrho^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\frac{\mu}{R^2}\sin\vartheta + f\frac{mr\sin\vartheta}{\varrho^3}$$

1 §

$$\varrho^2 = l^2 - 2rl\cos\vartheta + r^2$$

$$\frac{1}{\varrho^3} = (\varrho^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{l^3}\left(1 - \frac{2r}{l}\cos\vartheta + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{l^3}\left\{1 + 3\frac{r}{l}\cos\vartheta - \frac{3}{2}\frac{r^2}{l^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{l^3} + \frac{3r\cos\vartheta}{l^4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - f\frac{m}{l^2} - \frac{3fmr\cos\vartheta}{l^3} + \frac{fmr\cos\vartheta}{l^3} = f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - f\frac{m}{l^2} - \frac{2fmr\cos\vartheta}{l^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\frac{\mu}{R^2}\sin\vartheta + \frac{fmr\sin\vartheta}{l^3}$$

$$f\frac{\mu}{R^2}\cos\vartheta - \frac{2fmr\cos\vartheta}{l^3} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\vartheta \qquad 1)\ \cos\vartheta \quad \Big|\ -\sin\vartheta$$

$$f\frac{\mu}{R^2}\sin\vartheta + \frac{fmr\sin\vartheta}{l^3} = \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\vartheta \qquad 2)\ \sin\vartheta \quad \Big|\ \cos\vartheta$$

~~[illegible]~~ cos

3:)

$$g - \frac{2fmr}{l^3}(2\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad \dots \quad 1)$$

$$\frac{3fmr\cos\vartheta}{l^3} = \frac{d^2\eta}{dt^2}$$

$\sin\vartheta$

ξ ben

φ ben

$$f\frac{\mu}{R^2} - 4\frac{fmR}{l^3}$$

$$\frac{f\mu}{R^2} + \frac{2fmR}{l^3}$$

Mechanikai alapelvek XVI.

Capillaritás elmélete.

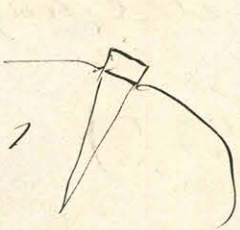
Gauss felelete.

Ha két test k és l egy felületben érintkezik akkor olyerők működnek, melyeknek potentiálja az érintkezési felület nagyságával arányos. Az arányossági coeff. A_{kl} a két testnek állandója.

Legyen 1 test mely 2 által környeztetik. Osszuk felületét felületi elemekre végtelen közel fő görbületi vonalak által.

A felületi elem $ds = dl'dl''$

Toljuk ki ez elemet 1ből akkor



$$dl'_1 = (r'+n)\frac{dl'}{r'} = dl'\left(1+\frac{n}{r'}\right)$$

n kifelé positivnak véve

$$dl''_1 = dl''\left(1+\frac{n}{r''}\right)$$

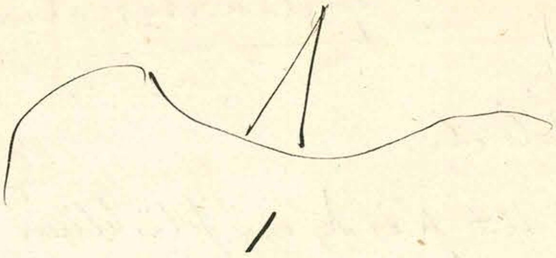
tehát a felület nagyobbodása $= ds\, n\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$

Ha a felület konvex volna

akkor

~~$dl'_1 - dl'($~~

$$dl'_1 = (r'-n)\frac{dl'}{r'} = dl'\left(1-\frac{n}{r'}\right)$$



és így

a felület nagyobbodása:

$$= -ds\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

vagy ha r' és r'' az lbe befelé pozitív kifelé negatívaknak tekintetnek, általában:

a felület nagyobbodása kitolásnál n-el

$$\int ds\, n\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

betolásnál n-el e nagyobbodás

$$= -\int ds\, n\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

Az r előjelének ilyetén megállapításánál

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)$$

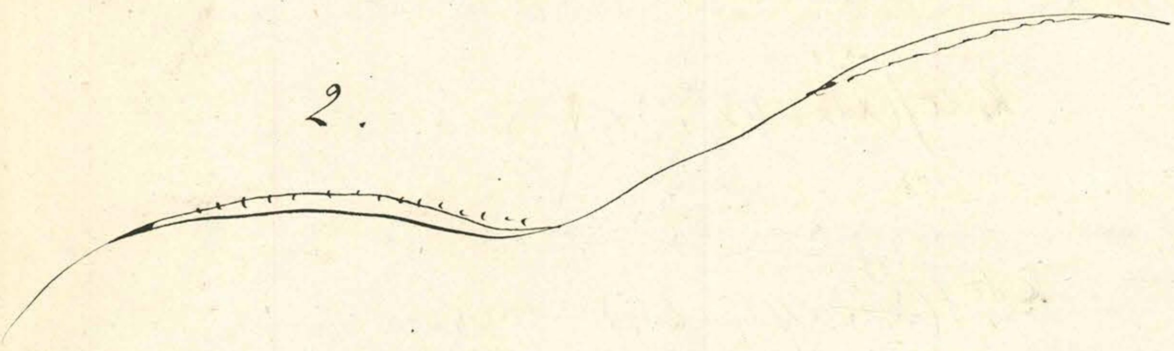
a hol α β γ azon szögletek cosinusai melyeket a 1 be befelé húzott Normális az X Y Z tengelyekkel képez, és pedig

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \qquad \beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\ }} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\ }}$$

A hol a gyökjel akkor positiv ha γ positiv.

Legyen most 2 test 1 és 2 testek határ felülete
k_1 1 sűrűsége k_2 kettő sűrűsége

2.



1

töltsük ki 1et a pontozott vonalig itt munkát végzünk, mely

$$A_{12}\int ds\, n\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

A folyadék összenyomhatatlan tehát akkor be is kell sülyeszteni másutt például itt lesz a vesztett munka

$$-A_{12}\int d\sigma\, \nu\left(\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right)$$

Választhatjuk úgy hogy

$\mathfrak{K}$ $ds\,n = d\sigma\,\nu$ akkor $= d\tau$

hogy a jelölt változtatása körben végzett munka

$$A_{12}\int d\tau\left\{\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)-\left(\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right)\right.$$

E körben a külső erők irányában valaminek gyorsulási összetevői $X\ Y\ Z$ minden egyes elem eltolása folytán munka végeztetett

$$K_1 d\tau\int_{\xi\eta\zeta}^{xyz}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

és

$$K_2\, d\tau\int_{xyz}^{\xi\eta\zeta}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) \text{ vagyis}$$

összesen

$$d\tau(K_1-K_2)\int_{\xi\eta\zeta}^{xyz}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

és összesen

$$\int d\tau(K-K_2)\int_{\xi\eta\zeta}^{xyz}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

A virtuális munkák elvének értelmében

$$\int d\tau \left[A_{12}\left\{\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)-\left(\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right)\right\} + (\kappa_1-\kappa_2)\int_{\xi\eta\zeta}^{xyz}\left(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right)\right] = 0$$

Ebből.

Első tétel:

$$A_{12}\left\{\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)-\left(\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right)\right\} + (\kappa_1-\kappa_2)\int_{\xi\eta\zeta}^{xyz}\left(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right) = 0$$

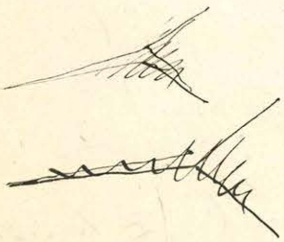
r' r'' ϱ' ϱ'' akkor positivak ha 1 test felülete domború.

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)$$

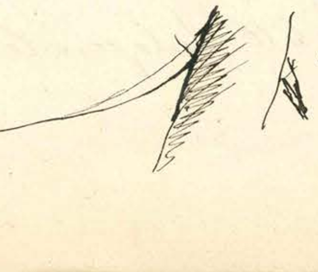
α β γ az 1 be befelé húzott normalis~~ok~~ és az x y z által vezett ~~teng~~ szögletek cosinusai; és pedig

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{}} \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{}}$$

a hol a gyök + ha γ positiv, negativ ha γ negativ.



Három test érintkezési vonala, mely között az egyik szilárd és nincsen olt éle



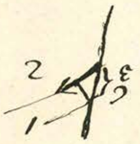
~~A végzett munka ezupán~~

A végzett munka a virtuális

A holódásnál két részből áll, az egyik = 0 az első tétel értelmében, a másik a külső erők irányában vegyett és az érintkezési vonal mentében vegyett felületi munkák összege.

A külső erők és irányában vegyett summa $= 0$

A fe[illegible]let nagyobbodásnál az érintkezési vonal mentében;



Legyen az érintkezési vonaltól a felületi elembe befelé húzott ~~irányú~~ normális ~~n_1~~ akk $n_1(2)$

$$(n_{12}\, n_{13}) = \varphi_{123} = \varphi_{123}$$

$$\int\!\!\int \left(\varepsilon\, dl\, A_{13} - \varepsilon\, dl\, A_{23} + \varepsilon \cos\varphi\, A_{12} - \right) = 0$$

ε tetszőleges tehát.

$$\cos\varphi_{123} = \frac{A_{23} - A_{13}}{A_{12}} \quad \ldots \quad \text{II}$$ **Második tétel**

φ = az érintkezési szöglet állandó

Részletezés.

Súlytalan folyadékra: az első tétel:

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = C \qquad C \text{ állandó}$$

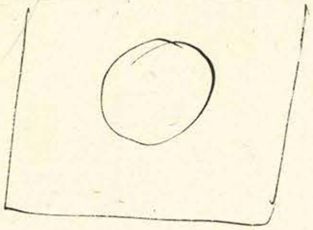
Minimál felület állandó térfogat mellett.

Csupán nehézségi erőnek alávetett folyadékoknál, z tengelyt merőlegesen lefelé véve:

$$A_{12}\left\{\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)-\left(\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right)\right\}+(k_1-k_2)g(z-\zeta)=0$$

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}=-\frac{k_1-k_2}{A_{12}}gz+\left(\frac{k_1-k_2}{A_{12}}g\zeta+\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}\right) \quad \dots \; 2)$$

Ha 1 és 2 folyadékok akkor A_{12} nek negatívnak kell lenni, különben az egyensúly csak labil lehetne. Egy 1 golyó 2 ben súlytalan folyadéknál így nem. golyó lesz, ha A_{12} positiv volna golyó nem lehetne.



van M.

$-\frac{k_1-k_2}{A_{12}}g=\frac{2}{a^2}$ hika $-\frac{k_1-k_2}{A_{12}}g=\frac{a^2}{2}$ akkor a 2) egyenlet.

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}=\frac{a^2}{2}z+C \qquad z=\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\frac{a^2}{2}$$

a hol C értéke 2) egyenletből

$$C=-\frac{a^2}{2}\zeta+\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}$$

Alkalmas választása által az xy síknak

$$C=0$$

ez a sík a nívósík.

Hengerfelület.

$$z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)$$

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

forgási felület a z tengely a forgási tengely

$$u = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{u}\frac{dz}{du}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{u}\frac{dz}{du}$$

$$z =$$

Mechanikai alapelvek XVIII.

Capillaritas.

Forgási felületek melyeknek tengelye z

$$z = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{u} \frac{d}{du} \frac{u \frac{dr}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}} = \cos\vartheta$$

$$\frac{\frac{dr}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}} = \sin\vartheta$$

$$\frac{dr}{du} = tg\,\vartheta$$

$$z = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{u} \frac{d}{du}\left(u \sin\vartheta\right) \dots\dots 1)$$

Kirchhoff. 152. lap

Ha u végtelen kicsiny akkor z végtelen nagy

egyenlet helyett

$$z_0 u^2 = a^2 u \sin\vartheta + C$$

~~ha $\vartheta = 0$~~ ha $\overset{\vartheta}{u} = 0$ $\overset{\vartheta = 0}{\cancel{z=0}}$ tehát

$$C = 0 \quad \text{vagyis} \quad z_0 = \frac{a^2}{u}$$

Felemelt vagy lenyomott folyadék

$$z u\,du = \frac{a^2}{2} d(u \sin\vartheta)$$

$$\frac{a^2}{2} u \sin\vartheta = \int_0^r z u\,du$$

$$2\pi \int u\,du\,z = V$$

~~Vonn~~ $\int = \frac{V}{2\pi}$

$$a^2 u \sin\vartheta = \frac{V}{\pi}$$

$$V = a^2 u \pi \sin\vartheta$$

$$V = a^2 r \pi \sin\vartheta$$

Merőlegesen álló cső 

$\sin\vartheta$ nyatív

Az első megközelítésnél,

$$du = \frac{a^2}{z_0} \cos\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{a^2}{z_0} \cos\vartheta$$

$$\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{d\vartheta} = \frac{a^2}{z_0} \sin\vartheta \qquad dz = \frac{a^2}{z_0} \sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$z - z_0 = -\frac{a^2}{2}\cos\vartheta + \frac{a^2}{2}$$

$$u = \frac{a^2}{z_0}\sin\vartheta$$

$$z - \left(z_0 + \frac{a^2}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}\cos\vartheta$$

$$\xi = -\frac{a^2}{2}\cos\vartheta$$

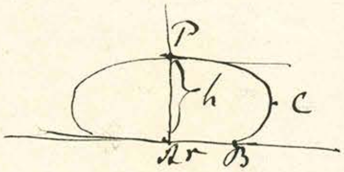
$$u^2 + \xi^2 = \left(\frac{a^2}{z_0}\right)^2$$

tehát gömbfelületek melyeknek sugara $= \dfrac{a^2}{z_0}$

és melyek középpontja

$$\frac{a^2}{z_0} = \pm R$$

egy csepp.

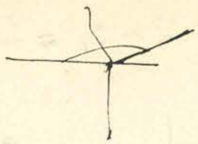


$$\xi = z - z_0$$

$$z_0 u\,du + \xi u\,du = \frac{a^2}{2}\, d(u \sin\vartheta)$$

$$V = h\pi r^2 + \int_{u=r}^{u=0} \xi\, 2\pi u\,du = h\pi r^2 + 2\pi \int_{u=r}^{u=0} \xi u\,du$$

$$z_0 u\,du + \xi u\,du = \frac{a^2}{2}\, d(u \sin\delta)$$



$$-z_0 \frac{r^2}{2} + \int_r^0 \xi u\,du = -\frac{a^2}{2} r \sin\delta$$

$$\int_r^0 \xi u\,du = \frac{V}{2\pi} - \frac{hr^2}{2}$$

$$-z_0 r^2 + \frac{V}{\pi} - hr^2 = -a^2 r \sin\delta$$

$\frac{a^2}{\cancel{z}}$ $\quad \frac{a^2}{R} = z$

z_0

$$-a^2 \frac{r^2}{R} + \frac{V}{\pi} - hr^2 = -a^2 r \sin\delta$$

$$a^2\left(r \sin\delta - \frac{r^2}{R}\right) = hr^2 - \frac{V}{\pi}$$

$$a^2 = \frac{hr^2 - \frac{V}{\pi}}{r \sin\delta - \frac{r^2}{R}}$$

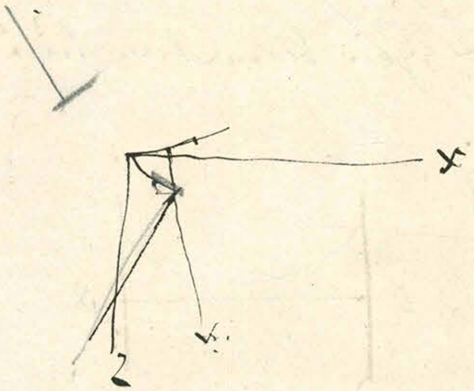
Mechanikai alapelvek. XIX.

Capillaris hengerfelületre nézve

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

a henger tengelye y tengely.

itt is tegyük



$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \cos\vartheta$$

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{tg}\,\vartheta$$

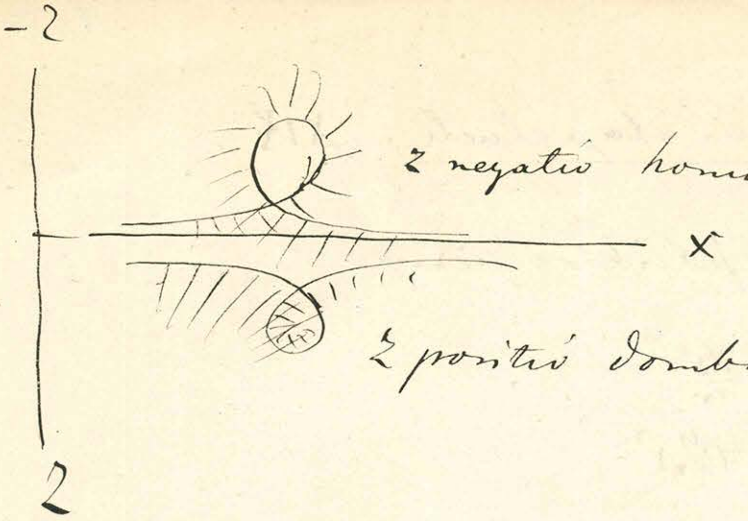
$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \sin\vartheta$$

ϑ a z tengelytől azon irányban positiv, melyben x től z hez $\frac{\pi}{2}$ íven át jutunk.

E szerint

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{d}{dx}\sin\vartheta \quad \ldots \quad 1)$$

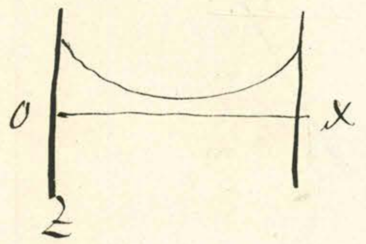
~~[illegible]~~ Vizsgáljuk meg mi történik, ha ϑ növekszik, akkor:



z negatív homorú felület.

z pozitív domború felület.

Legyen bemártva két párhuzamos függőleges sík lemez.



akkor a közepes

$$\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{r} = z$$

ott azután

$$\frac{d}{dx}\sin\vartheta = \frac{2z}{a^2} = \frac{1}{r}$$

r mindenesetre nagyobb mint a lemezek fél távola

ha ezek végtelen távol vannak egymástól akkor

$$\frac{d}{dx}\sin\vartheta = 0 \quad \text{és} \quad z = 0$$

tehát sík vízszintes felületünk van.

már most tudva ezt . és téve 1) ben

$$dz = \operatorname{tg}\vartheta \, dx$$

$$z\,dz = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\vartheta \, d.\sin\vartheta$$

$$z\,dz = \frac{a^2}{2}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cdot\cos\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a^2}{2}\cos\vartheta + C$$

ha $\vartheta = 0$ $\quad z = 0$ $\quad C = +\frac{a^2}{2}$

$$z^2 = a^2(1-\cos\vartheta)$$

$$z = \pm a\sqrt{1-\cos\vartheta} \quad \ldots \quad 2)$$

a hol az felső ~~alsó~~ jel használandó ha a folyadék felület domború, az alsó jel ha a folyadék felület homorú.

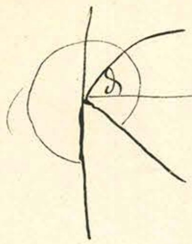
~~ha $\vartheta = 0$ a folyadék~~

Ha $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a folyadék nedvesít akkor . z negatív

$$z = -a$$

a = egy hossz. vízre nézve 3,8

Higanynál



$$~~\vartheta~~$$

$$2\pi - \vartheta + \frac{\pi}{2} = \omega$$

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta = \omega$$

$$+\cos\vartheta = \sin\omega$$

itt azután.

$$\underline{\underline{z = \mp a\sqrt{1-\sin\omega}}}$$ ω az emelkedési szög eccola.

$$a = 2,6.$$

A fentebbiekből és pedig a 2-ből, felhasználva

$\cos\vartheta$ értékét lesz:

$$z^2 - a^2 = -\frac{a^2}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$(a^2-z^2)^2\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) = a^4$$

$$+(a^2-z^2)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = a^4-(a^2-z^2)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{a^2-z^2}$$

Az számtrapézkörében ha a felület homorú $\frac{dz}{dx}$ ~~negatív~~ pozitív e szerint ott z negatív levén a $-$ jel.

Ha a felület domború akkor z positiv

és $\frac{dz}{dx}$ negativ tehát használandó a − jel úgy hogy

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{a^2-z^2}$$

integráljunk

$$-dx = \frac{dz}{z}\cdot\frac{a^2-z^2}{\sqrt{2a^2-z^2}} \qquad \frac{a^2-z^2}{\sqrt{2a^2-z^2}} = \sqrt{2a^2-z^2} - \frac{a^2}{\sqrt{2a^2-z^2}}$$

$$-x = \int\frac{dz}{z}\sqrt{2a^2-z^2} - a^2\int\frac{dz}{z\sqrt{2a^2-z^2}} + C$$

$$2a^2 - z^2 = u^2$$

$$-z\,dz = u\,du$$

$$-z^2 = u^2 - 2a^2$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{u\,du}{u^2-2a^2}$$

$$\int\frac{dz}{z}\sqrt{2a^2-z^2} = \int\frac{u^2du}{u^2-2a^2} \qquad \int\frac{dz}{z\sqrt{2a^2-z^2}} = \int\frac{du}{u^2-2a^2}$$

Schlömilch I, 306

$$\cancel{\int\frac{du}{u^2-2a^2}} \qquad \int\frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$$ a hol a és b positivak

$$\int\frac{du}{u^2-2a^2} = -\int\frac{du}{2a^2-u} = \frac{-1}{2\sqrt{2}a}\log\frac{a\sqrt{2}+u}{a\sqrt{2}-u} \qquad \int\frac{dz}{z\sqrt{2a^2-z^2}} = -\frac{1}{a2\sqrt{2}}\log\frac{a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-z^2}}{a\sqrt{2}-\sqrt{2a^2-z^2}}$$

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{4a^2-z^2}} = -\frac{1}{a2\sqrt{2}}\log\frac{(a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-z^2})^2}{a^2 2-2a^2+z^2} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2a^2-z^2}+a\sqrt{2}}{z}$$

$\cancel{\int \frac{dz}{}}$

$$\int \frac{dz}{z}\sqrt{2a^2-z^2} = \int \frac{u^2\,du}{u^2-2a^2} = u + 2a^2\int\frac{du}{u^2-2a^2}$$

$$= \sqrt{2a^2-z^2} - a\sqrt{2}\,\log\frac{\sqrt{2a^2-z^2}+a\sqrt{2}}{z}$$

$$-x = \sqrt{2a^2-z^2} - \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2a^2-z^2}+a\sqrt{2}}{z} + C$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{2a^2-z_1^2} - \sqrt{2a^2-z_2^2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{z_1}{z_2}\,\frac{\sqrt{2a^2-z_2^2}+a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-z_1^2}+a\sqrt{2}}. \qquad \S\ \mathrm{I}$$

$\cancel{z_2 - z_1 = \pm 1}$

$$z_2 - z_1 = \pm a\left\{\sqrt{1-\cos\vartheta_2} - \sqrt{1-\cos\vartheta_1}\right\} \qquad \mathrm{II}$$

~~ebből~~

$$z^2 = a^2(1-\cos\vartheta) \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

3 ból 1 be helyettesítve:

$$\sqrt{2a^2-z^2} = \sqrt{a^2+a^2\cos\vartheta} = a\sqrt{1+\cos\vartheta}$$

így lesz.

$$x_2 - x_1 = a\sqrt{1+\cos\vartheta_1} - a\sqrt{1+\cos\vartheta_2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1-\cos\vartheta_1}}{\sqrt{1-\cos\vartheta_2}}\,\frac{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_1}+\sqrt{2}}$$

ebből

A)
$$a = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1+\cos\vartheta_1} - \sqrt{1+\cos\vartheta_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1-\cos\vartheta_1}}{\sqrt{1-\cos\vartheta_2}}\,\frac{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_1}+\sqrt{2}}}$$

így a II ből

$$\pm a = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1-\cos\delta_2} - \sqrt{1-\cos\delta_1}}$$

domború felület esetében a + homorú esetében a − jel használandó.

Bravo!